Cálculo de Probabilidades I

Laboratorio 1

Instituto Tecnológico Autónomo de México

David Isaac López Romero

16 de agosto de 2021

1. Introducción

1. **Una integral importante:** Esta integral se relaciona con la distribución Gamma que se ve al final del curso.
   Para $r \in \mathbb{Z}^+$ y $\lambda > 0$ pruebe que
   $$\int_0^{+\infty} x^r e^{-\lambda x}\, dx = \frac{r!}{\lambda^{r+1}}$$
2. Pruebe para $0 < p < 1$ y $A > 0$
   $$\sum_{x=j}^{\infty} Ap^x = \frac{Ap^j}{1-p}$$
3. Pruebe que para $0 < p < 1$ se cumple que
   $$\sum_{x=0}^{\infty} xp^x = \frac{p}{(1-p)^2}$$
4. Sean A y B subconjuntos de Ω. Demuestre que
   $$A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$$
5. Demuestre que si A y B son conjuntos, entonces
   $$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$
6. Demuestre las leyes (o fórmulas) de De Morgan. Si $\{A_i | i \in I\}$ es una colección arbitraria de subconjuntos de Ω, entonces
   a) $\left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$
   b) $\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c$
7. Demuestre que si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω si, y solo si, se satisfacen las siguientes propiedades:
   a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

b) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

c) $(A_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

8. Pruebe que el conjunto potencia de $\Omega \neq \emptyset$ arbitrario es una σ-álgebra.

9. Sea $\Omega = \{a, b, c, d\}$ y sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$. Defina la familia $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Determine si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra. Encuentre la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$, que se define por:

$$\sigma\{\mathcal{A}\} = \bigcap_i \{\mathcal{F}_i | \mathcal{F}_i \supset \mathcal{A}\}$$

10. Sean $\mathcal{F}_i$ para $i = 1, \ldots, n$ una colección de σ- algebras. Defina a

$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$$

Pruebe que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

(**Observación:** La prueba en versión infinita es análoga.)

11. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos σ- álgebras de subconjuntos de Ω. Pruebe que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es una σ-algebra. Para ello considere el espacio $\Omega = \{1, 2, 3\}$ y las σ-álgebras $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$.

12. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Pruebe que la colección $\mathcal{F}^C = \{A^c | A \in \mathcal{F}\}$ es una σ-álgebra. Compruebe que $\mathcal{F}^C$ y $\mathcal{F}$ coinciden.

13. (*Opcional:) Sean Ω y Ω' conjuntos arbitrarios y $f : \Omega \to \Omega'$ una función. Si $B \subset \Omega'$, la imagen inversa de B con respecto a f será
$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in B\}$$
Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos Ω', entonces
$$f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{C}\}$$
Demuestre:

a) $f^{-1}(\Omega') = \Omega$.

b) Si B y C son subconjuntos de Ω' entonces $f^{-1}(C - B) = f^{-1}(C) - f^{-1}(B)$. En particular, $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

c) Si $\{B_i, i \in I\}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de Ω', entonces
$$f^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \quad \text{y} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_i B_i\Big) = \bigcap f^{-1}(B_i)$$

d) Si $\mathcal{F}'$ es una σ-álgebra de Ω', entonces la familia
$$f^{-1}(\mathcal{F}') = \{f^{-1}(B) | B \in F'\}$$
es una σ-álgebra de Ω.