Si tenemos f una cuadrática convexa $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$

Demo: minimizador sobre $x_k + \alpha p_k$ es $\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$

buscamos que:
$f(x_k + \alpha p_k) < f(x_k)$ proponemos una función $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ ← buscamos el minimizador global de ϕ

al ser f una función convexa tenemos que un mínimo local es un mínimo absoluto

supongamos que p_k es una dirección de descenso

como $\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d f(x_k + \alpha p_k)}{d\alpha}$

regla de la cadena

$\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$ donde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

donde $\gamma(\alpha) = x_k + \alpha p_k \Rightarrow \phi(\alpha)$ tiene derivada dada por ... (*)

$\frac{d\phi}{d\alpha} = \nabla f(\bar{\gamma}(\alpha)) \cdot \frac{d\bar{\gamma}}{d\alpha}$

$\therefore$ por (*) $\frac{d\phi(\alpha)}{d\alpha} = \frac{d f(x_k + \alpha p_k)}{d\alpha} = \nabla f(x + \alpha p_k) p_k$

$\Rightarrow$ el minimizador α^* de esta función debe satisfacer

$$\frac{d\phi(\alpha^*)}{d\alpha} = 0 \Leftrightarrow \nabla f(x + \alpha^* p_k) \cdot p_k = 0$$

vamos a calcular $\nabla f(x + \alpha p_k)$ y para simplificar los cálculos calculemos el gradiente de f.

$f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$ es una función convexa $\Rightarrow$ podemos calcular

$\nabla f(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} x^T Q x - b^T x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2} x^T Q x\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(b^T x\right)$ (*)

En Algebra lineal vimos que la derivada de un escalar respecto a un vector es:

$$\frac{\partial b^T x}{\partial x} = b$$

y la derivada de una forma cuadrática respecto a un vector

$\frac{\partial x^T Q x}{\partial x} = (Q + Q^T) x$ como Q es simétrica dado que f es convexa

$$\Rightarrow \frac{\partial x^T Q x}{\partial x} = 2 Q x$$

sustituyendo en (*)

$\Rightarrow \nabla f(x) = \frac{1}{2}(2 Q x) - b = Qx - b$

con el resultado anterior tenemos que:

$$\nabla f(x_k + \alpha^* p_k) = Q(x_k + \alpha^* p_k) - b$$

por hipótesis tenemos que f es convexa cuadrática y que el minimizador es de una dimensión

entonces $\nabla f(x_k + \alpha^* p_k) p_k = 0$

$$\Leftrightarrow [Q(x_k + \alpha^* p_k) - b]^T p_k = 0$$

$$\Leftrightarrow [Q x_k + \alpha^* Q p_k - b]^T p_k = 0$$

$$\Leftrightarrow [Q x_k - b]^T p_k + \alpha_k p_k^T Q p_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(x_k)^T p_k + \alpha_k p_k^T Q p_k = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_k p_k^T Q p_k = -\nabla f(x_k)^T p_k$$

como Q es definida positiva $\Rightarrow p_k^T Q p_k > 0$

$$\Rightarrow \alpha_k = -\frac{\nabla f(x_k)^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

$$= -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

$\blacksquare$