Simulación Semestre 2020-II ITAM
21 de septiembre de 2020

Primer Examen Parcial

Instrucciones:

1. El examen deberá resolverse de manera individual.
2. Se asignarán 5 problemas al azar de un total de 10 problemas disponibles. El examen y los problemas a resolver de cada uno se les comunicará vía Piazza el miércoles 23 de septiembre a las 8:00pm. El examen se deberá entregar vía correo electrónico a:

   jorge.delavegagongora@gmail.com

   el jueves 24 de septiembre a más tardar a las 10:00am. Se tomará en cuenta la estampa de tiempo del mensaje.
3. No habrá clase de Simulación ni de EA3 ese día. (por la intersección de estudiantes en ambas clases)
4. Estaré disponible para atender dudas del examen en Teams en el horario usual de clases, de 7 a 10. Las dudas sólo se atenderán a mi discreción es, decir, no se responderán aquellas preguntas que no sean para clarificar lo que se pide.

1. Mostrar que el promedio de las U_i's tomadas sobre un ciclo entero de un GLC de periodo completo es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$.
2. Dar el algoritmo de la transformación inversa para generar una muestra aleatoria de tamaño n para la siguiente densidad:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 I(-1 \leq 1)$$

   Obtner una muestra aleatoria de tamaño 3 con los siguientes uniformes:

```r
set.seed(681206)
runif(3)

[1] 0.9353666 0.1770968 0.3525948
```

3. Dar el algoritmo de aceptación-rechazo para generar una muestra aleatoria de tamaño n para la siguiente densidad:

$$f(x) = \frac{x}{a(1-a)} I(0 \leq x \leq a) + \frac{1}{(1-a)} I(a \leq x \leq 1-a) + \frac{1-x}{a(1-a)} I(1-a \leq x \leq 1)$$

Obtener una muestra con dicho algoritmo de tamaño 3 manualmente con los siguientes números:

```
set.seed(1)
runif(3)

[1] 0.2655087 0.3721239 0.5728534
```

4. Para la distribución triangular $Tri(a, c, b)$ con densidad

$$f(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} I(a \leq x \leq c) + \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-x)} I(c \leq x \leq b)$$

para $a < c < b$. Encontrar la distribución inversa $F^{-1}(u)$ y obtener una muestra de tamaño 3 manualmente con los siguientes uniformes:

```
set.seed(1968)
runif(3)

[1] 0.1629056 0.4126848 0.2633616
```

5. Determinar si el GLC alcanza un periodo máximo:

$$\begin{aligned} a &= 2,814,749,767,109 \\ c &= 59,482,661,568,307 \\ m &= 2^{48} \end{aligned}$$

6. Considerar los valores siguientes. Probar si los números $2^o, 9^o, 16^o, \ldots$ en la sucesión estan autocorrelacionados, con $\alpha = 0.05$

```
 [1] 0.30 0.48 0.36 0.01 0.54 0.34 0.96 0.06 0.61 0.85 0.48 0.86 0.14 0.86 0.89
[16] 0.37 0.49 0.60 0.04 0.83 0.42 0.83 0.37 0.21 0.90 0.89 0.91 0.79 0.57 0.99
[31] 0.95 0.27 0.41 0.81 0.96 0.31 0.09 0.06 0.23 0.77 0.73 0.47 0.13 0.55 0.11
[46] 0.75 0.36 0.25 0.23 0.72 0.60 0.84 0.70 0.30 0.26 0.38 0.05 0.19 0.73 0.44
```

7. Con los siguientes números, determinar si hay un número excesivo de rachas arriba o abajo de la media. Usar $\alpha = 0.05$.

```
 [1] 0.34 0.90 0.25 0.89 0.87 0.44 0.12 0.21 0.46 0.67 0.83 0.76 0.79 0.64 0.70
[16] 0.81 0.94 0.74 0.22 0.74 0.96 0.99 0.77 0.67 0.56 0.41 0.52 0.73 0.99 0.02
[31] 0.47 0.30 0.17 0.82 0.56 0.05 0.45 0.31 0.78 0.05 0.79 0.71 0.23 0.19 0.82
[46] 0.93 0.65 0.37 0.39 0.42 0.99 0.17 0.99 0.46 0.05 0.66 0.10 0.42 0.18 0.49
[61] 0.37 0.51 0.54 0.01 0.81 0.28 0.69 0.34 0.75 0.49 0.72 0.43 0.56 0.97 0.30
[76] 0.94 0.96 0.58 0.73 0.05 0.06 0.39 0.84 0.24 0.40 0.64 0.40 0.19 0.79 0.62
[91] 0.18 0.26 0.97 0.88 0.64 0.47 0.60 0.11 0.29 0.78
```

8. Derivar un procedimiento basado en aceptación-rechazo para obtener muestras de la densidad proporcional a $h(x)$, donde

$$h(x) = \frac{\exp(-x^2/2)}{1+|x|}$$

   con soporte en $\mathbb{R}$. Comentar sobre la eficiencia de su método, dado que $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 1.5413$.

9. Hay n cartas y n sobres, cada sobre ha sido diseñado específicamente para cada carta. Una persona mete las cartas en los sobres al azar. Calcular la probabilidad que ninguna carta se ponga en su propio sobre por simulación, y considerando $n = 10$.

10. Juego de *craps*: el juego consiste en lanzar un par de dados una o más veces y se observa la suma de las caras de los dados resultantes.

    - Si se obtiene 7 u 11 en el primer lanzamiento, el jugador gana inmediatamente.
    - Si se obtiene 2, 3 o 12, el jugador pierde inmediatamente.
    - Si se obtiene cualquier otro número diferente a los anteriores, en el primer lanzamiento, ese número se llama *el punto*.
    - Los dados se lanzan repetidamente hasta que salga el punto (en ese caso gana) o salga un 7 (en ese caso pierde).

    ¿Cuál es la probabilidad de ganar en el largo plazo? Obtener el resultado por simulación.