Zeros de funções

Método de Newton-Raphson

- O método apresentado (Dicotomia) é bem simples de ser entendido e implementado, mas não é o mais eficiente, pois ele consome muitos passos para alcançar uma dada precisão.
- Existem outros métodos mais eficientes.
- O método de Newton-Raphson, é muito eficiente e economico, além de poder ser generalizado com grande facilidade.

Método de Newton-Raphson

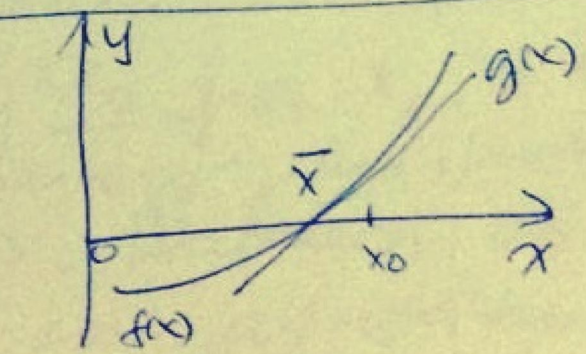
- Esse método foi desenvolvido por Isaac Newton, o criador do cálculo diferencial e integral. Mais tarde ele foi aperfeiçoado por outro pesquisador, Raphson, e a partir de então o nome dos dois criadores ficou ligado ao método.
- Como no caso da Dicotomia, o método de Newton-Raphson utiliza-se de uma repetição do mesmo procedimento até que a precisão desejada seja alcançada.

- A idéia Básica por trás do método fundamenta-se no seguinte: tomemos uma função contínua $f(x)$, cuja raiz chamaremos de $\bar{x}$

- Como $\bar{x}$ não é conhecido, iniciaremos tomando um valor que sabemos estar próximo de $\bar{x}$, que chamaremos x_0.

- O ponto determinado pelo par $(x_0, f(x_0))$ pertence à curva definida pela função. Podemos calcular a derivada da função no ponto x_0, $f'(x_0)$, sem maiores dificuldades. Como $f'(x_0)$ corresponde ao coeficiente angular da reta que é tangente à função no ponto x_0 podemos também determinar a expressão dessa reta que é

$$\boxed{g(x) = f'(x_0)x + b}$$



- como no ponto $x = x_0$ tanto $g(x)$ como $f(x)$ tem o mesmo valor, $f(x_0)$, podemos obter o valor de b:

$$\boxed{b = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)}$$

- Assim, podemos escrever a expressão completa de $g(x)$:

$$g(x) = f'(x_0)\,x + [f(x_0) - x_0 f'(x_0)]$$

- O ponto em que $g(x)$ se anula, ou seja, a raiz de $g(x)$, pode ser obtido através de:

$$\boxed{g(x_1) = 0 \Rightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

- Dessa forma, a partir do valor de x_0 pode-se obter um novo valor de x_1, que está mais próximo da raiz $\bar{x}$.

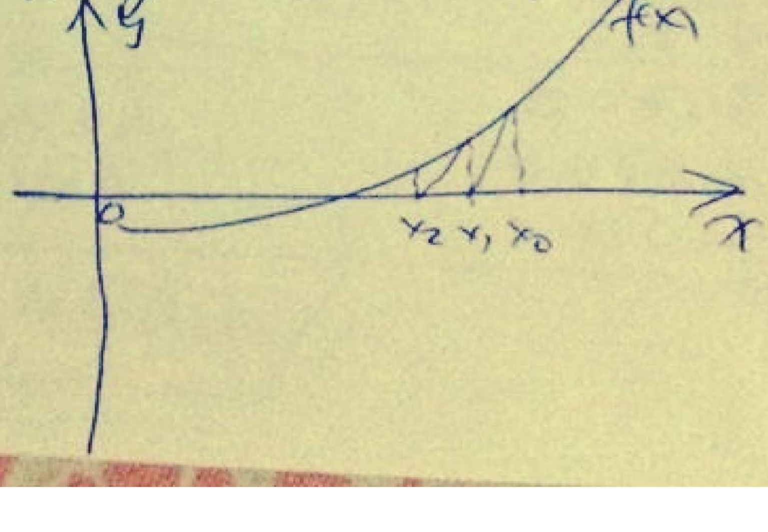
- Se aplicarmos esse processo novamente substituindo $\underline{x_0}$ por x_1, o novo valor de x_1 nos levará mais próximo de $\bar{x}$, e podemos estabelecer um método repetitivo com aproximações sucessivas, até que em limite de precisão seja alcançado. O termo genérico da sequência é obtido diretamente da expressão:

$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}}$$

Fórmula de Newton-Raphson

Resumindo: Dada uma função da qual deseja-se obter a raiz, escolhe-se um número arbitrário, x_0, que sabe-se estar próximo da raiz. A seguir determina-se x_1, a abscissa da interseção da função com o eixo x da reta tangente à curva $y=f(x)$ no ponto $(x_0, f(x_0))$ através da expressão:

$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$. Repete-se esse processo até que a precisão desejada seja alcançada.



- Exemplo: A função $f(x) = 2x - \cos x$ possui uma raiz real $\bar{x}$ isolada no intervalo $[0, \pi/4]$. Calcule o valor de $\bar{x}$ com quatro casas decimais através do método de Newton-Raphson.

Solução:

1. Cálculo da derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 2 + \operatorname{sen} x$$

2. Formúla de Newton-Raphson para o problema:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{2x_i - \cos x_i}{2 + \operatorname{sen} x_i}$$

3. Escolha de x_0:

Uma boa escolha para x_0 é o valor médio do intervalo:

$$x_0 = \pi/8$$

4. Execução das iterações

I	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{2x_i - \cos x_i}{2 + \operatorname{sen} x_i}$
0	0,3927	0,4508
1	0,4508	0,4502
2	0,4502	0,4502

$$\bar{x} \cong 0,4502 \,//$$

5

Exemplo: Sabe-se que a função estudada $f(x) = e^x + 1/2x$ possui uma raiz real no intervalo $[-0,9; -0,8]$. Calcule o valor de $\bar{x}$ com quatro decimais.

Solução:

1. Cálculo da derivada de f(x):

$$f(x) = e^x + 1/2x$$

$$f'(x) = e^x + 1/2$$

2) Fórmula de Newton-Raphson para o problema:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^x + 1/2x}{e^x + 1/2}$$

3) Escolha de x_0:

O valor médio do intervalo $[-0,9; -0,8] \Rightarrow x_0 = -0,85$.

4) Execução das iterações:

I	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{e^x + 1/2x}{e^x + 1/2}$
0	-0,8500	-0,8526
1	-0,8526	-0,8526
2	-0,8526	-0,8526

Logo $\bar{x} \cong -0,8526$

6

Exemplo: Encontre a raiz aproximada de $f(x) = 5x^4 - \text{sen}\, x$ com quatro casas decimais. Use $x_0 = 0,5$.

Solução:

1) Calculo da derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = 20x^3 - \cos x$$

2) Fórmula de Newton-Raphson para o problema:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{5x_i^4 - \text{sen}\, x_i}{20x_i^3 - \cos x_i}$$

3) Escolha de x_0:

$$x_0 = 0,5$$

4) Execução das iterações:

I	x_i	$x_{i+1} = x_i - \frac{5x_i^4 - \text{sen}\, x_i}{20x_i^3 - \cos x_i}$
0	0,500	0,6029
1	0,6029	0,5766
2	0,5766	0,5741
3	0,5741	0,5741

Logo $\bar{x} \cong 0,5741$ //

Exercícios: 2º NTI — 02/12/2020

1) Encontre a raiz quadrada de 7 com quatro algarismos significativos.

2) Encontre a raiz aproximada de $f(x) = (x-2)^4$ pelo método de Newton-Raphson, com três algarismos significativos.

3) Ache a raiz da equação $f(x) = e^x - x^2$.

4) Resolva a equação $f(x) = x \operatorname{sen} x$ no intervalo $[-3,2 \leq x \leq 3,2]$

5) Encontre:

a) $\sqrt{8}$ Dica: $f(x) = x - \sqrt{8}$

b) $\sqrt{91}$

c) $\sqrt[3]{7}$ Dica: $f(x) = x - 7^{1/3}$

d) $\sqrt[3]{200}$

P