

Cálculo de Probabilidades I  
Laboratorio 2  
Instituto Tecnológico Autónomo de México

David Isaac López Romero

29 de septiembre de 2021

## 1. Medida de probabilidad

1. Sean  $\mathbb{P}_1, \dots, \mathbb{P}_n$  medidas de probabilidad sobre  $(\Omega, \mathcal{F})$  y  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  números no negativos tales que  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . Demuestre que la combinación convexa

$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{P}_i$$

es una medida de probabilidad.

2. Supongamos que tenemos dos dados honestos. Resuelva los siguientes incisos:

- a) Calcule la probabilidad de que la suma del resultado de ambos dados sea igual a ocho.
- b) Obtenga la probabilidad de que el resultado del primer dado sea menor al resultado del segundo.
- c) Calcule la probabilidad de que al menos sale un '6'.

3. Sean  $A, B$  y  $C$  tres eventos en el espacio muestral  $\Omega$ . Suponga que

- $A \cup B \cup C = \Omega$ .
- $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$ .
- $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$ .
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$ .

Resuelva los siguientes incisos:

- a) Calcule  $\mathbb{P}(A \cap B)$ .
- b) ¿ $A, B$  y  $C$  forman una partición de  $\Omega$ ?
- c) Encuentre  $\mathbb{P}(C - (A \cup B))$ .
- d) Si  $\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) = \frac{5}{12}$ , halle  $\mathbb{P}(C)$ .

4. Se escoge un número  $a$  al azar dentro del intervalo  $(-1, 1)$  ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática  $ax^2 + x + 1 = 0$  tenga dos raíces reales?
5. Un modelo de una ruleta puede construirse tomando un espacio de probabilidad uniforme sobre una circunferencia de radio 1, de manera que la probabilidad de que el apuntador caiga en un arco de longitud  $s$  es  $s/2\pi$ . Suponga que el círculo se divide en 37 zonas numeradas 1, 2, ..., 37. Calcule la probabilidad de que la ruleta caiga en una zona par.

6. Suponga que un experimento se realiza  $n$  veces. Para cualquier evento  $E$  del espacio muestral, sea  $n(E)$  el número de veces que  $E$  ocurre, y defina  $f(E) = n(E)/n$ . Muestre que  $f$  es una medida de probabilidad. (Es decir, satisface los Axiomas de la Probabilidad.)

7. **Desigualdad de Bonferroni:** Sean  $E$  y  $F$  conjuntos arbitrarios en un espacio de probabilidad. Pruebe que

$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1$$

Asimismo, verifique que si  $\mathbb{P}(E) = 0.9$  y  $\mathbb{P}(F) = 0.8$ , entonces  $\mathbb{P}(E \cap F) \geq 0.7$ .

8. Un estudio sobre el número de sismos mayores a 5 grados en escala Richter que ocurren al año en la Ciudad de México demuestra que la probabilidad de tener  $x + 1$  sismos en un año es  $\frac{1}{3}$  de la probabilidad de tener  $x$  sismos en un año. ¿Cuál es la probabilidad de que en un año ocurran dos o más sismos?