Interpolação polinomial e a fórmula de Lagrange:

Introdução: considere a tabela na forma

x x_0 x_1 ..... x_n

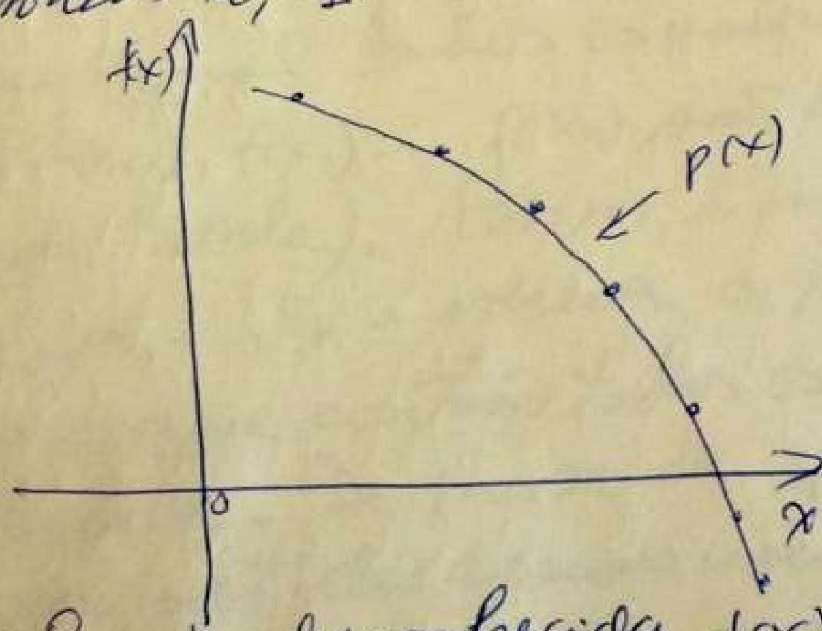
$f(x_n)$ $f(x_0)$ $f(x_1)$ ..... $f(x_n)$

correspondente aos valores da função $f(x_0)$ em $(n+1)$ pontos distintos $(x_0, x_1, \ldots x_n)$ pertencentes aos reais, e seja x um ponto distinto dos pontos x_i da tabela, também pertencente ao intervalo que contém os pontos x_i.

Interpolar o ponto x_i à tabela acima significa calcular o valor de $f(x)$, ou seja, incluir o ponto $[x_i, f(x_i)]$ na tabela.

Em problemas reais, em geral, precisa-se fazer a interpolação de um ponto x em uma tabela em que não se conhece a forma analítica correspondente e, portanto, não se sabe a forma da função.

Muitas vezes a tabela é obtida de dados experimentais ou de campo, o que torna o processo de Interpolação mais importante. Assim, como não se pode calcular $f(x)$ formalmente, pois f é desconhecida, faz-se uma interpolação polinomial de x, ou seja, determina-se o polinômio p de grau menor ou igual a n que passa por todos os pontos da tabela e calcula-se o valor de $p(x)$. Esse polinômio é chamado de polinômio interpolador de f relativamente aos pontos $x_0, x_1 \dots, x_n$.



— A função desconhecida $f(x)$ (pontos) e o polinômio interpolador $p(x)$.

Método: De posse dos pontos da tabela que representa a função desconhecida f, e uma vez estabelecido o grau n do polinômio interpolador, cuja forma é

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

pode-se escrever o sistema

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_2^n = f(x_2) \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f(x_n) \end{cases}$$

no qual todos os valores $x_0, x_1, \dots x_n$, e $f(x_0), f(x_1) \dots f(x_n)$ são conhecidos (da tabela). Assim, é possível obter $a_0, a_1, \dots, a_n$ e escrever o polinômio $p(x)$ que contém todos os pontos da tabela. De posse de $p(x)$, podem ser obtidas aproximações para outros valores $p(x)$, que não faziam parte do conjunto de pontos originais.

Polinomio Interpolador: Exemplos:

Exemplo ①: Seja a seguinte tabela de valores da função $f(x) = e^x$ a partir da qual se deseja obter uma aproximação para o ponto $x = 1{,}32$.

x	1,3	1,4	1,5
e^x	3,669	4,055	4,482

1. Determinação do grau do polinomio interpolador: Como se conhecem os valores da função em três pontos, pode-se utilizar um polinomio do 2º grau.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

2. Construção do sistema: O sistema para a solução do problema é do tipo

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = f(x_0)$$
$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = f(x_1)$$
$$a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = f(x_2)$$

no qual substituimos os valores da tabela:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 1{,}3 + a_2 1{,}3^2 = 3{,}669 \\ a_0 + a_1 1{,}4 + a_2 1{,}4^2 = 4{,}055 \\ a_0 + a_1 1{,}5 + a_2 1{,}5^2 = 4{,}482 \end{cases}$$

3. Solução do sistema: Através de um método de solução de sistemas lineares (triangularização de Gauss, por exemplo) resolve-se o sistema, obtendo-se:

$$\begin{cases} a_0 = 2{,}383 \\ a_1 = -1{,}675 \\ a_2 = 2{,}05 \end{cases}$$

Portanto, $p(x) = 2{,}383 - 1{,}675x + 2{,}05x^2$

4. Cálculo da interpolação: substituindo o valor para o ponto $x = 1{,}32$, obtém-se:

$$p(1{,}32) = 2{,}383 - 1{,}675 \times 1{,}32 + 2{,}05 \times 1{,}32^2 =$$

$$p(1{,}32) = 3{,}744.$$

Deve-se levar em consideração que esse valor de $p(x)$ é uma aproximação, não tendo sido obtido através da função original $f(x)$. Como nesse caso $f(x)$ é conhecida, pode-se avaliar qual foi o erro introduzido devido ao processo de interpolação.

Exemplo ②: Dada a tabela a seguir, obter $f(40°)$ por interpolação de um polinômio do 3º grau.

x	30°	35°	45°	50°
$f(x)$	0,5	0,57358	0,70711	0,76604

1. Polinômio interpolador: Como se conhecem os valores da função em quatro pontos, pode-se utilizar um polinômio de 3º grau.

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

2. Construção do sistema: O sistema do problema é do tipo:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3 = f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 = f(x_1) \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^3 = f(x_2) \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 + a_3 x_3^3 = f(x_3) \end{cases}$$

no qual substituímos os valores da tabela:

$$\begin{cases} a_0 + a_1 30 + a_2 30^2 + a_3 30^3 = 0{,}5 \\ a_0 + a_1 35 + a_2 35^2 + a_3 35^3 = 0{,}57358 \\ a_0 + a_1 45 + a_2 45^2 + a_3 45^3 = 0{,}70711 \\ a_0 + a_1 50 + a_2 50^2 + a_3 50^3 = 0{,}76604 \end{cases}$$

3. Resolve-se o sistema, obtendo-se

$a_0 = -0{,}00118$

$a_1 = 0{,}01792$

$a_2 = -0{,}00002$

$a_3 = -6{,}8 \times 10^{-7}$

Portanto,

$$p(x) = -0{,}00118 + 0{,}01792x - 0{,}00002x^2 - 6{,}8 \times 10^{-7} x^3$$

4. Substituindo o valor para o ponto $x = 40°$, obtém-se:

$$p(40°) = 0{,}64010$$

Polinomio Interpolador na forma de Lagrange:

A forma de Lagrange apresenta o polinomio interpolador diretamente a partir dos pontos originais. Sua praticidade é tal que se torne uma das formas mais utilizados para a obtenção de um polinomio interpolador.

Seja f uma função tabelada em $(n+1)$ pontos distintos $(x_0, x_1, \ldots x_n) \in \mathbb{R}$ e sejam os polinomi de grau n dados pela forma genérica:

7

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

São denominados polinomios de Lagrange.

Note-se que ~~nos~~ polinomios de Lagrange, não são inseridos os fatores $(x-x_i)$ e (x_i-x_i), o que resultaria num denominador nulo.

Portanto, utilizando-se esses polinomios, pode-se determinar o polinomio interpolador de f relativamente aos pontos $x_0, x_1 \dots x_n$ da seguinte forma:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n)$$

Os polinomios $L_i(x)$ satisfazem as condições: a) contém os pontos da tabéla, pois $p(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0,1,2,3,\dots,n$; b) o grau de $p(x)$ é menor ou igual a n. Assim, o polinomio obtido é o polinomio interpolador da tabela na forma de Lagrange.

Para melhor ilustrar o formalismo considere-se a tabela:

x	x_0	x_1	x_2	x_3
$f(x)$	y_0	y_1	y_2	y_3

O polinomio de Lagrange será:

$$p(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} +$$

$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Polinomio de Lagrange: Exemplos:

Exemplo ①: Seja a seguinte tabela de valores da função $f(x) = e^x$, a partir da qual se deseja obter através de polinomio de Lagrange uma aproximação para o ponto $x = 1,32$.

x	1,3	1,4	1,5
$f(x)$	3,669	4,055	4,482

1. Definição dos polinômios de Lagrange:
Uma vez que a tabela apresenta três pontos, buscar-se-ão polinômios de Lagrange de 2º grau, cujas fórmulas são:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)((x_1-x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

E o polinômio interpolador de Lagrange é dado por:

$$p(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

2. Substituição pelos valores da tabela:

$$L_0(x) = \frac{(x-1{,}4)(x-1{,}5)}{(1{,}3-1{,}4)(1{,}3-1{,}5)} = \frac{(x-1{,}4)(x-1{,}5)}{0{,}02}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-1{,}3)(x-1{,}5)}{(1{,}4-1{,}3)(1{,}4-1{,}5)} = \frac{(x-1{,}3)(x-1{,}5)}{-0{,}01}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-1{,}3)(x-1{,}4)}{(1{,}5-1{,}3)(1{,}5-1{,}4)} = \frac{(x-1{,}3)(x-1{,}4)}{0{,}02}$$

3. Interpolar na tabela $x = 1{,}32$ significa a calcular:

$$p(x) = p(1{,}32) = L_0(1{,}32) f(x_0) + L_1(1{,}32) f(x_1) + L_2(1{,}32) f(x_2)$$

ou

$$p(1{,}32) = \frac{(1{,}32-1{,}4)(1{,}32-1{,}5)}{0{,}02} \cdot 3{,}669 + \frac{(1{,}32-1{,}3)(1{,}32-1{,}5)}{-0{,}01} 4{,}055 + \frac{(1{,}32-1{,}3)(1{,}32-1{,}4)}{0{,}02} 4{,}482 =$$

o que resulta em

$$p(1{,}32) = 3{,}743 \; //$$

Exemplo (2): Dada a tabela a seguir, obter $f(40°)$ por interpolação de polinômios de Lagrange.

x	$30°$	$35°$	$45°$	$50°$
$f(x)$	0,5	0,57358	0,70711	0,76604

1. Os polinômios de Lagrange são:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

2. Substituição pelos valores da tabela:

$$L_0(x) = \frac{(x-35)(x-45)(x-50)}{(30-35)(30-45)(30-50)} = \frac{(x-35)(x-45)(x-50)}{-1500}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-30)(x-45)(x-50)}{(35-30)(35-45)(35-50)} = \frac{(x-30)(x-45)(x-50)}{750}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-30)(x-35)(x-50)}{(45-30)(45-35)(45-50)} = \frac{(x-30)(x-35)(x-50)}{-750}$$

$$L_3(x) = \frac{(x-30)(x-35)(x-45)}{(50-30)(50-35)(50-45)} = \frac{(x-30)(x-35)(x-45)}{1500}$$

3. Interpolar na tabela $x = 40$ significa calcular:

$$p(40) = L_0(40)f(x_0) + L_1(40)f(x_1) + L_2(40)f(x_2) + L_3(40)f(x_3)$$

o que, finalmente, resulta em:

$$p(40) = \frac{(x-35)(x-45)(x-50)}{-1500}\,0{,}5 + \frac{(x-30)(x-45)(x-50)}{750}\cdot 0{,}57358 +$$

$$+ \frac{(x-30)(x-35)(x-50)}{-750}\,0{,}70711 + \frac{(x-30)(x-35)(x-45)}{1500}\cdot 0{,}76604$$

E o resultado final:

$$p(40) = 0{,}6428 \;//$$

7º NTI - Cálculo Númerico - 25/01/2021.

1. Via polinômios de Lagrange, calcule a raiz de $f(x) = x\ln x - 3{,}2$
Dica: Faça uma tabela para valores de $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$ e resolva a equação do 2º grau.

2. Ao medir a reação de uma determinada bactéria à concentração de um novo antibiótico, os cientistas levantaram a seguinte tabela:

C	1,00	1,12	2,22	4,32	7,42	11,52	16,62
K	0,54	0,44	-0,60	-0,38	0,42	0,50	-0,61

onde C é a concentração do antibiótico e K é a medida da reação da bactéria.
Qual será a reação para concentrações de 2,0, 5,0 e 10,0? Utilize interpolação via polinômios de Lagrange.

3. Durante uma partida do campeonato mundial de xadrez, anotou-se o tempo que um jogador leva para responder a uma jogada em função da duração da partida. Os resultados são descritos na tabela a seguir:

t	~~7~~15	30	45	60	75
d	56,49	226,15	507,78	900,05	1408,17

onde t é o tempo de partida e d é o intervalo em segundos necessário para que o jogador pense em sua próxima jogada, dado em segundos. Use os polinômios de Lagrange para determinar quanto tempo um jogador pensa depois de 10 minutos de jogo. E se a partida levar duas horas?

14

4) Físicos do Instituto de Tecnologia de Massachusetts fizeram um experimento no qual verificaram que as partículas de um determinado líquido perdem mobilidade em função da temperatura. Para tanto mediram a velocidade média das partículas (em cm/s) em função da temperatura (em graus Celsius), obtendo os seguintes dados:

Temp.	100,0	99,4	98,8	98,2	97,6	97,0	96,4
v	222,39	222,30	222,21	222,13	222,04	221,96	221,88

Faça uma estimativa da velocidade das partículas nas temperaturas 95 e 92 graus Celsius.