Mario Sosa 151767

TEORÍA

1.1 Gradiente conjugado.

Demuestre que si los vectores no nulos $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ satisfacen

$$p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

y A simetrica y positiva definida ent. los vectores son l.i

Dem: Suponemos que son l.d.

$\Rightarrow \exists\, \alpha_i$ tal que $\alpha_0 p_1 + \dots + \alpha_\ell p_\ell = 0$

Entonces tendríamos que $\alpha_i p_i^T A p_i = 0$

Pero esto es una contradicción pues A es positiva definida

$\Rightarrow \quad p_i^T A p_i > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = 0$

$\therefore$ son l.i.

Luego, el resultado implica que se resuelve en maximo n pasos:

Si $\{p_i\}_{i=0}^{n-1}$ son vectores con la propiedad anterior, $\forall x_0$, la sucesión generada por $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ con $\alpha_k = -\dfrac{g_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$

y con $g_k = A x_k - b$ la solución converge en n pasos.

Dem:

Escribimos $x^* - x_0 = \alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_{n-1} p_{n-1}$

multiplicando por A y p_k

$$\alpha_k = \frac{p_k^T A (x^* - x_0)}{p_k^T A p_k}$$

del proceso iterativo tenemos $x_k - x_0 = \alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_{k-1} p_{k-1}$

y por la propiedad anterior:

$$p_k^T A (x_k - x_0) = 0$$

entonces $$\alpha_k = \frac{p_k^T A (x^* - x_k)}{p_k^T A p_k} = -\frac{g_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$$

$\therefore \quad x_n = x^*$

i.e. tenemos a lo más n direcciones.

1.2 BFGS.

Verifique que B_{k+1} y H_{k+1} son inversas una de la otra

Tenemos que:

$$B_{k+1} = (I - \rho_k y_k s_k^T) B_k (I - \rho_k s_k y_k^T) + \rho_k y_k y_k^T \quad \text{con} \quad \rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$$

$$H_k = B_k^{-1}$$

$$H_{k+1} = H_k - \frac{H_k y_k y_k^T H_k}{y_k^T H_k y_k} + \frac{s_k s_k^T}{y_k^T s_k}$$

$$B_{k+1} H_{k+1} = B_{k+1} (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T$$

$$= \left(B_k - \frac{B_k s_k B_k}{s_k^T B_k s_k} \right) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= \left(I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} \right) (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} (I - \rho_k y_k s_k^T)$$

luego:

$$\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} \rho_k y_k s_k^T = \frac{1}{s_k^T y_k} \frac{B_k s_k (s_k^T y_k) s_k^T}{s_k^T B_k s_k} = \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}$$

$$\therefore \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} (I - \rho_k y_k s_k^T) = 0$$

$\Rightarrow$ Finalmente

$$B_{k+1} H_{k+1} = I$$