Leonardo Peláez 173122

Examen final

teoría

Gradiente conjugado

• Vamos a probar que si $P_j^T A P_i = 0 \ \forall j \neq i$ $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ son LI

Para esto suponemos que ~~...~~ no es un conjunto linealmente independiente es decir $\exists$ P_K tal que $P_K = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_{K-1} P_{K-1} + \alpha_{K+1} P_{K+1} + \dots + \alpha_n P_n$

entonces tenemos que $P_K^T A P_K = P_K^T A \{\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_n P_n\} = 0$

esta ultima igualdad se cumple porque $\alpha_i P_K A P_i = 0 \ \forall i \neq K$

$\therefore P_K^T A P_K = 0$ pero esto es una contradicción ya que A es definida positiva y P_K es no nulo y entonces $P_K^T A P_K > 0$

• de el resultado anterior podemos ver la convergencia en a lo más n pasos del metodo de gradiente conjugado. sea X^* la solucion y X_0 el punto inicial. entonces la difrencia de ambos esta dada por

$$X^* - x_0 = \sigma_1 P_1 + \dots + \sigma_n P_n$$

Como el conjunto $\{P_1, \dots P_n\}$ es l i este genera todo $\mathbb{R}^n$ y solo es necesario encontrar σ_i para llegar a la solucion.

Entonces si obtenemos σ_i mediante $\sigma_i = \dfrac{P_i^T A (x^* - x_0)}{P_K^T A P_K}$

solo nos tardamos n pasos para encontrar la solucion

teoría BFGS
Por la
formula Sherman - Morrison-Woodbury

$$A_1 = A + ab^T$$

$$A_1^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}ab^TA^{-1}}{1+b^TA^{-1}a}$$

$$A_1A_1^{-1} = I - \frac{ab^TA^{-1}}{1+b^TA^{-1}a} + ab^TA^{-1} - \frac{(ab^TA^{-1})^2}{1+b^TA^{-1}a}$$

$$= I - \frac{ab^TA^{-1} + (ab^TA^{-1})^2}{1+b^TA^{-1}a} + \frac{ab^TA^{-1}(1+b^TAa)}{1+b^TA^{-1}a}$$

$$= I - \frac{(ab^TA^{-1})^2 + ab^TA^{-1}(b^TAa)}{1+b^TA^{-1}a}$$

$$= I$$

entonces $A_1 = A_1^{-1}$ donde $A_1 = B_1$ y $A_1^{-1} = H_1$

entonces $B_1^{-1} = H_1$

y por inducción tenemos que

$$B_k^{-1} = H_k$$