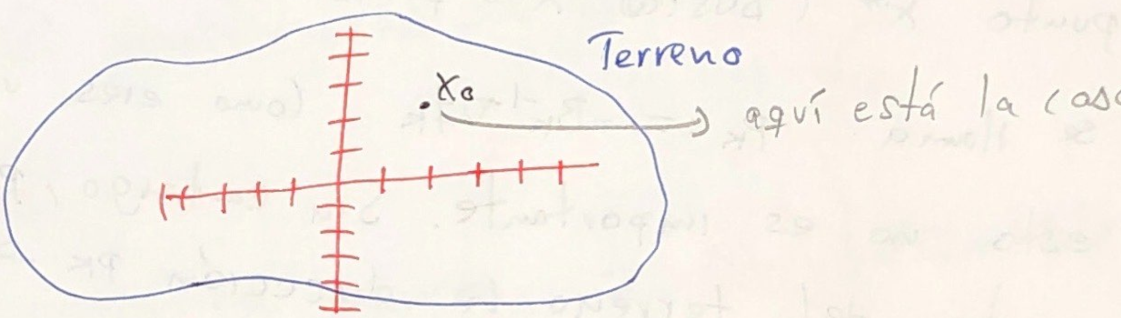
Parcial 1 Análisis Aplicado

Santiago
Alvarez
171886

1.1) Explicarle a un niño el algoritmo de búsqueda lineal:

Imagínate que tienes un terreno muy grande en medio de la nada, rodeado de montañas y bosques. Ya tienes construida tu casa ~~hast~~ en una parte del terreno, la cual se puede ver desde el ~~s~~ cielo con coordenadas (x,y). Nombraremos la localización de tu casa como x_0



Ahora, para poder siempre tener suficiente agua necesitas construir un pozo. El pozo debe estar en la parte más baja del terreno, para que se rellene solito cuando llueva. Además si no está en la parte de hasta ~~abajo~~ abajo, podría pasar que se inunde tu casa de agua porque el pozo se llenó de más;

es por eso que necesitas encontrar el lugar más bajo del terreno para construir el pozo.

Ahora, tu papá te regaló un reloj que te dice la altura sobre nivel del mar de donde estás parado. Así, dado cualquier punto (de tu terreno) x puedes usar tu reloj y saber la altura sobre nivel del mar del punto, que llamaremos $f(x)$ ó altura en $x = f(x)$.

Un vecino te dice que la dirección que lleva al punto x^* (buscas x^*= punto más bajo del terreno) se llama $p_k := -B_k^{-1} \nabla f_k$. Como eres un niño esto no es importante. Sin embargo, para cada punto del terreno la dirección p_k es distinta, por lo que necesitas saber cuantos pasos avanzas en una dirección p_k dada.

lo que buscas entonces es, dada la dirección p_k la altura minimizar $f(x_k + \underbrace{p_k + p_k + p_k + p_k + \dots + p_k}_{\alpha \text{ pasos}})$

usando tu reloj obteniendo los pasos óptimos. Para concluir, usarás un algoritmo

②

que empiezas a caminar desde tu casa (x_0) y resolverás, dada la dirección p_k, la altura $f(x_k + \alpha p_k)$ que te da tu reloj, sabiendo cuántos pasos darás (*) en cada iteración

donde $x_k := x_{k-1} + \alpha_{k-1} p_{k-1}$

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k .$$ → esto es avanzar de un punto de tu terreno a otro, dando α_k pasos.

Así, llegarás al punto de tu terreno que tu reloj marca tiene menor altura de todos, y ¡ahí construirás el pozo!

— o —

1.2) demostración

Sea f cuadrática convexa $\rightarrow$. $f(x) = \frac{1}{2}x^TQx - b^Tx$

p.d. $\min_{\alpha} f(x_k + \alpha p_k)$ resuelto obtiene $\alpha_k = \dfrac{\nabla f_k^T \nabla f_k}{\nabla f_k^T Q \nabla f_k}$

dem. una vez que f es cuadrática convexa, sabemos entonces que Q es definida positiva

i.e. $x^TQx > 0 \quad \forall x \neq 0$

Sea $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha p_k)$

$$\Rightarrow \phi'(\alpha) = 0 \iff \nabla f(x_k + \alpha p_k)^T \cdot p_k = 0 \quad \circledast$$

por otro lado, como $f(x) = \frac{1}{2} x^T Q x - b^T x$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = Qx - b \quad \circledast$$

entonces usando $\circledast$ y $\circledast$ tenemos que

$$\nabla f(x_k + \alpha p_k)^T \cdot p_k = 0$$

$$\iff [Q[x_k + \alpha p_k] - b]^T p_k = 0$$

$$\iff [Qx_k - b]^T p_k + (\alpha Q p_k)^T p_k = 0$$

$\alpha^T = \alpha$ pues $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\iff \underbrace{[Qx_k - b]}_{=\circledast}{}^T p_k + \alpha p_k^T Q p_k = 0$$

$$\iff \nabla f(x_k)^T p_k + \alpha p_k^T Q p_k = 0$$

$$\iff \alpha p_k^T Q p_k = -\nabla f(x_k)^T p_k = -\nabla f_k^T p_k$$

$$\iff \boxed{\alpha^* = \frac{-\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}}$$

$\rightarrow p_k^T Q p_k > 0$ pues Q es definida positiva, $\therefore$ $p_k^T Q p_k$ podemos pasarlo dividiendo

$\therefore$ $\alpha_k = -\dfrac{\nabla f_k^T p_k}{p_k^T Q p_k}$ es el único punto crítico,

y como f es cuadrática convexa, entonces

α_k es un minimizante de la función $\rightarrow$ //