Integração Numérica

Introdução: Originalmente, a integral tinha como função determinar a área sob uma curva no plano cartesiano. Esse tipo de operação é necessário em várias aplicações vindas da Física e Engenharia. Atualmente, operações matemáticas em áreas como Economia, Medicina e até mesmo entretenimento, exigem que se usem as técnicas desenvolvidas para as integrais.

Definições: A notação $S = \int f(x)dx$ é lida como "a integral de f(x) em x", e S representa uma função, cuja derivada resulta em f(x). Essa notação, na qual o símbolo $\int$ (integral) aparece sem limites superior e inferior, é chamada de "integral indefinida". Ao contrário da operação de derivação, nem sempre é

possível obter uma integral formalmente.
Por exemplo, a integral $S=\int e^{-x^2}dx$
não tem uma expressão formal
para a integral de $f(x)$.
A integral definida, cuja notação
é $S=\int_a^b f(x)\,dx$ que é lida como

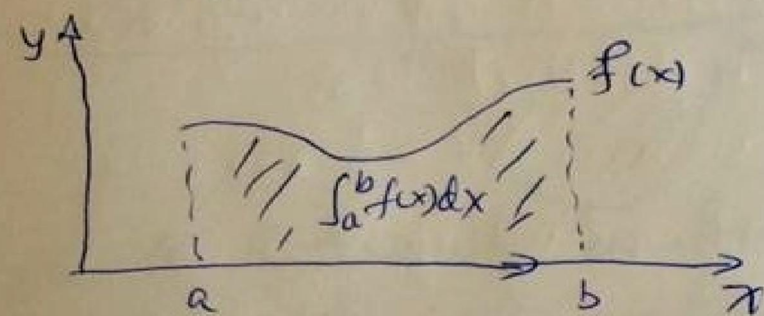

Fig1. A integral definida de $f(x)$ no intervalo entre a e b.

"a integral de $f(x)$ no intervalo a e b," tem por trás de si uma noção numérica. Essa expressão pode ser associada à área entre a curva expressa por $f(x)$ e o eixo das abscissas num plano cartesiano.

Quando $f(x)$ assume valores negativos, a integral a área é "negativa". Assim, a integral de uma senóide no intervalo de 0 a 2π é nula:

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\,dx = 0$$

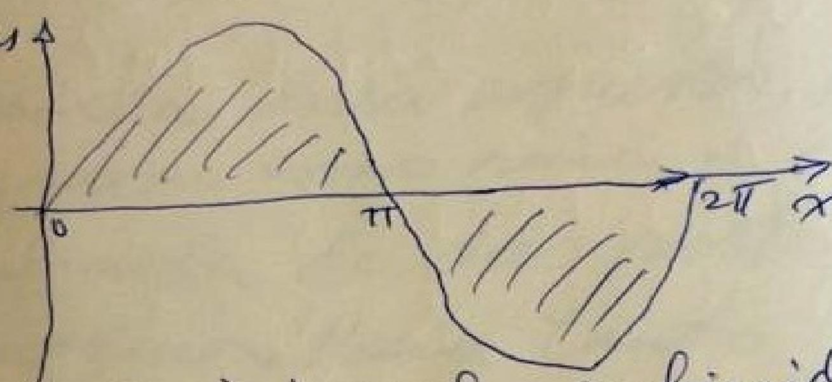

Fig 2. A integral definida de sen x no intervalo entre 0 e 2π.

Quando a integral de $f(x)$ pode ser expressa formalmente, pode-se usar: $S = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, ou seja, a integral definida de $f(x)$ em x no intervalo entre <u>a</u> e <u>b</u> é igual à diferença entre $F(b)$ e $F(a)$, onde $F(x)$

é a expressão formal da integral indefinida de $f(x)$ em x. Note que os valores de a e b recebem o nome de limite inferior da integral (a) e limite superior da integral (b).

A partir dessa expressão, pode-se expressar como seria a integral definida de dois pontos bem próximos. Para tanto basta definir $b = a + \Delta x$

E a expressão passa a ser

$$\int_a^{a+\Delta x} f(x)\,dx = F(a+\Delta x) - F(a)$$

Se Δx for muito pequeno, temos uma situação em que a área definida por $F(a)$ e $F(a+\Delta x)$ é muito próxima de um retângulo. Na verdade, no limite em que Δx tende a zero, a área procurada vale exatamente $f(x)\Delta x$. Assim,

$$\int_a^{a+\Delta x} f(x)dx = f(a)\Delta x = F(a+\Delta x) - F(a)$$

o que, comparado com a definição de uma derivada, resulta em

$$f(x) = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Deduz-se, portanto, que a função procurada, $F(x)$ é tal que sua derivada seja a função $f(x)$. Ou seja, o conhecimento de uma função possibilita calcular sua integral. Essa demonstração é chamada Teorema Fundamental do Cálculo.

Regra dos Trapézios:

De posse do Teorema Fundamental do Cálculo e sabendo que a integral de uma função equivale a uma área, pode-se imaginar um método que divide a área a ser calculada em vários elementos, todos muitos pequenos, e cuja soma resulta na área total.

Dessa forma, a integral definida entre a e b é igual à soma das áreas de pequenos intervalos indo de a até b. O cálculo da área de cada elemento é dado por:

$$\Delta S = \Delta x \, \frac{f(x) + f(x+\Delta x)}{2}$$

Se Δx for muito pequeno, pode-se usar o Valor médio entre $f(x)$ e $f(x+\Delta x)$

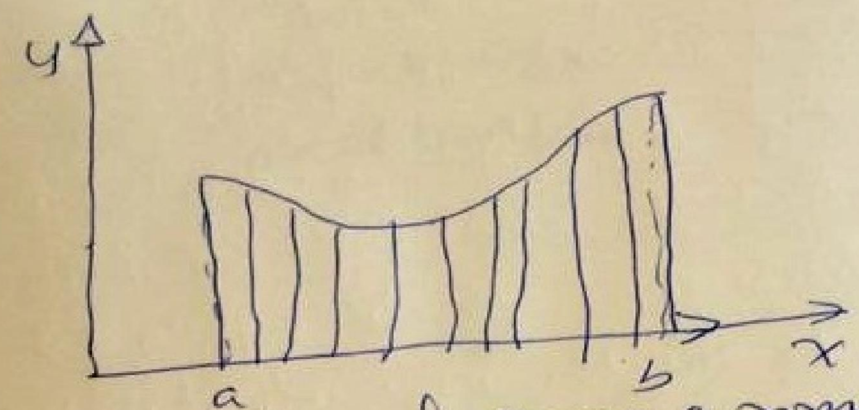

Fig 3. A integral como a soma de várias subáreas

que dá a área do trapézio definida pelos pontos x, $x+\Delta x$, $f(x)$, e $f(x+\Delta x)$. Assim, a integral pode ser expressa como uma soma dos vários ΔS, sendo dada por:

$$S=\int_a^b f(x)dx=\sum_{i=0}^{n}\Delta S_i=\sum_{i=0}^{n}\Delta x\, f\left(x_i+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

onde $a<x_i<b$ e $\Delta x=\frac{(b-a)}{n}$, sendo n o número de subáreas nas quais o intervalo $[a,b]$ foi dividido. Portanto, a fórmula geral para x_i é:

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{i+1} = x_i + \Delta x \\ \Delta x = (b-a)/n \end{cases}$$

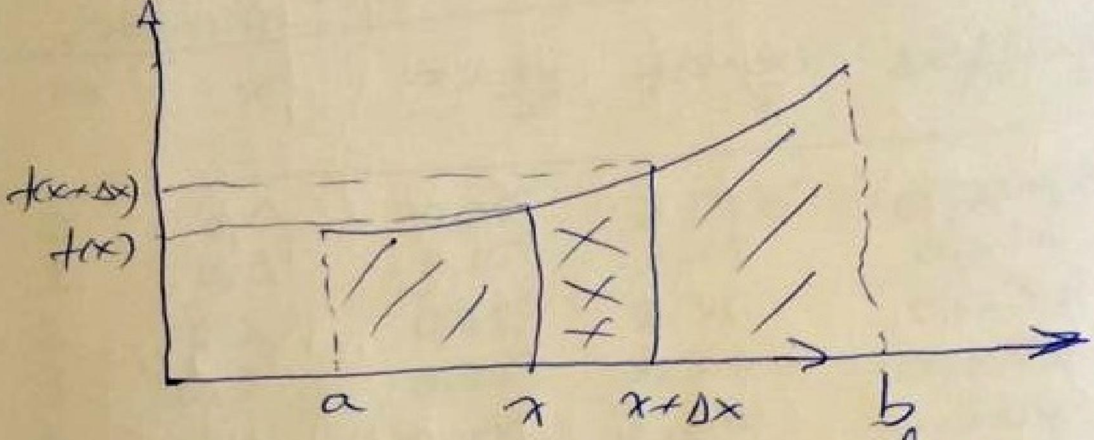

Fig 4. Análise de um elemento para o cálculo da área do trapézio.

Exemplo (1) calcular a integral definida $\int_0^2 (2+2x-x^2)\,dx$

1. Escolha de Δx, ou escolha do número de passos: Como Δx deve ser muito pequeno com relação ao intervalo $[a, b]$, uma boa escolha inicial é $n = 20$, que resulta em $\Delta x = (2-0)/20 = 0,1$

2. Cálculo das áreas: colocam-se os dados de cada elemento, na ordem: x, $x + ((\Delta x)/2)$, $f(x + \Delta x/2)$ e $\Delta x\, f(x + \Delta x/2)$, como na tabela a seguir:

n	x	$x + \frac{\Delta x}{2}$	$f(x + \frac{\Delta x}{2})$	$\Delta x\, f(x + \frac{\Delta x}{2})$
0	0,0	0,05	2,0975	0,20975
1	0,1	0,15	2,19	0,219
2	0,2	0,25	2,36	0,236
3	0,3	0,35	2,51	0,251
4	0,4	0,45	2,64	0,264
5	0,5	0,55	2,75	0,275
6	0,6	0,65	2,84	0,284
7	0,7	0,75	2,91	0,291
8	0,8	0,85	2,96	0,296
9	0,9	0,95	2,99	0,299
10	1,0	1,05	3,00	0,300
11	1,1	1,15	2,99	0,299
12	1,2	1,25	2,96	0,296
13	1,3	1,35	2,91	0,291
14	1,4	1,45	2,84	0,284
15	1,5	1,55	2,75	0,275
16	1,6	1,65	2,64	0,264
17	1,7	1,75	2,51	0,251
18	1,8	1,85	2,36	0,236
19	1,9	1,95	2,19	0,219
20	2,0			

$\Sigma = 5,339$

3. Soma das áreas: A soma da ultima coluna é o valor da integral desejada.

4. Teste: Como, neste caso, f(x) tem uma integral indefinida

$$\int (2+2x-x^2)\,dx = 2x + x^2 - \frac{x^3}{3}$$

E a integral definida pode facilmente ser calculada:

$$2x + x^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \left[\cancel{2 \cdot 2} + 2^2 - \frac{2^3}{3}\right] - \left[2 \cdot 0 + 0^2 - \frac{0^3}{3}\right] =$$

$$= 5{,}33$$

Então, o pequeno erro é devido a uma escolha de n relativamente baixo. Recalculando a tabela anterior para $n = 200$ (Δx vale 0,01), resulta em $\Sigma = 5{,}334$

Exemplo ②: calcule, com três casas decimais, a integral definida

$$\int_{0,2}^{0,4} e^{-x^2}\,dx$$

1. Escolha de Δx, ou escolha do número de passos: Vamos começar com $n=10$, o que resulta em $\Delta x = (0,4-0,2)/10$ ou $\Delta x = 0,02$
2. Cálculo das áreas: calculam-se os dados de cada elemento

n	x	$x+\frac{\Delta x}{2}$	$f(x+\frac{\Delta x}{2})$	$\Delta x\, f(x+\frac{\Delta x}{2})$
0	0,20	0,21	0,957	0,019
1	0,22	0,23	0,948	0,019
2	0,24	0,25	0,939	0,019
3	0,26	0,27	0,930	0,019
4	0,28	0,29	0,919	0,019
5	0,30	0,31	0,908	0,018
6	0,32	0,33	0,897	0,018
7	0,34	0,35	0,885	0,018
8	0,36	0,37	0,872	0,018
9	0,38	0,39	0,859	0,017
10	0,40			0,017

$\Sigma = 0,182$

8º NTI - EXERCÍOS - 27/01/2021

1) calcule a integral utilizando o método dos trapézios.

$$\int_0^3 \frac{dx}{16+x^2}$$

2) calcule a integral utilizando o método dos trapézios.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\, dx$$

3) Algumas integrais contêm pontos indefinidos. Por exemplo, a integral $\int_0^2 \frac{dx}{x^2-1}$ contém o ponto $x=1$, que anula o denominador. Entretanto, isso não impede que a integral seja calculada. Para contornar esse problema numericamente deve-se levar o cálculo com x indo de 0 até próximo de 1

e em seguinda ir de um valor
um pouco superior a 1 até 2.
utilizando o método dos
trapézios aproxime a integral.

4) Calcule a aproximação para π
a partir da integral

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\, dx$$

usando o método dos
trapézios.

#