6) Mostrar que el promedio de las U_i's tomados de un ciclo completo de un GLC de periodo completo es $\frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$.

Demostración:

Un generador lineal congruencial se define como sigue:

$Z_i \equiv (a Z_{i-1} + c)$ mód m ; Z_0 = valor inicial

m = módulo

$0 \leq Z_i \leq m-1 \quad \forall i$; a = multiplicador

$U_i = \frac{Z_i}{m}$ (Valor de cada U_i) ; c = incremento

En este caso, el GLC es de periodo completo.

De esta manera, cada valor del de la congruencia debe aparecer, al menos, una vez. Entonces, del promedio de todos los valores (Z_i) se obtiene que

$$\frac{Z_0 + \dots + Z_{m-1}}{m} = \frac{(m-1)}{2}$$

ya que $Z_i = 0$ para alguna $i \in \{0, \dots, m-1\}$

$$\frac{Z_0}{m} + \dots + \frac{Z_{m-1}}{m} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2} \iff U_0 + \dots + U_{m-1} = \frac{m}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{U_0 + \dots + U_{m-1}}{m} = \frac{m}{2m} - \frac{1}{2m} \iff \frac{U_0 + \dots + U_{m-1}}{m} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2m}$$

8) Probar que la parte fraccional de la suma de uniformes $[0,1]$ $U_1+U_2+\cdots+U_k$ es también uniforme en el intervalo $[0,1]$.

Demostración:

Se define $(x) = x - \lfloor x \rfloor$ a la parte fraccional de x. Si probamos que dados $U_1, U_2 \sim \text{Uniforme}(0,1)$, de manera inductiva se puede probar el resultado general, puesto que para $U_i \sim \text{Uniforme}(0,1)$ $i \in \{1,\dots,k\}$ iid se tiene que

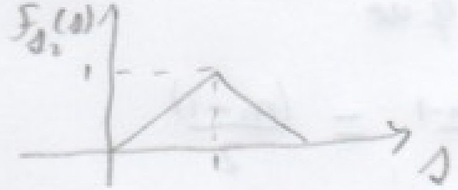
$$(U_1+U_2+\dots+U_k) = ((U_1+U_2+\dots+U_{k-1})+U_k) = (U+U_k)$$

$$(U := (U_1+\dots+U_{k-1}))$$

Todo resulta en probar el caso $k=2$, la base de inducción:

Sean $U_1, U_2 \sim \text{Uniforme}(0,1)$ iid y sea $S_2 = U_1+U_2$ con f.d.p.

$$f_{S_2}(s) = \begin{cases} s & 0 \le s < 1 \\ 2-s & 1 \le s \le 2 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$



Si $s \in [0,1] \Rightarrow \mathbb{P}[(S_2) \le s]$ tiene dos casos:

Caso I $0 \le S_2 < 1 \Rightarrow (S_2) \le s \Leftrightarrow S_2 \le s$

Caso II $1 \le S_2 \le 2 \Rightarrow (S_2) = S_2 - 1 \Rightarrow 0 \le S_2 - 1 \le 1 \Rightarrow S_2 - 1 \le 1+s$

Si integramos para obtener la f.p.a. resulta que

$$F_{(S_2)}(s) = \mathbb{P}[(S_2) \le s] = \int_{u=0}^{s} f_{S_2}(u)\,du + \int_{u=1}^{1+s} f_{S_2}(u)\,du = \int_0^s u\,du + \int_1^{1+s} (2-u)\,du$$

$$= \frac{u^2}{2}\Big]_0^s + \left(2u - \frac{u^2}{2}\right)\Big]_1^{1+s} = \frac{s^2}{2} + 2(1+s) - \frac{(1+s)^2}{2} - \left[2 - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \cancel{\frac{s^2}{2}} + \cancel{2} + 2s - \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{s^2}{2}} - s - \cancel{2} + \cancel{\frac{1}{2}} = s$$

Por lo tanto, $F_{(S_2)}(s) = s\ \mathbb{1}_{(0,1)}(s)$

Supongamos que $(U_1+U_2+\dots+U_k) \sim$ Uniforme $(0,1)$ para cierta $k \in \mathbb{N}$. Veamos si se cumple $\forall k \geq 2$

$(U_1+\dots+U_k+U_{k+1}) = ((U_1+\dots+U_k)+U_{k+1})$

Sea $U=(U_1+\dots+U_k)$ y, por hipótesis, $U \sim$ Uniforme$(0,1)$

$(U+U_{k+1}) = U_0 \sim$ Uniforme $(0,1)$ por la base de inducción.

Por lo tanto, la parte fraccional de la suma de uniformes $[0,1]$ se distribuye uniforme $[0,1]$.