Alonso Martinez C.

$\boxed{1}$ $p_1, \dots, p_l$ no nulos.

$$p_j^T A p_i = 0 \quad \forall i \neq j$$

A simétrica pos def. $\Rightarrow$ son l.i.

P.D: $\sum_{i=1}^{l} \sigma_i p_i = 0 \Rightarrow \sigma_i = 0 \quad \forall i \quad . \sigma_i \in \mathbb{R}$

Sup. que $\exists\, \sigma_j \neq 0$ t.q

$\sum_{i=1}^{l} \sigma_i p_i = 0$ (p_j es comb. lineal del resto) $= \bot$

Ent. como A es simétrica & pos. def.:

$A \sum_{i=1}^{l} \sigma_i p_i = A0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} A \sigma_i p_i = 0$

multiplicando p_j^T por la izq.

$$\sum_{i=1}^{l} \sigma_i (p_j^T A p_i) = p_j^T 0 = 0$$

Por hip $p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j$

$\therefore \sigma_j (p_j^T A p_j) = 0$

Como A es pos def $\Rightarrow x A x^T \geq 0$

$\Rightarrow \sigma_j (p_j^T A p_j) = 0 \Leftrightarrow \sigma_j = 0$ $\bot$ contradicción

$\therefore \sigma_j = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \sigma_i p_i = 0 \Leftrightarrow \sigma_i = 0$

$\Rightarrow \{p_1, \dots, p_l\}$ es l.i $\blacksquare$

b) ¿Por qué converge ~~se~~ en n iteraciones?

Se mostró en clase que la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ generada por el algoritmo de dirección conjugada converge en a lo más n iteraciones

Usamos lo probado en 1 a), podemos ver a la sucesión $\{p_k\}$ para $k=1,\dots,l$ como pasos del algoritmo.

1.2 BFGS

verificar B_{k+1} & H_{k+1} son inversas una de la otra.

Tenemos $B_{k+1} s_k = y_k$ (p.g 137)

& $H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T$ (6.17)

$\Rightarrow B_{k+1} H_{k+1} = B_{k+1}\left[(I-\rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T\right]$

$= (B_{k+1} - \rho_k y_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$

Por (6.14) $\rho_k = (y_k^T s_k)^{-1}$

$= \left(B_{k+1} - \dfrac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}\right) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$

por (6.19)

$= \left(B_k - \dfrac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \cancel{\dfrac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}} - \cancel{\dfrac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}}\right) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$

$= \left(B_k - \dfrac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}\right) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$

$= \left(I - \dfrac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right) - (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$

$= I - \dfrac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} - \cancel{\rho_k y_k s_k^T} + \dfrac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k} + \cancel{\rho_k y_k s_k^T}$

$= I \Rightarrow H_{k+1} \cdot B_{k+1} = I$