Juan Pablo Alvarez 165815

1.1 Demuestre que si los vectores no nulos $p_1, p_2, \dots, p_l$ satisfacen que:

$$p_i^T A p_j = 0, \quad \forall i \neq j \quad (*)$$

y A es simétrica y positiva definida, entonces los vectores son l.i.

dem

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \in \mathbb{R}$

Supongamos que

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_l p_l = \vec{0}$$

Multiplicamos la igualdad por $p_i^T A$

$$\alpha_1 \cancel{p_i^T A p_1}^{0} + \alpha_2 \cancel{p_i^T A p_2}^{0} + \dots + \alpha_l \cancel{p_i^T A p_l}^{0} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (*) \quad \alpha_i p_i^T A p_i = \vec{0}$$

y como $p_i^T A p_i \neq 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$

De manera análoga podemos multiplicar por $p_j^T A$ con $j=1,\dots,l$

y concluimos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_l = 0$

$\therefore p_1, p_2, \dots, p_l$ son L.I.

- Dado este resultado, ¿Por qué el GC converge en a lo más n iteraciones? El span$\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ genera a todo $\mathbb{R}^n$,

Por el Teorema 5.1, pág. 103 del Nocedal

$$\alpha_k = -\frac{r_k^T p_k}{p_k^T A p_k} \quad \text{coincide con} \quad \sigma_k = \frac{p_k^T A (x^* - x_0)}{p_k^T A p_k}$$

por lo que GC converge en a lo más n iteraciones

(1.2) Verifique que B_{k+1} y H_{k+1} son inversas una de la otra

Tomamos las ecuaciones secantes

$B_{k+1} s_k = y_k$ y $H_{k+1} y_k = s_k$ (∗∗)

Supongamos que $\exists$ B_{k+1}^{-1}, entonces

$$B_{k+1}^{-1} B_{k+1} s_k = B_{k+1}^{-1} y_k$$

$$\Longleftrightarrow \quad B_{k+1}^{-1} y_k = s_k$$

Ahora restamos (∗∗) de la ecuación

$$B_{k+1}^{-1} y_k - H_{k+1} y_k = s_k - s_k$$

$$(B_{k+1}^{-1} - H_{k+1}) y_k = 0$$

y como $y_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k \neq 0$ (condición de curvatura $s_k^T y_k > 0$)

$$\therefore \quad B_{k+1}^{-1} - H_{k+1} = 0$$

$$B_{k+1}^{-1} = H_{k+1}$$

$$B_{k+1} = H_{k+1}^{-1}$$

es decir, B_{k+1} y H_{k+1} son inversas una de la otra