2. Espacios de Probabilidad

1. Una varilla de metal de longitud l se rompe en dos puntos elegidos al azar ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elementos así obtenidos formen un triángulo?

2. Se escoge un número al azar dentro del intervalo $(-1, 1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $ax^2 + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales?

3. Un modelo de una ruleta puede construirse tomando un espacio de probabilidad uniforme sobre una circunferencia de radio 1, de manera que la probabilidad de que el apuntador caiga en una arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo se divide en 37 zonas numeradas $1, 2, ..., 37$. Calcule la probabilidad de que la ruleta caiga en una zona par.

4. Suponga que se elige un punto al azar del cuadrado unitario. Sea A el evento que determinado por el triángulo formado por las líneas $y = 0, x = 1, x = y$, y sea B el evento definido por el rectángulo de vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1/2), (0, 1/2)$. Calcule $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

5. Una caja tiene 10 bolas numeradas $1, 2, ..., 10$. Una bola se elige al azar y una segunda bola se elige de las 9 restantes. Encuentre la probabilidad de que los númeross de las 2 bolas difiera en 2 o más.

6. En un bosque hay 20 alces, de los cuales 5 fueron capturados, marcados y liberados. Cierto tiempo después, 4 de los 20 alces fueron capturados ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de estos 4 alces hayan sido marcados anteriormente? ¿Qué supuesto está haciendo para sus cálculos?

7. Suponga que un experimento se realiza n veces. Para cualquier evento E del espacio muestral, sea $n(E)$ el número de veces que E ocurre, y defina $f(E) = n(E)/n$. Muestre que f es una medida de probabilidad. (Es decir, satisface los Axiomas de la Probabilidad.)

8. Si $P(E) = 0.9$ y $P(F) = 0.8$, muestre que $P(E \cap F) \geq 0.7$. En general, pruebe la *desigualdad de Bonferroni*,

$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1$$

9. Sea $(\Omega, S, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde S es una σ-algebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad que asigna probabilidad $p(> 0)$ a cada uno de los puntos de Ω.

   - Muestre que Ω debe tener un número finito de puntos. (**Sugerencia: muestre que Ω no puede tener más de $1/p$ puntos**.)
   - Muestre que si n es el número de puntos de Ω, entonces p debe ser $1/n$.

10. Sean $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números no negativos tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Demuestre que la combinación convexa
$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{P}_i$$
es una medida de probabilidad.

11. Supongamos que tenemos dos dados honestos. Resuelva los siguientes incisos:

    a) Calcule la probabilidad de que la suma del resultado de ambos dados sea igual a ocho.

    b) Obtenga la probabilidad de que el resultado del primer dado sea menor al resultado del segundo.

    c) Calcule la probabilidad de que al menos sale un '6'.

12. Sean A, B y C tres eventos en el espacio muestral Ω. Suponga que

    - $A \cup B \cup C = \Omega$.
    - $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.
    - $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$.
    - $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$.

    Resuelva los siguientes incisos:

    a) Calcule $\mathbb{P}(A \cap B)$.

    b) ¿A, B y C forman una partición de Ω?

    c) Encuentre $\mathbb{P}(C - (A \cup B))$.

    d) Si $\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) = \frac{5}{12}$, halle $\mathbb{P}(C)$.

13. Se escoge un número a al azar dentro del intervalo $(-1, 1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $ax^2 + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales?

14. Un modelo de una ruleta puede construirse tomando un espacio de probabilidad uniforme sobre una circunferencia de radio 1, de manera que la probabilidad de que el apuntador caiga en una arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo se divide en 37 zonas numeradas $1, 2, ..., 37$. Calcule la probabilidad de que la ruleta caiga en una zona par.

15. Suponga que un experimento se realiza n veces. Para cualquier evento E del espacio muestral, sea $n(E)$ el número de veces que E ocurre, y defina $f(E) = n(E)/n$. Muestre que f es una medida de probabilidad. (Es decir, satisface los Axiomas de la Probabilidad.)

16. **Desigualdad de Bonferroni:** Sean E y F conjuntos arbitrarios en un espacio de probabilidad. Pruebe que

$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1$$

Asimismo, verifique que si $\mathbb{P}(E) = 0.9$ y $\mathbb{P}(F) = 0.8$, entonces $P(E \cap F) \geq 0.7$.

17. Un estudio sobre el número de sismos mayores a 5 grados en escala Richter que ocurren al año en la Ciudad de México demuestra que la probabilidad de tener $x + 1$ sismos en un año es $\frac{1}{3}$ de la probabilidad de tener x sismos en un año. ¿Cuál es la probabilidad de que en un año ocurran dos o más sismos?

Jordán

18. Pruebe *la desigualdad de Boole.*

$$P(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

19. Considere una sucesión de eventos $A_1, A_2, ...$ Muestre que si $\mathbb{P}(A_i) = 1$, para todo $i > 1$, entonces $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

20. Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado hasta que salga un 6. En ese momento el experimento termina ¿Cuál es el espacio muestral del experimento? Sea E_n el evento de que n lanzamientos son necesarios para completar el experimento ¿Qué puntos del espacio muestral pertenecen a E_n? ¿Qué es $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$?

21. Se lanzan un par de dados.

    a) ¿Cúal es la probabilidad de que la salida del segundo dado sea mayor que la del primero?

    b) Se lanzan un par de dados hasta que sale un 5 ó un 7 ¿Cuál es la probabilidad de que salga primero el 5?

22. Una escuela ofrece clases de tres idiomas: inglés, francés y alemán. Las clases están abiertas a todos los 100 estudiantes en la escuela. Hay 28 alumnos en la clase de inglés, 26 en la de francés, y 16 en la de alemán. Hay 12 estudiantes llevando inglés y francés, 4 llevando ingléss y alemánn, y 6 cursando alemán y francéss. Hay además 3 estudiantes llevando los 3 idiomas.

    a) Si se elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que no esté llevando ninguno de los idiomas?

    b) Si se selecciona aleatoriamente un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que esté estudiando un idioma exactamente?

c) Si 2 estudiantes se seleccionan al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno esté llevando una clase de idiomas.

23. Un sistema consiste en 5 componentes, las cuales están trabajando apropiadamente o están fallando. Considere el experimento de observar el estado de cada una de las componentes y sea la salida del experimento un vector de la forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, donde x_i es 0 ó 1, dependiendo de que la componente *i-ésima* $(i = 1, ..., 5)$ ha fallado o esté trabajando, respectivamente.

    a) ¿Cuántos elementos hay en el espacio muestral?

    b) Suponga que el sistema trabaja si 1 y 2 trabajan, o si las componentes 3 y 4 están ambas trabajando, o bien, si las componentes 1, 3 y 5 están todas trabajando. Sea W el evento *el sistema funciona*. Especifique todos los elementos de W.

    c) Sea A el evento que denota cuando las componentes 4 y 5 *han fallado* ¿Cuántos elementos tiene el evento A?

24. Determine el número de distintos arreglos $(x_1, ..., x_n)$, tales que x_i es 0 ó 1 y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

Soluciones

1. Definimos, los siguientes conjuntos

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - A_1$$

$$...$$

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \quad n = 2, 3, ...$$

Luego, utilizaremos las siguientes 3 propiedades para demostrar la proposición final

a)

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

b)

$$B_n \cap B_m =, n \neq m$$

c)
$$B_n \subseteq A_n$$

Es así como concluimos lo siguiente

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \stackrel{a}{=} \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \stackrel{c}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Utilizando la proposición anterior

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c) = 1$$

3. Notemos que

   a) El espacio muestral del experimento está dado por:

   $$\Omega = \{(6), (1,6), ..., (5,6), (1,1,6), ...\}$$

   b) Pertenecen todos aquellos eventos en donde no cayó un 6 hasta el n-ésimo tiro.

   c) Si $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ significa que eventualmente cae el dado, entonces $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ significa que nunca caerá.

4. Sean d_1, d_2 las posibles salidas del dado 1 y del dado 2. Nuestro evento de interés está dado por:

$$A = \{d_1, d_2 \in \Omega \,|\, d_2 > d_1\} = \{(2,1), (3,2), (3,1), (4,1), ..., (4,3), (5,1), ..., (5,4), (6,1), ..., (6,5)\}$$

Luego, por el enfoque de probabilidad clásica, obtenemos

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{6 \cdot 6}$$

5. Sean I, F, A los eventos donde un alumno participa en la clase de inglés, francés, y alemán respectivamente. Notemos que

   a)
   $$\mathbb{P}(I^c \cap \ F^c \cap A^c) = 1 - \mathbb{P}(I \cup F \cup A)$$
   $$= 1 - [\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(I \cap F) - \mathbb{P}(I \cap A) - \mathbb{P}(F \cap A) + \mathbb{P}(I \cap F \cap A)]$$
   $$= 28 + 26 + 16 - 12 - 4 - 6 + 3 = 51$$

   b) Sea B el evento tal que un estudiante esté llevando al menos 1 idioma, entonces
   $$\mathbb{P}(B) = \frac{15 + 11 + 9}{100} = \frac{35}{100}$$

c) Sea C el evento donde al menos 1 estudiante, de dos elegidos aleatoriamente, esté llevando una clase de idiomas

$$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c) = 1 - \frac{49}{100} \cdot \frac{48}{99}$$

6. a) El número de elementos totales en el espacio muestral Ω está dado por $|\Omega| = 2^5$.

   b) Sea W el evento donde el sistema trabaja,

$$W = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \Omega|$$

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, 1, X_3, X_4, X_5)$$
$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (X_1, X_2, 1, 1, X_5)$$
$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, X_2, 1, X_4, X_5)\}$$

   c) El número de elementos de A está dado por $|A| = 2^3$.

7. Supongamos primero que $k = 2$, entonces podemos componer una tupla $(1, 1, X_3, ..., X_n)$, y el número de distintos arreglos que se pueden formar es de 2^{n-2}.

   Suponiendo ahora que $k = 3$, entonces podemos hacer una tupla $(1, 1, 1, x_4, ..., X_n)$, y el número de distintos arreglos que se pueden formar es de 2^{n-3}.

   Luego, es fácil concluir que el número de distintos arreglos para que se cumpla la condición está dado por 2^{n-k}.

Textos de apoyo.

Bartle (1966); Blitzstein and Hwang (2014); Hoel, Port, and Stone (1971); Rincón (2014); Ross (2018).

Referencias

Bartle, R. G. (1966). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Blitzstein, J. K. and J. Hwang (2014). *Intorduction to Probability*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Hoel, P. G., S. C. Port, and C. J. Stone (1971). *Introduction to Probability Theory*. Boston: Houghton Miffling Company.

Rincón, L. (2014). Introducción a la Probabilidad. `https://lya.fciencias.unam.mx/lars/Publicaciones/Prob1-2016.pdf`. 18/01/2022.

Ross, S. (2018). *A First Course in Probability* (9th ed.). Boston, MA: Pearson.