Examen Final Analisis Aplicado

Arturo González
151135

Teoria.

1.1 Gradiente conjugado

- Demuestre que si $p_1, p_2, \ldots p_l$ satisfacen que:

$$p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$ y A simetrica y positiva definida

$\Rightarrow$ son linealmente independientes.

Supongamos que existe $p_k = \sum_{i=0}^{j} a_i p_i$ con $a_i > 0$

entonces, se tiene que para cualquier $h \leq j$

$$p_h^T A p_k = p_h^T A \left(\sum_{i=0}^{j} a_i p_i \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{j} a_i p_h^T A p_i = p_h^T A p_h \neq 0. \quad \text{por ser } A \text{ pos. def.}$$

pero entonces $p_h^T A p_h \neq 0$ ‼ lo que es una contradiccion

entonces no existe ningún $p_k = \sum_{i=0}^{j} a_i p_i$ con $a_i > 0$

$\Rightarrow p_1, \ldots, p_l$ son l.i.

- Dado este resultado, ¿Por que el gradiente conjugado converge en a lo más n iteraciones?

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrica, x^* la solución y $p_0, \ldots, p_n$ vectors t.q. $p_i^T A p_j = 0$ $\forall i \neq j$; como son l.i

$\Rightarrow \mathbb{R}^n = \text{gen}(\{p_0, \ldots p_n\})$, entonces para cualquier x_0

$\exists$ $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n$ t.q. $x^* - x_0 = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i p_i$

y entonces podemos ver que

$$\alpha_n = \frac{p_n^T A(x^* - x_0)}{p_n^T A p_n} = \frac{p_n^T (b - A x_0)}{p_n^T A p_n}$$

Ahora, de acuerdo al método $x_{n+1} = x_n + a_n p_n$

entonces $x_{n+1} = x_0 + a_0 p_0 + a_1 p_1 + \dots + a_n p_n$

$$\Rightarrow A(x^* - x_0) = A(x^* - x_0 - a_0 p_0 - a_1 p_1 - \dots - a_n p_n) = A(x^* - x_n)$$

$$= b - A x_n = r_n$$

$$\Rightarrow \alpha_n = \frac{p_n^T r_n}{p_n^T A p_n} = a_n$$

por lo que el método converge a lo más en n pasos.

1.2 BFGS

- Verifique que B_{n+1} y H_{n+1} son inversas una de la otra.

Tenemos que $B_{n+1} s_n = y_n$

entonces $B_{n+1} H_{n+1} = B_{n+1} \left[(I - \rho_n s_n y_n^T) H_n (I - \rho_n s_n y_n^T) + \rho_n s_n s_n^T \right]$

$$= \left[B_{n+1} - \rho_n y_n y_n^T \right] H_n \left[I - \rho_n y_n s_n^T \right] + \rho_n y_n s_n^T$$

$$= \left[B_n - \frac{B_n s_n s_n^T B_n}{s_n^T B_n s_n} \right] H_n \left[I - \rho_n y_n s_n^T \right] + \rho_n y_n s_n^T$$

$$= \left[I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} \right] (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= I - \rho_k y_k s_k^T - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} (I - \rho_k y_k s_k^T)$$

como $\dfrac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} \rho_k y_k s_k^T = \dfrac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}$

$$\Rightarrow \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} (I - \rho_k y_k s_k^T) = 0 \quad \therefore \quad B_{k+1} H_{k+1} = I$$