1. Espacios de Probabilidad

1. Sean A y B subconjuntos de Ω. Demuestre que

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

2. Demuestre que si A y B son conjuntos, entonces

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

3. Demuestre las leyes (o fórmulas) de De Morgan. Si $\{A_i | i \in I\}$ es una colección arbitraria de subconjuntos de Ω, entonces

   a) $\left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$

   b) $\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c$

4. Demuestre que si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω si, y solo si, se satisfacen las siguientes propiedades:

   a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

   b) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

   c) $(A_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

5. Pruebe que el conjunto potencia de $\Omega \neq \emptyset$ arbitrario es una σ-álgebra.

6. Sea $\Omega = \{a, b, c, d\}$ y sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$. Defina la familia $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Determine si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra. Encuentre la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$, que se define por:

$$\sigma\{\mathcal{A}\} = \bigcap_i \{\mathcal{F}_i | \mathcal{F}_i \supset \mathcal{A}\}$$

7. Sean $\mathcal{F}_i$ para $i = 1, \ldots, n$ una colección de σ- álgebras. Defina a

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$$

   Pruebe que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

   (**Observación:** La demostración en versión infinita es análoga.)

8. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos σ- álgebras de subconjuntos de Ω. Pruebe que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es una σ-algebra. Para ello considere el espacio $\Omega = \{1, 2, 3\}$ y las σ-álgebras $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$.

9. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Pruebe que la colección $\mathcal{F}^C = \{A^c | A \in \mathcal{F}\}$ es una σ-álgebra. Compruebe que $\mathcal{F}^C$ y $\mathcal{F}$ coinciden.

10. Una varilla de metal de longitud l se rompe en dos puntos elegidos al azar ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elementos así obtenidos formen un triángulo?

11. Se escoge un número al azar dentro del intervalo $(-1, 1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $ax^2 + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales?

12. Un modelo de una ruleta puede construirse tomando un espacio de probabilidad uniforme sobre una circunferencia de radio 1, de manera que la probabilidad de que el apuntador caiga en una arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo se divide en 37 zonas numeradas $1, 2, ..., 37$. Calcule la probabilidad de que la ruleta caiga en una zona par.

13. Suponga que se elige un punto al azar del cuadrado unitario. Sea A el evento que determinado por el triángulo formado por las líneas $y = 0, x = 1, x = y$, y sea B el evento definido por el rectángulo de vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1/2), (0, 1/2)$. Calcule $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

14. Una caja tiene 10 bolas numeradas $1, 2, ..., 10$. Una bola se elige al azar y una segunda bola se elige de las 9 restantes. Encuentre la probabilidad de que los númeross de las 2 bolas difiera en 2 o más.

15. En un bosque hay 20 alces, de los cuales 5 fueron capturados, marcados y liberados. Cierto tiempo después, 4 de los 20 alces fueron capturados ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de estos 4 alces hayan sido marcados anteriormente? ¿Qué supuesto está haciendo para sus cálculos?

16. Suponga que un experimento se realiza n veces. Para cualquier evento E del espacio muestral, sea $n(E)$ el número de veces que E ocurre, y defina $f(E) = n(E)/n$. Muestre que f es una medida de probabilidad. (Es decir, satisface los Axiomas de la Probabilidad.)

17. Si $P(E) = 0.9$ y $P(F) = 0.8$, muestre que $P(E \cap F) \geq 0.7$. En general, pruebe la *desigualdad de Bonferroni*,

$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1$$

18. Sea $(\Omega, S, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde S es una σ-algebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad que asigna probabilidad $p(> 0)$ a cada uno de los puntos de Ω.

    - Muestre que Ω debe tener un número finito de puntos. (**Sugerencia: muestre que Ω no puede tener más de $1/p$ puntos**.)
    - Muestre que si n es el número de puntos de Ω, entonces p debe ser $1/n$.

19. (**Opcional**:) Sean Ω y Ω' conjuntos arbitrarios y $f : \Omega \to \Omega'$ una función. Si $B \subset \Omega'$, la imagen inversa de B con respecto a f será

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in B\}$$

Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos Ω', entonces

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{C}\}$$

Demuestre:

a) $f^{-1}(\Omega') = \Omega$.

b) Si B y C son subconjuntos de Ω' entonces $f^{-1}(C - B) = f^{-1}(C) - f^{-1}(B)$. En particular, $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

c) Si $\{B_i, i \in I\}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de Ω', entonces

$$f^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \quad \text{y} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_i B_i\Big) = \bigcap f^{-1}(B_i)$$

d) Si $\mathcal{F}'$ es una σ-álgebra de Ω', entonces la familia

$$f^{-1}(\mathcal{F}') = \{f^{-1}(B) | B \in F'\}$$

es una σ-álgebra de Ω.

Textos de apoyo.

Bartle (1966); Blitzstein and Hwang (2014); Hoel, Port, and Stone (1971); Rincón (2014); Ross (2018).

Referencias

Bartle, R. G. (1966). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Blitzstein, J. K. and J. Hwang (2014). *Intorduction to Probability*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Hoel, P. G., S. C. Port, and C. J. Stone (1971). *Introduction to Probability Theory*. Boston: Houghton Miffling Company.

Rincón, L. (2014). Introducción a la Probabilidad. `https://lya.fciencias.unam.mx/lars/Publicaciones/Prob1-2016.pdf`. 18/01/2022.

Ross, S. (2018). *A First Course in Probability* (9th ed.). Boston, MA: Pearson.