Cálculo de Probabilidades I

Cuaderno de Ejercicios

Laboratorio

David López, Jordán Linares y Ernesto Barrios

17 de mayo de 2022

Versión 0.03

Índice

Prefacio

Hace dos años se iniciaron las sesiones de ejercicios que llaman *laboratorios* de los cursos de Cálculo de Probabilidades I y II. Los encargados de l os laboratorios fueron David I. López Romero y L. Jordán L. Linares Pérez, alternándose los cursos. Cada uno de ellos colectó los ejercicios para sus sesiones. Ahora hemos empezado a recuperar las respuestas de los ejercicios y resolveremos una selección de ellos. Este cuaderno es el resultado de ellos.

Cualquier error que identifique, comentario y/o sugerencia serán bienvenido. Diríjalo a Ernesto Barrios `<ebarrios at itam.mx>`.

Ciudad de México, 2 de mayo de 2022

1. Introducción

1. Sean A y B subconjuntos de Ω. Demuestre que
$$A \subseteq B \Longleftrightarrow B^c \subseteq A^c$$

2. Demuestre que si A y B son conjuntos, entonces
$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

3. Demuestre las leyes (o fórmulas) de De Morgan. Si $\{A_i | i \in I\}$ es una colección arbitraria de subconjuntos de Ω, entonces

   a) $\left(\bigcup_i A_i\right)^c = \bigcap_i A_i^c$

   b) $\left(\bigcap_i A_i\right)^c = \bigcup_i A_i^c$

4. Demuestre que si $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω si, y solo si, se satisfacen las siguientes propiedades:

   a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

   b) $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$

   c) $(A_n)_{n=1}^{+\infty} \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

5. Pruebe que el conjunto potencia de $\Omega \neq \emptyset$ arbitrario es una σ-álgebra.

6. Sea $\Omega = \{a, b, c, d\}$ y sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$. Defina la familia $\mathcal{A} = \{A, B\}$. Determine si $\mathcal{A}$ es σ-álgebra. Encuentre la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$, que se define por:
$$\sigma\{\mathcal{A}\} = \bigcap_i \{\mathcal{F}_i | \mathcal{F}_i \supset \mathcal{A}\}$$

7. Sean $\mathcal{F}_i$ para $i = 1, \ldots, n$ una colección de σ- álgebras. Defina a
$$\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$$

   Pruebe que $\mathcal{F}$ es σ-álgebra.

   (**Observación:** La demostración en versión infinita es análoga.)

8. Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos σ- álgebras de subconjuntos de Ω. Pruebe que $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ no necesariamente es una σ-algebra. Para ello considere el espacio $\Omega = \{1, 2, 3\}$ y las σ-álgebras $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, \Omega\}$.

9. Sea $\mathcal{F}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Pruebe que la colección $\mathcal{F}^C = \{A^c | A \in \mathcal{F}\}$ es una σ-álgebra. Compruebe que $\mathcal{F}^C$ y $\mathcal{F}$ coinciden.

10. (**Opcional**:) Sean Ω y Ω' conjuntos arbitrarios y $f : \Omega \to \Omega'$ una función. Si $B \subset \Omega'$, la imagen inversa de B con respecto a f será

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | f(\omega) \in B\}$$

Si $\mathcal{C}$ es una familia de subconjuntos Ω', entonces

$$f^{-1}(\mathcal{C}) = \{f^{-1}(B) | B \in \mathcal{C}\}$$

Demuestre:

a) $f^{-1}(\Omega') = \Omega$.

b) Si B y C son subconjuntos de Ω' entonces $f^{-1}(C-B) = f^{-1}(C) - f^{-1}(B)$. En particular, $f^{-1}(B^c) = [f^{-1}(B)]^c$ y $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

c) Si $\{B_i, i \in I\}$ es una familia arbitraria de subconjuntos de Ω', entonces

$$f^{-1}\Big(\bigcup_i B_i\Big) = \bigcup_i f^{-1}(B_i) \quad \text{y} \quad f^{-1}\Big(\bigcap_i B_i\Big) = \bigcap f^{-1}(B_i)$$

d) Si $\mathcal{F}'$ es una σ-álgebra de Ω', entonces la familia

$$f^{-1}(\mathcal{F}') = \{f^{-1}(B) | B \in F'\}$$

es una σ-álgebra de Ω.

Textos de apoyo.

Bartle (1966); Blitzstein and Hwang (2014); Hoel, Port, and Stone (1971); Rincón (2014); Ross (2018).

2. Espacios de Probabilidad

1. Una varilla de metal de longitud l se rompe en dos puntos elegidos al azar ¿Cuál es la probabilidad de que los tres elementos así obtenidos formen un triángulo?

2. Se escoge un número al azar dentro del intervalo $(-1, 1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $ax^2 + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales?

3. Un modelo de una ruleta puede construirse tomando un espacio de probabilidad uniforme sobre una circunferencia de radio 1, de manera que la probabilidad de que el apuntador caiga en una arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo se divide en 37 zonas numeradas $1, 2, ..., 37$. Calcule la probabilidad de que la ruleta caiga en una zona par.

4. Suponga que se elige un punto al azar del cuadrado unitario. Sea A el evento que determinado por el triángulo formado por las líneas $y = 0, x = 1, x = y$, y sea B el evento definido por el rectángulo de vértices $(0, 0), (1, 0), (1, 1/2), (0, 1/2)$. Calcule $P(A \cap B)$ y $P(A \cup B)$.

5. Una caja tiene 10 bolas numeradas $1, 2, ..., 10$. Una bola se elige al azar y una segunda bola se elige de las 9 restantes. Encuentre la probabilidad de que los númeross de las 2 bolas difiera en 2 o más.

6. En un bosque hay 20 alces, de los cuales 5 fueron capturados, marcados y liberados. Cierto tiempo después, 4 de los 20 alces fueron capturados ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de estos 4 alces hayan sido marcados anteriormente? ¿Qué supuesto está haciendo para sus cálculos?

7. Suponga que un experimento se realiza n veces. Para cualquier evento E del espacio muestral, sea $n(E)$ el número de veces que E ocurre, y defina $f(E) = n(E)/n$. Muestre que f es una medida de probabilidad. (Es decir, satisface los Axiomas de la Probabilidad.)

8. Si $P(E) = 0.9$ y $P(F) = 0.8$, muestre que $P(E \cap F) \geq 0.7$. En general, pruebe la *desigualdad de Bonferroni*,

$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1$$

9. Sea $(\Omega, S, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad donde S es una σ-algebra de subconjuntos de Ω y $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad que asigna probabilidad $p(> 0)$ a cada uno de los puntos de Ω.

   - Muestre que Ω debe tener un número finito de puntos. (**Sugerencia: muestre que Ω no puede tener más de $1/p$ puntos**.)
   - Muestre que si n es el número de puntos de Ω, entonces p debe ser $1/n$.

10. Sean $\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_n$ medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F})$ y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ números no negativos tales que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Demuestre que la combinación convexa
$$\mathbb{P} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{P}_i$$
es una medida de probabilidad.

11. Supongamos que tenemos dos dados honestos. Resuelva los siguientes incisos:

    a) Calcule la probabilidad de que la suma del resultado de ambos dados sea igual a ocho.

    b) Obtenga la probabilidad de que el resultado del primer dado sea menor al resultado del segundo.

    c) Calcule la probabilidad de que al menos sale un '6'.

12. Sean A, B y C tres eventos en el espacio muestral Ω. Suponga que

    - $A \cup B \cup C = \Omega$.
    - $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$.
    - $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{3}$.
    - $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{6}$.

    Resuelva los siguientes incisos:

    a) Calcule $\mathbb{P}(A \cap B)$.

    b) ¿A, B y C forman una partición de Ω?

    c) Encuentre $\mathbb{P}(C - (A \cup B))$.

    d) Si $\mathbb{P}(C \cap (A \cup B)) = \frac{5}{12}$, halle $\mathbb{P}(C)$.

13. Se escoge un número a al azar dentro del intervalo $(-1, 1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que la ecuación cuadrática $ax^2 + x + 1 = 0$ tenga dos raíces reales?

14. Un modelo de una ruleta puede construirse tomando un espacio de probabilidad uniforme sobre una circunferencia de radio 1, de manera que la probabilidad de que el apuntador caiga en una arco de longitud s es $s/2\pi$. Suponga que el círculo se divide en 37 zonas numeradas $1, 2, ..., 37$. Calcule la probabilidad de que la ruleta caiga en una zona par.

15. Suponga que un experimento se realiza n veces. Para cualquier evento E del espacio muestral, sea $n(E)$ el número de veces que E ocurre, y defina $f(E) = n(E)/n$. Muestre que f es una medida de probabilidad. (Es decir, satisface los Axiomas de la Probabilidad.)

16. **Desigualdad de Bonferroni:** Sean E y F conjuntos arbitrarios en un espacio de probabilidad. Pruebe que

$$\mathbb{P}(E \cap F) \geq \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - 1$$

Asimismo, verifique que si $\mathbb{P}(E) = 0.9$ y $\mathbb{P}(F) = 0.8$, entonces $P(E \cap F) \geq 0.7$.

17. Un estudio sobre el número de sismos mayores a 5 grados en escala Richter que ocurren al año en la Ciudad de México demuestra que la probabilidad de tener $x + 1$ sismos en un año es $\frac{1}{3}$ de la probabilidad de tener x sismos en un año. ¿Cuál es la probabilidad de que en un año ocurran dos o más sismos?

Jordán

18. Pruebe *la desigualdad de Boole.*

$$P(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

19. Considere una sucesión de eventos $A_1, A_2, ...$ Muestre que si $\mathbb{P}(A_i) = 1$, para todo $i > 1$, entonces $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$.

20. Un experimento aleatorio consiste en lanzar un dado hasta que salga un 6. En ese momento el experimento termina ¿Cuál es el espacio

muestral del experimento? Sea E_n el evento de que n lanzamientos son necesarios para completar el experimento ¿Qué puntos del espacio muestral pertenecen a E_n? ¿Qué es $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$?

21. Se lanzan un par de dados.

    a) ¿Cúal es la probabilidad de que la salida del segundo dado sea mayor que la del primero?

    b) Se lanzan un par de dados hasta que sale un 5 ó un 7 ¿Cuál es la probabilidad de que salga primero el 5?

22. Una escuela ofrece clases de tres idiomas: inglés, francés y alemán. Las clases están abiertas a todos los 100 estudiantes en la escuela. Hay 28 alumnos en la clase de inglés, 26 en la de francés, y 16 en la de alemán. Hay 12 estudiantes llevando inglés y francés, 4 llevando ingléss y alemánn, y 6 cursando alemán y francéss. Hay además 3 estudiantes llevando los 3 idiomas.

    a) Si se elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que no esté llevando ninguno de los idiomas?

    b) Si se selecciona aleatoriamente un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que esté estudiando un idioma exactamente?

    c) Si 2 estudiantes se seleccionan al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno esté llevando una clase de idiomas.

23. Un sistema consiste en 5 componentes, las cuales están trabajando apropiadamente o están fallando. Considere el experimento de observar el estado de cada una de las componentes y sea la salida del experimento un vector de la forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, donde x_i es 0 ó 1, dependiendo de que la componente *i-ésima* $(i = 1, ..., 5)$ ha fallado o esté trabajando, respectivamente.

    a) ¿Cuántos elementos hay en el espacio muestral?

    b) Suponga que el sistema trabaja si 1 y 2 trabajan, o si las componentes 3 y 4 están ambas trabajando, o bien, si las componentes 1, 3 y 5 están todas trabajando. Sea W el evento *el sistema funciona*. Especifique todos los elementos de W.

    c) Sea A el evento que denota cuando las componentes 4 y 5 *han fallado* ¿Cuántos elementos tiene el evento A?

24. Determine el número de distintos arreglos $(x_1, ..., x_n)$, tales que x_i es 0 ó 1 y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

Soluciones

1. Definimos, los siguientes conjuntos

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 - A_1$$

$$...$$

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k, \ \ n = 2, 3, ...$$

Luego, utilizaremos las siguientes 3 propiedades para demostrar la proposición final

a)
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$$

b)
$$B_n \cap B_m =, n \neq m$$

c)
$$B_n \subseteq A_n$$

Es así como concluimos lo siguiente

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \stackrel{a}{=} \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) \stackrel{c}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

2. Utilizando la proposición anterior

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i^c) = 1$$

3. Notemos que

   a) El espacio muestral del experimento está dado por:

   $$\Omega = \{(6), (1,6), ..., (5,6), (1,1,6), ...\}$$

   b) Pertenecen todos aquellos eventos en donde no cayó un 6 hasta el n-ésimo tiro.

   c) Si $\cup_{n=1}^{\infty} E_n$ significa que eventualmente cae el dado, entonces $(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)^c$ significa que nunca caerá.

4. Sean d_1, d_2 las posibles salidas del dado 1 y del dado 2. Nuestro evento de interés está dado por:

   $$A = \{d_1, d_2 \in \Omega \,|\, d_2 > d_1\} = \{(2,1), (3,2), (3,1), (4,1), ..., (4,3), (5,1), ..., (5,4), (6,1), ..., (6,5)\}$$

   Luego, por el enfoque de probabilidad clásica, obtenemos

   $$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15}{6 \cdot 6}$$

5. Sean I, F, A los eventos donde un alumno participa en la clase de inglés, francés, y alemán respectivamente. Notemos que

   a)
   $$\mathbb{P}(I^c \cap \ F^c \cap A^c) = 1 - \mathbb{P}(I \cup F \cup A)$$
   $$= 1 - [\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(I \cap F) - \mathbb{P}(I \cap A) - \mathbb{P}(F \cap A) + \mathbb{P}(I \cap F \cap A)]$$
   $$= 28 + 26 + 16 - 12 - 4 - 6 + 3 = 51$$

   b) Sea B el evento tal que un estudiante esté llevando al menos 1 idioma, entonces

   $$\mathbb{P}(B) = \frac{15 + 11 + 9}{100} = \frac{35}{100}$$

   c) Sea C el evento donde al menos 1 estudiante, de dos elegidos aleatoriamente, esté llevando una clase de idiomas

   $$\mathbb{P}(C) = 1 - \mathbb{P}(C^c) = 1 - \frac{49}{100} \cdot \frac{48}{99}$$

6. a) El número de elementos totales en el espacio muestral Ω está dado por $|\Omega| = 2^5$.

b) Sea W el evento donde el sistema trabaja,

$$W = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \in \Omega|$$

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, 1, X_3, X_4, X_5)$$

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (X_1, X_2, 1, 1, X_5)$$

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = (1, X_2, 1, X_4, X_5)\}$$

c) El número de elementos de A está dado por $|A| = 2^3$.

7. Supongamos primero que $k = 2$, entonces podemos componer una tupla $(1, 1, X_3, ..., X_n)$, y el número de distintos arreglos que se pueden formar es de 2^{n-2}.

   Suponiendo ahora que $k = 3$, entonces podemos hacer una tupla $(1, 1, 1, x_4, ..., X_n)$, y el número de distintos arreglos que se pueden formar es de 2^{n-3}.

   Luego, es fácil concluir que el número de distintos arreglos para que se cumpla la condición está dado por 2^{n-k}.

Textos de apoyo.

Bartle (1966); Blitzstein and Hwang (2014); Hoel, Port, and Stone (1971); Rincón (2014); Ross (2018).

3. Técnicas de conteo

1. ¿Cuántas placas diferentes en la Ciudad de México se pueden formar si los primeros tres lugares serán ocupados por letras (26) y los siguientes cuatro se ocuparán por números del 0 al 9?

2. A partir del inciso anterior. ¿Cuántas placas se pueden formar si no se permite la repetición de números y letras?

3. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

4. Se debe colocar a 5 hombres y 5 mujeres en una fila de modo que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras puede hacerse?

5. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 mujeres y 5 hombres alrededor de una mesa redonda, si deben sentarse alternadamente?

6. Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $|A| = m$ y $|B| = n$.

   a) ¿Cuántas funciones diferentes $f : A \to B$ se pueden definir?

   b) ¿Cuántas funciones inyectivas distintas $f : A \to B$ se pueden construir?

7. Un alumno de Cálculo de Probabilidades I debe escoger 7 de las 10 preguntas del examen final departamental.

   a) ¿De cuántas maneras puede elegir?

   b) Si las primeras 4 son obligatorias, ¿cuántas formas le quedan para escoger?

8. Cuatro libros de matemáticas, seis de física y dos de quíca han de ser colocados en una estantería. ¿Cuántas colocaciones diferentes se admiten para cada caso?

   a) Los libros de cada materia han de estar juntos.

   b) Solo los libros de matemáticas tienen que estar juntos.

9. Determine el número de distintos arreglos $(x_1, ..., x_n)$, tales que x_i es 0 ó 1 y

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k$$

10. ¿Cuántas subconjuntos existen de un conjunto de n elementos? (**Sugerencia:** Defina a las combinaciones de n en k como el número de subconjuntos de tamaño k y aplique el teorema del binomio de Newton.)

11. ¿Cuántas formas hay de tener cierta mano en el juego de póquer, para los siguientes casos? (Suponga que no se utilizan las cartas denominadas *Joker*)

    a) No se tiene dos cartas del mismo número.
    b) *Full house* (Consta de una tercia -tres números iguales- y un par -dos números iguales-).
    c) Póquer (cuatro números iguales).
    d) Color (Cinco cartas del mismo palo).

12. ¿De cuántas formas se pueden ordenar las palabras siguientes?

    a) ABRACADABRA
    b) SUPERCALIFRAGILÍSTICO

Textos de apoyo.

Bartle (1966); Blitzstein and Hwang (2014); Hoel, Port, and Stone (1971); Rincón (2014); Ross (2018).

Referencias

Bartle, R. G. (1966). *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. New York, NY: John Wiley & Sons.

Blitzstein, J. K. and J. Hwang (2014). *Intorduction to Probability*. Boca Raton, FL: CRC Press.

Hoel, P. G., S. C. Port, and C. J. Stone (1971). *Introduction to Probability Theory*. Boston: Houghton Miffling Company.

Rincón, L. (2014). Introducción a la Probabilidad. https://lya.fciencias.unam.mx/lars/Publicaciones/Prob1-2016.pdf. 18/01/2022.

Ross, S. (2018). *A First Course in Probability* (9th ed.). Boston, MA: Pearson.

Respuestas

1. Introducción

1:1. —

1:2. —

1:3. —

1:4. —

1:5. —

1:6. —

1:7. —

1:8. —

2. Espacios de Probabilidad

2:1. —

2:2. —

2:3. —

2:4. —

2:5. —

2:6. —

2:7. —

2:8. —

3. Técnicas de conteo

3:1. —

3:2. —

3:3. —

3:4. —

3:5. —

3:6. —

3:7. —

3:8. —