

**Instituto Tecnológico Autónomo de
México**

ANÁLISIS APLICADO I

**MÉTODO DE ELEMENTOS
FINITOS**

Elorza S. Carolina 166780

Sandoval M. Ana Carolina 152808

Solórzano F. Jesús Bernardo 163029

Sosa L. Mario Emilio 151767

Mayo 2021

1 Introducción

Definimos un problema variacional como un problema matemático consistente en buscar máximos y mínimos de funcionales continuos definidos sobre un espacio funcional¹.

Sea Ω un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^2 , una ecuación diferencial del estilo

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u &= 0 \text{ en } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

se puede escribir como un problema variacional (como se verá más adelante).

Ahora, nuestra función u no necesariamente es diferenciable pero si integrable, esto es, tiene una derivada débil. Antes de dar la definición de derivada débil cabe aclarar que entendemos a $\mathcal{L}^2(\Omega)$ como

$$\mathcal{L}^2(\Omega) = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \iint_{\Omega} v^2 dx dy < \infty \right\}$$

Sea $u \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, ($u = u(x_1, x_2)$), se dice que $g \in \mathcal{L}^2(\Omega)$ es una derivada débil de u con respecto a x_i si:

$$\iint_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx dy = - \iint_{\Omega} g v dx dy \quad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

Finalmente, definimos $H^1(\Omega)$ como el espacio que contiene las funciones continuas y lineales por trozos, donde las derivadas referidas en este espacio son débiles. De esta manera,

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in \mathcal{L}^2(\Omega), v = 0 \text{ sobre } \Gamma = \partial\Omega \right\}$$

¹Un espacio funcional es un conjunto de funciones que van del conjunto X al conjunto Y, de una clase dada

2 Método de elementos finitos

Definimos a $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como un polígono y a Γ como su frontera, a los elementos dentro del conjunto los llamaremos nodos, a_i . Supongamos ahora que a un subconjunto de tres nodos $\{a_1, a_2, a_3\}$ lo podemos denominar triángulo.

Ahora, llamaremos triangulación² a un conjunto de triángulos $\{t_i\}_{i=1}^m$ de manera que la unión de todos los elementos sea Ω . Además, habrá que pedir que entre cualquiera dos triángulos, la intersección entre estos sea alguna de las siguientes:

- \emptyset
- Una arista
- Un vértice

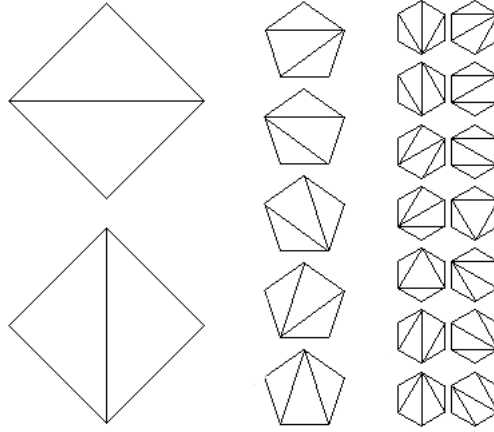


Figure 1: Ejemplos de triangulación

Dado el i -ésimo nodo, a_i , la función nodal asociada $\phi_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, es una función lineal en cada triángulo y está dada por

$$\phi_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

Por tanto, el soporte de ϕ_i está determinado por los triángulos que tienen a a_i como vértice.

Recordando lo anteriormente mencionado, la ecuación diferencial (1) se puede escribir como problema variacional, buscamos encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que:

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dxdy = \iint_{\Omega} f v \, dxdy, \forall v \in H_0^1 \quad (2)$$

²Para obtener la triangulación necesaria se usa el algoritmo el algortimo de *Delauney*

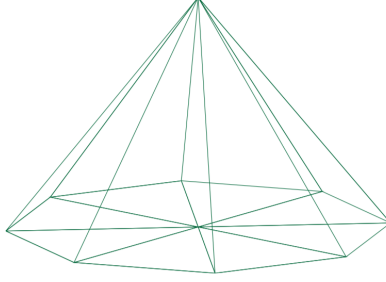


Figure 2: Nodal

Sean $\{x_i\}_{i=1}^n$ los nodos interiores en Ω , $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ funciones nodales y V_h generado por estas; resolver el problema (2) es equivalente a encontrar $\hat{u} \in V_h \subset H_0^1(\Omega)$, de tal manera que:

$$\iint_{\Omega} \nabla \hat{u} \cdot \nabla v \, dxdy = \iint_{\Omega} f v \, dxdy, \forall v \in V_h$$

Esto es equivalente a encontrar los coeficientes $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ tal que se cumpla la siguiente condición

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i a(\phi_i, \phi_j) = \iint_{\Omega} f \phi_j \, dxdy, \text{ para } j=1, \dots, n$$

Para simplificar podemos escribir la igualdad anterior como un sistema lineal de ecuaciones algebraicas donde

$$A\xi = b \tag{3}$$

donde

$$A_{i,j} = a(\phi_i, \phi_j), \xi_i = \alpha_i \text{ y } b_i = \iint_{\Omega} f \phi_i \, dxdy$$

y para calcular las entradas de la matriz A del sistema se tiene lo siguiente:

$$a(\phi_i, \phi_j) = \iint_{\Omega} \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, dxdy = \sum_{t \in T_i \cap T_j} \iint_t \nabla \phi_i \nabla \phi_j \, dxdy$$

donde T_i es el conjunto de triángulos a los que el nodo x_i pertenece, lo que nos dice que la matriz A tiene una estructura rala.³ Una ventaja de este tipo de matrices es que no es necesario almacenar todas sus entradas; en lugar de guardar toda la matriz A basta con guardar solo las entradas distintas de cero, junto con indicadores del lugar que ocupan. Por ejemplo, la información de la matriz:

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

³Matriz de gran tamaño en la que la mayor parte de sus elementos son cero.

se puede guardar de la forma

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & i & j \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{array}$$

lo que puede significar una considerable reducción de almacenamiento.

Para resolver el sistema (3) se implementó el método del gradiente conjugado, el cual resuelve sistemas de ecuaciones lineales de la forma $Ax = b$, donde A es una matriz simétrica definida positiva en $\mathbb{R}^{n \times n}$ y x, b son vectores en \mathbb{R}^n .

2.1 Dimensión 1

Para esta sección implementaremos el MEF para problemas de la forma:

$$-u''(x) = f(x), \quad \forall x \in (0, 1) \quad (4)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (5)$$

Este problema puede resolverse para cualquier intervalo de la forma $[a, b]$, pero en este caso tomaremos el intervalo $[0, 1]$ y tomaremos también una partición uniforme:

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = 1,$$

de tal manera

$$x_i - x_{i-1} = h \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

con h constante.

Para resolver la ecuación (4) transformamos el problema en uno variacional discretizado, lo que se traduce en encontrar $\hat{u} \in V_h$, de tal forma que

$$\int_0^1 \hat{u}(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in V_h,$$

que es equivalente a encontrar los coeficientes ξ_i de tal forma que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \xi_i \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \xi_i \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx, \quad \text{para } j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

La Figura 3 muestra el comportamiento de la función nodal en dimensión 1. Para encontrar $\int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx$, notemos que, dado que las funciones ϕ_i se anulan en gran parte del dominio, se cumple:

$$\int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx = 0 \quad \text{si } |i - j| > 1.$$

Por otro lado, considerando los casos en que $|i - j| \leq 1$, veamos los casos:

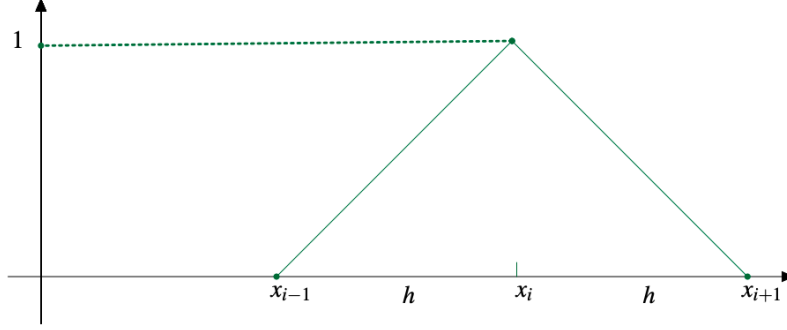


Figure 3: ϕ_i en el intervalo $[x_{i-1}, x_{i+1}]$.

- $j = i - 1$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \phi'_{i-1}(x) \phi'_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi'_{i-1}(x) \phi'_i(x) dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(-\frac{1}{h} \frac{1}{h} \right) dx \\
 &= -\frac{(x_i - x_{i-1})}{h^2} \\
 &= -\frac{1}{h}
 \end{aligned}$$

- $j = i$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \phi_i'^2(x) dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \phi_i'^2(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i'^2(x) dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h^2} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h^2} dx \\
 &= \frac{(x_i - x_{i-1})}{h^2} + \frac{(x_{i+1} - x_i)}{h^2} \\
 &= \frac{2}{h}
 \end{aligned}$$

- $j = i + 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \phi'_{i+1}(x) \phi'_i(x) dx &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi'_{i+1}(x) \phi'_i(x) dx \\
&= \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h} \frac{1}{h} \right) dx \\
&= -\frac{(x_{i+1} - x_i)}{h^2} \\
&= -\frac{1}{h}
\end{aligned}$$

por lo que la matriz A en la ecuación (3) para el problema (4) es de la forma

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

mientras que ξ es el vector de coeficientes a encontrar y las entradas del vector b se calculan como

$$b_i = \int_0^1 f(x) \phi_i(x) dx.$$

Ejemplo 2.1

Para ejemplificar el resultado anterior, consideremos el problema

$$\begin{aligned}
-u''(x) &= \pi^2 \sin(\pi x), \\
u(0) &= u(1) = 0.
\end{aligned}$$

La solución exacta para este problema es conocida y está dada por

$$u(x) = \sin(\pi x).$$

Tomando 11 nodos (10 intervalos uniformes), obtenemos el sistema

$$10 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \xi = b,$$

donde

$$b_i = \int_0^1 \sin(x) \phi_i(x) dx.$$

La Figura 4 muestra la solución exacta y la aproximación lineal, mientras que la Figura 5 contrasta ambos resultados en un intervalo más amplio.

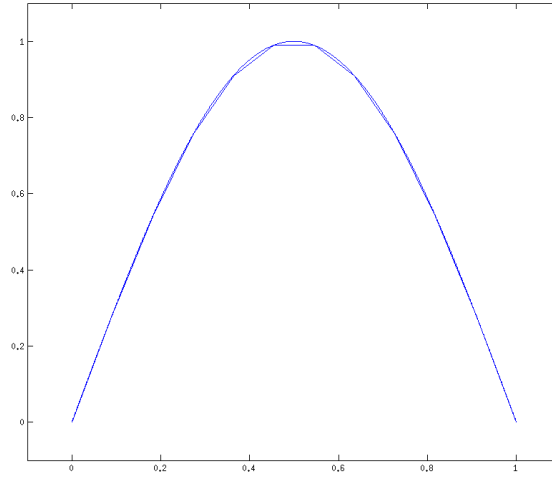


Figure 4: Solución exacta $u(x) = \sin(\pi x)$ y aproximación lineal $\hat{u}(x)$.

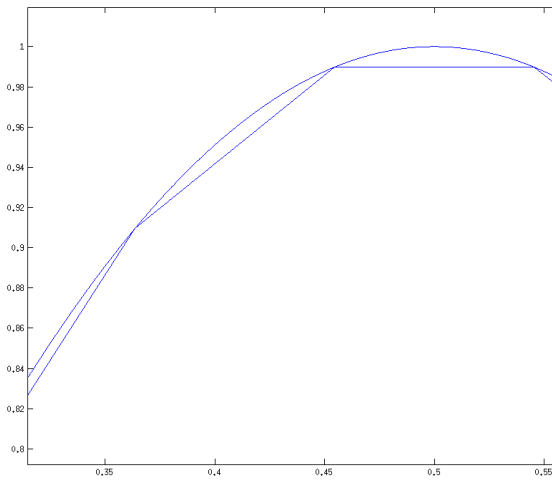


Figure 5: Ampliación en un intervalo de $u(x)$ y $\hat{u}(x)$.

3 Aplicaciones y Ejemplo

El método de elementos finitos es utilizado ampliamente para resolver ecuaciones diferenciales numéricamente provenientes de problemas en ingeniería y

del modelado matemático. Las áreas de interés típicamente son las siguientes:

- **Análisis Estructural:** para determinar los efectos de cargas sobre estructuras físicas y sus componentes. La estructuras sujetas a este tipo de análisis incluye cualquiera que deba soportar cargas, como edificios, puentes, aeronaves y barcos.
- **Transferencia de calor:** para determinar los materiales y las limitaciones de calor que puede soportar una estructura. Generalmente en casos donde se pretende alcanzar un nivel de aislamiento térmico específico.
- **Dinámica de Fluidos:** típicamente en el estudio de la aerodinámica para probar nuevos modelos de aeronaves sin que sea necesaria la construcción de un prototipo físico en todos los caso, así, reduciendo el costo de la investigación y desarrollo.
- **Transporte de masa:** para la rápida eliminación de residuos como para los suministros. Los suministros incluyen una inmensa cantidad de sustancias, por ejemplo, glucosa, oxígeno e iones. Incluso la comunicación de una celda a otra puede tener lugar a través de un sistema de transporte masivo, p. hormonas en el torrente sanguíneo.

3.1 Ejemplo

Primero definimos Ω , g y f como sigue:

$$\Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$g(x,y) = 0$$

$$f(x,y) = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

donde sabemos que la solución es:

$$u(x,y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Para resolver este problema sencillo se toman 2,500 nodos dentro del cuadrado; en estos puntos es donde encontraremos el valor aproximado de la función $u(\alpha \in \mathbb{R}^{2500})$. A continuación se muestra la gráfica de la solución exacta.

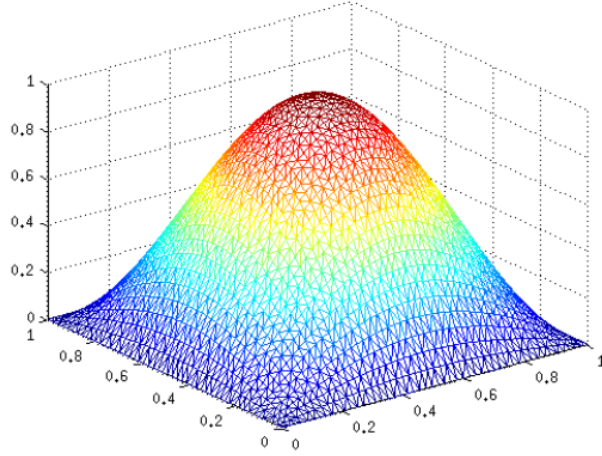


Figure 6: Solución exacta.

4 Código

Este código modela el algoritmo del Método de Elementos Finitos para funciones dinámicas. En este caso, introducimos dos funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} , tales que, queremos encontrar la función \mathbf{u} solución, tal que cumpla:

$$-\Delta \mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ en } \Omega^2 \quad (5.1)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ en } \Gamma = \delta\Omega \quad (5.2)$$

Luego, el código hace el cálculo para aproximar la función \mathbf{u} por medio del Método de Elementos Finitos y así también gráfica la función.

Para esto, primero establecemos las funciones \mathbf{f} y \mathbf{g} , por ejemplo, podemos definir las de la siguiente manera:

$$\Omega = [0,1] \times [0,1]$$

$$g(x,y) = 0$$

$$f(x,y) = -2\pi^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

Posteriormente, definimos la fineza, es decir, el número de puntos que queremos sobre el círculo y el número de círculos para el disco. Ahora, el algoritmo calcula, en función de esta fineza y del número de círculos que ingresamos, los nodos. Así como calcula cuales nodos son nodos frontera y cuales son nodos interiores, además de el número final de triángulos en esta triangulación. Los pasos para la triangulación son los siguientes:

1. Crear los nodos en la frontera, tanto interna como externa.

2. Incrementar poco a poco el radio de los círculos
3. Generar la triangulación con el algoritmo de Dealunay
4. Visitar cada triángulo y determinar si están fuera o dentro del dominio, si están fuera los eliminamos de la triangulación

Ahora procesamos los datos y para cada nodo, encontramos todos sus vecinos (nodos y triángulos). Para esto, iteramos sobre cada nodo y sobre este encontramos sus nodos vecinos y los triángulos vecinos de estos nodos. También clasificamos a todos los triángulos como fronterizos o como interiores.

Construimos el sistema de ecuaciones $Ax=b$ para resolverlos, recibiendo todos estos nodos, triángulos, vecinos, las funciones f y g . Para estos cálculos, usamos el gradiente conjugado, como el que vimos en clase. Aquí, x representa a la solución u .

Finalmente, presentamos la solución u y la graficamos. Así hemos resuelto el sistema dinámico y hemos mostrado la respuesta gráficamente. En este ejemplo:

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

5 Conclusiones

El método que se eligió para resolver nuestra ecuación (3), que se remonta al problema de ecuaciones diferenciales (1), fue el de gradiente conjugado.

Este método tiene muchas aplicaciones en la vida real, por lo que lo consideramos uno de los métodos más importantes que surgieron del Análisis Aplicado. Por ejemplo, distintas aplicaciones de Ingeniería Mecánica, como la aeronáutica, la biomecánica y las industrias de automóviles, utilizan este método para diseñar sus productos. Por ejemplo, este método ayuda a tener una mejor visualización de la resistencia y la rigidez de los productos, así como ayuda a minimizar la cantidad de material, los costos y los pesos de estos productos.

Este método también nos proporciona una visualización detallada de las estructuras, como puentes, edificios o aviones, para determinar los puntos de estrés donde estas estructuras podrían romperse o doblarse. Además, los softwares ya desarrollados para este método proveen simulaciones de amplio rango para controlar la complejidad del modelado y del análisis del sistema. Esto permite que diseños enteros sean contruidos, refinados y optimizados antes de empezar el diseño de la manufactura.

Este método ha mejorado significativamente los estándares de diseño en ingeniería y la metodología de los procesos de diseño en muchas aplicaciones industriales. Además de disminuir drásticamente el tiempo que llevar un producto

de un concepto a la línea de producción.