

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/326674636>

Simulación estocástica de la dinámica de índices bursátiles

Article · January 2014

CITATIONS

0

READS

259

1 author:



Abigail Rodríguez Nava

Metropolitan Autonomous University

128 PUBLICATIONS 84 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



Políticas públicas con enfoque de derechos humanos [View project](#)



Evaluación de políticas públicas [View project](#)

Simulación estocástica de la dinámica de índices bursátiles

Abigail Rodríguez Nava¹

Recibido: 3 de octubre de 2013

Aceptado: 29 de noviembre de 2013

Resumen

El propósito de esta investigación es determinar las posibilidades de simulación de la dinámica de los índices accionarios a través de su simulación estocástica; especialmente se evalúa si los resultados obtenidos mediante este tipo de modelación son aproximados a los datos observados en la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) y en la Bolsa de Valores de Sao Paulo y Bolsa Brasileña de Mercados y Futuros (BM&Fbovespa). La investigación tiene como fundamentos: la importancia de los pronósticos y expectativas de las variables económicas en las decisiones de los agentes; la necesidad de modelar y comparar la dinámica de los mercados accionarios; y las ventajas de la modelación estocástica sobre los análisis tradicionales de extrapolación determinista.

Palabras clave: simulación estocástica, expectativas, índices accionarios, dinámica de precios.

Abstract

This paper is aimed at showing the simulation possibilities of the stock indexes by the stochastic modeling. Specially, is evaluated if the results obtained by this type of simulation are similar to their observed dynamics on the Mexican Stock Exchange (BMV) and on the Sao Paulo Stock Exchange and the Brazilian Mercantile and Futures Exchange (BM&Fbovespa). The research has as fundamentals the importance of the forecasts and expectations on the agents' decisions, the need to compare and to model the dynamic of the stock markets, and the advantages of the stochastic modeling over the deterministic modeling, based on the traditional analysis of extrapolation.

Keywords: stochastic simulation, expectations, stock indexes, price dynamics.

¹ Profesora-investigadora del Departamento de Producción Económica de la Universidad Autónoma Metropolitana, Unidad Xochimilco. Correo electrónico: arnava@correo.xoc.uam.mx

Introducción

La modelación del comportamiento de los agentes en la teoría económica convencional se basa en los supuestos tradicionales de competencia perfecta tales como: la información perfecta (completa y simétrica), la existencia de numerosos individuos o empresas semejantes en sus decisiones que permite establecer la figura de agentes representativos, la flexibilidad de precios, la homogeneidad y divisibilidad perfecta de bienes y la libre movilidad de factores de producción (capital y trabajo).

En el enfoque básico del equilibrio general competitivo, el propósito es mostrar la posibilidad de que las decisiones individuales sean compatibles, aun cuando los agentes participantes en los mercados sólo busquen su propio beneficio (los consumidores buscan maximizar su utilidad considerando su restricción presupuestal y las empresas pretenden maximizar sus ganancias considerando su restricción tecnológica); esto se demuestra con la existencia de un vector de precios relativos con el cual todos los agentes están de acuerdo, porque la oferta de bienes coincide con la demanda en todos los mercados. La existencia de este equilibrio en plena vigencia de las condiciones de competencia perfecta quedó demostrada en 1954, por las aportaciones de Arrow, Hahn y Debreu (Arrow y Hahn, 1971; Debreu, 1972).² Más adelante también se demostró la existencia del equilibrio general en modelos con incertidumbre.³

Una de líneas desarrolladas por la macroeconomía moderna, es la representación de las decisiones de los individuos cuando ellos actúan en contextos de información imperfecta. Si la información es incompleta, se requieren modelos de formación de expectativas que expliquen cómo puede estimarse alguna predicción para las variables desconocidas. La formalización contemporánea de la macroeconomía en la teoría ortodoxa se basa en los modelos dinámicos estocásticos de equilibrio general (DSGE, por sus siglas en inglés *dynamic stochastic general equilibrium*). En estos modelos una de

² Las condiciones que garantizan la existencia del equilibrio general competitivo en contextos deterministas son la satisfacción de la ley de Walras en las funciones de demanda excedente, y que éstas cumplan con las condiciones de homogeneidad de grado cero en precios y continuidad.

³ En escenarios con incertidumbre, la demostración del equilibrio general requiere, además de las condiciones del modelo determinista, la completitud de los mercados (existencia de un mercado para cada bien contingente) y la posibilidad de efectuar ventas en corto (Musielá y Rutkowski, 1998).

las variables a las que se sujeta el problema de optimización de los agentes, no es totalmente conocida, se ignora su valor exacto, pero se presupone que sí se conoce su distribución de probabilidad. Por ejemplo, puede suponerse que una empresa desea determinar las cantidades óptimas de los insumos que demandará para la producción, pero los precios de esos insumos son una variable aleatoria; o bien puede tenerse el caso de un inversionista que decidirá en qué compañía invertir; en este caso el rendimiento accionario es una variable aleatoria.

De la misma forma, los modelos macroeconómicos (que están micro-fundamentados porque se basan en la agregación del comportamiento individual) incluyen algún proceso de formación de expectativas; por ejemplo, la autoridad monetaria (el banco central) tiene como objetivo el control de la inflación, y para ello asume como regla de política el control de la tasa de interés nominal basado en las expectativas de incremento futuro de precios; asimismo, los bancos comerciales determinan la oferta óptima de créditos con base en las expectativas del cumplimiento de los pagos por parte de los solicitantes; y los trabajadores deciden sobre su consumo óptimo considerando sus expectativas respecto a la variación de los precios de los bienes y de su ingreso salarial.

El propósito de esta investigación es determinar las posibilidades de simulación de los índices accionarios a través de modelos estocásticos; esta evaluación se realiza a partir del contraste entre los resultados simulados y la dinámica real observada en los índices bursátiles de los mercados de valores mexicano y brasileño. La investigación se fundamenta en la importancia de los pronósticos y expectativas de las variables económicas en las decisiones de los agentes; en la necesidad de modelar y comparar la dinámica de los mercados accionarios (sobre todo en contextos de volatilidad financiera); y en las ventajas para la investigación, de la modelación estocástica sobre los análisis tradicionales de extrapolación determinista.

El documento se estructura así: en la siguiente sección se presentan las características teóricas de la modelación determinista y estocástica de variables económicas; a continuación se expone la dinámica de los índices accionarios principales en los mercados de valores mexicano y brasileño; posteriormente se realiza la simulación estocástica del Índice de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores (IPC) y del Índice Bovespa de la Bolsa de Valores de Sao Paulo y Bolsa Brasileña de Mercados y Futuros (Ibovespa); finalmente se presentan las conclusiones de la investigación.

Los enfoques determinista y estocástico en simulación

Históricamente, los modelos básicos de formación de expectativas son cuatro: estáticos, extrapolativos, adaptativos y racionales; los tres primeros se consideran deterministas porque se basan sólo en información histórica conocida. La formalización de las expectativas estáticas se debe a Ezequiel (1938); éstas pueden representarse como:

$$p_t^e = p_{t-1} \quad (1)$$

Donde p_t^e representa el precio esperado en el periodo actual y p_{t-1} es el precio ocurrido en el pasado; esto significa que la mejor predicción del precio actual es el precio observado en el periodo previo.

Las expectativas extrapolativas propuestas por Metzler (1941) y Goodwin (1947) se expresan como:

$$p_t^e = p_{t-1} - \lambda(p_{t-1} - p_{t-2}) \quad , -1 < \lambda < 1 \quad (2)$$

En la ecuación (2) se indica que el precio esperado actual depende de los precios observados en el pasado, en una ponderación determinada exógenamente por el parámetro λ . Más conocidas en la literatura económica son las expectativas adaptativas y las racionales. Entre 1956 y 1958 y en trabajos independientes, Cagan (1956), Friedman (1957) y Nerlove (1958) coincidieron en formalizar la hipótesis de expectativas adaptativas a través de la siguiente ecuación:

$$p_t^e = p_{t-1}^e + \lambda(p_{t-1} - p_{t-1}^e) \quad , -1 < \lambda < 1 \quad (3)$$

En la ecuación (3) se propone estimar el precio esperado para el periodo actual p_t^e , considerando el precio esperado para el periodo previo p_{t-1}^e , y la diferencia entre el precio observado y el esperado $(p_{t-1} - p_{t-1}^e)$.

La ecuación que representa a las expectativas racionales (Muth, 1961) es:

$$p_t^e = E[p_t | I_{t-1}] \quad (4)$$

En (4) se establece que el precio esperado es la esperanza matemática de los precios condicionada al conjunto de información disponible I_{t-1} .

Los cuatro modelos anteriores se asocian con algunas de las principales escuelas de pensamiento económico. Las expectativas estáticas se desarrol-

laron para explicar las fluctuaciones de los precios en su relación con los cambios en la oferta y la demanda de bienes; bajo el argumento conocido como “modelo de cobweb” (modelo de la telaraña), se asumía que la oferta y la demanda de bienes podían converger o divergir por situaciones imprevistas, lo que ocasionaba cambios frecuentes en los precios, en la idea ortodoxa de que éstos ajustan los mercados (Ezquiel, 1938: 260 y ss). El enfoque de expectativas extrapolativas representó cierta evolución en el análisis de los ciclos económicos, porque sugerían inercia en los precios, es decir, para determinar el valor actual o futuro de los precios, no sólo es relevante el valor previo, sino toda la historia anterior.

La ecuación de expectativas adaptativas fue ampliamente utilizada por el monetarismo para demostrar los efectos inflacionarios resultantes del incremento de la cantidad de dinero en circulación; bajo este enfoque los consumidores pueden confundir las variaciones en los precios nominales con variaciones en los precios relativos, de modo que ajustan su demanda de bienes e impulsan el aumento de la oferta; esta situación, derivada de la expansión monetaria, sólo es momentánea porque cuando los agentes reconocen su error y reconocen el cambio en los precios nominales, contraen nuevamente su demanda (y los productores la oferta), arribando a una nueva situación de equilibrio caracterizada por un nivel de producción idéntico al original, pero con mayores precios. La hipótesis de expectativas racionales es característica de la nueva macroeconomía clásica; esta escuela teórica, representada por Lucas (1972, 1988, 1996), Sargent (1987), Stokey, Lucas y Prescott (1989) y Kydland y Prescott (1982) recupera los planteamientos del monetarismo, pero los corrige sustituyendo las expectativas adaptativas por las racionales.

Como se indicó anteriormente, excepto el modelo de racionalidad, los otros procesos de formación de precios son deterministas porque utilizan para la predicción de precios sólo las variables conocidas del pasado. Una distinción adicional, es que cuando los agentes basan sus decisiones en las expectativas racionales sólo es posible que incurran en errores aleatorios, ya no en errores sistemáticos como en los otros modelos. El rasgo de aleatoriedad en los errores trajo consigo varias implicaciones para la teoría económica, entre éstas: la representación de un individuo más racional, porque es capaz de ajustar sus decisiones considerando los errores previos y evita incurrir en ellos nuevamente; la renovación en los instrumentos y criterios de política económica, sobre todo fiscal y monetaria, ahora solamente cuando estas políticas son no anticipadas o no previstas por los agentes es

posible incidir en la magnitud de las variables reales; y la necesidad de instrumentos técnicos para modelar las decisiones de los individuos cuando intervienen variables estocásticas.⁴

Los índices accionarios IPC e Ibovespa

El principal indicador del mercado accionario mexicano es el índice de precios y cotizaciones (IPC), y el correspondiente al mercado accionario brasileño es el índice bovespa (Ibovespa). Ambos índices se construyen a partir de las variaciones de los precios de una muestra representativa y ponderada de acciones que se cotizan en las bolsas respectivas (BMV y BM&Fbovespa). No obstante, existen diferencias importantes en la construcción de estos índices.⁵

El Ibovespa tiene como fecha base enero de 1968, está constituido por las 68 emisoras que en conjunto representan 80% del volumen financiero negociado y 70% del total de la capitalización bursátil en el BM&Fbovespa. La inclusión en el índice requiere que las acciones de la emisora satisfagan como requisitos básicos: a) formar parte de un índice de negociabilidad o representatividad en términos de número de negocios y volumen financiero; b) contar con un volumen operado en los últimos 12 meses mayor a 0.1% del total comercializado en el BM&Fbovespa, y c) haber participado en el mercado en 80% de las ocasiones. El Ibovespa se revalúa cada cuatrimestre, para asegurar que las empresas integrantes cumplan los requisitos señalados (BM&Fbovespa, 2008; BMV, 2012).

La fecha base del IPC es octubre de 1978; a este índice lo componen 35 emisoras. De acuerdo con la metodología más reciente, las series accionarias que integran el IPC deben cumplir las siguientes condiciones: a) conservar operaciones continuas por al menos tres meses antes de la integración del índice; b) el porcentaje de las series flotantes de las emisoras debe ser mayor a 12% o su valor de capitalización flotado debe ser mayor a \$10,000 millones de pesos; c) el valor de capitalización flotado de la emisora debe ser igual o mayor a 0.1% de la muestra del IPC; d) se eligen las 45 series de

⁴ Estas distinciones primeramente se señalaron en Lucas (1972).

⁵ Desde enero de 1968, el IBOVESPA era el principal indicador de la Bolsa de Valores de Sao Paulo (BOVESPA); en mayo de 2008 ocurre la fusión entre esta institución y la Bolsa Brasileña de Mercados y Futuros (BM&F) dando lugar a la Bolsa de Valores de São Paulo y Bolsa de Mercados y Futuros (BM&Fbovespa); la nueva institución ocupa el primer lugar en América Latina en cuanto al volumen comercializado de títulos y su valor de capitalización.

mayor factor de rotación; e) se eligen las series de mayor calificación atendiendo a los criterios de factor de rotación, valor de capitalización flotado, y mediana mensual del importe operado. En este índice se considera además el valor observado del periodo anterior. El IPC se revisa trimestralmente para reconsiderar los pesos de participación de cada serie accionaria en la muestra (estas ponderaciones dependen del valor de capitalización flotado, es decir, las series con mayor valor de capitalización tienen mayor peso ponderado en el IPC), y también se realiza un ajuste anual para reconsiderar qué series accionarias integrarán la muestra.

Las ecuaciones básicas para el cálculo de cada uno de estos índices son:

$$IBOVESPA_t = \sum_{i=1}^n P_{i,t} * Q_{i,t} \quad (5)$$

Donde $P_{i,t}$ indica el precio de la acción i , en la fecha t ; y $Q_{i,t}$ es la cantidad teórica de la acción i , en la fecha t .

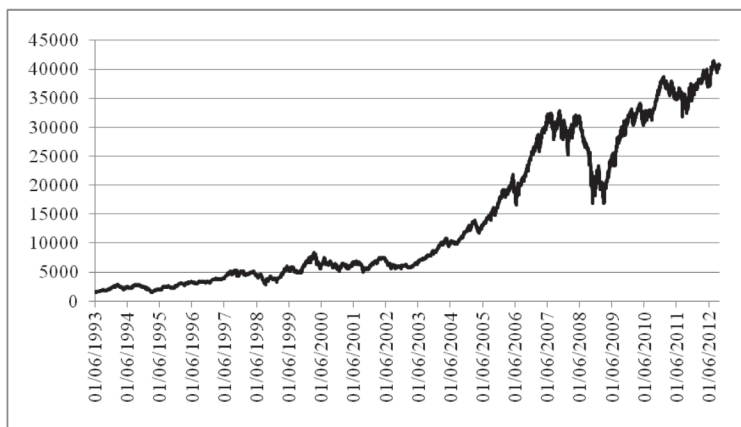
$$IPC_t = IPC_{t-1} \left[\frac{\sum P_{i,t} * (Q_{i,t} * FAF_i)}{\sum P_{i,t-1} * (Q_{i,t-1} * FAF_i) * f_{i,t-1}} \right] \quad (6)$$

Donde IPC_{t-1} es el valor del índice en el día previo; $P_{i,t}$ indica el precio de la acción i , en la fecha t ; $Q_{i,t}$ es la cantidad de la acción i , en la fecha t ; FAF_i es el factor de ajuste por acciones flotantes de la serie accionaria i ; y $f_{i,t-1}$ es el factor de ajuste por ex derechos de la serie accionaria i en la fecha $t-1$.

La construcción del IPC es más sofisticada por su metodología; ésta ha permitido además reducir la volatilidad del índice. En las gráficas 1 y 2 se muestra la evolución de los índices accionarios y en las gráficas 3 y 4 se observa su volatilidad.

Simulación estocástica de la dinámica de índices bursátiles

GRÁFICA 1 Evolución del índice de precios y cotizaciones (IPC)



Fuente: elaboración propia.

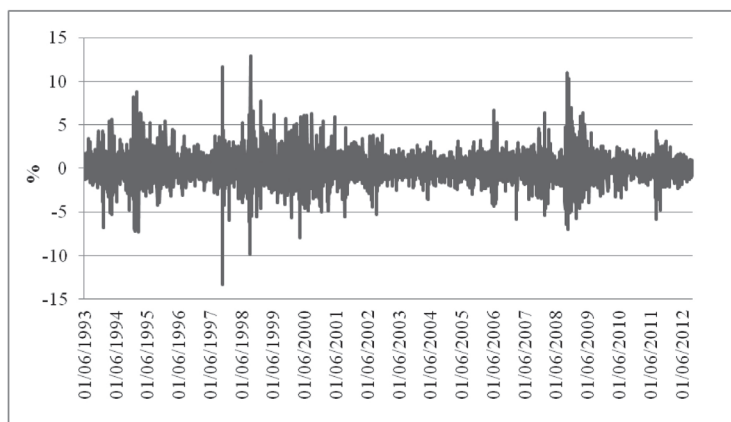
GRÁFICA 2 Evolución del índice bovespa (Ibovespa)



Nota: la contracción observada en marzo de 1997 es artificial; por construcción metodológica, en Brasil se decidió dividir el índice entre 10 a partir de esa fecha.

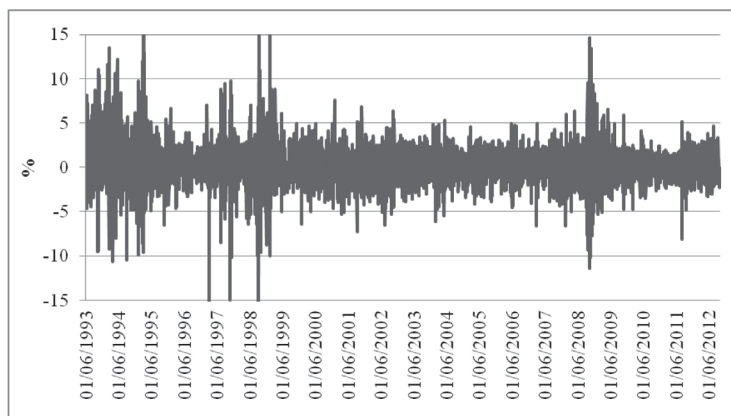
Fuente: elaboración propia.

GRÁFICA 3 Volatilidad del índice de precios y cotizaciones (IPC)



Fuente: elaboración propia.

GRÁFICA 4 Volatilidad del índice bovespa (Ibovespa)



Fuente: elaboración propia.

El estudio de la dinámica de los índices bursátiles es relevante tanto en los procesos de formación de decisiones privadas como en la formu-

lación de políticas públicas, entre otras, por las siguientes razones: los índices bursátiles se consideran un indicador de la estabilidad de los mercados financieros y de la confianza de los inversionistas respecto a las condiciones económicas de las empresas debido a que se construyen a partir de los precios de las acciones más representativas de los mercados; el crecimiento positivo y sostenido de los índices expresa la mayor demanda por los títulos accionarios, resultante de la mejoría en las condiciones financieras de las empresas que los constituyen; la evolución de los índices es también un reflejo de las condiciones de política monetaria y de regulación financiera de una región.

Simulación determinista y estocástica de índices accionarios

Para la contrastación empírica de los modelos de simulación determinista y estocástica, se utilizaron como base los valores diarios de los índices IPC e Ibovespa, a partir del 1 de junio de 1993. Con el fin de comprobar los resultados de la simulación, se realizó el siguiente procedimiento: a) se eligió como muestra de datos el periodo comprendido entre los años 2004 y 2005, en los que se observó reducida volatilidad en ambos índices; b) se calculó la tasa de crecimiento diaria de cada uno de los índices; c) se procedió a la simulación de las tasas de crecimiento de esos mismos meses; d) se efectuó la evaluación de la simulación mediante el cálculo del error o desviación de los datos simulados respecto a los valores observados en los primeros 60 días del año analizado.

Simulación determinista

Existen varios métodos de simulación determinista, en la mayoría de ellos se parte de la existencia de una función matemática específica que describe un conjunto de datos; la finalidad es encontrar una función alternativa que represente a datos próximos no incluidos en la función original; entre estos métodos se encuentran las distintas variantes de aproximación polinomial, y el uso de polinomios racionales y trigonométricos. En un enfoque distinto el problema consiste en determinar la función matemática que represente de forma aproximada la dinámica de un conjunto de datos, de modo que sea posible obtener valores adicionales de las variables representadas; en este caso es muy utilizado el método de mínimos cuadrados (Burden, 2011; Sauer, 2011).

La simulación por mínimos cuadrados consiste en encontrar una función que minimice el error de aproximación dado por la diferencia entre los valores observados y los valores proyectados por la función propuesta. Es común que la forma funcional que denote a los datos sea de tipo lineal, polinomial o exponencial. En el cuadro 1 se presentan estas formas alternativas y los errores de aproximación que se minimizan en cada caso.

CUADRO 1 Formas funcionales y errores de minimización en el método de aproximación por mínimos cuadrados

Forma funcional	Ecuación de errores a minimizar
$y = a_0 + a_1x$	$E = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i)]^2$
$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$	$E = \sum_{i=1}^n [y_i - (a_0 + a_1x_i + \dots + a_nx_i^n)]^2$
$y = be^{ax}$	$E = \sum_{i=1}^n [y_i - be^{ax_i}]^2$

Fuente: elaboración propia.

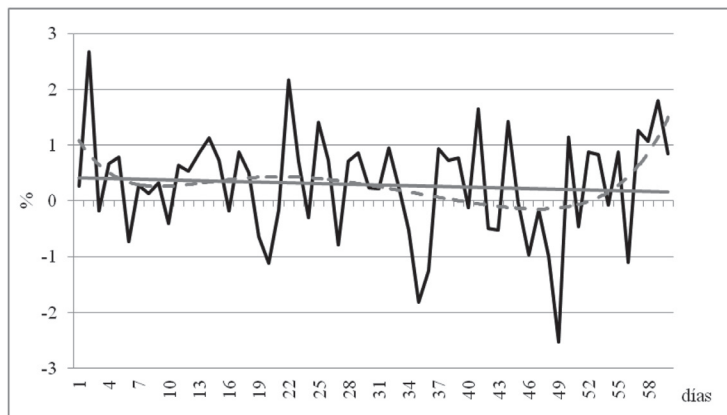
Si se consideran los datos diarios observados de los índices IPC e Ibovespa entre los años 2004 y 2005 (en tasas de crecimiento), la simulación determinista es claramente inadecuada; esto se aprecia claramente en la gráfica 5, donde se muestran para los primeros 60 días las tasas de crecimiento observadas del IPC, una estimación lineal y una estimación polinómica (de grado 6); en este último caso el ajuste es mayor a medida que aumenta el grado del polinomio hasta hacerse cercano al número de observaciones. La estimación lineal y polinómica de las tasas de crecimiento del IPC corresponde a las siguientes ecuaciones:

$$y = 0.4221 - 0.044x \quad (7)$$

$$y = 0.000000003x^6 - 0.0000006x^5 + 0.00005x^4 - 0.0019x^3 + 0.0382x^2 - 0.3474x + 1.3996 \quad (8)$$

Simulación estocástica de la dinámica de índices bursátiles

GRÁFICA 5 Datos observados y simulación determinista de la variación diaria del IPC



Fuente: elaboración propia.

Simulación estocástica

La metodología de simulación estocástica parte de una ecuación propuesta que represente la dinámica de la serie elegida. Las ecuaciones estocásticas más conocidas y de mayor utilización para el análisis de series económicas y financieras son la del movimiento geométrico browniano (MGB) y el proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU). La definición del MGB se atribuye a los notables investigadores Bachelier (1909), Einstein (1956) y Wiener (1964).

El movimiento geométrico browniano se representa como:

$$S_t = S_0 e^{X_t}, \quad X_t = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \quad (9)$$

La ecuación (2) es solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (10)$$

Las principales propiedades del MGB son: a) $\{W_t; t \geq 0\}$ es un movimiento browniano; b) $S_t \sim \text{lognormal}(S_0 e^{\mu(t-s)}, e^{2\mu(t-s)} S_0^2 (e^{\sigma^2(t-s)} - 1))$, $0 \leq s < t$; c) los

parámetros de tendencia μ y volatilidad σ varían en el tiempo proporcionalmente con S_t (cuando el tiempo tiende a infinito, entonces la media y la volatilidad se incrementan sin límite). Samuelson (1965) propuso la ecuación del MGB para modelar el precio de activos financieros; más adelante, Black y Scholes utilizaron el MGB para determinar el precio de una opción europea, y Merton la empleó para obtener también el precio de una opción europea y el precio a descuento de un bono cupón cero.

En 1930, los físicos Uhlenbeck y Ornstein propusieron una versión del movimiento geométrico browniano con reversión a la media para representar el movimiento de una molécula de gas; en 1970 Vasicek recuperó esa ecuación para modelar la dinámica de la tasa de interés de corto plazo; esta ecuación es:

$$dS_t = a(b - S_t)dt + \sigma dZ_t, a, b > 0, dZ_t \sim N(0, dt) \quad (11)$$

El proceso OU (11), también conocido como movimiento geométrico browniano con reversión a la media, tiene las siguientes propiedades: a) a , b y σ son constantes positivas, la variable S_t fluctúa, a lo largo del tiempo, en torno a la media de largo plazo b ; si $S_t > b$, entonces S_t es forzada a disminuir y cuando $S_t < b$, S_t tiende a aumentar; la velocidad de ajuste la determina a ;

b) $S_t \sim N\left(b + ((S_0 - b)e^{-a(t-s)}), \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a(t-s)})\right)$ dado $0 \leq s < t$,

por lo que S_t puede tomar valores negativos; c) si $t \rightarrow \infty$ entonces la media converge al parámetro b y la volatilidad converge hacia $\frac{\sigma^2}{2a}$.

En la representación de las variaciones de los índices IPC e Ibovespa utilizamos las ecuaciones (10) y (11) y el método Monte Carlo para la simulación de procesos estocásticos; este método consiste en las siguientes fases:

1. En primer término se generan n series de números aleatorios para representar el parámetro de incertidumbre del proceso estocástico. Si los números aleatorios generados tienen distribución uniforme, éstos se transforman en números aleatorios con distribución normal utilizando el método Box-Muller:

$$\alpha_1 = \sqrt{-2\ln U_1} \cos(2\pi U_2), \alpha_2 = \sqrt{-2\ln U_1} \sin(2\pi U_2) \quad (12)$$

Donde U_1 y U_2 son variables aleatorias uniformes y α_1 y α_2 son variables aleatorias normales. Cada serie de números aleatorios proporciona una trayectoria del proceso estocástico que se desea simular.

2. El proceso estocástico debe representarse en forma discreta. Por conveniencia elegimos el método exacto para la discretización de la ecuación estocástica. Considerando que se desea simular la variación de los índices IPC e Ibovespa, no su magnitud, la discretización de (10) y (11) está dada por:⁶

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{\mu \Delta t} + S_t^2 e^{2\mu \Delta t + \sigma^2 \Delta t} Z_t, Z_t \sim N(0,1) \quad (13)$$

$$S_{t+\Delta t} = S_t e^{-a \Delta t} + b(1 - e^{-a \Delta t}) + \sigma \sqrt{\frac{1}{2a}(1 - e^{-2a \Delta t})} Z_t, Z_t \sim N(0,1) \quad (14)$$

3. Se estiman los parámetros de las ecuaciones (13) y (14). En el caso del MGB, la identificación de los parámetros, media μ y varianza σ^2 , sólo requiere la estadística descriptiva de la serie. En el caso del proceso OU (14), la definición de los parámetros a , b de las ecuaciones anteriores requiere realizar una estimación de mínimos cuadrados ordinarios (MCO) a partir de las variaciones observadas de la serie (IPC e Ibovespa). Del análisis de regresión se obtienen los estimadores β_0 y β_1 , que se utilizan como:

$$\beta_0 = ab, \beta_1 = (1 - a), \text{ y por lo tanto, } \hat{a} = 1 - \hat{\beta}_1, \hat{b} = \frac{\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_1}.$$

Los parámetros estimados para cada uno de los índices se muestran en el cuadro 2.

3. Se generan n trayectorias del proceso estocástico de forma recursiva y se obtiene su promedio.

⁶ En Rodríguez-Nava y Venegas-Martínez (2011); los autores evalúan los distintos métodos de discretización de las ecuaciones estocásticas, aplicando el análisis a la dinámica del tipo de cambio.

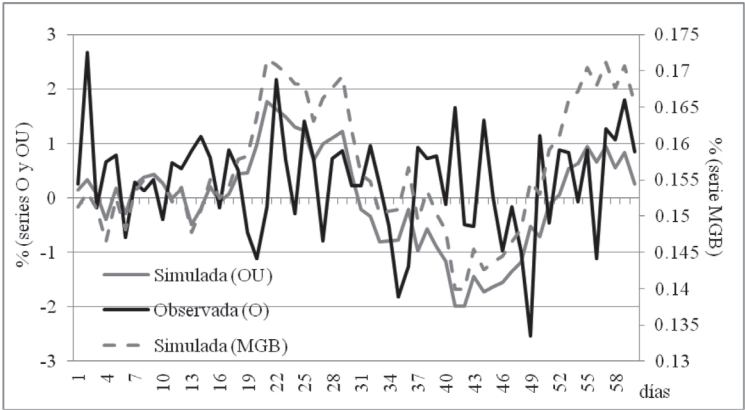
CUADRO 2 Parámetros de estimación de las ecuaciones MGB y OU

Proceso	IPC	Ibovespa
MGB	$\mu = 0.15125762$	$\mu = 0.08224186$
	$\sigma^2 = 0.91047728$	$\sigma^2 = 3.23218182$
OU	$a = 0.9185579$	$a = 0.0947770303$
	$b = 0.15707875$	$b = 0.079237899$
	$\frac{1}{2a} = 0.5443315$	$\frac{1}{2a} = 0.52755398$

Nota: MGB: movimiento geométrico browniano; OU: proceso Ornstein-Uhlenbeck.
Fuente: elaboración propia.

Los resultados obtenidos para la simulación del IPC y del Ibovespa se presentan en las gráficas 6 y 7.

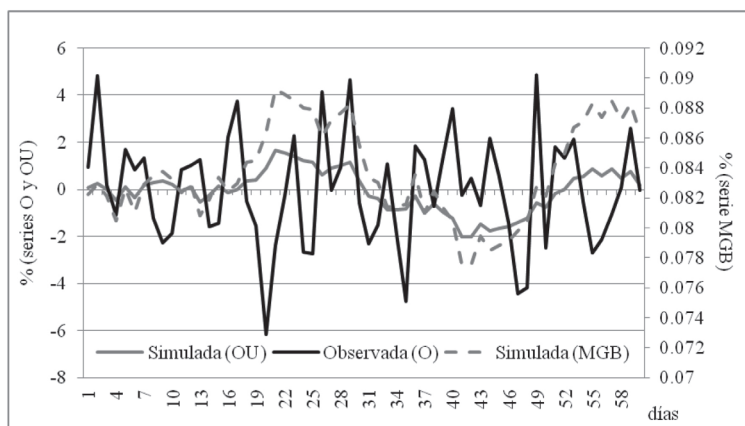
GRÁFICA 6 Datos observados y simulación estocástica de la variación diaria del IPC



Fuente: elaboración propia.

Simulación estocástica de la dinámica de índices bursátiles

GRÁFICA 7 Datos observados y simulación estocástica de la variación diaria del Ibovespa



Fuente: elaboración propia.

La simulación estocástica es más precisa en el caso del IPC, debido a la menor volatilidad de la serie observada, en comparación con la volatilidad del Ibovespa. En las gráficas 6 y 7 resalta también que la simulación por medio del movimiento geométrico browniano genera una dinámica para la variación del índice de menores fluctuaciones.⁷

Una forma más precisa para evaluar la calidad de la estimación consiste en el cálculo del error de simulación, a partir de la diferencia entre los datos observados y los simulados; esto puede realizarse mediante:

$$RECM = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - Y_t)^2} \quad (15)$$

La ecuación (15) se conoce como raíz del error cuadrado medio, y en ésta, X_t es el valor observado, Y_t es el valor simulado y T corresponde al número de datos. Los resultados correspondientes a (15) se muestran en el cuadro 3, donde se observa que son coincidentes con los resultados gráfi-

⁷ Compárese la escala correspondiente a la serie MGB (eje vertical secundario en las gráficas 5 y 6), con la escala de las series O y OU.

cos; es decir, para el caso de la variación de los índices bursátiles, la mejor aproximación la proporciona el proceso MGB; además, la mejor estimación se obtiene para el IPC debido a su menor volatilidad.

CUADRO 3 Raíz del error cuadrado medio en la estimación de las ecuaciones MGB y OU

Proceso	IPC	Ibovespa
MGB	<i>RECM = 0.95259196</i>	<i>RECM = 2.35450493</i>
OU	<i>RECM = 1.20991747</i>	<i>RECM = 2.519442598</i>

Nota: MGB: movimiento geométrico browniano; OU: proceso Ornstein-Uhlenbeck.
Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

Considerando la necesidad de los diferentes agentes económicos para establecer sus decisiones en contextos de información imperfecta, y la necesidad de modelos que representen la dinámica de variables económicas para establecer criterios de política, en esta investigación se ha contrastado el uso de estimaciones deterministas y estocásticas, aplicando estas herramientas a la modelación de los índices bursátiles IPC e Ibovespa.

Los resultados de la investigación muestran que la mayor cercanía de los modelos simulados con los hechos observados ocurre precisamente cuando se considera que las variables siguen dinámicas estocásticas, en lugar de deterministas. Aunque se obtuvo este resultado, la simulación estocástica podría mejorarse si se consideran los siguientes elementos: a) la simulación realizada sólo utilizó dos procesos estocásticos muy conocidos, el movimiento geométrico browniano y el proceso Ornstein-Uhlenbeck, pero existen en la literatura económico-financiera varias ecuaciones propuestas para modelar la dinámica de las variables; b) por construcción, los procesos MGB y OU suponen que la distribución de los errores es de tipo normal; en otras variantes pueden suponerse otras distribuciones de probabilidad más acordes con los datos; c) los ejercicios de simulación que proporcionan un mejor ajuste a los datos observados tienen como característica común, utilizar series con mayor número de datos (lo que generará menos errores), series con mayor frecuencia (por ejemplo, es preferible utilizar datos in-

tra-día a datos diarios y éstos son preferidos a datos semanales), y series en las que la volatilidad de la variable sea reducida, lo que ocurre por ejemplo en variables que en alguna medida son controladas por los gobiernos o por las instituciones privadas, como el tipo de cambio, la tasa de interés o el precio de los bienes.

Referencias bibliográficas

- Arrow, Kenneth J. & Frank H. Hahn. (1971). *General Competitive Analysis*. Estados Unidos: North Holland.
- Bachelier, Louis. (1900). "Théorie de la spéculation", *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 3ª edición, pp. 21-86.
- BM&Fbovespa. (2008). *Ibovespa, aspectos metodológicos*. Sao Paulo: Bolsa de Valores de São Paulo/Bolsa de Mercados y Futuros. Disponible en: <http://www.bmfbovespa.com.br>
- BMV. (2012). *Metodología del índice de precios y cotizaciones*. México: Bolsa Mexicana de Valores. Disponible en: <http://www.bmv.com.mx>
- Brigo, Damiano, Dalessandro, Antonio, Neugebauer, Matthias & Triki, Fares. (2008). "A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management", *Journal of Risk Management for Financial Institutions*, 2(4), pp. 365-393.
- Burden, Richard L. (2011). *Análisis numérico*. México: Cengage Learning.
- Cagan, Phillip. (1956). "The Monetary Dynamics of Hyper-inflation", en Milton Friedman (ed.), *Studies in the Quantity Theory of Money*. Chicago: University of Chicago Press.
- Debreu, Gerard. (1972). *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*. Estados Unidos: Yale University Press.
- Eckhard, Platen. (2008). "Simulation Methods for Stochastic Differential Equations", en Detlef Seese, Christof Weinhardt & Frank Schlottmann (eds.), *Handbook of Information Technology in Finance*. Leipzig: Springer, pp. 501-514.
- Einstein. (1956). *Investigations the Theory of the Brownian Movement*. Nueva York: Dover.
- Ezequiel, Mordecai. (1938). "The Cobweb Theorem", *The Quarterly Journal of Economics*, 52(2), pp. 255-280.
- Friedman, Milton. (1957). *Theory of the Consumption Function*. Princenton: Princenton University Press.
- Goodwin, Richard M. (1947). "Dynamical Coupling with Especial Reference to Markets Having Productions Lags", *Econometrica*, 15(3), pp. 181-204.
- Kydland, Finn E. & Prescott, Edward C. (1982). "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 50(6), pp. 1345-1370.

- Lucas, Robert. (1972). "Expectations and the Neutrality of Money", *Journal of Economic Theory*, vol. 4, pp. 103-124.
- . (1988). "On the Mechanics of Economic Development", *Journal of Monetary Economics*, 22(1), pp. 3-42.
- . (1996). "Monetary Neutrality, Nobel Lecture", *The Journal of Political Economy*, 104(4), pp. 661-682.
- Metzler, Loyd A. (1941). "The Nature and Stability of Inventory Cycles", *The Review of Economics and Statistics*, 23(3), pp. 113-129.
- Musiela, Marek & Rutkowski, Marek. (1998). "Martingale Methods in Financial Modelling", *Applications of Mathematics - Stochastic Modelling and Applied Probability Series*, núm. 36. Alemania: Springer.
- Muth, John F. (1961). "Rational Expectations and the Theory of Price Movements", *Econometrica*, 29(3), pp. 315-335.
- Nerlove, Marc. (1958). *The Dynamics of Supply: Estimation of the Farmers' Response to Price*. Baltimore: John Hopkins University Press.
- Rodríguez-Nava, Abigail & Venegas-Martínez, Francisco. (2011). "Procesos estocásticos y simulación Monte Carlo: Aplicación para el tipo de cambio", en Seimei Coronado & Leonardo Gatica (coords.), *Métodos no lineales de series económicas y financieras*. Guadalajara: Universidad de Guadalajara, pp. 201-215.
- Samuelson, Paul. (1965). "Rational Theory of Warrant Prices", *Industrial Management Review*, 6(2), pp. 13-39.
- Sargent, Thomas. (1987). *Dynamic Macroeconomic Theory*. Estados Unidos: Harvard University Press.
- Sauer, Timothy. (2011). *Numerical Analysis*. Estados Unidos: Addison Wesley.
- Stokey, Nancy, Lucas, Robert E. & Prescott, Edward C. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Estados Unidos: Harvard University Press.
- Winer, Norbert. (1964). *Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series*. Cambridge, MA: MIT Press.