Examen Final

José de Jesús Emiliano
Ramírez López 170309

1. GC.

Demuestre que si los vectores no nulos $p_1, p_2, p_3, \dots, p_\ell$ satisfacen que:

$$p_i^T A p_j = 0 \ , \ \forall i \neq j$$

y A es simétrica y pos. definida, ent. los vectores son l.i.

Dem:

p.d. $\{p_1, \dots, p_\ell\}$ es un conj. l.i.

p.d $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_i = 0 \implies \alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_i = 0 \implies A \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_i = 0$$

$$\implies \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i A p_i = 0$$

$$\implies p_j^T \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i A p_i = 0 \quad (j \in \{1, \dots, \ell\} \text{ arbitraria})$$

$$\implies \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_j^T A p_i = 0$$

y por propiedad conjugada tenemos que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_j^T A p_i = 0 \implies \alpha_j p_j^T A p_j = 0$$

y como A es pos. def. su forma cuadrática es pos. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, luego $p_j^T A p_j > 0$ lo que implica que $\alpha_j = 0$ y como $j \in \{1, \dots, \ell\}$ fue arbitraria, entonces $\alpha_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, \ell$

$\therefore \{p_1, \dots, p_\ell\}$ es un conj. l.i. ■

1. 2.

el gradiente conjugado converge a lo más n iteraciones porque si el conjunto $\{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ es l.i. entonces puede generar a x^* y por lo tanto la solución puede escribirse en terminos del n-ésimo paso y por ende el algoritmo converge en n pasos.

BFGS

2. Verifique que B_{k+1} y H_{k+1} son inversas la una de la otra

Dem

p.d. $B_{k+1} H_{k+1} = I$. Definimos $B_0^{-1} = H_0$

Luego H.I. $= B_k^{-1} = H_k$

$$B_{k+1} H_{k+1} = B_{k+1}\left((I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T\right)$$

$$= (B_{k+1} - \rho_k B_{k+1} s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k B_k s_k s_k^T)$$

y recordemos que la ecuación de la secante es

$B_{k+1} s_k = y_k$, luego (como $\rho = \frac{1}{y^T s_k}$)

$$= \left(B_{k+1} - \frac{y_k y_k^T}{y^T s_k}\right) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k y_k s_k^T$$

y $B_{k+1} = B_k - \dfrac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \dfrac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}$ por la fórmula

de S-M-W entonces

$$= \left(B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}\right) H_k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{y^T s_k}\right) + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= \left(I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right) \overbrace{B_k H_k}^{= I \text{ por H.I.}} \left(I - \frac{y_k s_k}{y^T s_k}\right) + \rho y_k s_k^T$$

$$\Rightarrow \left(I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right)\left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}\right) + \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}$$

$$= I - \cancel{\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}} - \cancel{\frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}} + \cancel{\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}} + \cancel{\frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}}$$

$$= I$$

$\blacksquare$