Examen final

(1) Demuestre que si los vectores no nulos $p_1, p_2, \dots, p_l$ satisfacen que:

$$p_i^T A p_j = 0 \quad \forall i \neq j$$

- A es simétrica y definida positiva $\Rightarrow \{p_1, p_2, \dots, p_j\}$ es l.i.

P.D. $\{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ es l.i

P.D. $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = 0 \iff \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, 2, \dots, l.$

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = 0$$

$\Rightarrow A \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \alpha_i A p_i = 0$ Ahora mult. por p_j^T

$p_j^T \sum_{i=1}^{l} \alpha_i A p_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_j^T A p_i = 0$ pero $p_i^T A p_j = 0, \forall i \neq j$

$\Rightarrow \alpha_j p_j^T A p_j = 0$ pero como A es pos. def.

$\Rightarrow p_j^T A p_j > 0 \Rightarrow \alpha_j p_j^T A p_j = 0 \iff \underline{\underline{\alpha_j = 0}}$ //

el procedimiento es el mismo $\forall j = 1, 2, \dots, l$

$\Rightarrow$ ~~α~~ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_l = 0 \quad \therefore \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ es l.i.

El algoritmo del gradiente conjugado converge a lo más en n iteraciones, porque al ser $\{p_1, p_2, \dots, p_{n-1}\}$ un conjunto l.i, estos pueden generar la solución x^*. Es decir, la solución siempre se podrá escribir en términos del n-ésimo ~~paso~~ paso dado por el algoritmo.

$\boxed{1.2}$ BFGS

Verificar que B_{k+1} y H_{k+1} son inversas la una de la otra.

Primero, definimos $B_0^{-1} = H_0$

Ahora asumimos nuestra hipótesis inductiva: $B_k^{-1} = H_k$

Por demostrar: $B_{k+1}^{-1} = H_{k+1}$ i.e. $B_{k+1} H_{k+1} = I$

Pero

$$H_{k+1} = \left((I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T \right)$$

$$\Rightarrow B_{k+1} H_{k+1} = B_{k+1} \left((I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T \right)$$

$$= (B_{k+1} - \rho_k B_{k+1} s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k B_{k+1} s_k s_k^T$$

Pero sabemos que $B_{k+1} s_k = y_k$ y $\rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$

$\Rightarrow$

$$B_{k+1}H_{k+1} = \left(B_{k+1} - \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}\right) H_k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}\right) + \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}$$

Ahora bien, si recordamos la fórmula de B_{k+1} tenemos que

$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}$$

$$\Rightarrow B_{k+1} - \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}$$

$\Rightarrow$

$$B_{k+1}H_{k+1} = \left(B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k}\right) H_k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}\right) + \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}$$

$$= \left(I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right) B_k H_k \left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}\right) + \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}$$

Ahora usamos nuestra hipótesis inductiva $B_k H_k = I$

$$\Rightarrow \left(I - \frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}\right)\left(I - \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}\right) + \frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}$$

$$= I - \cancel{\frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}} - \cancel{\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}} + \cancel{\frac{B_k s_k s_k^T}{s_k^T B_k s_k}} + \cancel{\frac{y_k s_k^T}{y_k^T s_k}}$$

$$= I \quad \therefore \quad B_{k+1}H_{k+1} = I$$

q.e.d.