José Pablo Sánchez
174139

Examen parcial

April 14, 2021

1 Teoría

1.1 ELI5 (20 puntos)

Explícame como si tuviera 5 años. Es un subreddit muy popular donde se explican conceptos muy interesantes de maneras muy sencillas. Richard Feynman tenía una metodologia de aprendizaje que involucra explicar conceptos complejos a un niño. Por ende para esta parte del examen tenemos lo siguiente:

- Explica el algoritmo de búsqueda lineal a un niño de 5 años.

1.2 Demostración (20 puntos)

Si tenemos f una cuadrática convexa $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$. Demuestra que el minimizador de una dimensión sobre la linea $x_k + \alpha p_k$ es:

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

2 Code (60 puntos)

La función de Rosenbrok es una función que se usa bastante para poder probar algoritmos de optimización. Lo que tienen que hacer es :

- Implementar la función de costo para poderla optimizar.
- Usar el algoritmo de Newton para intentar optimizarla.
- Usar el algoritmo de búsqueda lineal para optimizarla.
- **Extra(opcional):** Hagan la gráfica de la función para entender por qué es difícil.

1.1 ELI5 (20 puntos)

Explícame como si tuviera 5 años. Es un subreddit muy popular donde se explican conceptos muy interesantes de maneras muy sencillas. Richard Feynman tenía una metodologia de aprendizaje que involucra explicar conceptos complejos a un niño. Por ende para esta parte del examen tenemos lo siguiente:

- Explica el algoritmo de búsqueda lineal a un niño de 5 años.

Supongamos que quieres encontrar tu tienda de juguetes favorita, pero no sabes en donde está. Este método nos ayudará a encontrarla (la tienda representa el "mínimo")

Con este método, primero escoges una de las calles donde más o menos se acuerda tu mamá podría estar la tienda. Una vez escogida la calle, después hay que elegir cuantos pasos vamos a avanzar sobre esta calle. Una vez escogido esto, avanzamos y vemos que llegamos a una de las tiendas de juguetes que te gustan, pero no es tu favorita, por lo que escogemos partiendo de esta tienda otra calle y otro número de pasos a avanzar y así sucesivamente hasta encontrar tu tienda favorita (o la más parecida).

1.2 Demostración (20 puntos)

Si tenemos f una cuadrática convexa $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$. Demuestra que el minimizador de una dimensión sobre la linea $x_k + \alpha p_k$ es:

$$\alpha_k = -\frac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

dem

Sea $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$ una cuadrática convexa.

Buscamos el minimizador de f sobre la línea $x_k + \alpha p_k$, esto es, buscamos α_k tal que α_k minimice $f(x_k + \alpha_k p_k)$

Sea

$$\varphi(\alpha) = f(x_k + \alpha_k p_k)$$

$$\Rightarrow \varphi'(\alpha) = f'(x_k + \alpha_k p_k)p_k$$

$$= \nabla f(x_k + \alpha_k p_k)^T p_k$$

pero $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$, luego $\nabla f(x) = \frac{1}{2}(2Qx) - b = Qx - b$

$$\Rightarrow \varphi'(\alpha) = (Q(x_k + \alpha_k p_k) - b)^T p_k$$

Queremos encontrar $\hat{\alpha}_k$ tal que $\varphi(\alpha)$ sea mínimo $\Rightarrow \varphi'(\hat{\alpha}_k) = 0$

luego,

$$\varphi'(\hat{\alpha}_k) = 0 \iff (Q(x_k + \hat{\alpha}_k p_k) - b)^T p_k = 0$$

$$\iff (Qx_k + Q\hat{\alpha}_k p_k - b)^T p_k = 0$$

$$\iff (Qx_k)^T p_k + (Q\hat{\alpha}_k p_k)^T p_k - b^T p_k = 0$$

$$\iff (Qx_k - b)^T p_k = -\hat{\alpha}_k (Qp_k)^T p_k$$

$$\iff (Qx_k - b)^T p_k = -\hat{\alpha}_k (p_k^T Q^T p_k)$$

Sabemos que por hipótesis, f es cuadrática convexa, entonces Q es simétrica y definida positiva, luego $p_k^T Q p_k \neq 0$

$$\Rightarrow (Qx_k - b)^T p_k = -\hat{\alpha}_k (p_k^T Q p_k)$$

$$\Rightarrow \qquad \hat{\alpha}_k = \frac{(Qx_k - b)^T p_k}{p_k^T Q p_k}$$

y notemos que $\nabla f(x_k^T) = (Qx_k - b)^T$,

$$\therefore \quad \hat{\alpha}_k = \frac{\nabla f(x_k^T)\, p_k}{p_k^T Q p_k}$$

$\blacksquare$