Sebastián Mtz. S.

1)

i) Sean $p_1, p_2, \ldots p_l$ vectores no nulos

$\top$ $p_i^T A p_j = 0$, $\forall\ i \neq j$

Sea A simétrica y positiva definida

<u>P.D.</u> para $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, l\}$

tenemos que $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$

$\forall\ i$

Ahora, $\exists\ \alpha_j \neq 0$, con α_j fija se tiene que

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = \bar{0}$$

$$\Rightarrow A \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = A\bar{0} = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{l} A \alpha_i p_i = \bar{0},$$

$$\Rightarrow p_j^T \sum^{l} \alpha_i A p_i = p_j^T \bar{0}$$, con $j < l$

$$\Rightarrow \sum \alpha_i p_j^T A p_i = \bar{0}$$ y como $p_j^T A p_i = 0\ \forall_{i \neq j}$

$$\Rightarrow \sum \alpha_i p_j^T A p_i = \alpha_i p_j^T A p_j = 0$$

$\Rightarrow \alpha_j p_j^T A p_j = 0 \Leftrightarrow \alpha_j = 0$ $\frac{\forall}{0}$

pues $x^T A x > 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R}^l$

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \;\therefore\; \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = 0$

para $\alpha_i = 0 \;\forall\; i = 1, \dots, l$.

$\therefore \{p_1, \dots, p_l\}$ es l.i.

ii) El teorema nos dice que "para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$ la sucesión $\{x_k\}$ generado por el algoritmo de gradiente conjugado converge a la sucesión x^* del sistema lineal en a lo más n iteraciones"

Observemos que para el sistema $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i$ hace falta considerar la sucesión del método: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$

2) Dem

Queremos que $B_{k+1}H_{k+1} = \mathbb{I}$

$$B_{k+1}H_{k+1} = B_{k+1}\left(\left(\mathbb{I}-\rho_k s_k y_k^T\right)H_k\left(\mathbb{I}-\rho_k y_k s_k^T\right) + \left(\rho_k s_k s_k^T\right)\right)$$

$$= \left[B_{k+1} - \rho_k y_k y_k^T\right] H_k \left(\mathbb{I}-\rho_k y_k s_k^T\right) + \left(\rho_k y_k s_k^T\right)$$

$$= \left(B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}\right) H_k \left(\mathbb{I} - \rho_k y_k s_k^T\right) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= \left(B_k - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right)\left(\mathbb{I} - \rho_k y_k s_k^T\right) H_k + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= \left(\mathbb{I} - \cancel{\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}} - \cancel{\rho_k y_k s_k^T} + \cancel{\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}} + \cancel{\rho_k y_k s_k^T}\right.$$

$$= \mathbb{I} \quad //$$