Análisis Aplicado   Examen Final   Santiago Alvarez 171886

Teoría

1) GC.

a) p.d. Si $p_1, p_2, \dots, p_\ell$ son t.q. $p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j$

y A es simétrica y positiva def.

$\Rightarrow \{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}$ son l.i.

dem. procederemos por contradicción.

Sup. $\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}$ no son l.i.

$\Rightarrow \exists \; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\ell$ no todos cero $(\beta_i \in \mathbb{R})$ t.q.

$$\beta_1 p_1 + \beta_2 p_2 + \dots + \beta_\ell p_\ell = 0 \quad (A)$$

sin pérdida de generalidad, sup. $\beta_1 \neq 0$.

Multiplicando (A) por $p_1^T A$ obtenemos

$$\beta_1 p_1^T A p_1 + \beta_2 \underbrace{p_1^T A p_2}_{=0} + \dots + \beta_\ell \underbrace{p_1^T A p_\ell}_{=0} = p_1^T A \cdot 0 = 0$$

pues $p_i^T A p_j = 0 \;\forall i \neq j$

$\Rightarrow$ tenemos que

$$\beta_1 q_1^T A p_1 = 0$$

Como por hipótesis, A es positiva definida

$\Rightarrow p_1^T A p_1 > 0$

Sin embargo tenemos que $\beta_1 p_1^T A p_1 = 0$ ¡!

se llega a contradicción pues dijimos s.p.g. $\beta_1 \neq 0$

$\therefore \{p_1, p_2, \dots, p_e\}$ es l. i. //

b) por qué GC converge en, a lo más, n iteraciones?

Sabemos que en GC. la iteración está dada por

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k \quad \text{con} \quad \alpha_k = \frac{-r_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$$

con $r_k := A x_k - b$

Ahora, consideremos el conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$.

una vez que $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ es l. i. (lo probamos $\longrightarrow$

arriba) y su cardinalidad es $n \Rightarrow \{p_1, \dots, p_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$.

Sea x_* la sol. del problema $Ax=b$

Tenemos que $x_* - x_0 \in \mathbb{R}^n$, y como $\{p_1, \dots, p_n\} = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow x_* - x_0 = \beta_1 p_1 + \dots + \beta_n p_n$

entonces $$\beta_i = \frac{p_i^T A (x_* - x_0)}{p_i^T A p_i}$$

Ahora, tenemos que la iteración k está dada por

$$x_k = x_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \dots + \alpha_{k-1} p_{k-1}$$

$2 \Rightarrow x_k - x_0 = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{k-1} p_{k-1}$

multiplicando por $p_k^T A$ obtenemos $p_k^T A (x_k - x_0) = 0$, entonces, debido a que $\{p_i\}_{i=1}^k$ son conjugados,

$p_k^T A (x_k - x_0) = 0$

$\Rightarrow p_k^T A (x_* - x_0) = p_k^T A (x_* - x_k) = p_k^T r_k$

$\therefore$ Tenemos que $\alpha_k = \beta_k$, lo cual implica $\rightarrow$

que GC converge a x_* en, a lo más, n iteraciones, pues se llega a $x_n = x_*$

$\longrightarrow$ G//

2) BFGS

p.d. $B_{k+1} \cdot H_{k+1} = I$

Tenemos $B_{k+1} = B_k - \dfrac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \dfrac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}$

$$H_{k+1} = [I - \rho_k s_k y_k^T] H_k [I - \rho_k y_k s_k^T] + \rho_k s_k s_k^T$$

donde $y_k := \nabla f_{k+1} - \nabla f_k$, $s_k := x_{k+1} - x_k = \alpha_k p_k$

$$\rho_k := \frac{1}{y_k^T s_k}$$

Ahora, dado que $B_k^{-1} = H_k$ tenemos que

$$B_{k+1} H_{k+1} = B_{k+1} [I - \rho_k s_k y_k^T] H_k [I - \rho_k y_k s_k^T] + \rho_k s_k s_k^T$$

$$= [B_{k+1} - \rho_k y_k y_k^T] H_k [I - \rho_k y_k s_k^T] + \rho_k y_k s_k^T$$

$$= \left[B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k \cdot s_k}\right] H_k [I - \rho_k y_k s_k^T] + \rho_k y_k s_k^T$$

$\longrightarrow$

$$= \left[I - \frac{B_K s_K s_K^T}{s_K^T B_K s} \right] \left[I - \rho_K y_K \cdot s_K^T \right] + \rho_K y_K s_K^T$$

$$= \left[I - \cancel{\rho_K y_K s_K^T} \right] - \left[\frac{B_K s_K s_K^T}{s_K^T B_K s_K} \right] \left[I - \rho_K y_K s_K^T \right] \cancel{+\rho_K y_K s_K^T}$$

$$= I - \left[\frac{B_K s_K s_K^T}{s_K^T B_K s_K} \right] \left[I - \rho_K y_K s_K^T \right]$$

$$= I - \left[\frac{B_K s_K s_K^T}{s_K^T B_K s_K} - \frac{B_K s_K s_K^T}{s_K^T B_K s_K} \cdot \rho_K y_K s_K^T \right]$$

$$= I - \left[\frac{B_K s_K s_K^T}{s_K^T B_K s_K} - \frac{1}{s_K^T y_K} \cdot \frac{B_K s_K (s_K^T y_K) s_K^T}{s_K^T B_K s_K} \right]$$

$$= I - \left[\cancel{\frac{B_K s_K s_K^T}{s_K^T B_K s_K}} - \cancel{\frac{B s_K \cdot s_K^T}{s_K^T B_K s_K}} \right] = I$$

$$\therefore \; B_{K+1} \cdot H_{K+1} = I \;\Rightarrow\; B_{K+1} = H_{K+1}^{-1}$$

el otro lado es análogo, por lo tanto,

B_{K+1} y H_{K+1} son inversas entre sí

5