(Parcial 1) Análisis Aplicado I

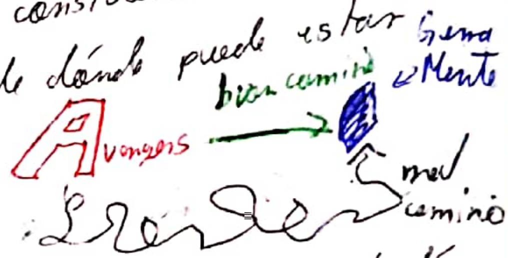
David Isaac López Romero
CU: 173993

1) Búsqueda Lineal

Veamos y entendamos, qué queremos hacer. Imaginemos que tenemos a los Vengadores de Marvel que luchan por revertir el caos y destrucción que causó el titán malvado Thanos, con su guantalete del infinito.

Los Vengadores idearon un plan de recuperar las gemas del infinito viajando en el tiempo, al pasado. Pero enfrentan un problema, si se tardan mucho tiempo, el malvado Thanos puede encontrarlos y arruinarles el plan. Así pues, los héroes deciden que deben minimizar su tiempo para que Thanos no aparezca y arruine el plan.

Los Vengadores no saben qué tan lejos o cerca está Thanos de cada gema del infinito, por lo que no saben cuánto tiempo pueden quedarse en cada lugar de las respectivas gemas. El genio de Iron Man, junto con Bruce Banner, arman un modelo que permite considerar el tiempo de obtención de las gemas junto con los ajustes de dónde puede estar Thanos.

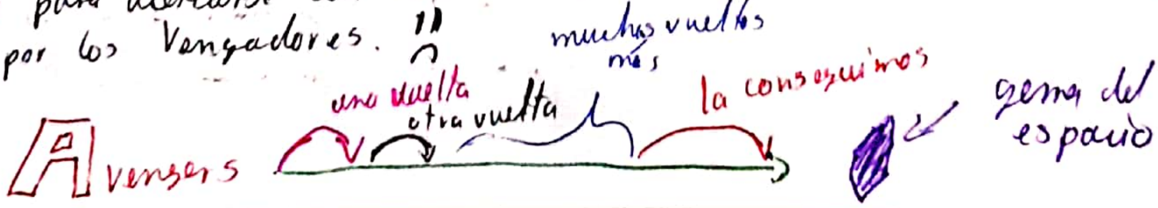


El plan de recolección es seguir el camino más corto.

Queremos hallar el valor más chico de recolección para que le dé tiempo a los Vengadores.

Lo que hacemos es hallar direcciones a donde el tiempo sea menor y lo haremos buscando el camino verde del dibujo. ¡¡Se proponen caminos y el que baje más el tiempo es opción para seguir!!

El problema final es que elijamos siempre el buen camino, entonces hacemos esta idea muchas veces, como una carrera en circuito con vueltas. La carrera en circuito se da en vueltas entonces una vuelta es acercarnos más a la gema. Cada paso es para acercarse con cuidado y llegar bien a la gema. Si nos aceleramos Thanos irá por los Vengadores!!



Entonces, podemos tener mejores del tiempo con mejores rutas o equipamento. Iron Man tiene nuevo traje, Thor recupera su martillo y con sus poderes pueden moverse a mayor velocidad.
Así, los vengadores tienen mejor transporte para las gemas del infinito y van preparados para que Thanos no aparezca.
lo único malo de hacer esto es que se tardarán mucho nuestros héroes en buscar el camino para minimizar su tiempo porque tienen que poner muchas sumas y restas. Perderán mucho tiempo al planear su mejor ruta, pero puede funcionar si Thanos no se da cuenta del plan.
¿ Nuestros héroes podrán salvar el universo?
Sí, si encuentran el camino a todas las gemas. !! ◡

2) $F(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$ cuadrática y convexa.

P.D. El mínimo sobre $x_k + \alpha p_k$ es $\alpha_k = - \dfrac{\nabla F_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$

Buscamos minimizar

$\Phi(\alpha) = F(x_k + \alpha p_k)$, $\alpha > 0$ en α $\left(\min\limits_{\alpha \geq 0} \Phi(\alpha) \right)$

Primero, al ser F cuadrática, resulta que $F \in C^\infty$, así

$$\frac{d}{d\alpha}(\Phi(\alpha)) = \frac{d}{d\alpha} F(x_k + \alpha p_k) \underset{\substack{\text{Regla de} \\ \text{la cadena}}}{=} \nabla F(x_k + \alpha p_k)^T p_k$$

Verificamos la condición de Primer Orden

$$\nabla F(x_k + \alpha p_k)^T p_k = 0 \quad \dots (*)$$

Entonces, si $F(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$, resulta que

$$\nabla F(x) = Qx - b$$

Sustituyendo en $(*)$ resulta que

$$\nabla F(x_k + \alpha p_k)^T p_k = 0 \iff [Q(x_k + \alpha p_k) - b]^T p_k = 0$$

$$\iff [(x_k + \alpha p_k)^T Q^T - b^T] p_k = 0$$

$$\iff [x_k^T Q^T + \alpha p_k^T Q^T - b^T] p_k = 0$$

$\Leftrightarrow \quad [x_k^T Q^T - b^T] p_k + \alpha\, p_k^T Q^T p_k = 0$

$\Leftrightarrow \quad [(Q x_k)^T - b^T] p_k + \alpha\, p_k^T Q\, p_k = 0$

Q simétrica

$\Leftrightarrow \quad [(Q x_k) - b]^T p_k + \alpha\, p_k^T Q\, p_k = 0$

$\Leftrightarrow \quad \nabla F(x_k)^T p_k + \alpha\, p_k^T Q\, p_k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha p_k^T Q\, p_k = -\nabla F(x_k)^T p_k$

Dado que Q es simétrica y definida positiva porque F es convexa.

$p_k^T Q\, p_k > 0 \underset{(\alpha > 0)}{\Leftrightarrow} \alpha\, p_k^T Q\, p_k > 0$

Así pues, se cumple la condición de segundo orden y obtenemos que

$$\alpha_k = -\frac{\nabla F(x_k)^T p_k}{p_k^T Q\, p_k}$$

Como F es cuadrática, convexa y, además, tiene Hessiana positiva definida, resulta que α_k es mínimo.