

Simulación

Presentación del Curso
Sistemas, modelos y simulación
Ejemplos de simulación

Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Clase 1



Presentación del Curso

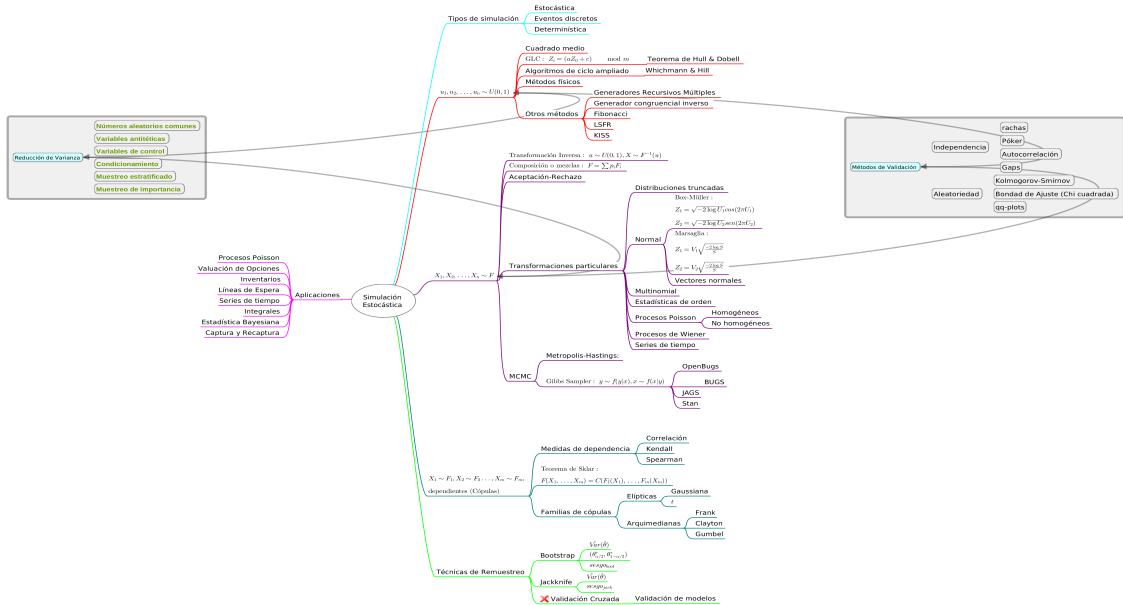
- Históricamente, los requerimientos de este curso no son claros *en el programa de estudios*. Para **Actuaría**, el único requerimiento que se pide es *Cálculo de Probabilidades II* (quinto semestre). Para **Matemáticas Aplicadas**, la materia se puede llevar como optativa a partir del séptimo semestre. Esto nos da una *población heterogénea*.

- Históricamente, los requerimientos de este curso no son claros *en el programa de estudios*. Para **Actuaría**, el único requerimiento que se pide es *Cálculo de Probabilidades II* (quinto semestre). Para **Matemáticas Aplicadas**, la materia se puede llevar como optativa a partir del séptimo semestre. Esto nos da una *población heterogénea*.
- El curso pretende ser autocontenido, por lo que se ve un repaso general, pero no profundo, de los temas necesarios. Idealmente, el curso requiere:

- Históricamente, los requerimientos de este curso no son claros *en el programa de estudios*. Para **Actuaría**, el único requerimiento que se pide es *Cálculo de Probabilidades II* (quinto semestre). Para **Matemáticas Aplicadas**, la materia se puede llevar como optativa a partir del séptimo semestre. Esto nos da una *población heterogénea*.
- El curso pretende ser autocontenido, por lo que se ve un repaso general, pero no profundo, de los temas necesarios. Idealmente, el curso requiere:
 - Conocimiento general pero sólido, de conceptos estadísticos y probabilísticos: Distribuciones de variables aleatorias y sus momentos. Cálculo (integración, diferenciación y convergencia). Como parte de las aplicaciones, bases de procesos estocásticos: cadenas de Markov, procesos de Wiener, procesos Poisson, series de tiempo. Inferencia, Estimación de parámetros.

- Históricamente, los requerimientos de este curso no son claros *en el programa de estudios*. Para **Actuaría**, el único requerimiento que se pide es *Cálculo de Probabilidades II* (quinto semestre). Para **Matemáticas Aplicadas**, la materia se puede llevar como optativa a partir del séptimo semestre. Esto nos da una *población heterogénea*.
- El curso pretende ser autocontenido, por lo que se ve un repaso general, pero no profundo, de los temas necesarios. Idealmente, el curso requiere:
 - Conocimiento general pero sólido, de conceptos estadísticos y probabilísticos: Distribuciones de variables aleatorias y sus momentos. Cálculo (integración, diferenciación y convergencia). Como parte de las aplicaciones, bases de procesos estocásticos: cadenas de Markov, procesos de Wiener, procesos Poisson, series de tiempo. Inferencia, Estimación de parámetros.
 - Principios generales de programación y conocimiento de algún lenguaje de alto nivel: R, Julia, Matlab, Python, etc. Programar no es fundamental, pero *muy* conveniente. Para los que no saben programar pueden adaptar los códigos que se verán en clase.

- Históricamente, los requerimientos de este curso no son claros *en el programa de estudios*. Para **Actuaría**, el único requerimiento que se pide es *Cálculo de Probabilidades II* (quinto semestre). Para **Matemáticas Aplicadas**, la materia se puede llevar como optativa a partir del séptimo semestre. Esto nos da una *población heterogénea*.
- El curso pretende ser autocontenido, por lo que se ve un repaso general, pero no profundo, de los temas necesarios. Idealmente, el curso requiere:
 - Conocimiento general pero sólido, de conceptos estadísticos y probabilísticos: Distribuciones de variables aleatorias y sus momentos. Cálculo (integración, diferenciación y convergencia). Como parte de las aplicaciones, bases de procesos estocásticos: cadenas de Markov, procesos de Wiener, procesos Poisson, series de tiempo. Inferencia, Estimación de parámetros.
 - Principios generales de programación y conocimiento de algún lenguaje de alto nivel: R, Julia, Matlab, Python, etc. Programar no es fundamental, pero *muy* conveniente. Para los que no saben programar pueden adaptar los códigos que se verán en clase.
 - En el contexto de algunas aplicaciones: no requerido pero conveniente: inferencia Bayesiana, Derivados financieros, redes, regresión, etc.



- La plataforma para toda la documentación del curso será [Piazza](#). Ahí encontrarán:
 - Temario, calendario y *syllabus* del curso
 - Presentaciones, artículos para proyectos, referencias
 - Lecturas complementarias
 - Tareas y sus soluciones
- La evaluación considera:
 - dos exámenes parciales: 30 %
 - tareas: 30 %
 - asistencia y participación en clase: 10 %
 - proyecto final (documento y evaluación de la exposición por equipos) 30 %
 - La fecha de la presentación del proyecto es la fecha del examen final, y deberán asistir **todos** obligatoriamente.
 - El proyecto será evaluado por el grupo y por el profesor (40 % y 60 % respectivamente),

- La plataforma para toda la documentación del curso será [Piazza](#). Ahí encontrarán:
 - Temario, calendario y *syllabus* del curso
 - Presentaciones, artículos para proyectos, referencias
 - Lecturas complementarias
 - Tareas y sus soluciones
- La evaluación considera:
 - dos exámenes parciales: 30 %
 - tareas: 30 %
 - asistencia y participación en clase: 10 %
 - proyecto final (documento y evaluación de la exposición por equipos) 30 %
 - La fecha de la presentación del proyecto es la fecha del examen final, y deberán asistir **todos** obligatoriamente.
 - El proyecto será evaluado por el grupo y por el profesor (40 % y 60 % respectivamente), pero...

- La plataforma para toda la documentación del curso será [Piazza](#). Ahí encontrarán:
 - Temario, calendario y *syllabus* del curso
 - Presentaciones, artículos para proyectos, referencias
 - Lecturas complementarias
 - Tareas y sus soluciones
- La evaluación considera:
 - dos exámenes parciales: 30 %
 - tareas: 30 %
 - asistencia y participación en clase: 10 %
 - proyecto final (documento y evaluación de la exposición por equipos) 30 %
 - La fecha de la presentación del proyecto es la fecha del examen final, y deberán asistir **todos** obligatoriamente.
 - El proyecto será evaluado por el grupo y por el profesor (40 % y 60 % respectivamente), pero...
- **A mi criterio, dependiendo del desempeño del grupo y de los resultados parciales, el proyecto final puede sustituirse por un examen final.**

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados correctamente en un análisis de simulación.

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados correctamente en un análisis de simulación.
- Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados correctamente en un análisis de simulación.
- Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.
- Interpretar y reportar adecuadamente los resultados y las conclusiones de una investigación, análisis, mediante el uso de tablas y gráficas apropiadas, de tal manera que las investigaciones sean *reproducibles*.

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados correctamente en un análisis de simulación.
- Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.
- Interpretar y reportar adecuadamente los resultados y las conclusiones de una investigación, análisis, mediante el uso de tablas y gráficas apropiadas, de tal manera que las investigaciones sean *reproducibles*.
- Sembrar en ustedes la curiosidad de conocer y aprender más acerca de las técnicas de simulación y que desarrollen habilidades para aplicar los métodos y las técnicas en sus vidas profesionales y personales.

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados correctamente en un análisis de simulación.
- Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.
- Interpretar y reportar adecuadamente los resultados y las conclusiones de una investigación, análisis, mediante el uso de tablas y gráficas apropiadas, de tal manera que las investigaciones sean *reproducibles*.
- Sembrar en ustedes la curiosidad de conocer y aprender más acerca de las técnicas de simulación y que desarrollen habilidades para aplicar los métodos y las técnicas en sus vidas profesionales y personales.

- Reforzar los conceptos estadísticos básicos para ser aplicados correctamente en un análisis de simulación.
- Desarrollar competencias para la adecuada modelación matemática de fenómenos empíricos.
- Interpretar y reportar adecuadamente los resultados y las conclusiones de una investigación, análisis, mediante el uso de tablas y gráficas apropiadas, de tal manera que las investigaciones sean *reproducibles*.
- Sembrar en ustedes la curiosidad de conocer y aprender más acerca de las técnicas de simulación y que desarrollen habilidades para aplicar los métodos y las técnicas en sus vidas profesionales y personales.

Don't just teach your students to read. Teach them to question what they read, what they study. Teach them to doubt. Teach them to think.

Richard Feynman

¿Porqué usar R para simulación?

- R no es sólo un paquete estadístico, es un lenguaje
- R está diseñado para operar de la forma en que se piensa acerca de los problemas
- Es flexible y poderoso y tiene una amplia base de aplicación
- Permite realizar análisis reproducibles

Consultar: [Why use the R language.](#)

Naturaleza de la simulación

Simulación

- La *simulación* es la *imitación* del comportamiento de un proceso, sistema o fenómeno del mundo real en el tiempo o en el espacio, *usualmente bajo condiciones controladas*.
- En términos generales, la simulación se utiliza para analizar algunos aspectos de un sistema, típicamente para predecir estados futuros de ese sistema.

De manera más específica, los propósitos de la simulación pueden ser:

- Apoyar decisiones operacionales en la gestión de un sistema: tomar una decisión estratégica, organizar los componentes de un sistema, etc. Ejemplos: ¿se debería agregar una caja adicional para reducir tiempos de espera en un banco? ¿qué es mejor, unifila o varias filas?
- Diseñar o construir un sistema. (Ver la película *The founder*)
- Evaluar y verificar: se usa para evaluar una teoría particular, modelo, hipótesis o comparar dos o más de los anteriores.
- Comprender o ganar conocimiento más profundo de un cierto dominio. Ejemplo: formación de grupos en conducta animal. [Ejemplo](#)

Hay muchas posibles tipologías de simulación. Una relevante para nosotros aquí es la que divide los tipos de simulación en los siguientes:

- **Simulación Monte Carlo** o estocástica: modela fenómenos sujetos a incertidumbre. El modelo probabilístico puede ser parametrizado o ajustado usando datos reales. Campos de aplicación: sistemas físicos, biológicos, sociales, industriales, financieros, económicos, etc.
- **Simulación de Eventos Discretos**: modela la operación de un sistema como una sucesión de eventos en el tiempo. Cada evento ocurre en un instante particular del tiempo y marca un cambio de estado en el sistema.

Otras clasificaciones:

- *física, analógica o icónica*: objetos físicos mas pequeños o baratos sustituyen a la realidad. Ejemplos: maquetas, objetos a escala.
- *simbólica*: a través de ecuaciones
- computacional: la creación y ejecución de un modelo formal del comportamiento e interacción de los componentes de un sistema.
- *simulación basada en agentes*: simula las acciones e interacciones de agentes autónomos (individuales y colectivamente como organizaciones o grupos) para evaluar sus efectos en un sistema como un todo. Ejemplo: **simuPOP**

- Ventajas

- Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.

- Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.

- Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.

- Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.

● Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it (Frank Herbert, *Dune*)

- Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it (Frank Herbert, *Dune*)

- Desventajas

- Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it** (Frank Herbert, *Dune*)

- Desventajas

- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.

● Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it** (Frank Herbert, *Dune*)

● Desventajas

- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.
- Aplica el principio: “garbish in, garbish out”: requiere datos confiables.

● Ventajas

- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it** (Frank Herbert, *Dune*)

● Desventajas

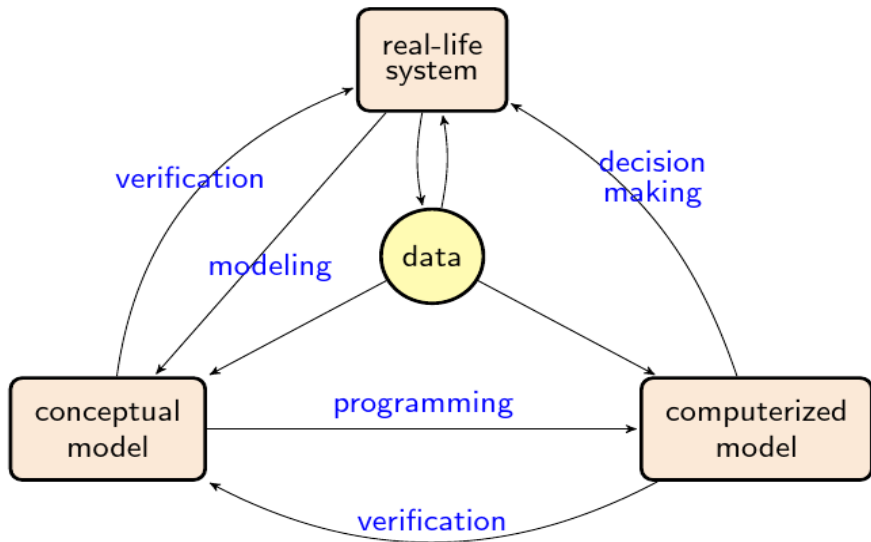
- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.
- Aplica el principio: “garbish in, garbish out”: requiere datos confiables.
- Necesita aplicar correctamente conceptos estadísticos (como diseño de experimentos), así como de experiencia, para obtener las conclusiones correctas.

● Ventajas

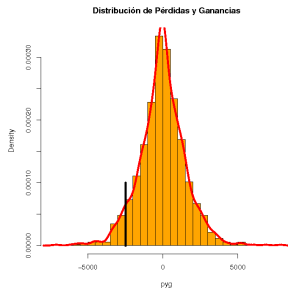
- Sustituye el desarrollo de modelos analíticos muy complicados o incluso imposibles, a veces con muchos supuestos difíciles de cumplir.
- Un modelo de simulación puede ser mucho más detallado y realista.
- Permite visualizar el comportamiento de un sistema.
- Usualmente los costos de la simulación son menores a los ahorros que genera.
- **A process cannot be understood by stopping it. Understanding must move with the flow of the process, must join it and flow with it** (Frank Herbert, *Dune*)

● Desventajas

- En ocasiones se utiliza como sustituto del pensamiento analítico.
- Aplica el principio: “garbish in, garbish out”: requiere datos confiables.
- Necesita aplicar correctamente conceptos estadísticos (como diseño de experimentos), así como de experiencia, para obtener las conclusiones correctas.
- Falta de un adecuado nivel de detalle en el modelo (a veces es mucho, a veces es poco).



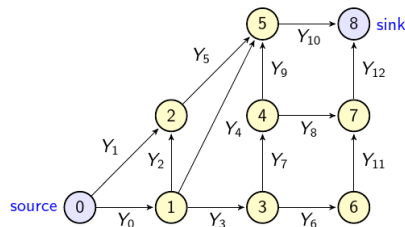
- Aplicaciones típicas de la simulación estocástica en Finanzas y economía:
 - Valuación de portafolios financieros bajo escenarios económicos inciertos.
 - Pruebas de estrés.
 - Cálculo del valor en riesgo (VaR) de los activos de una institución.



- Aplicaciones de la teoría de valores extremos (EVT):
 - Estimación de la reserva mínima y máxima para una compañía de seguros.
 - Cálculo de la distribución de probabilidad de un evento catastrófico (como huracanes, terremotos, etc).

- Aplicaciones a los Negocios:

- Diseño de procesos de Negocio, Comparación de configuraciones de procesos (costo, eficacia)
- Medición de la eficiencia de un proceso
- Modelos de líneas de espera, inventarios
- Estimar la duración de un proyecto. Una red puede dar las relaciones de precedencia entre actividades. La actividad k tiene una duración aleatoria Y_k con cierta distribución de probabilidad. ¿Cuál es la duración T del proyecto?



- Aplicaciones relevantes a la estadística:

- Cálculo de integrales (probabilidades, valores esperados, etc.)
- Valores extremos
- Pruebas de hipótesis e intervalos de confianza

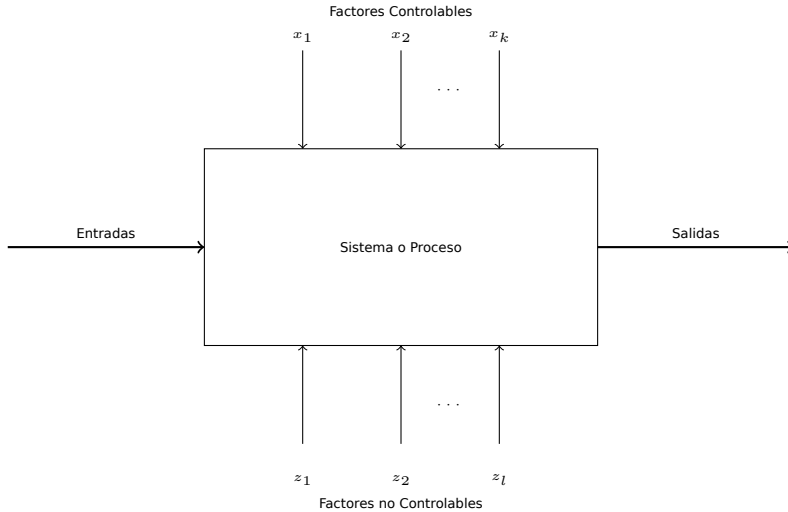
- Estadística Bayesiana
- Optimización

Sistemas, modelos y simulación.

Sistema

Es un conjunto de objetos que interaccionan de manera conjunta para alcanzar un fin.
Un sistema se compone de:

- **Entidades:** los objetos de interés en el sistema
- **Atributos:** las propiedades o características de una entidad
- **Actividades:** acciones que ocupan un periodo de tiempo de longitud específica
- **Estados:** una colección de variables que describen el sistema en cualquier momento
- **Eventos:** ocurrencias instantáneas que puede cambiar el estado del sistema. Pueden ser endógenos o exógenos



Ejemplo de Sistema: Bolsa de Valores

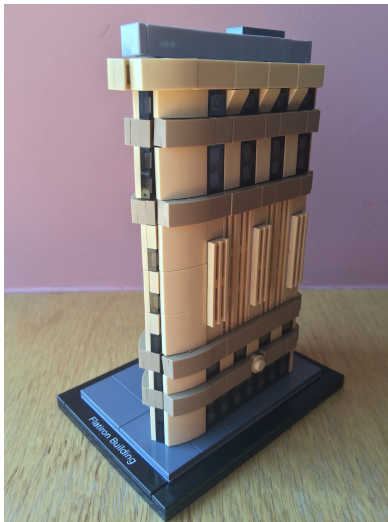
- Entidades: Agentes que participan en la Bolsa: compradores, vendedores y sus acciones.
- Atributos: Comprador, vendedor, posición corta, posición larga, tipo de instrumento, etc.
- Actividad: Un día de operación ordinario (compra-venta de valores).
- Estado: Valor del Índice, posiciones cerradas, abiertas, cortas y largas a las 10:00am.
- Evento: Compra de acciones de Bimbo al doble de precio.
- Evento endógeno: Compras, ventas.
- Evento exógeno: Entrada de Wonder Bread al mercado mexicano.

¿Qué es un modelo?

¿Qué es un modelo?



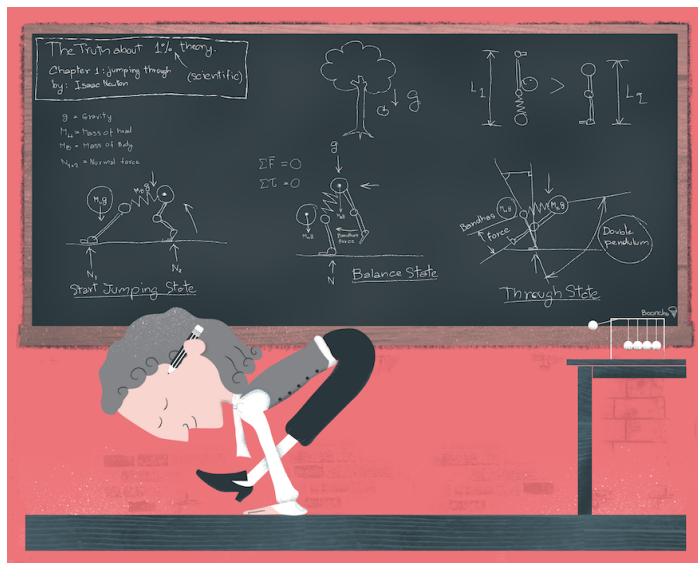
¿Qué es un modelo?





$$y=mx+b$$

¿Qué es un modelo?



¿Qué es un modelo?

- Un **modelo** se puede considerar como una teoría que representa de manera abstracta la realidad.
- El proceso de modelación consta de:
 - Proceso de abstracción: proponer una representación de la realidad, basado en **experiencia** y en la **observación**.



Pablo Picasso: Guernica, 1937

- Deducción a partir del modelo.
 - Verificación, predicción y aplicaciones.
- Los modelos no son únicos
- No hay modelo perfecto

Un modelo de simulación busca reproducir lo más fielmente posible las condiciones reales de un fenómeno. Pero siempre hay un intercambio entre complejidad y fidelidad.

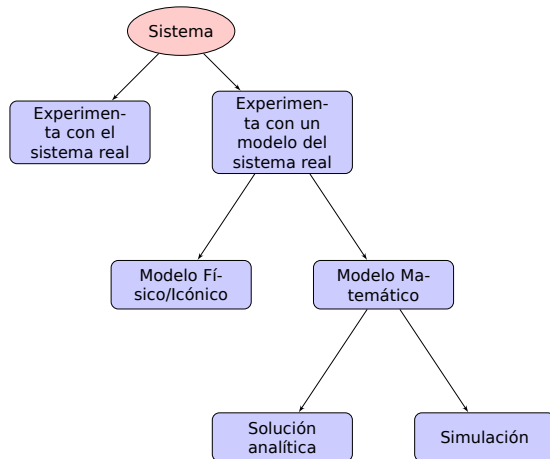
“All models are wrong, but some of them are useful”

— George Box

Modelos

Un Modelo es una construcción conceptual que describe un sistema.

El siguiente esquema describe maneras de estudiar un sistema.



De acuerdo a ciertas características de un modelo, el tipo de simulación puede ser diferente.

- **Determinístico o estocástico**

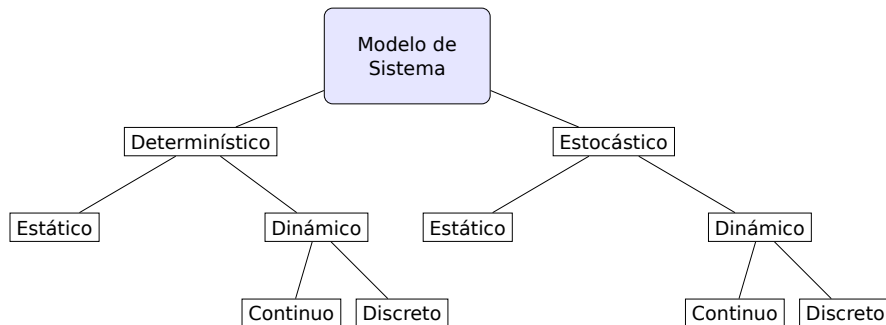
- ¿El modelo contiene componentes estocásticos?
- Modelos determinísticos: flujo de pagos de una hipoteca o un crédito a tasa fija (bajo un escenario fijo).
- Modelos estocásticos: Línea de espera.

- **¿Estático o dinámico?**

- ¿Es el tiempo una variable significativa?
- Modelos Estáticos: juegos de azar, integración Monte Carlo.
- Modelos Dinámicos: Modelos de inventario.

- **¿Continuo o discreto?**

- ¿El sistema cambia de manera continua o sólo en puntos discretos del tiempo?
- Ejemplos de modelos discretos: modelos de inventarios, colas.
- Ejemplos de modelos continuos: crecimiento de poblaciones, precios de mercado.



Simulación de eventos discretos

Simulación de eventos discretos

Este tipo de simulación describe cómo evoluciona en el tiempo un sistema con eventos que ocurren de manera discreta. Las variables de estado cambian debido a la ocurrencia de estos eventos.

Ejemplos comunes de simulación de eventos discretos incluyen:

- Cadenas de Markov
 - Líneas de espera
 - Modelos de inventario
- Flujo en procesos organizacionales
- Toma de decisiones bajo condiciones de incertidumbre
- Evaluación de robustez de políticas públicas.

Una simulación de eventos discretos requiere:

- Un reloj de simulación
- Una lista de eventos futuros planeados, en orden cronológico
- Un 'procedimiento' o 'método' para ejecutar por cada tipo de evento.

Ejemplo 1: Línea de espera

- Consideren una unidad de servicio con un sólo servidor (cajero, taquilla, etc.)
- Los clientes se forman para recibir el servicio

Se desea estimar el tiempo promedio de permanencia en la fila, medido como el tiempo que transcurre desde que llega a la fila hasta que comienza a recibir el servicio.

Las variables de estado del sistema son:

- Estado del servidor (libre, ocupado)
- El número de clientes esperando en la fila $\{0, 1, 2, \dots\}$
- El tiempo de llegada de cada persona a la fila
- El tiempo de servicio a cada persona

En este sistema hay dos tipos de eventos relevantes:

- Llegada de un cliente
- Completar el servicio (Partida de un cliente)

Ejemplo de linea de espera

Ejemplo 1: Línea de espera

Definiciones:

t_i = Tiempo de llegada del i -ésimo cliente.

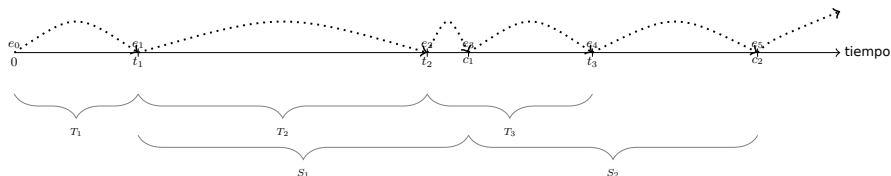
$T_i = t_i - t_{i-1}$ = tiempo de interarribo entre las llegadas del $i - 1$ e i cliente.

S_i = tiempo de servicio del cliente i

D_i = espera en cola del cliente i

$c_i = t_i + D_i + S_i$ = tiempo en que el cliente i completa su servicio y se va.

e_i = tiempo de ocurrencia del i -ésimo evento de cualquier tipo.



Más adelante continuaremos con este modelo.

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} . ¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} . ¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva

- Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} . ¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva

- Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.
- Mezcla las piezas

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} . ¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva

- Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.
- Mezcla las piezas
- Extrae una muestra al azar con reemplazo y registra el número de piezas grises (m_{Mx}) Con probabilidad 1, cuando $m \rightarrow \infty$

$$\frac{m_{Mx}}{m} \rightarrow R = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

Ejemplo 2. Cálculo de áreas

Tenemos un mapa de México con cierta escala 1:N en una hoja de papel con área A_{rec} . ¿Cómo determinamos el área de la superficie de México?

$$A_{Mx} = R \times A_{Rec} \times e_{Mapa} = R \times A_{rec} \times N$$

donde

$$R = \text{razón entre áreas} = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

$$e_{Mapa} = \text{escala del mapa}$$

$$A_{rec} = \text{Área de rectángulo (conocida)}$$

Al menos dos posibles alternativas:

- Solución destructiva

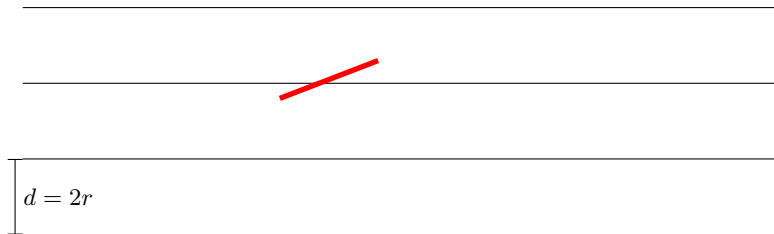
- Corta el mapa en m pequeñas piezas al azar. De acuerdo al color dominante del trozo, se clasifica en blanco o en gris.
- Mezcla las piezas
- Extrae una muestra al azar con reemplazo y registra el número de piezas grises (m_{Mx}) Con probabilidad 1, cuando $m \rightarrow \infty$

$$\frac{m_{Mx}}{m} \rightarrow R = \frac{A_{Mx}}{A_{rec}}$$

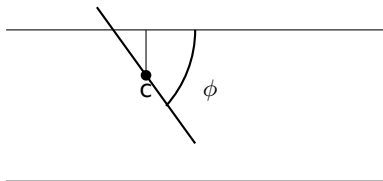
- Solución no destructiva: ...

Ejemplo 3. Estimación de π : Problema de la aguja de Buffon (1733)

Una aguja de longitud r se lanza en un piso con duelas, que son de ancho d ($r \leq d$). ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja “lanzada al azar” intersecte una orilla de la duela?



Ejemplo 3. Buffon



- Sea c la distancia del centro de la aguja a la orilla de la duela más cercana.
- Noten que con largo de aguja r , $0 \leq c \leq d/2$ y $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Podemos suponer que ambas son variables aleatorias uniformes e independientes.
- $\text{sen}\phi = \frac{c}{r/2} \implies c = \frac{r}{2}\text{sen}\phi$
- La aguja cruza si y sólo si $c \leq \frac{r}{2}\text{sen}\phi$
- Entonces

$$\begin{aligned} P[\text{cruce}] &= P[0 \leq c \leq d/2, 0 \leq \phi \leq \pi/2] \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\frac{r}{2}\text{sen}\phi} \frac{4}{d\pi} dc d\phi \\ &= \frac{2r}{\pi d} = \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

Ejemplo 3. Buffon

El problema de las agujas de Buffon puede ser utilizado como un mecanismo para estimar el valor de π . **Un posible mecanismo de estimación:**

- Lanza una aguja “aleatoriamente” N veces.
- Sea X = No. de cruces. Entonces $\hat{p}_N = \frac{X}{N}$, y por lo tanto $\hat{\pi} = \frac{1}{\hat{p}_N}$.

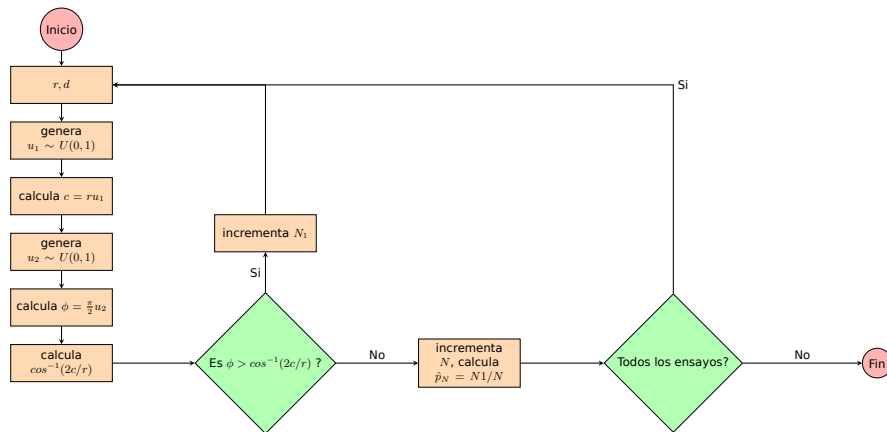
Además, sabemos que $X|N \sim \text{Bin}(N, p)$, así que $\text{Var}(\hat{p}_N|N) = \frac{p(1-p)}{N}$. Para N grande, por el teorema del límite central:

$$\sqrt{N}(\hat{p}_N - p) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, p(1-p))$$

Un estimador de la varianza de \hat{p}_N es $\frac{\hat{p}_N(1-\hat{p}_N)}{N}$ y un intervalo de confianza para p es:

$$\hat{p}_N \pm z_{1-\alpha/2} \left(\frac{\hat{p}_N(1-\hat{p}_N)}{N} \right)^{1/2}$$

Ejemplo 3. Aguja de Buffon: simulación



Ejemplo 3. Aguja de Buffon: simulación

```
#Este programa estima la probabilidad de que una aguja intersecte una línea en un piso de duela
```

```
#Definición de parámetros
```

```
N <- 2000 #Número de simulaciones
```

```
alfa <- 0.05 #nivel de significancia
```

```
z <- qnorm(1-alfa/2) #cuantil de la distribución normal
```

```
NI <- rep(1,N) #indicadora para las agujas que tocan el límite de la duela
```

```
r <- 10 #longitud de la aguja
```

```
d <- 15 #ancho de la duela
```

```
#Inicio de la simulación
```

```
u1 <- runif(N, min = 0, max = d/2)
```

```
u2 <- runif(N, min = 0, max = pi/ 2)
```

```
prob <- ifelse(r/2*cos(u2) >= u1,1,0)
```

```
prob <- cumsum(prob)/1:N
```

```
lim.inf <- prob - z*sqrt(prob*(1-prob)/1:N)
```

```
lim.sup <- prob + z*sqrt(prob*(1-prob)/1:N)
```

```
#Gráfica
```

```
plot(1:N, prob, type = "l", ylim = c(0,1), xlab = "No. de simulaciones",
```

```
main = "Cálculo de probabilidad con N=2000 lanzamientos")
```

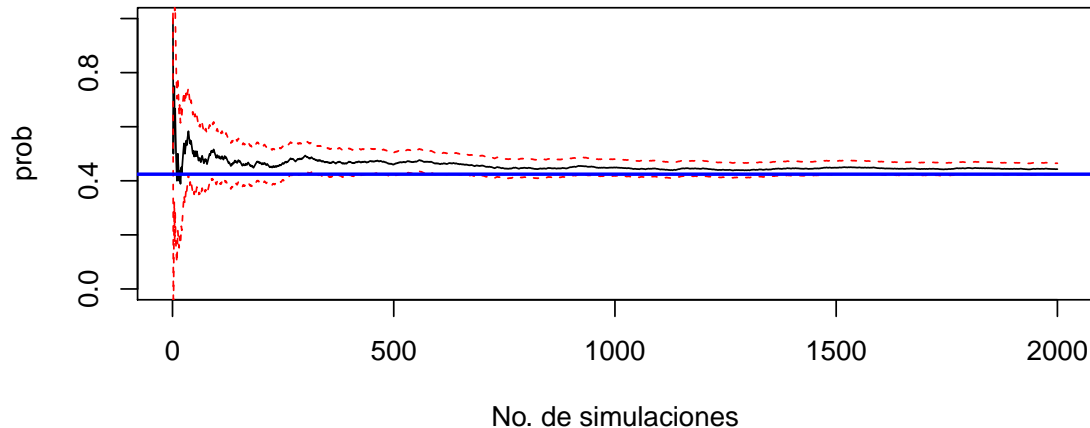
```
lines(1:N, lim.inf, col = "red", lty = 2)
```

```
lines(1:N, lim.sup, col = "red",lty = 2)
```

```
abline(h = 2*r/(pi*d), col = "blue", lwd = 2)
```

```
text(100,2*r/(pi*d)+1,as.character(2*r/(pi*d)))
```

Cálculo de probabilidad con $N=2000$ lanzamientos



Calculen las probabilidades solicitadas vía simulación, haciendo el diagrama de flujo y toda la cosa.

- Si se lanzan tres dados, ¿qué suma es más probable, un 9 o un 10?