Método iterativo de Gauss-Seidel

Introdução: Esse método é usado para a resolução de sistemas lineares por iterações sucessivas, chegando a uma aproximação da solução do sistema linear. Essa idéia é bem simples e fácil de ser implementada em linguagens de programação.

Isso é feito através do isolamento de cada uma das incógnitas a partir de cada uma das equações do sistema. Em seguida, a partir de valores inicialmente atribuídos às incógnitas, são feitas várias iterações, tendo como critério as expressões obtidas inicialmente.

Método iterativo de Gauss-Seidel

- Dado um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{(n-1)1}x_1 + a_{(n-1)2}x_2 + \cdots + a_{(n-1)n}x_n = b_{(n-1)} \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \quad + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

podem-se isolar as incógnitas, de tal forma que

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n\right] \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \cdots - a_{2n}x_n\right] \\ \vdots \\ x_{n-1} = \dfrac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left[b_{n-1} - a_{(n-1)1}x_1 - a_{(n-1)2}x_2 - \cdots - a_{(n-1)n}x_n\right] \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots - a_{(n-1)n}x_{n-1}\right] \end{cases}$$

Então, a partir de uma aproximação inicial da solução, ou seja, um conjunto de valores $p^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots x_n^0\}$, dá-se início à sequência de iterações, conforme as expressões de GAUSS-Seidel:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \dfrac{1}{a_{11}}\left[b_1 - a_{12}x_2^k - a_{13}x_3^k - \cdots - a_{1n}x_n^k\right] \\ x_2^{k+1} = \dfrac{1}{a_{22}}\left[b_2 - a_{21}x_1^{k+1} - a_{23}x_3^k - \cdots - a_{2n}x_n^k\right] \\ \vdots \\ x_{n-1}^{k+1} = \dfrac{1}{a_{(n-1)(n-1)}}\left[b_{n-1} - a_{(n-1)1}x_1^{k+1} - a_{(n-1)2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{(n-1)n}x_n^k\right] \\ x_n^{k+1} = \dfrac{1}{a_{nn}}\left[b_n - a_{n1}x_1^{k+1} - a_{n2}x_2^{k+1} - \cdots - a_{(n-1)n}x_{n-1}^{k+1}\right] \end{cases}$$

Observe que o valor x_1^{k+1}, ou seja, o valor de x_1 do próximo passo, depende apenas de valores do passo atual, $p^k = \{x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k\}$. Já o valor de x_2^{k+1} depende de $p^{k+1} = \{x_1^{k+1}, x_2^k, \ldots, x_n^k\}$; x_3^{k+1} depende de $\{x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_3^k\}$ e assim por diante. Dessa forma, pode-se ir da iteração k para a iteração $k+1$ sem maiores dificuldades.

As iterações continuam até que seja alcançada uma precisão preestabelecida. Ao final de cada iteração, é calculado o valor máximo do desvio para as incógnitas através de:

$$\Delta_{k+1} = \sqrt{(x_1^{k+1} - x_1^k)^2 + (x_2^{k+1} - x_2^k)^2 + \ldots + (x_{n-1}^{k+1} - x_{n-1}^k)^2 + (x_n^{k+1} - x_n^k)^2}$$

ou

$$\Delta_{k+1} = \max\{|x_1^{k+1} - x_1^k|, |x_2^{k+1} - x_2^k|, \ldots, |x_{n-1}^{k+1} - x_{n-1}^k|, |x_n^{k+1} - x_n^k|\}$$

$\Rightarrow$ Quando Δ_{k+1} for menor do que a precisão desejada, as iterações podem ser interrompidas, e o último valor de Δ pode ser usado como estimativa da margem de erro do resultado.

3

Exemplo: 01 - Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = -6{,}5 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

1. Reorganizam-se as linhas de forma que os maiores valores absoluto figurem na diagonal principal. Nesse caso, será necessário apenas trocar de lugar as linhas 2 e 3.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = -6{,}5 \end{cases}$$

2. Escrevem-se as equações de Gauss-Seidel para as incógnitas:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{4}\left[5 - x_2^{k} - x_3^{k}\right]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{5}\left[0 + 2x_1^{k+1} - x_3^{k}\right]$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{6}\left[-6{,}5 - 3x_1^{k+1} - x_2^{k+1}\right]$$

3. Escolhem-se os valores do ponto inicial, p^0. Por uma questão de facilidade, uma escolha trivial é um conjunto de zeros. Esta escolha pode levar a um número maior de iterações, mas é mais adequada ao nível exigido neste curso do que um critério mais sofisticado. Assim:

$$p^0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = (0, 0, 0)$$

4. Proceda com as iterações. Isso pode ser facilmente acompanhado através de uma tabela:

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	x_3^{k+1}	Δ
0	0,000	0,000	0,000	1,250	0,500	-1,792	2,241
1	1,250	0,500	-1,792	1,573	0,988	-2,034	0,633
2	1,573	0,988	-2,034	1,512	1,012	-2,008	0,071
3	1,512	1,012	-2,008	1,499	1,001	-2,000	0,018
4	1,499	1,001	-2,000	1,500	1,000	-2,000	0,001
5	1,500	1,000	-2,000	1,500	1,000	-2,000	0,000

Como resultado, obtém-se

$$\{x_1, x_2, x_3\} = \{1,5; 1,0; -2,0\}$$

Nesse ponto é interessante observar qual seria o andamento do processo (e o resultado), caso fosse escolhido um outro conjunto de valores para p^0. Uma boa escolha (ainda que também trivial) seria

$$p^0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = \{b_1, b_2, b_3\} =$$
$$= \{5; 0; -6{,}5\}$$

Observe o comportamento das iterações:

K	x_1^K	x_2^K	x_3^K	x_1^{K+1}	x_2^{K+1}	x_3^{K+1}	Δ
0	5,000	0,000	-6,500	2,875	2,450	-2,929	4,824
1	2,875	2,450	-2,929	1,370	1,134	-1,957	2,223
2	1,370	1,134	-1,957	1,456	0,974	-1,974	0,182
3	1,456	0,974	-1,974	1,500	0,995	-1,999	0,055
4	1,500	0,995	-1,999	1,501	1,000	-2,001	0,006
5	1,501	1,000	-2,001	1,500	1,000	-2,000	0,001
6	1,500	1,000	-2,000	1,500	1,000	-2,000	0,000

Apesar de o resultado ser o mesmo, foi necessário uma iteração a mais.

Exemplo ②: Resolva o sistema linear pelo método de Gauss-Seidel:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

1. Rearranjam-se as linhas de forma que os maiores valores absolutos fiquem na diagonal principal. Nesse caso isso é particularmente importante, pois não pode haver zeros na diagonal principal, porque esses valores são usados como denominadores das expressões de Gauss-Seidel.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$
$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + x_3 = 8$$

2. Escrevem-se as expressões de Gauss-Seidel para cada incógnita:

$$x_1^{k+1} = 10 - x_2^k - x_3^k$$
$$x_2^{k+1} = \frac{1}{2}[4 + x_1^{k+1} - x_3^k$$
$$x_3^{k+1} = 8 - x_1^{k+1}$$

3. Escolhem-se os valores do ponto inicial: $p^0 = \{x_1^0, x_2^0, x_3^0\} = (0, 0, 0)$

4. Proceder com as iterações

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	x_3^{k+1}	Δ
0	0,000	0,000	0,000	10,000	2,800	-2,000	10,575
1	10,000	2,800	-2,000	9,200	3,040	-1,200	1,157
2	9,200	3,040	-1,200	8,160	2,672	-0,160	1,516
3	8,160	2,672	-0,160	7,488	2,330	0,512	1,010
4	7,488	2,330	0,512	7,158	2,129	0,842	0,507
5	7,158	2,129	0,842	7,029	2,038	0,971	0,205
6	7,029	2,038	0,971	6,992	2,004	1,008	0,063
7	6,992	2,004	1,008	6,987	1,996	1,013	0,010
8	6,987	1,996	1,013	6,992	1,996	1,008	0,006
9	6,992	1,996	1,008	6,996	1,997	1,004	0,006
10	6,996	1,997	1,004	6,998	1,999	1,002	0,004
11	6,998	1,999	1,002	6,999	2,000	1,001	0,002
12	6,999	2,000	1,001	7,000	2,000	1,000	0,001
13	7000	2,000	1,000	7,000	2,000	1,000	0,000

Resultado: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{7; 2; 1\}$

Critério de convergência:

- Quando utilizamos o método iterativo de Gauss-Seidel para resolver sistemas lineares, devemos nos preocupar com a convergência da sequência de aproximações da solução.
- Existem condições sobre os elementos da matriz dos coeficientes do sistema que, se satisfeitas, são suficientes para garantir a convergência do método.
- Entretanto, se os critérios de convergência não forem satisfeitos, a sequência de iterações não levará a um resultado satisfatório, e os valores finais não serão obtidos num tempo finito.
- Uma solução é uma condição suficiente para garantir a convergência do método de Gauss-Seidel quando aplicada a um sistema linear, com $a_{ii} \neq 0$, é

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 0x_3 = 10 \\ 0x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 0x_2 + x_3 = 8 \end{cases}$$

Aplicando a expressão anterior para convergencia, temos:

$|1| + |0| < |1|$ não

$|0| + |1| < |1|$ não

$|1| + |0| < |1|$ não

A convergencia não está garantida. Isso pode ser demonstrado se tentarmos aplicar o método. As expressões de Gauss-Seidel são:

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = 10 - x_2^{k} \\ x_2^{k+1} = 4 - x_3^{k} \\ x_3^{k+1} = 8 - x_3^{k+1} \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k	x_1^{k+1}	x_2^{k+1}	x_3^{k+1}	Δ
0	0,000	0,000	0,000	10,000	4,000	-2,000	10,954
1	10,000	4,000	-2,000	6,000	6,000	2,000	6,000
2	6,000	6,000	2,000	4,000	2,000	4,000	4,899
3	4,000	2,000	4,000	8,000	0,000	0,000	6,000
4	8,000	0,000	0,000	10,000	4000	-2,000	4,899
5	10,000	4,000	-2,000	6,000	6000	2,000	6,000
6	6,000	6,000	2,000	4,000	2,000	4,000	4,899
7	4,000	2,000	4,000	8,000	0,000	0,000	6,000
8	8,000	0,000	0,000	10,000	4,000	-2,000	4,899
9	10,000	4,000	-2,000	6,000	6,000	2,000	6,000
10	6,000	6,000	2,000	4,000	2,000	4,000	4,899

→ Observe que as incógnitas apresentam valores oscilantes, sem que haja uma finalização com um grupo fixo de valores. Entretanto, esse sistema tem solução {7, 3, 1} que pode ser facilmente obtida por substituição ou pelo método de triangularização de GAUSS.

Exercício: 4º NTI - 09/12/2020.

1) Resolva o sistema pelo método iterativo de Gauss-Seidel. Verifique, antes de resolver o sistema, se ele satisfaz o critério de convergência.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 10 \\ -2x_1 + 9x_2 - 5x_4 = -5 \\ -x_1 + 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ -5x_2 - 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

2) Verifique se o sistema linear dado a seguir satisfaz o critério de convergência de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

3) Determine qual deve ser o valor de α para que o sistema linear dado possa ser resolvido pelo método iterativo de Gauss-Seidel.

$$\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + \alpha x_3 = 4 \\ -2x_1 + \alpha x_2 - x_3 = -2 \\ \alpha x_1 - x_2 - 6x_3 = 5 \end{cases}$$

4) Um professor de cálculo Numérico desejava criar um interessante exercício de sistemas lineares, para o qual não haja solução. Assim, ele criou o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ 2x + my - 4z = -2m \end{cases}$$

Quais são os valores de m que fazem com que o sistema não tenha solução?

#