# Simulación

## Generación de Procesos Estocásticos
## Procesos de Wiener y aplicaciones

Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Semana 9

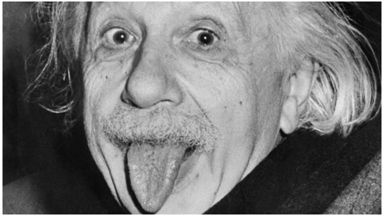
# Proceso de Wiener

# Antecedentes históricos

- Robert Brown (1773-1858) observó en 1827 partículas de polen en el microscopio y cuando éstas estaban suspendidas en agua se movían sin cesar en forma aleatoria.
- A principios del siglo XX se demostró que el movimiento de las partículas se debía al golpeteo constante de las moléculas del agua sobre las moléculas del polen.

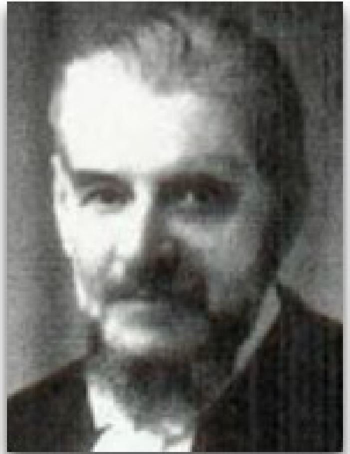
# Antecedentes históricos

- En 1905, Einstein (1879-1955) proporciona la formulación matemática del movimiento Browniano, de la cual se deriva que la dispersión promedio del desplazamiento de la partícula en un líquido en un tiempo dado, es proporcional a dicho tiempo

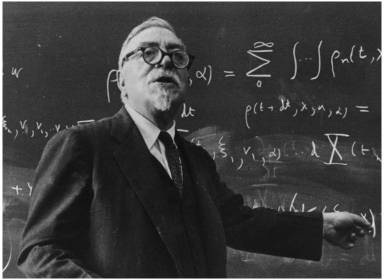


# Antecedentes históricos

- En 1900, el matemático francés Louis Bachelier (1870-1946) describió en su tesis doctoral *“Theorie de la spéculation”* sobre el modelado del comportamiento aleatorio de los precios de las acciones de la Bolsa de París. Se anticipó a Einstein, pero su trabajo fue reconocido hasta 1960.



# Antecedentes históricos



- Norbert Wiener (1894-1964) desarrolló la axiomática del movimiento Browniano en términos de filtraciones, estableciendo un contexto más formal para los movimientos Brownianos.

# Procesos de Wiener (1923)

- Después de Einstein, Norbert Wiener fue uno de los primeros matemáticos en considerar el movimiento Browniano y lo estudió a fondo para formalizarlo. Entonces el movimiento Browniano o proceso de Wiener son en nuestro contexto, sinónimos.
- El proceso de Wiener es un ejemplo de un proceso markoviano de espacio y parámetro continuo.

## Proceso de Wiener

Se dice que un proceso estocástico $\{Z_t, t \geq 0\}$ sigue un proceso de Wiener (o proceso Browniano) si

1. $Z_0 = 0$
2. $\forall t > 0, Z_t \sim \mathcal{N}(0, t)$
3. $\{Z_t, t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios e independientes:
   - *incrementos estacionarios*: si $s, t > 0$, $Z_{t+s} - Z_s \overset{d}{\sim} Z_t$.
   - *incrementos independientes*: Si $0 \leq q < r \leq s < t$, entonces $Z_t - Z_s \perp\!\!\!\perp Z_r - Z_q$.
4. La función $t \mapsto Z_t$ es continua con probabilidad 1.

A partir de la normalidad del proceso, el comportamiento está completamente definido. Como resultado, se puede ver, por ejemplo, que

- Var$(Z_t - Z_s) = t - s$ cuando $t \geq s$, ya que $Z_t - Z_s = Z_{t-s} - Z_0 = Z_{t-s}$ por incrementos estacionarios.
- Cov$(Z_t, Z_s) =$ mín$\{s, t\}$

***Solución.***

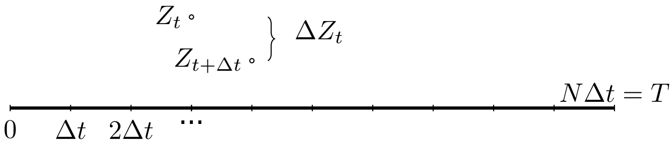
En general Cov$(Z_t, Z_s) = E(Z_t Z_s) - E(Z_t)E(Z_s) = E(Z_t Z_s)$.
Si $s < t$, podemos escribir en forma de incrementos $Z_t = (Z_t - Z_s) + Z_s$ para obtener:

$$\begin{aligned} E(Z_t Z_s) &= E(Z_s(Z_t - Z_s + Z_s)) \\ &= E(Z_s(Z_t - Z_s)) + E(Z_s^2) \\ &= E(Z_s)E(Z_t - Z_s) + \text{Var}(Z_s) = s \end{aligned}$$

Y por simetría, si $t < s$, $E(Z_t Z_s) = t$. Así que Cov$(Z_s, Z_t) =$ mín$\{s, t\}$.

□

- Para poder analizar cómo simular el proceso de Wiener, necesitamos considerar particiones del intervalo de tiempo $[0, T]$ considerando $N$ puntos equidistantes de ese intervalo $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, N\Delta t = T\}$.




- La diferencia $\Delta Z = Z_{t+\Delta t} - Z_t$ durante un intervalo de tiempo $\Delta t = (t + \Delta t) - t$ tiene distribución $\mathcal{N}(0, \Delta t)$. Entonces se puede representar como:

$$\Delta Z = \epsilon\sqrt{\Delta t} \qquad \text{donde} \qquad \epsilon \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

# Simulación de un proceso Wiener II

- Las variables $\Delta_1 Z$ y $\Delta_2 Z$ para dos intervalos ajenos $\Delta_1 t$ y $\Delta_2 t$ son independientes. Si $\Delta t = T/N$, entonces el incremento total en $[0, T]$ es:

$$Z_T - Z_0 = \sum_i^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t} \sim \mathcal{N}\left(0, T\right),$$

- Recursivamente, podemos escribir:

$$Z_{t_i} = Z_{t_{i-1}} + \sqrt{\Delta t}\epsilon$$

- Conforme $\Delta t \to 0$, $\Delta Z \to dZ$. Podemos representar un proceso de Wiener en esta notación como $\{dZ\}$.

# Ejemplo

Usualmente en las aplicaciones el parámetro $t$ se considera como el tiempo, y las unidades de tiempo se miden en años de 365 días.

- Supongamos un periodo de $T = 20$ años. Entonces
  - $\Delta t = 1$ es un año, si la unidad de tiempo base es el año,
  - $\Delta t = 0.5$ si la unidad base es un semestre,
  - $\Delta t = 1/12$ si la unidad base es mensual,
  - Para datos diarios, $\Delta t = 1/365 = 0.0027397$.

  Considerando días, para el periodo dado se tiene una partición con $N = 20 * 365 = 7300$ puntos.
- Para estimar el cambio en la variable $Z$, es necesario simular una $\epsilon$ con distribución normal estándar y multiplicarla por $\sqrt(1/365) = 0.0523424$. Por ejemplo:

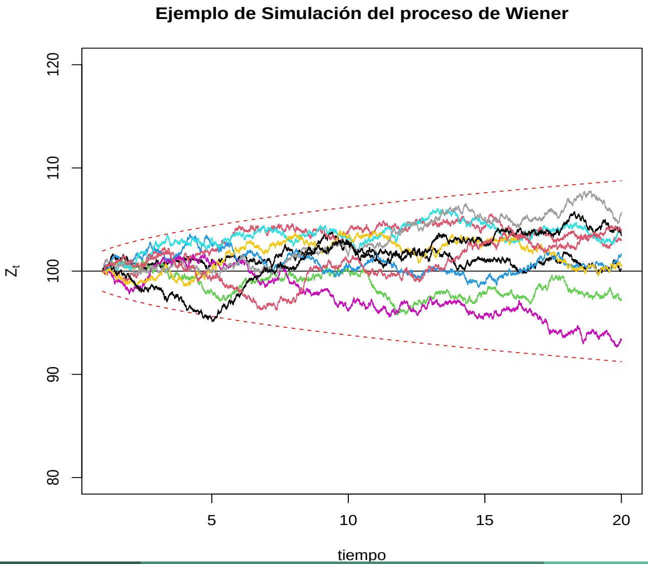
| Paso $i$ | $Z_{t+i}$ | $\epsilon_i$ | $\Delta Z = 0.052 * \epsilon$ | $Z_t = Z_{t+i} + \Delta Z$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 100 | 1.00751 | 0.053 | 100.053 |
| 1 | 100.053 | -0.45564 | -0.024 | 100.029 |
| 2 | 100.029 | -0.53681 | -0.028 | 100.001 |
| 3 | 100.001 | 1.69209 | 0.089 | 100.089 |
| $\vdots$ | | | | |
| 7300 | 92.47 | 1.153 | 0.06035 | 92.53 |

- La gráfica generada se muestra a continuación, considerando 10 trayectorias.

# Ejemplo I

```r
#Muestra de una trayectoria  en un periodo de T=20 años
#para un año Dt=1, seis meses Dt=0.5, un trimestre Dt=0.25, un mes Dt=1/12 etc.
z0 <- 100
TT <- 20 #periodos a simular
Dt <- 1/(365) #partición diaria.
N <- TT/Dt
x <- seq(1,TT,length=N)
plot(x,rnorm(N), ylim=c(80,120),type="n", main="Ejemplo de Simulación del proceso de Wiener",
xlab = "tiempo", ylab = expression(Z[t]))
abline(h = 100)

#límites de confianza la 95%
lines(x, 100 + 1.96*sqrt(x), lty = 2, col = "red")
lines(x, 100 - 1.96*sqrt(x), lty = 2, col = "red")

for(i in 1:10){
        eps <- rnorm(N, mean = 0, sd = 1)
        dz <- eps*sqrt(Dt)
        z <- z0 + cumsum(dz)
        lines(x,z,type="l",col=i)
}
```

# Ejemplo II


Ejemplo de Simulación del proceso de Wiener
120
110
100
90
80
$Z_t$
5
10
15
20
tiempo

# Observaciones al ejemplo

- En la gráfica se muestran intervalos de 95 % de confianza para el proceso $Z_t$.
- En la práctica, una debilidad del proceso de Wiener es que se comporta como una caminata aleatoria alrededor del valor inicial $Z_0$: $S_0 \pm 1.96\sqrt{t}$.
- Para resolver este problema, se generaliza el proceso de Wiener a un proceso con una tendencia o *deriva* (drift), es decir, una tendencia a alejarse del valor central, así como una varianza dada.
- Al incorporar la tendencia en el proceso como función del tiempo, se obtiene una *ecuación diferencial estocástica* (SDE) que son el objeto de estudio del *cálculo estocástico*.

# Proceso generalizado de Wiener

- Un proceso generalizado de Wiener para una variable $x_t$ se define en términos de $dZ$ como la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dx = a\,dt + b\,dZ$$

con $a, b$ constantes.

  - El término $a\,dt$ implica que $x$ tiene deriva esperada de $a$ por unidad de tiempo. Sin el término $b\,dZ$, la ecuación es fácil de responder:

$$dx = a\,dt \Rightarrow x = x_o + at$$

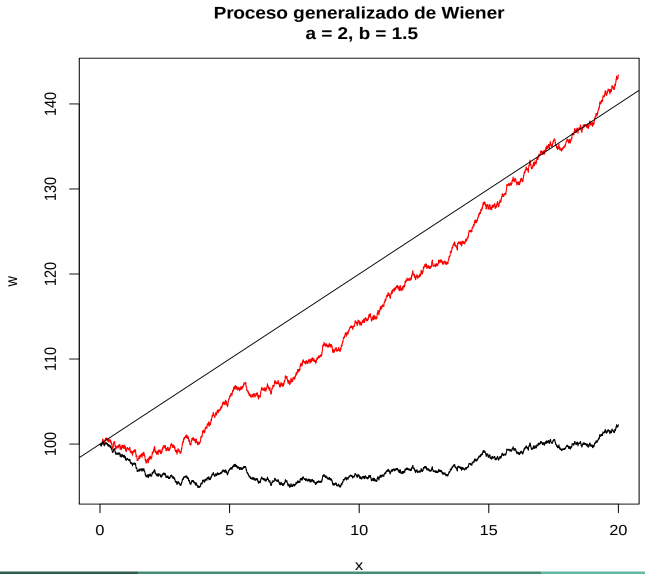
  - El término $b\,dZ$ agrega ”ruido blanco” o volatilidad estocástica a la trayectoria de $x$. En términos de pequeños cambios (versión discreta):

$$\begin{aligned} \Delta x &= a\Delta t + b\epsilon\sqrt{\Delta t} \\ \therefore & \quad \Delta x \sim \mathcal{N}\left(a\Delta t, b^2\Delta t\right) \end{aligned}$$

# Simulación de un proceso generalizado de Wiener I

```r
#Proceso generalizado de Wiener: modifica el anterior
a <- 2; b <- 1.5
z0 <- 100 #valor inicial
TT <- 20 #periodos a simular
Dt <- 1/(365) #partición diaria.
N <- TT/Dt #número de periodos a simular en el horizonte de TT años
x <- seq(0, TT, length = N+1)
eps <- rnorm(N, mean = 0, sd = 1)
dz <- eps*sqrt(Dt)
w <- c(z0,z0 + cumsum(a*Dt + b*dz))
z <- c(z0,z0 + cumsum(dz))
#gráfica
plot(x, w, type = "l", col = "red", main = "Proceso generalizado de Wiener\n a = 2, b = 1.5",
ylim = c(min(z),max(w)), xlim = c(0,20))
lines(x, z, type = "l") #última trayectoria simulada del proceso anterior
abline(coef = c(z0,a))
abline(h = 0)
```

# Simulación de un proceso generalizado de Wiener II



# Ejemplo: Aplicación a resultados en deportes (Stern, 1994) I

En un deporte entre dos equipos, se puede cuantificar la ventaja del equipo local calculando la probabilidad de que éste equipo gane dado que lidera el partido por $k$ puntos dado que ha transcurrido un porcentaje $t$ del juego ($0 \leq t \leq 1$).

- Para $0 \leq t \leq 1$ Sea $X_t =$ Diferencia en tantos entre el equipo local y el visitante después de que $t$ porcentaje del juego ha transcurrido.
- Se supone que $dX = \mu\, dt + \sigma\, dz$, donde $\mu$ representa la ventaja del equipo local por unidad de tiempo y $\sigma^2$ es la varianza por unidad de tiempo
- Con datos observados en 493 juegos de la NBA en 1992, se estimó $\hat{\mu} = 4.87$ y $\hat{\sigma} = 15.82$.

# Ejemplo: Aplicación a resultados en deportes (Stern, 1994) II

- Si $p(k,t)$ es la probabilidad de que el equipo local gane el juego, dado que se tienen $k$ puntos de ventaje en $t<1$, se puede calcular como:

$$
\begin{aligned}
p(k,t) &= P(X_1>0|X_t=k) = P(X_1-X_t>-k) \\
&= P(X_{1-t}>-k) = P(\mu(1-t)+\sigma Z_{1-t}>-k) \\
&= P\left(Z_{1-t}<\frac{k+\mu(1-t)}{\sigma}\right) \\
&= P\left(Z_t<\frac{\sqrt{t}(k+\mu(1-t))}{\sigma\sqrt{1-t}}\right)
\end{aligned}
$$

  La última igualdad se cumple porque $Z_t \sim \sqrt{\frac{t}{1-t}}Z_{1-t}$ (¿porqué?).

- Se puede construir una tabla con la siguiente estructura (tarea):

| $t$ | $k=-5$ | $k=-2$ | $k=0$ | $k=2$ | $k=5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | | |
| 0.25 | | | | | |
| 0.5 | | | | | |
| 1 | | | | | |

# Puente Browniano

## Puente Browniano

Si $dZ$ es un proceso de Wiener, el proceso condicional $\{B_t\}_{t\in[0,1]}|B_1 = 0$ es un *puente Browniano*. El puente Browniano tiene valor 0 en los puntos extremos del intervalo $[0, 1]$.

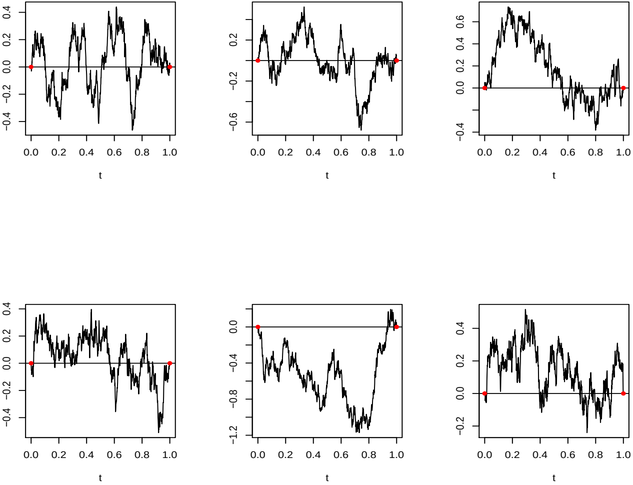
- Es fácil probar que para un puente Browniano $E(B_t) = 0$ para $t \in [0, 1]$ y Cov$(B_t, B_s) =$ mín$\{s, t\} - st$.
- Por otra parte, se puede probar que $B_t = Z_t - tZ_1$ para $t \in [0, 1]$ es un puente Browniano si $\{Z_t\}$ es un proceso de Wiener. Con este resultado, se obtiene un método para simular un puente Browniano a partir de un proceso de Wiener.

# Puente Browniano: Ejemplo I

Para simular un puente Browniano:

```
par(pty = "s", mfrow = c(2,3),mar=c(0,3,0,3))
n <- 1000 #número de puntos en partición
t <- seq(0,1,length = n) #partición del [0,1]
for(i in 1:6){
        Z <- c(0,cumsum(rnorm(n-1)))/sqrt(n)
        B <- Z-t*Z[n]
        plot(t,B,type = "l")
        abline(h = 0); points(c(0,1), c(0,0), col = "red", pch = 16)}
```

# Puente Browniano: Ejemplo II



# Proceso de Wiener geométrico I

Para modelar fenómenos más complejos, como en el contexto financiero, se requieren modelos un poco más elaborados o complejos.

- Supongamos que $S_t$ representa el precio de un instrumento financiero en el tiempo $t$.
- Sabemos que el cambio porcentual en el precio es el rendimiento del instrumento, así que debería cumplirse que, cuando no hay volatilidad, se cumple la siguiente ecuación, bajo un escenario de tasas constantes:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt \Rightarrow S_t = S_0 e^{\mu\, t}$$

  con $S_0$ una constante que representa el precio del activo en el tiempo inicial.

# Proceso de Wiener geométrico II

- Introduciendo volatilidad, el precio de un instrumento financiero se puede ver como la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz \text{ o } dS_t = \mu S_t \, dt + \sigma S_t \, dz$$

  donde $\mu$ es el rendimiento en la unidad de tiempo considerada y $\sigma$ es la volatilidad en esa unidad de tiempo. Esta ecuación se conoce como proceso de Wiener geométrico.
- La solución a esta ecuación se obtiene a través del cálculo estocástico, como veremos más adelante.

# Ejemplo

Supongamos que una acción que no paga dividendos tiene un rendimiento anual de 15 % y una volatilidad anual de 30 %, con precio al tiempo $t = 0$ de $S_0 = 100$. Entonces su ecuación se puede expresar como:

$$\frac{dS}{S} = 0.15dt + 0.30dz$$

En versión discreta,

$$\frac{\Delta S}{S} = 0.15\Delta t + 0.30\epsilon\sqrt{\Delta t}$$

Para una semana, $\Delta t = 7/365 = 0.0192$. Entonces

$$\Delta S = 100(0.15(0.0192) + 0.30\sqrt{0.0192}\epsilon = 0.288 + 4.155\epsilon$$

Entonces, el incremento del precio en una semana es una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}\left(0.288, 4.155^2\right)$

# Proceso de Wiener geométrico

## Proceso de Wiener geométrico

Sea $\{Z_t | t \geq 0\}$ un proceso generalizado de Wiener con tendencia $\mu$ y volatilidad $\sigma^2$. El proceso $\{S_t | t \geq 0\}$ definido como solución a la ecuación:

$$dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dz$$

es un proceso de Wiener geométrico.

# Lema de Ito (1954)

El proceso de Itô extiende el proceso generalizado de Wiener:

$$dS = a\,dt + b\,dz$$

permitiendo que las constantes $a$ y $b$ sean funciones tanto del tiempo como del propio proceso $S$:

$$dS = a(S,t)\,dt + b(S,t)\,dz$$

El lema de Itô establece que si $G$ es una función de $S$ y $t$, entonces $G$ sigue un proceso de Itô dado por la expresión:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S}a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}b^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial S}bdz$$

El lema de Itô es útil para encontrar procesos de funciones del proceso subyacente de interés.

# Ejemplo: Aplicaciones a rendimientos I

- En el caso de rendimientos, un modelo más adecuado que el proceso de Wiener geométrico es de la forma $G = log(S)$ donde $S$ es un proceso geométrico: $dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dz$. En este caso,

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}, \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Por el lema de Itô aplicado a $dS = \mu S dt + \sigma S dt$,

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz$$

Por lo tanto:

$$d \log S = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma dz$$

que es un proceso de Wiener generalizado.

# Ejemplo: Aplicaciones a rendimientos II

- Noten entonces que $S$, el proceso de Wiener geométrico es lognormal, por lo tanto, se puede escribir como:
$$S_t = S_0 e_t^Z$$
donde $Z_t$ es un proceso generalizado de Wiener con deriva $\mu$ y varianza $\sigma^2$.
- Para simular, usamos la versión discreta:
$$S(t+\Delta t) = S(t)\,\mathsf{exp}[(\mu - \sigma^2/2)\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}], \quad \epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$$

# Código para simular un proceso lognormal o proceso de Wiener geométrico

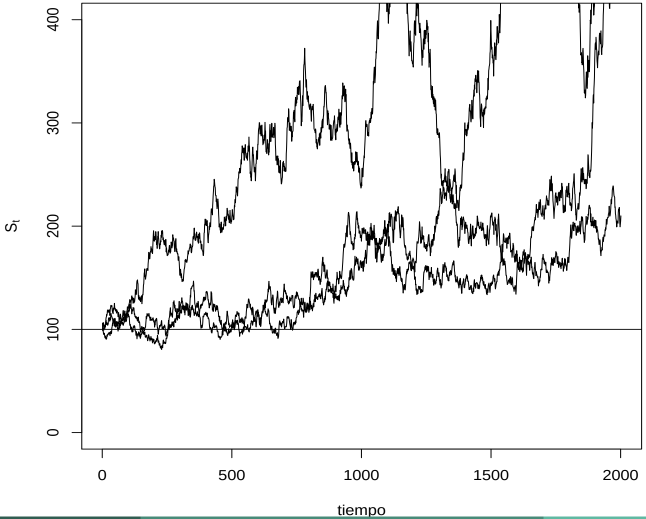
```
options(width = 150, digits = 3)
BGeo <- function(n, TT, a, b, S0 = 100){
#Función para generar un proceso Browniano Geométrico
#n es el número de puntos de partición del intervalo [0,TT]
#a es el drift y b la volatilidad
dt <- TT/n #incremento de los intervalos para cubrir [0,TT]
S <- S0 #valor inicial
for(i in 2:(n+1)){
        S <- append(S, S[i-1]*exp((a-b^2/2)*dt + b*sqrt(dt)*rnorm(1)))
}
return(S)
}
#Por ejemplo:
BGeo(100, 1, 0.1, 0.3, 100)

  [1] 100.0  99.2 101.8  97.2  98.3  95.1  92.1  90.2  86.4  81.8  78.9  80.7  80.2  78.2  76.1  75.8  73.3  75.4  73.8
 [25]  66.8  65.2  64.5  65.3  66.7  63.3  62.8  63.0  65.4  63.9  66.1  66.2  69.0  66.0  69.4  72.0  70.7  69.5  69.2
 [49]  69.2  69.4  71.0  73.6  69.7  71.2  70.4  69.1  69.5  70.1  70.2  69.9  69.2  67.6  67.2  65.0  66.4  64.7  63.5
 [73]  68.3  67.1  64.3  63.6  64.7  63.9  66.6  68.9  66.6  61.9  59.8  60.1  62.9  62.4  64.4  66.4  70.6  69.1  70.6
 [97]  78.0  74.0  75.7  75.9  75.6
```

# Ejemplo I

Consideremos tres realizaciones independientes del precio de un instrumento con valor inicial $S_0 = 100$, rendimiento 0.1 y volatilidad de 0.3: Considerando la función `Bgeo` de la lámina anterior:

```
plot(BGeo(2000,10,0.1,0.3,100), type = "l", ylim = c(0,400),
     xlab = "tiempo", ylab = expression(S[t]))
abline(h = 100)
lines(BGeo(2000,10,0.1,0.3,100))
lines(BGeo(2000,10,0.1,0.3,100))
```

# Ejemplo II



# Derivados

# Activos financieros derivados

## Productos derivados

Un derivado es un contrato sobre características de un activo financiero, que se denomina *activo subyacente*
Los activos subyacentes pueden ser otros activos financieros o bienes como el oro, o productos como el petróleo, o bien, precios de otros instrumentos.

Ejemplos de derivados incluyen las opciones, los swaps, los futuros o forwards, y los warrants.

# Opciones I

## Opciones

Las opciones son instrumentos financieros que le dan al poseedor o comprador (posición larga) el derecho, mas no la obligación, de comprar, vender, recibir, entregar, activar o desactivar otros activos (instrumentos, derivados, efectivo, etc.), a cambio de pagar una prima al vendedor (posición corta).

Para poder valuar y delimitar los beneficios de la opción, se necesita definir cada uno de los siguientes conceptos, entre otros:

- subyacente
- precio de ejercicio (strike)
- barreras (absorbentes, reflejantes)
- tipo de ejercicio (americana, europea, asiatica, bermuda)
- tiempo a vencimiento
- tiempo a liquidación
- Mercado donde se intercambia (Chicago, local, Bloomberg, Reuters)
- Tipos de garantías (para el vendedor)

# Opciones básicas

- Las opciones son los instrumentos que dan a su tenedor el derecho para comprar o vender un activo en un precio específico hasta una fecha de vencimiento indicada. El precio específico de la entrega se conoce como el *precio de ejercicio* y es denotado por $K$.
- Las opciones para comprar son *opciones call*, las opciones para vender son las *opciones put*. Las opciones solamente son ejercidas si generan beneficios.
- Los *forwards* por el contrario, implican la obligación de comprar o vender y pueden generar beneficios o pérdidas.

# Opciones Call Europeas

## Call Europeo

Una opción Call con un precio de ejercicio $X$ y fecha terminal $T$ le da al tenedor el derecho de *comprar* el subyacente a un precio $X$ en el tiempo $T$.

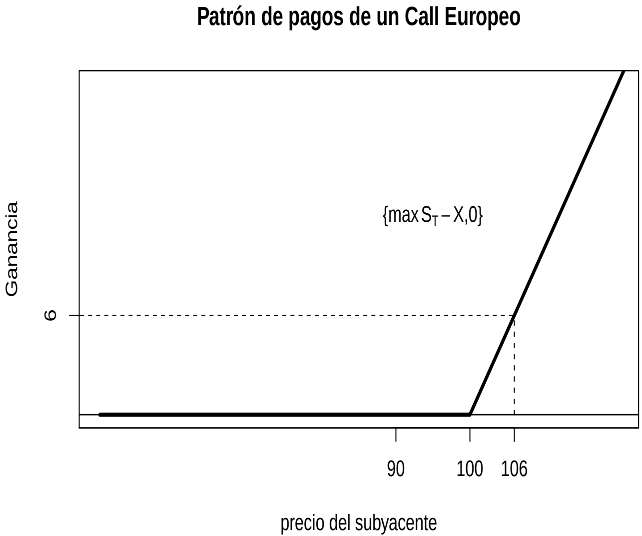
1. En la fecha $T$, el call puede estar 'dentro el dinero': Si el precio del subyacente $S_T > X$
   - Compra el subyacente a $X$ y véndelo al precio del mercado $S_T$
   - Obtienes una ganancia de $S_T - X > 0$
   - ¡Ejerce la opción para obtener una ganancia!
2. En la fecha $T$, el call puede estar 'fuera del dinero': el precio del subyacente $S_T < X$.
   - Puedes comprar el subyacente en $X$ y revenderlo por $S_T$
   - Obtienes una ganancia de $S_T - X < 0$
   - ¡Si se ejerce la opción se puede llegar a una pérdida!
   - Es mejor no ejercer la opción, se tiene una ganancia de 0.

# Ejemplo de opciones Call

Una opción call con precio de ejercicio \$100 y fecha terminal Junio 30, 2017 le da el derecho al tenedor de comprar el subyacente a un precio de \$100 en Junio 30, 2017.

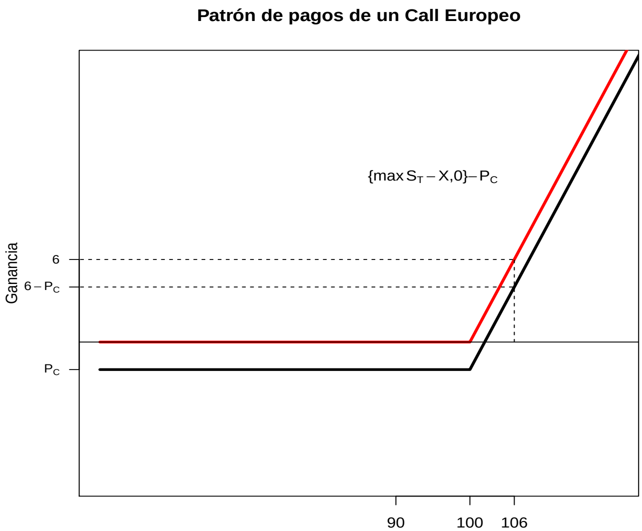
1. Si el precio del subyacente $S_T > 100$, ejerce la opción y obtiene un pago de $S_T - 100 > 0$
2. Si el precio del subyacente $S_T \leq 100$, es mejor no ejercer la opción y obtener ganancia de 0.

| Precio del subyacente | 80 | 90 | 100 | 110 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|
| Ganancia de la opción máx$(S_T - 100, 0)$ | 0 | 0 | 0 | 10 | 20 |


Patrón de pagos de un Call Europeo
Ganancia
6
{max $S_T$ – X,0}
90
100
106
precio del subyacente

# Gráfica de un Call

En realidad, recuerden que necesitan comprar el call a algún precio $P_C$



# Cómo valuar opciones europeas

- El comprador de una opción Call *espera* tener ganancias, en la fecha de expiración:

$$e^{-r_f T}\mathsf{E}\left[\text{máx}\{S_T - X, 0\}\right] - P_C \geq 0$$

- El vendedor de la opción Call tiene ganancias esperadas:

$$P_C - e^{-r_f T}\mathsf{E}\left[\text{máx}\{S_T - X, 0\}\right] \geq 0$$

- Tanto el comprador como el vendedor están de acuerdo en hacer su transacción si ambos tienen ganancias esperadas de cero:

$$P_C = e^{-r_f T}\mathsf{E}\left[\text{máx}\{S_T - X, 0\}\right]$$

Con esta condición, ya es posible estimar a través de MonteCarlo, el valor esperado de la opción.

# Algoritmo MC para valuar opciones

## Algoritmo de valuación para opciones call europeas

1. Para $j = 1, \ldots, N$
   1. Simula el precio del subyacente $S_{t,j}$ de $t = 0$ a $t = T$ para cada $j$, y obtener la ganancia de la opción en $T$: $C_{T,j} = \text{máx}\{S_{T,j} - K, 0\}$.
   2. Descuenta el valor de la ganancia usando la tasa que corresponda para descontar a valor presente: ya sea variable:
   $$C_{0,j} = \exp\left\{-\int_0^T r_u du\right\} C_{T,j}$$
   o fija:
   $$C_{0,j} = \exp(-rT) C_{T,j}$$
2. Obtener el precio descontado promedio
$$\hat{C}_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} C_{0,j}$$

con error estándar $se(\hat{C}_0) = \frac{\sigma_{\hat{C_{0,j}}}}{\sqrt{N}}$ y $\hat{\sigma}_{C_0} = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum(C_{0,j} - \hat{C}_0)^2}$

En el caso de una opción europea en particular

$$\hat{C}_0 = \exp(-rT)\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} \text{máx}\{S_{T,j} - K, 0\} = \exp(-rT)\hat{E}(\text{máx}\{S_T - K, 0\})$$

# Ejemplo de valuación I

Consideremos una opción sobre una acción cuyo valor actual es $S_0 = \$1.00$ La opción expira en $T$ días y el precio strike es $K$. Consideramos una tasa de interés constante $r$ anual y el precio se comporta como hemos visto, con un movimiento Browniano geométrico con volatilidad anual $\sigma$. La siguiente función calcula el precio del Call Europeo.

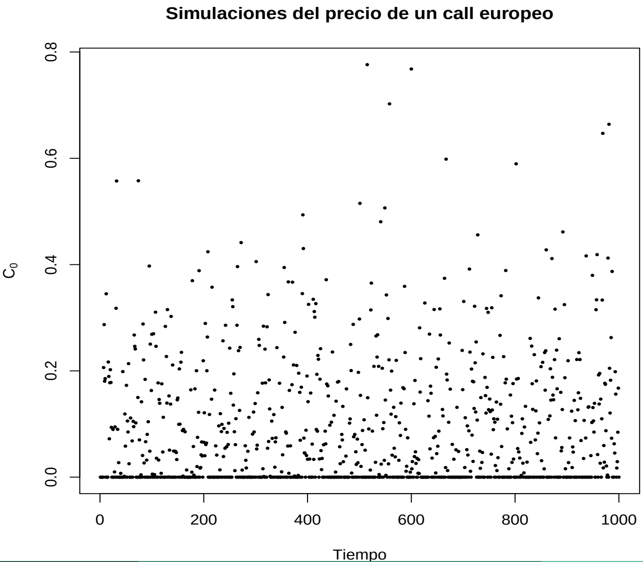
```
pcalleur <- function(S0, TT, K, mu, sigma){
        #calcula el valor de un call europeo con los parámetros dados.
        p <- BGeo(n = TT, TT = 250, a = mu/250, b = sigma/sqrt(250), S0 = S0) #considerando 250 días hábiles en un año
        return(exp(-TT/250)*max(p[TT]-K,0))
}
```

Ahora podemos simular varias corridas para determinar el valor de la opción: si $r = 0.005$, $T = 63$, $\sigma = 0.30$, $K = 1$, $S_0 = 1$:

# Ejemplo de valuación II

```
z <- z1 <- NULL
for (i in 1:1000){
     z<- append(z,pcalleur(S0=1,TT=63,K=1,mu=0.05,sigma=0.2))}
PC <- mean(z); c(PC,PC + c(-1,1)*sd(z))

[1]  0.0885 -0.0330  0.2100

for (i in 1:10000){
        z1 <- append(z1,pcalleur(S0=1,TT=63,K=1,mu=0.05,sigma=0.2))}
PC1 <- mean(z1); c(PC1,PC1 + c(-1,1)*sd(z1))

[1]  0.0853 -0.0346  0.2052

plot(z, pch = 16, cex = 0.5,
     main = "Simulaciones del precio de un call europeo",
         ylab = expression(C[0]), xlab = "Tiempo")
```

# Ejemplo de valuación III



# Valor en Riesgo

# Definición de Valor en Riesgo

## Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

# Definición de Valor en Riesgo

## Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Esta metodología fue promovida y difundida por J.P. Morgan en 1994, que desde entonces se ha convertido en un estándar a nivel mundial para medir riesgos financieros en general.

# Definición de Valor en Riesgo

## Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Derivado de este concepto de medición y administración de riesgo, se creó *RiskMetrics*, que salió de J.P. Morgan, para mejorar la metodología de medición de riesgo.

# Definición de Valor en Riesgo

## Definición de VaR

El valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística de riesgo que estima la pérdida máxima que podría registrar un portafolio de activos en un intervalo de tiempo dado y con cierto nivel de probabilidad y de confianza.

- Virtualmente, en todas las instituciones financieras se ha adoptado el VaR como la medición de riesgo fundamental diaria.

# Ejemplo: Calculo del Var

El Valor en Riesgo corresponde al cuantil de nivel $\alpha$ de la distribución de pérdidas y ganancias

- Consideremos los datos:

```
precios <- read.csv("../data/datosVaR.csv",sep=" ",header=T)
head(precios)

      fecha sp500 ftse100 nikkei225 cac40 dax100 usd.bp usd.yen usd.eur
1 01-Ene-97   741    4118     19361  2316    423   1.71  0.0086    1.30
2 02-Ene-97   737    4057     19361  2257    418   1.69  0.0087    1.30
3 03-Ene-97   748    4090     19361  2283    419   1.69  0.0086    1.28
4 06-Ene-97   748    4106     19446  2307    422   1.69  0.0086    1.28
5 07-Ene-97   753    4079     18896  2302    423   1.69  0.0087    1.28
6 08-Ene-97   748    4088     18680  2332    425   1.69  0.0086    1.27
```

- Ahora consideremos sus rendimientos ($r_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$):

```
n <- dim(precios)[1]
rendimientos <- (precios[2:n,-1]-precios[1:(n-1),-1])/precios[1:(n-1),-1]
rendimientos <- cbind(fecha=precios[-1,1],rendimientos)
head(rendimientos)

      fecha     sp500   ftse100 nikkei225    cac40    dax100    usd.bp usd.yen   usd.eur
2 02-Ene-97 -0.005036 -0.014835   0.00000 -0.02537 -0.011500 -0.010628  0.0116 -0.002538
3 03-Ene-97  0.014952  0.007911   0.00000  0.01143  0.003638 -0.004604 -0.0115 -0.015190
4 06-Ene-97 -0.000508  0.004157   0.00437  0.01047  0.007251  0.003854  0.0000  0.001723
5 07-Ene-97  0.007463 -0.006745  -0.02827 -0.00216  0.000758  0.000945  0.0116  0.000000
6 08-Ene-97 -0.006399  0.002133  -0.01142  0.01300  0.005253 -0.003895 -0.0115 -0.006253
7 09-Ene-97  0.008605 -0.000122  -0.03247  0.00749 -0.004496  0.004799  0.0000  0.000315
```

# Ejemplo: Calculo del Var (cont.)

- Si suponemos que nuestro portafolio de inversión tiene la siguiente composición (en USD):

| sp500 | ftse100 | nikkei225 | cac40 | dax100 | usd.bp | usd.yen | usd.eur |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3000 | 1000 | 100000 | 3000 | 1500 | 2000 | 11000 | 9000 |

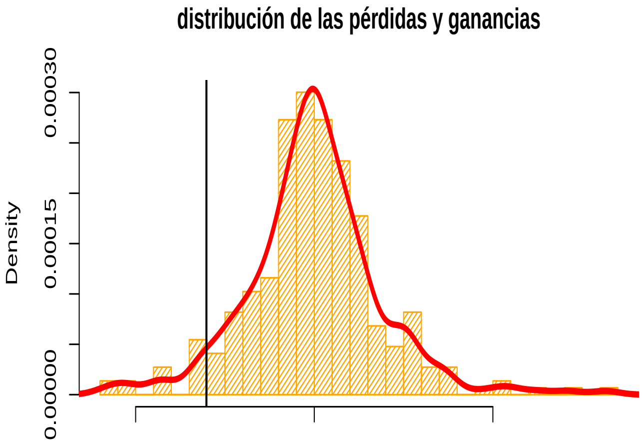
- La posición de pérdidas y ganancias (en USD) estará dada por el producto del vector de posiciones por los rendimientos de cada día:

```
w0 <- c(3000,1000,100000,3000,1500,2000,11000,9000)
pyg <- as.data.frame(as.matrix(rendimientos[,-1]) %*% w0)
pyg <- cbind(fecha=rendimientos[,1],PyG=pyg)
head(pyg)
```

```
      fecha      V1
2 02-Ene-97   -39.5
3 03-Ene-97  -179.8
4 06-Ene-97   505.4
5 07-Ene-97 -2687.3
6 08-Ene-97 -1302.8
7 09-Ene-97 -3192.9
```

# Gráfica del VaR

```
hist(pyg[,2],breaks=40,density=30,col="orange",main="distribución de las pérdidas y ganancias",xlab="PyG",prob=T)
lines(density(pyg[,2],na.rm=T),col="red",lwd=4)
var05 <- quantile(pyg[,2],.05,na.rm=T)
abline(v=var05,lwd=2)
```



# Otros ejemplos de interpretación del VaR

- Un inversionista tiene un portafolio de activos con un valor de 10 millones de pesos, con un VaR de un día de $250,000 a un 95 % de confianza ¿Cómo se interpreta esta expresión?.

# Otros ejemplos de interpretación del VaR

- Un inversionista tiene un portafolio de activos con un valor de 10 millones de pesos, con un VaR de un día de $250,000 a un 95 % de confianza ¿Cómo se interpreta esta expresión?.
- Lo anterior significa que en promedio, sólo uno de cada 20 días de operación normal del mercado (1/20=5 %), la perdida esperada puede ser mayor a $250,000.

# Otros ejemplos de interpretación del VaR

- Un inversionista tiene un portafolio de activos con un valor de 10 millones de pesos, con un VaR de un día de $250,000 a un 95 % de confianza ¿Cómo se interpreta esta expresión?.
- Lo anterior significa que en promedio, sólo uno de cada 20 días de operación normal del mercado (1/20=5 %), la perdida esperada puede ser mayor a $250,000.
- En la práctica, los miembros del consejo de administración son los que determinan el nivel de confianza, y el horizonte del tiempo. El BIS (Bank of International Settlements) recomienda definir 99 % de confianza y un horizonte de 10 días para los intermediarios financieros.

# Otros ejemplos de interpretación del VaR

- Un inversionista tiene un portafolio de activos con un valor de 10 millones de pesos, con un VaR de un día de $250,000 a un 95 % de confianza ¿Cómo se interpreta esta expresión?.
- Lo anterior significa que en promedio, sólo uno de cada 20 días de operación normal del mercado (1/20=5 %), la perdida esperada puede ser mayor a $250,000.
- En la práctica, los miembros del consejo de administración son los que determinan el nivel de confianza, y el horizonte del tiempo. El BIS (Bank of International Settlements) recomienda definir 99 % de confianza y un horizonte de 10 días para los intermediarios financieros.
- RiskMetrics recomienda 95 % de confianza en un horizonte de un día, para operaciones en mercados líquidos.

# Observaciones

- El VaR no otorga *certidumbre* con respecto a las pérdidas que se podrían sufrir en una inversión, sino una *expectativa* de resultados basada en la distribución estadística de las posibles pérdidas y ganancias del instrumento o portafolio, y en algunos supuestos de los modelos o parámetros que se utilizan para los cálculos.

# Observaciones

- El VaR no otorga *certidumbre* con respecto a las pérdidas que se podrían sufrir en una inversión, sino una *expectativa* de resultados basada en la distribución estadística de las posibles pérdidas y ganancias del instrumento o portafolio, y en algunos supuestos de los modelos o parámetros que se utilizan para los cálculos.
- Para calcular el VaR se requiere la distribución de los rendimientos del portafolio o activo. Surge un problema de estimación.

# Observaciones

- El VaR no otorga *certidumbre* con respecto a las pérdidas que se podrían sufrir en una inversión, sino una *expectativa* de resultados basada en la distribución estadística de las posibles pérdidas y ganancias del instrumento o portafolio, y en algunos supuestos de los modelos o parámetros que se utilizan para los cálculos.
- Para calcular el VaR se requiere la distribución de los rendimientos del portafolio o activo. Surge un problema de estimación.
- En términos estadísticos, el VaR es un *cuantíl* de la distribución de las pérdidas y ganancias de un portafolio o activo.

# Metodología para cálculo del VaR

- El valor en riesgo se puede calcular principalmente mediante dos tipos de métodos:

# Metodología para cálculo del VaR

- El valor en riesgo se puede calcular principalmente mediante dos tipos de métodos:
  1. Métodos paramétricos. Se supone que los rendimientos del portafolio se distribuyen de acuerdo a una distribución de probabilidad, que típicamente es normal, pero puede incluír otras distribuciones como la $t$ o lognormal.

# Metodología para cálculo del VaR

- El valor en riesgo se puede calcular principalmente mediante dos tipos de métodos:
  1. Métodos paramétricos. Se supone que los rendimientos del portafolio se distribuyen de acuerdo a una distribución de probabilidad, que típicamente es normal, pero puede incluír otras distribuciones como la $t$ o lognormal.
  2. Métodos no paramétricos. Consiste en usar una serie histórica de precios del portafolio, para construir una serie de tiempo de precios y/o rendimientos simulados o hipotéticos. Se requiere hacer supuestos sobre el proceso generador de los precios.

# Ejemplo de método paramétrico

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.

# Ejemplo de método paramétrico

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

# Ejemplo de método paramétrico

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

- En nuestro ejemplo:

$$VaR = 1.65 \times 300,000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6,236.41$$

suponiendo que un año financiero tiene 252 días.

# Ejemplo de método paramétrico

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de $30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:
$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$
- En nuestro ejemplo:
$$VaR = 1.65 \times 300,000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6,236.41$$
suponiendo que un año financiero tiene 252 días.
- Interpretación: se espera que en promedio, un día de cada 20 (un día hábil al mes) el inversionista puede esperar una pérdida igual o mayor a $6,234.41.

# Ejemplo de método paramétrico

- Un inversionista compra 10,000 acciones de Bimbo cuyo precio es de \$30 por acción y tiene una volatilidad de 20 % anual. Se desea conocer el VaR diario de esta posición considerando 95 % de confianza.
- El modelo paramétrico supone que el VaR puede calcularse con la siguiente fórmula:

$$VaR = z_{1-\alpha/2} \times S \times \sigma \times \sqrt{t}$$

- En nuestro ejemplo:

$$VaR = 1.65 \times 300,000 \times 0.20 \times \sqrt{1/252} = \$6,236.41$$

  suponiendo que un año financiero tiene 252 días.
- Interpretación: se espera que en promedio, un día de cada 20 (un día hábil al mes) el inversionista puede esperar una pérdida igual o mayor a \$6,234.41.
- Esta cifra se puede utilizar como límite para el operador de la posición, como revelación de información de riesgos de portafolios.

# Ejemplo: portafolio de dos instrumentos

- Sea $P = (w_1, w_2)$ un portafolio con 2 instrumentos.
- El VaR del portafolio se define como

$$VaR_p = z_{1-\alpha/2} \times \sigma_p \times S \times \sqrt{t}$$

- En términos de cada instrumento,

$$VaR_p = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho VaR_1 VaR_2}$$

- Al VaR del portafolio se le conoce como *VaR diversificado* porque toma en cuenta las correlaciones de los rendimientos de los instrumentos del portafolio.
- Para un portafolio con $k$ instrumentos, se tiene que:

$$VaR_p = \sqrt{\mathbf{v}'\Sigma\mathbf{v}}$$

donde $\mathbf{v}$ es el vector con los VaR individuales de cada instrumento, y $\Sigma$ es la matriz de correlaciones de los rendimientos.

# Método de Monte Carlo para calcular el VaR

- El método de Monte Carlo se aplica a casos en que se quiere calcular el VaR de productos derivados, como futuros, opciones y swaps. En derivados muy complejos, es el método más eficaz para medir el riesgo.
- En este modelo, generamos precios de acuerdo al modelo de Proceso de Wiener geométrico que hemos visto antes para calcular los precios futuros de los instrumentos en el portafolio y se usan para calcular las pérdidas y ganancias.
- Uno de sus inconvenientes es que requiere el uso intensivo de la computadora, y puede llegar a ser un problema serio en portafolios que son muy grandes.

# Generación de escenarios

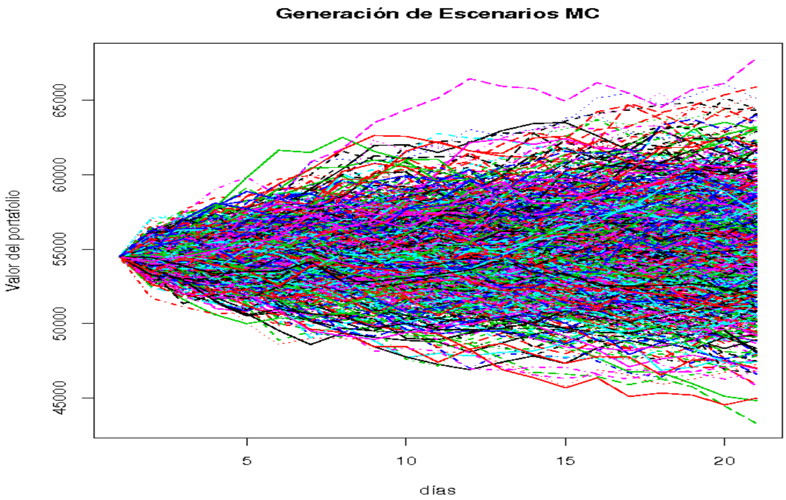
- La ecuación del modelo para el rendimiento del portafolio es recursiva. Para crear escenarios sobre las pérdidas y ganancias de valor del portafolio, se generan números aleatorios normales y se calcula la fórmula del valor del portafolio para cada día que se está simulando.
- Con los datos obtenidos se puede construir una tabla como la siguiente:

| día | Valor del Portafolio | $\epsilon$ | PyG |
|---|---|---|---|
| 0 | 54,498.00 | | |
| 1 | 54,209.00 | -0.40663 | -289.00 |
| 2 | 54,070.23 | -0.21405 | -138.77 |
| 3 | 53,384.53 | -0.92730 | -685.69 |
| ... | ... | ... | ... |
| 19 | 55,186.28 | -1.08720 | -836.79 |
| 20 | 54,252.31 | -1.22843 | -933.97 |

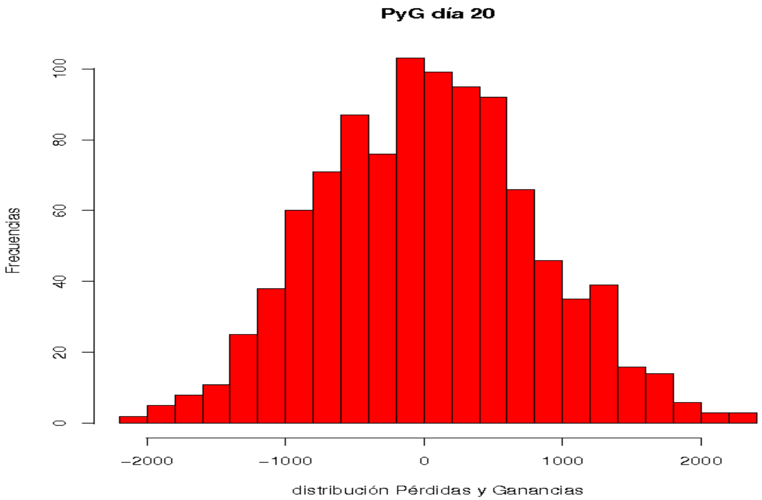
# Generación de escenarios

- La tabla anterior muestra los resultados para *un solo* escenario. Cada trayectoria que se genera es llamada escenario en la administración de riesgos.
- Para calcular el VaR, se requiere generar un gran número de *escenarios*. En la práctica es usual simular $B = 1,000$ o más.
- Las trayectorias de valores del portafolio se muestran en la siguiente página. Con estos escenarios, se grafíca un histograma de las pérdidas y ganancias estimadas para el portafolio el día 20. Este histograma corresponde a una estimación de la distribución real de las pérdidas y ganancias que se pueden esperar.

# Escenarios de valores del portafolio.



# Histograma de Pérdidas y Ganancias.



- El valor en Riesgo es simplemente el cuantil que se requiera de la distribución de las pérdidas y ganancias estimadas.
- En nuestro ejemplo, podemos calcular varios cuantiles para comparar:

```
> quantile(PyG[20,],c(0.01,0.02,0.05,0.10))
1%        2%        5%        10%
-1639.583 -1483.272 -1204.660  -947.672
```

- Entonces, bajo condiciones normales del mercado, la pérdida que no será excedida en 99 % de los casos es \$1,639. En este sentido es la máxima pérdida esperada (en 99 % de los casos).
- Para calcular el VaR, podemos usar los precios y calcular las pérdidas y ganancias, o también es posible que usemos la distribución de los rendimientos esperados del portafolio.

# Método no paramétrico: VaR histórico

- La idea es muy directa: usamos datos reales históricos de cada instrumento en un portafolio para construir una distribución de pérdidas y ganancias empírica para el portafolio.
- En este caso, no se supone ningún modelo teórico o analítico para el proceso que genera los precios o rendimientos como en el caso anterior.
- Es importante en la práctica, que se disponga de datos históricos diarios, para varios años. Por lo menos, el BIS recomienda que se utilice al menos un año, pero se debería tener información de 3 a 5 años por lo menos.
- Con estos datos, se calcula el valor del portafolio para cada día,*suponiendo que se mantienen constantes los pesos del portafolio* durante todo el tiempo.
- Este método es muy utilizado porque no requiere de muchos conocimientos técnicos, pero tiene sus deficiencias.