Zeros de funções:
Método da Dicotomia

Introdução:

- Determinar os zeros de uma função significa achar as raízes dessa função.
- Dá-se às raízes o nome de zeros da função porque nesses valores, ou seja, nas raízes, a função assume valor zero.

Exemplo: $f(x) = ax^2 + bx + c$ (I) cujas raízes são x_1 e x_2.

- O fato de x_1 e x_2 serem raízes de $f(x)$ significa que qdo o valor de x na equação (I) for igual a x_1 e x_2, o valor de $f(x)$ é zero.

- Em alguns casos (como no caso da equação do segundo grau) é possível determinar um algoritmo ou seja, uma sequência de passos através dos quais podem-se determinar as raízes de uma função. Entretanto, as soluções através de algoritmos, também chamadas de soluções analíticos não estão disponíveis para a maioria das funções.

<u>Exemplo:</u> $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$ (II) não tem solução analítica, e a busca por suas raízes não é trivial. Isso significa que não existe um algoritmo que solucione a função, e as raízes devem ser encontradas por outro método. Na maior parte dos casos, faz-se necessária uma abordagem mais "direta", que muitas vezes utiliza um algoritmo simples que é repetido várias vezes

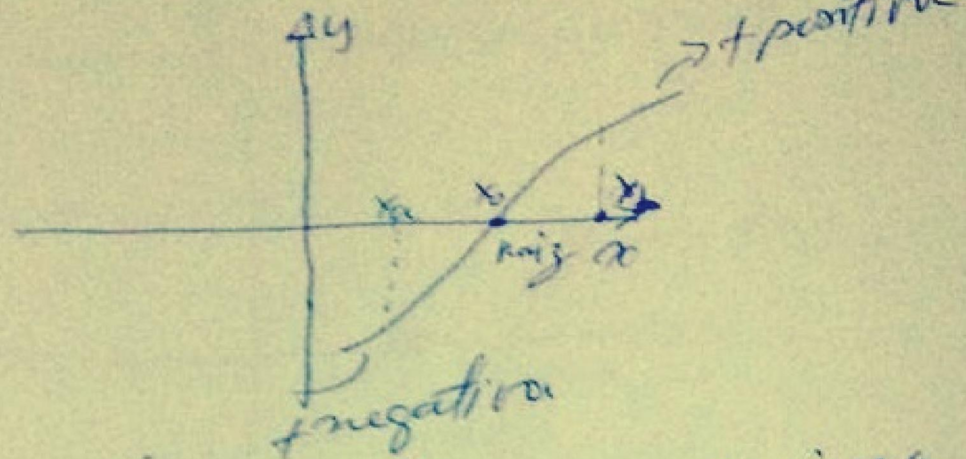
para localizar as raízes. Esses métodos são chamados de "Soluções numéricas" e o primeiro a ser apresentado será o "método da Dicotomia".

Método da Dicotomia:

- Esse método Baseia-se no fato de que se a função vale zero na raiz, e os valores da função para x maior do que a raiz e para x menor que a raiz tem sinais contrários.

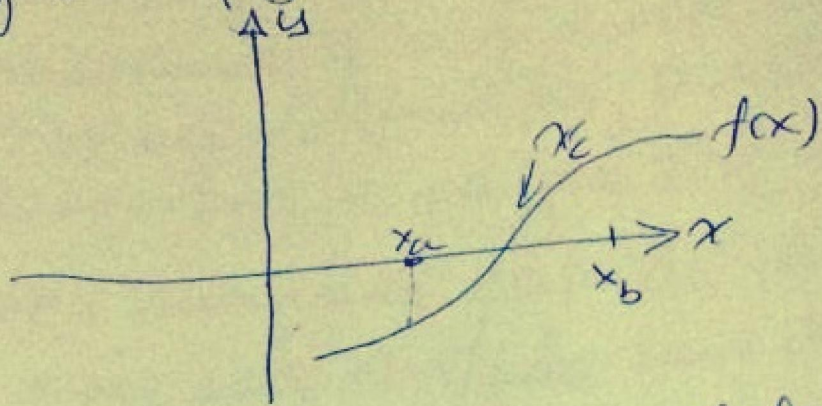
Teorema de Bolzano:

"Se f for uma função contínua num intervalo [a, b] e troca de sinal nos extremos desse intervalo, então existe pelo menos uma raiz real de f no intervalo [a, b]".



— Considere a figura acima. Pode, notar que o valor da função em x_a é negativo e que em x_b é positivo. Como a raiz encontra-se entre x_a e x_b, isto é, $x_a < x_0 < x_b$, sabemos que o intervalo fechado $[x_a, x_b]$ contém a raiz. Se tomarmos um valor de x como a média entre x_a e x_b, que denominamos x_c, de tal forma que o intervalo $[x_a, x_b]$ fique dividido em dois intervalos $[x_a, x_c]$ e $[x_c, x_b]$ de mesmo tamanho, a raiz deverá estar contida em um deles.

- Veja a figura a seguir:



- Excetuando a improvável hipótese de x_c ser exatamente a raiz de $f(x)$, um dos novos intervalos, $[x_a, x_c]$ ou $[x_c, x_b]$ conterá a raiz e o outro não.
- A decisão de qual dos dois contém a raiz é obtida diretamente da observação da figura: o intervalo $[x_a, x_c]$ tem os seus valores extremos $f(x_a)$ e $f(x_c)$, ambos negativos, enquanto o intervalo $[x_c, x_b]$ apresenta $f(x_c)$ e $f(x_b)$ com sinais invertidos.

- Como, segundo o que foi discutido anteriormente, a raiz divide regiões com sinais diferentes, o intervalo que contém a raiz é $[x_c, x_b]$.
- Numa maneira rápida de verificar se a raiz está contida num determinado intervalo é através do produto do valor da função nos seus extremos.

$$f(x_a) \cdot f(x_e) > 0$$

$$f(x_e) \cdot f(x_b) < 0$$

- Uma vez que se sabe que a raiz está contida no intervalo $[x_e, x_b]$, pode-se aplicar novamente o mesmo processo, dividindo o intervalo em duas partes. Como resultado, obtém-se um novo intervalo, menor que o anterior, que ainda contém a raiz.

— Aplicando-se sucessivamente esse processo, obtém-se intervalos cada vez menores, até que os extremos do intervalo que contém a raiz estejam tão próximos um do outro como a precisão que se deseja a raiz. Como a cada etapa o intervalo é dividido em duas partes iguais, ele se denomina uma "dicotomia", que significa "dividir em duas partes."

<u>Exemplo</u>: — Determinemos qual é a raiz da função $f(x) = e^{x} + 1/2^{x}$ ou seja, qual o valor de $\underline{x}$ tem zero como resultado da função.

— O primeiro passo é determinar um intervalo fechado $[x_a, x_b]$ que contenha a raiz. Para fazer isso é preciso determinar x_a e x_b tais que $f(x_a)$ e $f(x_b)$ tenham sinais contrários.

x	f(x)
-1	-0,13
-0,9	-0,04
-0,8	0,05
-0,7	0,14
-0,6	0,25
-0,5	0,36
-0,4	0,47
-0,3	0,59
-0,2	0,72
-0,1	0,85

- Vemos que valores de f(x) para x entre -1 e -0,9 são negativos, e para x entre -0,8 e -0,1 são positivos.
- Pode-se concluir que a raiz da função encontra no intervalo ~~fechado~~ [0,9 ; -0,8]

- O próximo passo é dividir o intervalo na sua metade calculando a média:

$$x_c = \frac{(-0{,}9)+(-0{,}8)}{2} = -0{,}85$$

- Para decidir qual deve ser o intervalo a considerar em seguida, se será $[x_a, x_c]$ ou $[x_c, x_b]$, devemos calcular o valor de f(x):

$$f(x_c) = f(-0{,}85) = e^{-0{,}85} + \frac{(-0{,}85)}{2} =$$

$$= 0{,}02415$$

- Como este valor é positivo, despreza-se o intervalo $[x_c, x_b]$ pois a raiz encontra-se no intervalo $[x_a, x_c]$.
- Repete-se o processo para o intervalo $[0,9; -0,85]$ e assim, sucessivamente.
- O resultado das várias iterações é apresentado na tabela abaixo:

ε: $|b-a| < \varepsilon \Rightarrow$ ERRO

x_a	x_b	x_c	$f(x_c)$
-0,9	-0,8	-0,85	0,002415
-0,9	-0,85	-0,875	-0,02064
-0,875	-0,8	-0,8375	0,014041
-0,875	-0,8375	-0,85625	-0,00337
-0,85625	-0,8375	-0,84688	0,005315
-0,85625	-0,84688	-0,85156	0,000966
-0,85625	-0,85156	-0,85391	-0,0012
-0,85391	-0,85156	-0,85273	-0,00012
-0,85273	-0,85156	-0,85215	0,000423
-0,85273	-0,85215	-0,85244	0,000152
-0,85273	-0,85244	-0,85259	$1,63 \times 10^{-5}$

$\Rightarrow$ Conclui-se que a raiz da função é aproximadamente -0,85259.

EXERCÍCIOS: 1º NTI 30/11/20

1) Ache pelo método da dicotomia, a raiz da função $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ com uma precisão de quatro casas decimais.

2) Encontrar pelo método da dicotomia a raiz da função $f(x) = e^{-x}\left(\frac{x-1}{2}\right)$ com uma precisão de quatro casas decimais. Sabe-se que a raiz encontra-se no intervalo $[0, 2]$.

3) A função $f(x) = x^2 + 1,95x - 2,09$ tem uma raiz positiva e outra negativa. Determine o intervalo em que essas raízes estão contidas. Determine o valor dessas raízes.

4) Sabe-se que a função $f(x) = x - 3 - x^{-x}$ tem uma raiz no intervalo $[1,0; 3,0]$. Pelo método da dicotomia, ache a raiz com quatro casas decimais.