Tarefa 3 (Métodos Numéricos 1)

Nome: Davi Pereira de Oliveira Matrícula: 493463

Questão 1:
Um determinado problema físico é regido pelo sistema de equações lineares abaixo. Pede-se:
a) Resolva o sistema por Eliminação de Gauss, sem pivoteamento nenhum.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 20 & 7 & 9 & 16 \\ 7 & 30 & 8 & 38 \\ 9 & 8 & 30 & 38 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} L2 = L2 - (7/20)L1 \\ L3 = L3 - (9/20)L1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 7 & 9 & 16 \\ 0 & 551/20 & 97/20 & 162/5 \\ 0 & 97/20 & 519/20 & 154/5 \end{array}\right] \quad L3 = L3 - \frac{97}{551} L2$$

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 20 & 7 & 9 & 16 \\ 0 & 551/20 & 97/20 & 162/5 \\ 0 & 0 & 13828/551 & 13828/551 \end{array}\right|$$

$$\frac{13828}{551} x3 = \frac{13828}{551} \Rightarrow x3 = 1 \qquad (1)$$

$$\frac{551}{20} x2 + \frac{97}{20} = \frac{162}{5} \Rightarrow x2 = \frac{551}{20} \cdot \frac{20}{551} = 1 \qquad (2)$$

$$20 x1 + 7 + 9 = 16 \Rightarrow x1 = 0$$

$$x^a = (0, 1, 1)$$

b) Resolva o sistema por Eliminação de Gauss, com pivoteamento parcial.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 7 & 9 & 16 \\ 7 & 30 & 8 & 38 \\ 9 & 8 & 30 & 38 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{Pivô} = 20 \\ L2 = L2 - (7/20)L1 \\ L3 = L3 - (9/20)L1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 7 & 9 & 16 \\ 0 & 551/20 & 97/20 & 162/5 \\ 0 & 97/20 & 519/20 & 154/5 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \text{Pivô} = 551/20 \\ L3 = L3 - \frac{97}{551} \cdot L2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 20 & 7 & 9 & 16 \\ 0 & 551/20 & 97/20 & 162/5 \\ 0 & 0 & 13828/551 & 13828/551 \end{array}\right]$$

$x^* = (0, 1, 1)$ //

Questão 2:

Seja o mesmo problema físico da questão anterior, dado pelo mesmo sistema. Pede-se:

a) Resolva o sistema por Fatoração LU, sem pivoteamento nenhum.

A matriz U já temos do exercício anterior:

$$U = \begin{bmatrix} 20 & 7 & 9 \\ 0 & 551/20 & 97/20 \\ 0 & 0 & 13828/551 \end{bmatrix}$$

Observando os passos dos exercícios anteriores, temos a seguinte matriz L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/20 & 1 & 0 \\ 9/20 & 97/551 & 1 \end{bmatrix}$$

i) $Ly = b$

ii) $Ux = y$

$Ly = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7/20 & 1 & 0 \\ 9/20 & 97/551 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 38 \\ 38 \end{bmatrix}$$

$y_1 = 16$

$\frac{7}{20} y_1 + y_2 = 38 \Rightarrow \frac{112}{20} + y_2 = 38 \Rightarrow y_2 = 38 - \frac{112}{20}$

$y_2 = \frac{162}{5}$

$\frac{9}{20} \cdot 16 + \left(\frac{97}{551} \cdot \frac{162}{5}\right) + y_3 = 38 \Rightarrow y_3 = \frac{13828}{551}$

$Ux = y$

$$\begin{bmatrix} 20 & 7 & 9 \\ 0 & 551/20 & 97/20 \\ 0 & 0 & 13828/551 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 162/5 \\ 13828/551 \end{bmatrix}$$

Já resolvemos esse sistema nos exercícios anteriores.

$x^a = (0,1,1)$

b) Resolva o sistema por Fatoração LU, com pivoteamento parcial.

Como os pivôs não se alteram, ou seja, as linhas não são trocadas no processo de obtenção da matriz U, a resolução é a mesma do item a, então:

$x^a = (0,1,1)$

Questão 3:

Um outro dado importante do mesmo problema é calcular o determinante e a matriz inversa do problema, que são também muito usados em várias situações. Dito isso, pede-se então:

a) Calcule determinante da matriz A pelo método de Gauss-Jordan (use matriz diagonal).

$$\begin{bmatrix} 20 & 7 & 9 \\ 7 & 30 & 8 \\ 9 & 8 & 30 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} L_2 &= L_2 - (7/20)\,L_1 \\ L_3 &= L_3 - (9/20)\,L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 7 & 9 \\ 0 & 551/20 & 97/20 \\ 0 & 97/20 & 519/20 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} L_3 &= L_3 - (97/551)\,L_2 \\ L_1 &= L_1 - (140/551)\,L_2 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 0 & -499/20 \\ 0 & 551/20 & 97/20 \\ 0 & 0 & 13828/551 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} L_2 &= L_2 - (53447/276560)\,L_3 \\ L_1 &= L_1 + (274949/276560)\,L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 551/20 & 0 \\ 0 & 0 & 13828/551 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = \cancel{20} \cdot \frac{\cancel{551}}{\cancel{20}} \cdot \frac{13828}{\cancel{551}} = 13828$$

b) Calcule a matriz inversa de A pelo método de Gauss-Jordan (use a matriz identidade).

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 20 & 7 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 30 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 30 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \begin{aligned} L_1 &= L_1 - 1/20 \\ L_2 &= L_2 - 7L_1 \\ L_3 &= L_3 - 9L_1 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7/20 & 9/20 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & 551/20 & 97/20 & -7/20 & 1 & 0 \\ 0 & 97/20 & 519/20 & -9/20 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad L_2 = L_2 \cdot \frac{20}{551}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7/20 & 9/20 & 1/20 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 97/551 & -7/551 & 20/551 & 0 \\ 0 & 97/20 & 519/20 & -9/20 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L3 = L3 - (97/20)L2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 214/551 & 30/551 & -7/551 & 0 \\ 0 & 1 & 97/551 & -7/551 & 20/551 & 0 \\ 0 & 0 & 13828/551 & -214/551 & -97/551 & 1 \end{array}\right]$$

$L3 = L3 \cdot (551/13828)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7/20 & 9/20 & 1/20 & -7/551 & 0 \\ 0 & 1 & 97/551 & -7/551 & 20/551 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -107/6914 & -97/13828 & 551/13828 \end{array}\right]$$

$L2 = L2 - \left(\frac{97}{551}\right)L3 \qquad L1 = L1 - \left(\frac{214}{551}\right)L3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 209/3457 & -69/6914 & -107/6914 \\ 0 & 1 & 0 & -69/6914 & 519/13828 & -97/13828 \\ 0 & 0 & 1 & -107/6914 & -97/13828 & 551/13828 \end{array}\right]$$

$$\text{Inversa} = \begin{bmatrix} 209/3457 & -69/6914 & -107/6914 \\ -69/6914 & 519/13828 & -97/13828 \\ -107/6914 & -97/13828 & 551/13828 \end{bmatrix}$$

Questão 4: Em um determinado tipo de jogo, três jogadores lançam uma bola cada na direção de uma linha marcada no chão. Ganha o jogo quem ficar mais perto dessa linha, ou seja, quem acertar a bola em cima da linha. A solução do sistema abaixo dá a distância, em metros, de quanto a bola passou ou ficou distante da linha marcada. Portanto, a distância d1 é relativa ao jogador 1, a d2 ao jogador 2 e a d3 ao jogador 3. Valores positivos indicam que a bola ficou após a linha e valores negativos, se existirem, indicam que a bola ficou antes da linha. A distância real à linha, portanto, é medida pelo módulo da distância calculada. Dito isso e usando-se 3 casas decimais, precisão $\varepsilon = 5 \times 10^{-1}$ e $x^{(0)} = \{0\ 0\ 0\}^T$, pede-se:

$$\begin{cases} 10d_1 + 2d_2 + 2d_3 = 28 \\ d_1 + 10d_2 + 2d_3 = 7 \\ 2d_1 - 7d_2 - 10d_3 = -17 \end{cases}$$

a) Verifique se o critério das linhas

$\alpha_1 = \dfrac{2+2}{10} = \dfrac{4}{10} = 0,4$; $\alpha_2 = \dfrac{2+1}{10} = 0,3$

$\alpha_3 = \dfrac{|2-7|}{10} = \dfrac{5}{10} = 0,5$

Como o $\alpha_3 = 0,5 < 1$, então pelo o critério das linhas os métodos convergem.

b) Verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito e, se não, corrija o sistema para ser.

$\beta_1 = \dfrac{2+2}{10} = 0,4$

$\beta_2 = (1 \cdot 0,4 + 2)/10 = 0,24$

$\beta_3 = (2 \cdot 0,4 + 7 \cdot 0,24)/|-10|) = 0,248$

Como $\beta_1$ é o maior e $\beta_1 = 0,4 < 1$, o critério de Sassenfeld é satisfeito.

c) Diga que jogador ganhou o jogo usando o método de Gauss-Jacobi.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,2 \\ -0,1 & 0 & -0,2 \\ 0,2 & -0,7 & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 0,7 \\ 1,7 \end{bmatrix}$$

Iteração 1:

$d_1^{(1)} = 2,8$

$d_2^{(1)} = 0,7$

$d_3^{(1)} = 1,7$

$|d_1^{(1)} - d_1^{(0)}| = 2,8$

$|d_2^{(1)} - d_2^{(0)}| = 0,7$

$|d_3^{(1)} - d_3^{(0)}| = 1,7$

$MR^{(1)} = \frac{2,8}{2,8} = 1 > \varepsilon$

Iteração 2:

$d_1^{(2)} = -0,2 \cdot 0,7 - 0,2 \cdot 1,7 + 2,8 = 2,32$

$d_2^{(2)} = -0,1 \cdot 2,8 - 0,2 \cdot 1,7 + 0,7 = 0,08$

$d_3^{(2)} = 0,2 \cdot 2,8 - 0,7 \cdot 0,7 + 1,7 = 1,77$

$|d_1^{(2)} - d_1^{(1)}| = |2,32 - 2,8| = 0,48$

$|d_2^{(2)} - d_2^{(1)}| = |0,08 - 0,7| = 0,62$

$|d_3^{(2)} - d_3^{(1)}| = |1,77 - 1,7| = 0,02$

$MR^{(2)} = \frac{0,48}{2,32} = 0,207 < \varepsilon$, algoritmo para

Solução $d^* = (2,32; 0,08; 1,77)$

R => Pelo o algoritmo de Gauss-Jacobi o jogador 2 ganha.

d) Diga que jogador ganhou o jogo usando o método de Gauss-Seidel.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0,2 & -0,2 \\ -0,1 & 0 & -0,2 \\ 0,2 & -0,7 & 0 \end{bmatrix} \quad g = \begin{bmatrix} 2,8 \\ 0,7 \\ 1,7 \end{bmatrix}$$

$d_1^{(1)} = -0,2\, d_2^{(0)} - 0,2\, d_3^{(0)} + 2,8 = 2,8$

$d_2^{(1)} = -0,1 \cdot 2,8 + 0,7 = 0,42$

$d_3^{(1)} = 0,2 \cdot 2,8 - 0,7 \cdot 0,42 + 1,7 = 1,966$

$|d_1^{(1)} - d_1^{(0)}| = 2,8$
$|d_2^{(1)} - d_2^{(0)}| = 0,42$ $\Big\rangle$ $MA^{(1)} = \dfrac{2,8}{2,8} = 1 \geq \varepsilon$
$|d_3^{(1)} - d_3^{(0)}| = 1,966$

2ª Iteração:

$d_1^{(2)} = -0,2 \cdot d_2^{(1)} - 0,2\, d_3^{(1)} + 2,8$

$d_1^{(2)} = -0,2 \cdot 0,42 - 0,2 \cdot 1,966 + 2,8 = 2,323$

$d_2^{(2)} = -0,1 \cdot 2,323 - 0,2 \cdot 1,966 + 0,7 = 0,074$

$d_3^{(2)} = 0,2 \cdot 2,323 - 0,7 \cdot 0,074 + 1,7 = 2,113$

$|d_1^{(2)} - d_1^{(1)}| = |2,323 - 2,8| = 0,477$

$|d_2^{(2)} - d_2^{(1)}| = |0,074 - 0,42| = 0,346$

$|d_3^{(2)} - d_3^{(1)}| = |2,113 - 1,966| = 0,147$

$MA^{(2)} = \dfrac{0,477}{2,323} = 0,204 < \varepsilon$, algoritmo para.

Solução $d^* = (2,323 ; 0,074 ; 2,113)$

R => Pelo o algoritmo de Gauss-Seidel o jogador 2 ganha. ✓