Examen Final $A(i,j)\ i,j$

María de la luz Vizcaíno Chacón 157045

1. Gradiente Conjugado

Si $P_1, \dots, P_l \neq \bar{0}$ satisfacen que $P_i^T A P_j = 0 \ \forall i \neq j$ y A es simétrica positiva definida entonces los vectores son l.i.

P.D. para $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, l$ $\quad \sum_{i=1}^{l} \alpha_i P_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i$

Por contradicción

Supongamos $\exists\, \alpha_j \neq 0$ con α_j fija

Tenemos que $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i P_i = 0$ pre multiplicamos con A matriz simétrica positiva definida y obtenemos

$$A \sum_{i=1}^{l} \alpha_i P_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} A \alpha_i P_i = 0$$

De nuevo premultiplicamos, pero ahora por P_j^T y tenemos

$$P_j^T \sum_{i=1}^{l} A \alpha_i P_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \alpha_i P_j^T A P_i = 0$$

por hipótesis sabemos que $P_i^T A P_j = 0 \quad \forall i \neq j$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \alpha_i P_j^T A P_i = \alpha_j P_j^T A P_j = 0 \quad \text{ }$$

$\Rightarrow \alpha_j = 0$ ó $P_j^T A P_j = 0$ (no aplica la hipótesis pues tienen el mismo subíndice)

A es simétrica positiva definida por lo que $x^T A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^l$

en particular

$$P_j^T A P_j > 0$$

$$\Rightarrow \alpha_j = 0 \ ! \quad \forall j = 1, \dots, l$$

$\therefore \sum_{i=1}^{l} \alpha_i P_i = 0$ con $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, l$

$\Rightarrow \{P_1, \dots, P_l\}$ son l.i.

Dado el resultado anterior, ¿porqué el gradiente conjugado converge a lo más en n iteraciones?

Por hipótesis del ejercicio anterior tenemos que $P_1, \dots, P_l$ satisfacen $P_i^T A P_j = 0$, por lo que son conjugados. y también demostramos que son l.i. independientes, como consecuencia, para algunos escalares σ_k se cumple

$$x^* - x_0 = \sigma_0 p_0 + \sigma_1 p_1 + \dots + \sigma_{n-1} p_{n-1}$$

y al premultiplicar por $P_k^T A$ obtenemos

$$\sigma_k = \frac{P_k^T A (x^* - x_0)}{P_k^T A P_k} = \frac{P_k^T (b - A x_0)}{P_k^T A P_k}$$

Si calculamos x_{k+1} según el método $(x_{k+1} = x_k + \alpha p_k)$ obtenemos

$$x_{k+1} = x_0 + \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_k p_k$$

por lo que

$$A(x^* - x_0) = A(x^* - x_0 - \alpha_0 p_0 - \alpha_1 p_1 - \dots - \alpha_k p_k)$$

$$= A(x^* - x_k) = b - A x_k = r_k$$

$$\therefore \sigma_k = \frac{P_k^T r_k}{P_k^T A P_k} = \alpha_k$$

por lo que se demuestra que es un paso generado con el algoritmo de dirección conjugada y $\therefore$ por Teorema 5.1 converge en n pasos

2. BFGS.

Verificar que B_{k+1} y H_{k+1} son inversas lo una de la otra.

Es equivalente a probar que $B_{k+1} H_{k+1} = I$

Sabemos que $B_{k+1} s_k = y_k$ entonces:

$$B_{k+1} H_{k+1} = B_{k+1}\left[(I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T\right]$$

$$= (B_{k+1} - \rho_k y_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= \left(B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}\right) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= \left(I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right)(I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} \cancel{- \rho_k y_k s_k^T} + \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} \cancel{+ \rho_k y_k s_k^T}$$

$$= I$$

Recordemos que

$$H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k s_k y_k^T) + \rho_k s_k s_k^T$$

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}$$

y

$$\rho_k \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} y_k s_k^T = \frac{1}{s_k^T y_k} \frac{B_k s_k (s_k^T y_k) s_k^T}{s_k^T B_k s_k} = \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}$$