Cálculo de Probabilidades I

Cuaderno de Ejercicios

Laboratorio

David López, Jordán Linares y Ernesto Barrios

29 de abril de 2022

Versión 0.01

Índice

Prefacio

Hace dos años se iniciaron las sesiones de ejercicios que llaman *laboratorios* de los cursos de Cálculo de Probabilidades I y II. Los encargados de los laboratorios fueron David I. López Romero y L. Jordán L. Linares Pérez, alternándose los cursos. Cada uno de ellos colectó los ejercicios para sus sesiones. Ahora hemos empezado a recuperar las respuestas de los ejercicios y resolveremos una selección de ellos. Este cuaderno es el resultado de ellos.

Cualquier error que identifique, comentario y/o sugerencia serán bienvenido. Diríjalo a Ernesto Barrios `<ebarrios at itam.mx>`.

Ciudad de México, 2 de mayo de 2022

1. Introducción

1. Sean A y B subconjuntos de Ω. Demuestre que
$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

2. Demuestre que si A y B son conjuntos, entonces
$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

3. Demuestre las leyes (o fórmulas) de De Morgan. Si $\{A_i | i \in I\}$ es una colección arbitraria de subconjuntos de Ω, entonces
   a) $\left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$
   b) $\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c$

4. Demuestre que si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω si, y solo si, se satisfacen las siguientes propiedades:
   a) $\emptyset \in \mathcal{F}$
   b) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$
   c) $(A_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

5. Pruebe que el conjunto potencia de $\Omega \neq \emptyset$ arbitrario es una σ-álgebra.

6. Sea $\Omega = \{a, b, c, d\}$ y sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$. Defina la familia $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Determine si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra. Encuentre la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$, que se define por:
$$\sigma\{\mathcal{A}\} = \bigcap_i \{\mathcal{F}_i | \mathcal{F}_i \supset \mathcal{A}\}$$

7. Sean $\mathcal{F}_i$ para $i = 1, \ldots, n$ una colección de σ- álgebras. Defina a
$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$$
   Pruebe que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

   (**Observación:** La demostración en versión infinita es análoga.)

8. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos σ- álgebras de subconjuntos de Ω. Pruebe que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es una σ-algebra. Para ello considere el espacio $\Omega = \{1, 2, 3\}$ y las σ-álgebras $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$.

9. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Pruebe que la colección $\mathcal{F}^C = \{A^c | A \in \mathcal{F}\}$ es una σ-álgebra. Compruebe que $\mathcal{F}^C$ y $\mathcal{F}$ coinciden.

10. (**Opcional**:) Sean Ω y Ω' conjuntos arbitrarios y $f : \Omega \to \Omega'$ una función. Si $B \subset \Omega'$, la imagen inversa de B con respecto a f será

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in B\}$$

Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos Ω', entonces

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{C}\}$$

Demuestre:

a) $f^{-1}(\Omega') = \Omega$.

b) Si B y C son subconjuntos de Ω' entonces $f^{-1}(C - B) = f^{-1}(C) - f^{-1}(B)$. En particular, $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

c) Si $\{B_i, i \in I\}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de Ω', entonces

$$f^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \quad \text{y} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_i B_i\Big) = \bigcap f^{-1}(B_i)$$

d) Si $\mathcal{F}'$ es una σ-álgebra de Ω', entonces la familia

$$f^{-1}(\mathcal{F}') = \{f^{-1}(B) | B \in F'\}$$

es una σ-álgebra de Ω.

Textos de apoyo.

Bartle (1966); Blitzstein and Hwang (2014); Hoel, Port, and Stone (1971); Rincón (2014); Ross (2018).

Referencias

Bartle, R. G. (1966). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Blitzstein, J. K. and J. Hwang (2014). *Intorduction to Probability*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Hoel, P. G., S. C. Port, and C. J. Stone (1971). *Introduction to Probability Theory*. Boston: Houghton Miffling Company.

Rincón, L. (2014). Introducción a la Probabilidad. https://lya.fciencias.unam.mx/lars/Publicaciones/Prob1-2016.pdf. 18/01/2022.

Ross, S. (2018). *A First Course in Probability* (9th ed.). Boston, MA: Pearson.

Respuestas

1. Introducción

1:1. —

1:2. —

1:3. —

1:4. —

1:5. —

1:6. —

1:7. —

1:8. —