Sección 1.1

Problema 1 $P_i^T A P_j = 0 \ \forall i \neq j$ A → Definida positiva, simétrica

$\Rightarrow \{P_1, \dots, P_k\}$ son LI.

PD si $\exists \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ t.q. $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k = 0$

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j = 1, 2, \dots, k.$

Procedamos por contradicción, supongamos que existe al menos una $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ t.q. $\alpha_j \neq 0$ y tal que $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k = \bar{0}$. Pre-multiplicando por A, resulta que: $\alpha_1 A P_1 + \alpha_2 A P_2 + \dots + \alpha_k A P_k = A\bar{0} \underset{\substack{A \text{ simétrica y} \\ \text{def positiva}}}{=} \bar{0}$. Ahora,

pre-multipliquemos por P_j^T a la expresión, resulta pues:

$$\alpha_1 P_j^T A P_1 + \alpha_2 P_j^T A P_2 + \dots + \alpha_j P_j^T A P_j + \dots + \alpha_k P_j^T A_k = P_j \cdot \bar{0} = \bar{0} \ \dots (1)$$

Pero sabemos que $P_j^T A P_i = 0 \ \forall i \neq j$. Por lo que obtenemos de (1) que: $\alpha_j P_j^T A P_j = 0$.

Luego, A es simétrica positiva, $\Rightarrow x^T A x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Luego, $P_j^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow P_j^T A P_j > 0$

$\Rightarrow \alpha_j P_j^T A P_j = 0 \iff \alpha_j = 0$! pues supusimos que $\alpha_j \neq 0$. Concluimos entonces que

si $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_k P_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$

$\therefore \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ son Linealmente Independientes //

Pregunta 2: Si $\{P_k\}$ es L.I. $\Rightarrow span(\{P_k\}) = \mathbb{R}^n$

sea $x^* - x_0 = \sigma_0 P_0 + \dots + \sigma_{n-1} P_{n-1}$, al premultiplicar por $P_k^T A$ y usando la propiedad de que $P_k^T A P_i = 0 \ \forall k \neq i$

$\therefore$ Al despejar, resulta que $\sigma_k = \dfrac{P_k^T A (x^* - x_0)}{P_k^T A P_k}$

Luego, sabemos también que $x_{k+1} = x_k + \alpha_k P_k$, con $\alpha_k = \dfrac{-r_k^T P_k}{P_k^T A P_k}$ y por la independencia lineal también tenemos

que $x_k = x_0 + \alpha_0 P_0 + \dots + \alpha_{k-1} P_{k-1}$. Al premultiplicar por $P_k^T A$ y usando que $P_k^T A P_i = 0 \ \forall k \neq i$, resulta que $P_k^T A (x_k - x_0) = 0$

$\Rightarrow P_k^T A (x^* - x_0) = P_k^T A (x^* - x_k) = P_k^T (b - A x_k) = -P_k^T r_k$

$\Rightarrow \sigma_k = \dfrac{P_k^T A (x^* - x_0)}{P_k^T A P_k} = \dfrac{-P_k^T r_k}{P_k^T A P_k} = \alpha_k \Rightarrow \underline{\sigma_k = \alpha_k}$

$\Rightarrow$ Esto, en conjunto con la independencia lineal y del hecho de que $x^* - x_0 = \sigma_0 P_0 + \dots + \sigma_{n-1} P_{n-1}$. Concluimos que el gradiente conjugado converge en a lo más n iteraciones //

Escaneado con CamScanner

Problema 1.2

Procedemos por inducción

B.I.

Tomemos B_0, H_0, de tal forma que $B_0 H_0 = I$, por construcción

H.I

Supongamos que H_k y B_k son tales que $H_k B_k = I$ para $k \in \mathbb{N}$.

P.d. $B_{k+1} \cdot H_{k+1} = I$

$$B_{k+1} \cdot H_{k+1} = B_{k+1}\left[\left(I - P_k S_k Y_k^T\right) H_k \left(I - P_k Y_k S_k^T\right) + P_k S_k S_k^T\right]$$

$$= \left(B_{k+1} - B_{k+1} P_k S_k Y_k^T\right) H_k \left(I - P_k Y_k S_k^T\right) + B_{k+1} P_k S_k S_k^T$$

Luego, por la ecuación secante, sabemos que $\underline{B_{k+1} S_k = Y_k}$

Resulta:

$$B_{k+1} H_{k+1} = \left(B_{k+1} - Y_k P_k Y_k^T\right) H_k \left(I - P_k Y_k S_k^T\right) + B_{k+1} \overset{\text{escalar}}{P_k} S_k S_k^T$$

$\left[P_k = \frac{1}{Y_k^T S_k} \rightarrow \text{escalar} \right.$

$$= \left(B_k - \frac{B_k S_k S_k^T B_k}{S_k^T B_k S_k} + \frac{Y_k Y_k^T}{Y_k^T S_k} - \underbrace{\frac{Y_k Y_k^T}{Y_k^T S_k}}_{\text{sustituyendo el valor de } P_k}\right) H_k \left(I - P_k Y_k S_k^T\right) + \overset{\text{escalar}}{P_k} \underbrace{B_{k+1} S_k}_{Y_k} S_k^T$$

$$= \left(B_k - \frac{B_k S_k S_k^T B_k}{S_k^T B_k S_k}\right) H_k \left(I - P_k Y_k S_k^T\right) + P_k Y_k S_k^T$$

Usando Hipótesis de inducción

$$= \left(\overbrace{B_k H_k}^{I} - \frac{B_k S_k S_k^T \overbrace{B_k H_k}^{I}}{S_k^T B_k S_k}\right) \left(I - P_k Y_k S_k^T\right) + P_k Y_k S_k^T$$

$$= \left(I - \frac{B_k S_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k}\right) \left(I - P_k Y_k S_k^T\right) + P_k Y_k S_k^T$$

$$= I - \cancel{P_k Y_k S_k^T} - \underbrace{\frac{B_k S_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k}}_{A} + \underbrace{\frac{B_k S_k S_k^T P_k Y_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k}}_{B} + \cancel{P_k Y_k S_k^T}$$

Para terminar la prueba, basta verificar que A y B se cancelan, para esto, basta demostrar que:

$$B_k S_k S_k^T P_k Y_k S_k^T = B_k S_k S_k^T \iff S_k S_k^T P_k Y_k S_k^T = S_k S_k^T$$

Pero $s_k s_k^T P_k y_k s_k^T = \frac{1}{y_k^T s_k} \cdot s_k s_k^T y_k s_k^T$, pero como

y_k y s_k son vectores columna, $\Rightarrow y_k^T s_k = s_k^T y_k$

$$\Rightarrow \frac{1}{y_k^T s_k} \cdot s_k s_k^T y_k s_k^T = \frac{s_k \overbrace{s_k^T y_k}^{\text{escalar}} s_k^T}{s_k^T y_k} = \frac{\cancel{s_k^T y_k}}{\cancel{s_k^T y_k}} \cdot s_k s_k^T = s_k s_k^T$$

$\Rightarrow s_k s_k^T P_k y_k s_k^T = s_k s_k^T$, como se quería