Sistema lineares: Método de triangularização de GAUSS:

Introdução: Muitos problemas de matemática numérica são modelados em termos de um sistema de equações lineares algébricas. Essa representação é bem vantajosa, pois, além de separar o problema em partes menores, o sistema apresenta vários métodos de solução já consagrados. O fato de poder exprimir um problema na forma de um conjunto de expressões matemáticas já é em si um grande conforto, pois se pode usar um formalismo que esteja próximo tanto da Matemática propriamente dita como da realidade subjacente.

Exemplos de aplicação de sistemas lineares são encontrados em várias áreas do conhecimento, principalmente em engenharia e Física.

São casos típicos:

=> Análise de circuitos elétricos.

=> Análise de vibrações em um sistema mecânico.

=> Distribuição da força peso na estrutura de um edifício.

<u>Definições</u>: Estamos interessados em resolver equações lineares com M equações e m incógnitas. Esse problema pode ser escrito na forma:

$$A_{m \times m} X_m = B_m$$

onde A corresponde a uma matriz quadrada, isto é, uma matriz onde o número de linhas é igual ao número de colunas; X corresponde ao vetor das incógnitas; e B corresponde ao vetor dos resultados. Formalmente:

$$A_{m \times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} \quad X_m = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \quad B_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

São de especial interesse para este curso as matrizes na forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & & a_{2(m-1)} & a_{2m} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{mm} \end{bmatrix}$$

que é chamada de matriz triangular. Todos os valores abaixo da diagonal principal são nulos. Nesse caso trata-se de uma matriz triangular superior. Se os valores acima da diagonal principal forem nulos, trata-se de uma matriz triangular inferior.

As vantagens desse formato vem do fato de que uma matriz triangular tem solução trivial.

Observe que, se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{2(m-1)} & a_{2m} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & a_{mm} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Então:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{(m-1)(m-1)}x_{(m-1)} + a_{(m-1)m}x_m = b_{m-1} \\ a_{mm}x_m = b_m \end{cases}$$

Observe que a última expressão é de solução imediata. O seu resultado, x_m, pode ser substituído na expressão anterior, para resolver x_{m-1}. Assim, podemos isolar as variáveis "x" e calculá-las. Formalmente:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1m}x_m}{a_{11}} \\ x_2 = \dfrac{b_2 - a_{23}x_3 - \cdots a_{2m}x_m}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_{m-1} = \dfrac{b_{m-1} - a_{(m-1)m}x_m}{a_{(m-1)(m-1)}} \\ x_m = \dfrac{b_m}{a_{mm}} \end{cases}$$

Portanto, para solucionar um sistema linear basta transformá-lo em uma matriz triangular. O método de Triangularização de GAUSS propõe um algoritmo que transforma qualquer sistema linear numa matriz triangular superior.

Método de triangularização de GAUSS

Para a aplicação desse método, devemos nos lembrar de duas propriedades dos sistemas lineares:

=> A solução de um sistema linear não se altera com a multiplicação de uma linha por um valor não-nulo.

=> A solução de um sistema linear não se altera com a soma de duas linhas.

Usaremos a seguir essas duas propriedades para transformar um sistema linear na sua forma triangularizada.

Partiremos do sistema,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

que pode ser reescrito na sua forma matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Agora faremos uma abstração da coluna das incógnitas e criaremos uma "matriz expandida", que nos facilitará a representação e os cálculos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

Como queremos que o resultado final seja uma matriz triangularizada, sabemos que o valor a_{31} deve ser substituído por um zero. Uma maneira de fazer isso acontecer, usando as propriedades explicitadas acima, é multiplicar a primeira linha por a_{31}/a_{11} e subtrair o resultado da ultima linha. Como $a_{31} - a_{11}\frac{a_{31}}{a_{11}} = 0$

E os outros termos da ultima linha não se transformam em zero. O resultado será:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right]$$

Multiplicar a primeira linha por a_{21}/a_{11}, e subtrair o resultado da segunda linha serão suficientes para obter

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & a'_{32} & a'_{33} & b'_3 \end{array}\right]$$

Assim, a primeira etapa da triangularização (Zerar a primeira coluna) foi executada. Observe que o termo a_{11}, que foi usado em todos os cálculos, recebe a denominação "pivô" dessa etapa.

Para completar a triangularização deve-se aplicar o termo a'_{22} como pivo para eliminar o termo a'_{32} multiplicando a segunda linha por a'_{32}/a'_{22} e subtraindo o resultado da terceira linha. Obtém-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ 0 & 0 & a''_{32} & b''_3 \end{array}\right]$$

Com esta última etapa, a matriz foi triangularizada e pode ser reescrita na forma de sistema:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2$$

$$a''_{33}x_3 = b''_3$$

Para obter as soluções, calcula-se primeiro x_3; em seguida, por retrossubstituição, todas as outras incógnitas.

Exemplo: 01 Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20 \\ 6x_1 - 9x_2 + 12x_3 = 51 \\ -5x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases}$$

1. O primeiro passo é reescrever o sistema na forma de matriz expandida, com os fatores e os termos independentes:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 6 & -9 & 12 & 51 \\ -5 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

2. Identifica-se o primeiro pivô, a_{11} e multiplica-se a primeira linha por $a_{31}/a_{11} = -5/3$, substituindo a ultima linha pela diferença da ultima linha com o resultado. As operações são as seguintes:

$$a'_{31} = (-5) - (3)\left[-\frac{5}{3}\right] = 0$$
$$a'_{32} = (0) - (-2)\left[-\frac{5}{3}\right] = -\frac{10}{3}$$
$$a'_{33} = (2) - (5)\left[-\frac{5}{3}\right] = \frac{31}{3}$$
$$b'_{3} = (1) - (20)\left[-\frac{5}{3}\right] = \frac{103}{3}$$

E agora, a matriz expandida fica

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & | & 20 \\ 6 & -9 & 12 & | & 51 \\ 0 & -19/3 & 31/3 & | & 103/3 \end{bmatrix}$$

Usando ainda o mesmo pivô, a_{11}, multiplica-se a primeira linha por $a_{21}/a_{11} = 6/3 = 2$, substituindo a segunda linha pela diferença da segunda linha com o resultado. As operações são as seguintes:

$$\begin{cases} a'_{21} = (6) - (3)[2] = 0 \\ a'_{22} = (-9) - (-2)[2] = -5 \\ a'_{23} = (12) - (5)[2] = 2 \\ b'_{2} = (51) - (20)[2] = 11 \end{cases}$$

Deixando a matriz expandida,

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & | & 20 \\ 0 & -5 & 2 & | & 11 \\ 0 & -19/3 & 31/3 & | & 103/3 \end{bmatrix}$$

3. Identifica-se em seguida o próximo primeiro pivô, a'_{23} e multiplica-se a terceira linha por $a_{32}/a'_{22} = 10/15 = 2/3$,

Substituindo a última linha pela diferença da última linha com o resultado. As operações são:

$$\begin{cases} a''_{31} = (0) - (0)\left[\frac{2}{3}\right] = 0 \\ a''_{32} = \left(\frac{-10}{3}\right) - (-5)\left[\frac{2}{3}\right] = 0 \\ a''_{33} = \left(\frac{31}{3}\right) - (2)\left[\frac{2}{3}\right] = 9 \\ b''_{3} = \left(\frac{103}{3}\right) - (11)\left[\frac{2}{3}\right] = \frac{81}{3} = 27 \end{cases}$$

Dá-se a matriz expandida na sua forma final. Essa matriz é uma matriz triangularizada superior.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 20 \\ 0 & -5 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & 27 \end{array}\right]$$

E o sistema linear poderá ser escrito como:

$$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 20$$
$$-5x_2 + 2x_3 = 11$$
$$9x_3 = 27$$

4. Calculam-se os valores das incógnitas começando por x_3 e por retrossubstituição de todos os outros:

$$x_3 = \frac{27}{9} = 3$$

$$x_2 = \frac{11 - 2\times 3}{-5} = -1$$

$$x_1 = \frac{20 - 5\times 3 + 2\times(-1)}{3} = 1$$

E o resultado final é:

$$\{x_1; x_2; x_3\} = \{1; -1, 3\}$$

Exemplo: 2 Resolva o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 3 \\ 9x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 6 \\ -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 0x_4 = -16 \\ 3x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 18 \end{cases}$$

1. Escreva a matriz expandida:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 9 & 8 & -3 & 4 & 6 \\ -6 & 4 & -8 & 0 & -16 \\ 3 & -8 & 3 & -4 & 18 \end{array}\right]$$

2. O primeiro pivô, $a_{11} = 3$, será usado para substituir a_{21}, a_{31} e a_{41} por zero.

As operações com as linhas são:

$[a'_{21}\ a'_{22}\ a'_{23}\ a'_{24}|b'_2] = [9\ 8\ -3\ 4|6] - \left(\frac{9}{3}\right)[3\ 2\ 0\ 1|3] =$

$= [0\ 2\ -3\ 1|-3]$

$[a'_{31}\ a'_{32}\ a'_{33}\ a'_{34}|b'_3] = [-6\ 4\ -8\ 0|-16] - \left(\frac{-6}{3}\right)[3\ 2\ 0\ 1|3] =$

$= [0\ 8\ -8\ 2|-10]$

$[a'_{41}\ a'_{42}\ a'_{43}\ a'_{44}|b'_4] = [3\ -8\ 3\ -4|18] - \left(\frac{3}{3}\right)[3\ 2\ 0\ 1|3] =$

$= [0\ -10\ 3\ -5|15]$

O que nos leva à nova matriz expandida

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 8 & -8 & 2 & -10 \\ 0 & -10 & 3 & -5 & 15 \end{bmatrix}$$

3. O próximo pivô, $a'_{22} = 2$, será usado para substituir a'_{32} e a'_{42} por zero. As operações com as linhas são:

$[a''_{31}\ a''_{32}\ a''_{33}\ a''_{34}|b''_3] = [0\ 8\ -8\ 2|-10] - \left(\frac{8}{2}\right)[0\ 2\ -3\ 1|-3] =$

$= [0\ 0\ 4\ -2|2]$

$[a''_{41}\ a''_{42}\ a''_{43}\ a''_{44}|b''_4] = [0\ -10\ 3\ -5|15] - \left(\frac{-10}{2}\right)[0\ 2\ -3\ 1|-3] =$

$= [0\ 0\ -12\ 0|0]$

E a matriz expandida fica:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. O último pivô, $a''_{33} = 4$, será usado para substituir a'_{43} por zero. As operações com as linhas são:

$$[a'''_{41}\ a'''_{42}\ a'''_{43}\ a'''_{44}\ |\ b'''_4] = [0\ 0\ -12\ 0\ |\ 0] - \left(\frac{-12}{4}\right)[0\ 0\ 4\ -2\ |\ 2] =$$

$$[0\ 0\ 0\ -6\ |\ 6]$$

E a matriz expandida fica:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & 6 \end{array}\right]$$

5. Calculam-se os valores das incógnitas começando por x_4 e, por retrossubstituição todos os outros:

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{6}{-6} = -1 \\ x_3 = \dfrac{2-(-2)\times(-1)}{4} = 0 \\ x_2 = \dfrac{(-3)-(-3)\times 0 - 1\times(-1)}{2} = -1 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{3 - 2\times(-1) - 0\times(0) - 1\times(-1)}{3} = 2$$

E o resultado final é:

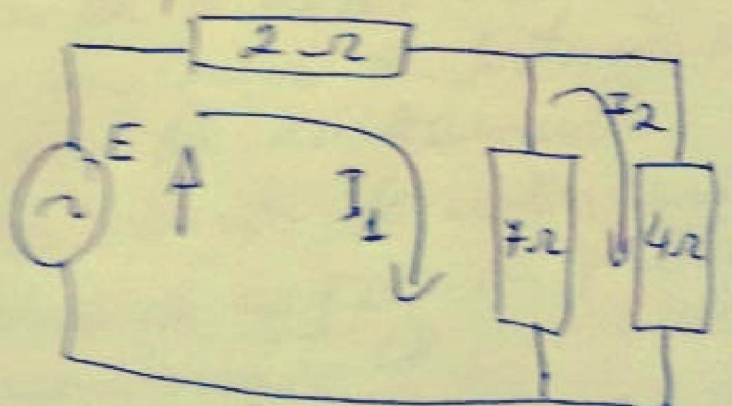
$$\{x_1; x_2; x_3; x_4\} = \{2, -1, 0, -1\}$$

Exercícios: 2º NTI 07/12/2020

1) Resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 1x_3 = 5 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 25 \\ 5x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -12 \end{cases}$$

2) Resolva o seguinte circuito elétrico, sabendo-se que E = 12 Volts.



Dica: A partir da lei das malhas dos circuitos elétricos, sabe-se que

$$\begin{cases} 2I_1 + 7I_1 - 7I_2 = E \\ 7I_2 + 4I_2 - 7I_1 = 0 \end{cases}$$

3) Uma fábrica de automóveis produz 3 modelos de carros A, B e C. Cada um deles passa por setores diferentes de montagens: setor de motores, lataria e acabamento. O setor de motores trabalha 80 horas por semana; o de lataria trabalha 60 horas por semana e o de acabamento trabalha 95 horas por semana. Sabe-se que o modelo A precisa de 3 horas no setor de motores, 2 horas no setor de lataria e 3 horas no setor de acabamento; o modelo B precisa de 2 horas no setor de motores, 2 horas no setor de lataria e 3 horas no setor de acabamento; o modelo C precisa de 4 horas no setor de motores 3 horas no setor de lataria e 5 horas no setor de acabamento. Pergunta-se Quantos carros de cada modelo a fábrica é capaz de produzir semanalmente?

4) Achar a solução do sistema dado a seguir, sabendo que $z = y^2$.

$$2x + 3y + z = 36$$
$$-4x - 2y + z = 23$$

#

16