Santiago Villarreal A. Final Análisis Aplicado.
174064

1 Teoría

1.1 Gradiente Conjugado.

∘ P.d: si $p_1, \dots, p_\ell$ satisfacen $p_i^T A p_j = 0$; $\forall i \neq j$.
$\Rightarrow$ y A es simétrica y pos def. $\Rightarrow$ los vectores son L.I.

P.d: $\forall\ \alpha_i \in \mathbb{R}$, con $i = 1, \dots, \ell$ se tiene que

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, \ell.$$

Supongamos que $\exists\ \alpha_i \neq 0$. Por otro lado, tenemos que $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_i = 0$ syss $A \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_i = A \cdot \vec{0}$ con A simétrica y positiva definida. $\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} A \alpha_i p_i = \vec{0}$.

Multiplicando por p_j^T por la izquierda, tenemos que:

$$p_j^T \sum_{i=1}^{\ell} A \alpha_i p_i = p_j^T \cdot \vec{0} \quad \text{syss} \quad \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_j^T A p_i = \vec{0}.$$

Habíamos asumido que $p_i^T A p_j = 0 \ \forall i \neq j$

Sin embargo, hay un índice en la suma tal que $i = j$.

$$\Rightarrow \alpha_i p_j^T A p_j + 0 + \dots + 0 = 0. \quad \text{syss} \quad \alpha_j = 0.$$

Pero como A es positiva definida; tenemos que $p_j^T A p_j > 0$

$\therefore \alpha_j = 0$ y entonces $\sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i p_i = 0$ con $\alpha_i = 0 \ \forall i = 1, \dots, \ell$

$\therefore \{p_1, \dots, p_\ell\}$ es un conjunto linealmente independiente. ✗

• ¿Por qué el gradeite conjugado converge, a lo más, en n iteraciones?

TEO:

Para cualquier $x_0 \in \mathbb{R}^n$, la sucesión $\{x_k\}$ que genera el algoritmo de gradeite conjugado converge a la solución x^* del sistema lineal a lo más en n pasos.

Tomando en cuenta el resultado anterior, nuestro sistema de ecuaciones definido por $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i p_i$, tomando en cuenta la sucesión $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$, converge en a lo más n pasos. Esto funciona porque probamos que el conjunto $\{p_1, \ldots, p_l\}$ es L.I.

1.2 BFGS

P.d: B_{k+1} y H_{k+1} son inversas de la otra.

P.d: $B_{k+1} \cdot H_{k+1} = \mathbb{I}$.

Sabemos que $B_{k+1} \cdot S_k = y_k$.

$$\Rightarrow B_{k+1} H_{k+1} = B_{k+1}\left[\left(\mathbb{I} - \rho_k S_k y_k^T\right) H_k \left(\mathbb{I} - \rho_k y_k S_k^T\right) + \rho_k S_k S_k^T\right)\right]$$

$$\text{syss } B_{k+1} H_{k+1} = \left(\left[B_{k+1} - \rho_k y_k y_k^T\right] H_k \left[\mathbb{I} - \rho_k y_k S_k^T\right] + \rho_k S_k S_k^T\right)$$

$$\text{syss } B_{k+1} H_{k+1} = \left(\left(B_k - \frac{B_k S_k S_k^T B_k}{S_k^T B_k S_k}\right) H_k \left(\mathbb{I} - \rho_k y_k S_k^T\right) + \rho_k S_k S_k^T\right)$$

$$\text{syss } B_{k+1} \cdot H_{k+1} = \left(\mathbb{I} - \frac{B_k S_k S_k^T \cdot \mathbb{I}}{S_k^T B_k S_k}\right)\left(\mathbb{I} - \rho_k y_k S_k^T\right) + \rho_k S_k S_k^T$$

$$\text{syss } B_{k+1} H_{k+1} = \mathbb{I} - \frac{B_k S_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k} \underbrace{- \rho_k y_k S_k^T}_{(-)} + \frac{B_k S_k S_k^T \cdot \rho_k y_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k} \underbrace{+ \rho_k S_k S_k^T}_{(+)}$$

$$\text{syss } B_{k+1} H_{k+1} = \mathbb{I} - \frac{B_k S_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k} + \rho_k \frac{B_k S_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k} y_k S_k^T$$

$$\text{syss } B_{k+1} H_{k+1} = \mathbb{I} - \frac{B_k S_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k} + \frac{1}{S_k^T y_k} \frac{B_k S_k (S_k^T y_k) S_k^T}{S_k^T B_k S_k}$$

$$\text{syss } B_{k+1} H_{k+1} = \mathbb{I} - \frac{B_k S_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k} + \frac{B_k S_k S_k^T}{S_k^T B_k S_k} = \mathbb{I}.$$

$\therefore$ B_{k+1} y H_{k+1} son inversas. $\blacksquare$