1. En los siguientes modelos, el término ε_i representa el error aleatorio y se supone que se cuenta con una muestra de n datos, de manera que i = 1,..., n. **Determine:** (i) ¿Cuáles son lineales en los parámetros β_0 y β_1? (ii) ¿Cuáles son lineales en las variables Y y X? (iii) ¿Cuáles podrían considerarse modelos de regresión lineal simple? (posiblemente con variables transformadas).

(a) $Y_i = \beta_0 + \beta_1/X_i + \varepsilon_i$

i) Es lineal en los parámetros

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \beta_0} = 1 , \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \beta_1} = \frac{1}{X_i}$$

ii) No es lineal en X_i

$$Y_i = \beta_0 + \frac{\beta_1}{X_i} + \varepsilon_i \Leftrightarrow Y_i - \beta_0 - \varepsilon_i = \frac{\beta_1}{X_i}$$

$$\Leftrightarrow X_i = \frac{\beta_1}{Y_i - \beta_0 - \varepsilon_i}$$

No es lineal en Y_i

iii) Si consideramos $Z_i = \frac{1}{X_i}$ $\forall i = 1,\dots,n$ entonces tenemos la relación

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_i + \varepsilon_i$, la cual es regresión lineal simple porque

- lineal en los parámetros
- Solo hay una variable explicativa

(b) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \log(X_i) + \varepsilon_i$

i) Es lineal en los parámetros

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \beta_0} = 1 , \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \beta_1} = \log(x_i)$$

ii) No hay relación lineal en las variables

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} = \frac{\beta_1}{X_i}$$

iii) Si consideramos $Z_i = \log(X_i)$ entonces

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 Z_i + \varepsilon_i$

es un modelo de regresión lineal simple.

•) Relación lineal en los parámetros

•) Solo hay una variable explicativa

(c) $Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1}$ (*)

i) No es lineal en los parámetros

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \beta_0} = X_i^{\beta_1} , \quad \frac{\partial Y_i}{\partial \beta_1} = \beta_0 \ln(\beta_1) X_i^{\beta_1}$$

ii) En general, no hay relación lineal entre X e Y. Solo se vale cuando $\beta_1 = 1$.

iii) $Y_i = \beta_0 X_i^{\beta_1} \underset{Y_i > 0}{\Leftrightarrow} \log(Y_i) = \log(\beta_0) + \beta_1 \log(X_i)$

Si consideramos $\tilde{Y}_i = \log(Y_i)$, $\tilde{X}_i = \log(X_i)$ y $\tilde{\beta}_0 = \log(\beta_0)$

resulta que

$\tilde{Y}_i = \tilde{\beta}_0 + \beta_1 \tilde{X}_i$ que es regresión lineal simple.

(d) $\log(Y_i) = \log(\beta_0) + \beta_1 \log(X_i) + \varepsilon_i$ (*)

i) No es lineal en los parámetros.

ii) No es lineal entre X e Y.

iii) Si consideramos $\tilde{Y}_i = \log(Y_i)$, $\tilde{X}_i = \log(X_i)$, $\tilde{\beta}_0 = \log(\beta_0)$

tenemos que

$\tilde{Y}_i = \tilde{\beta}_0 + \beta_1 \tilde{X}_i + \varepsilon_i$ que es modelo de regresión lineal

(e) $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_i$ (*)

i) Es lineal en los parámetros

ii) No hay relación de X con Y

iii) Como está no es modelo de regresión lineal simple.

Si $x_i = \varepsilon_i$ entonces

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$ que es modelo de regresión lineal simple.

2. **Demuestre** que el estimador mínimo-cuadrático de β_1 en un modelo de regresión lineal simple, se puede escribir como

$$b_1 = \frac{\Sigma(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\Sigma(X_i - \bar{X})^2}$$

y que

$$\Sigma(Y_i - \hat{Y}_i)\hat{Y}_i = 0.$$

Dem: Consideremos a $Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ y sea

$$SCR = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$$

Objetivo: $\min_{(\beta_0,\beta_1)\in\mathbb{R}^2} SCR(\beta_0, \beta_1)$

$$\frac{\partial (SC)}{\partial \beta_0}(\beta_0,\beta_1) = \sum_{i=1}^n 2(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)(-1)$$

$$= -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)$$

$$= -2\left\{\sum_{i=1}^n Y_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_i\right\}$$

$$= -2\left\{n\bar{Y} - n\hat{\beta}_0 - n\hat{\beta}_1 \bar{X}\right\}$$

$$\frac{\partial (SC)}{\partial \beta_1}(\beta_0,\beta_1) = \sum_{i=1}^n 2(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)(-x_i)$$

$$= -2\left\{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_0 x_i - \sum_{i=1}^n \hat{\beta}_1 x_i^2\right\}$$

$$= -2\left\{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n\hat{\beta}_0 \bar{x} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$$

Así, igualamos ambas ecuaciones a cero y resulta que

$$\begin{cases} \frac{\partial (SC)}{\partial \beta_1} = 0 \\ \frac{\partial (SC)}{\partial \beta_0} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n\bar{Y} - n\hat{\beta}_0 - n\hat{\beta}_1 \bar{x} = 0 \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i - n\hat{\beta}_0 \bar{x} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i = n\hat{\beta}_0 \bar{x} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{cases}$$

Despejamos la segunda ecuación, tras sustituir la primera

$$\sum_{i=1}^n x_i Y_i = n(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x})\bar{x} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$= n\bar{x}\bar{Y} - n\hat{\beta}_1 \bar{x}^2 + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2$$

$$= n\bar{x}\bar{Y} + \hat{\beta}_1 \left\{-n\bar{x}^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2\right\}$$

Así, $\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$

y así, $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$

Ahora, veamos que son mínimos, con la Hessiana

$$\frac{\partial^2 (SC)}{\partial \beta_0^2} = -2(-n) = 2n$$

$$\frac{\partial^2 (SC)}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = -2(-n\bar{x}) = 2n\bar{x} = \frac{\partial^2 (SC)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1}$$

$$\frac{\partial^2 (SC)}{\partial \beta_1^2} = -2\sum_{i=1}^n (-x_i^2) = 2\sum_{i=1}^n x_i^2$$

Construimos la Hessiana

$$H(SC)(\beta_0,\beta_1) = \begin{pmatrix} 2n & 2n\bar{x} \\ 2n\bar{x} & 2\sum x_i^2 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el criterio de Sylvester con menores principales para ver si es definida positiva.

$|H_1| = 2n > 0$

$|H| = 4n\sum x_i^2 - 4n\bar{x}^2 = 4n(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2)$

Veamos si $|H| > 0$.

$$\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2$$

$$= \sum x_i^2 - 2n\frac{1}{n}\sum x_i + n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - 2\sum x_i \bar{x} + \sum (\bar{x})^2$$

$$= \sum (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2) = \sum (x_i - \bar{x})^2 > 0$$

Así pues, $|H| = 4n(\sum x_i^2 - n\bar{x}^2) > 0$, por lo que

$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{x}$, $b_1 = \dfrac{\sum x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}$ minimizan SC

Ahora bien, P.D. $b_1 = \dfrac{\sum x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \dfrac{\sum(x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2}$

Ya vimos que $\sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2$, así basta estudiar el numerador,

$$\sum x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y} = \sum x_i Y_i - n\bar{x}\bar{Y} - n\bar{x}\bar{Y} + n\bar{x}\bar{Y}$$

$$= \sum x_i Y_i - n\bar{Y}\frac{1}{n}\sum x_i - n\bar{x}\frac{1}{n}\sum Y_i + \sum \bar{x}\bar{Y}$$

$$= \sum x_i Y_i - \sum x_i \bar{Y} - \sum Y_i \bar{x} + \sum \bar{x}\bar{Y}$$

$$= \sum\{x_i Y_i - x_i\bar{Y} - Y_i\bar{x} + \bar{x}\bar{Y}\} = \sum x_i(Y_i - \bar{Y}) - \bar{x}(Y_i - \bar{Y})$$

$$= \sum (x_i - \bar{x})(Y_i - \bar{Y})$$

De esto modo, vemos que

$$\begin{cases}\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y} = \sum (x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\\ \sum x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum (x_i-\bar{x})^2\end{cases}$$

Así, $b_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - n\bar x\bar y}{\sum x_i^2 - n\bar x^2} = \dfrac{\sum (x_i-\bar x)(y_i-\bar y)}{\sum(x_i-\bar x)^2}$

Asimismo,

$$b_1 = \frac{\sum x_i y_i - n\bar x\bar y}{\sum x_i^2 - n\bar y^2} = \frac{n\left\{\sum x_iy_i - n\frac{1}{n}\sum x_i \frac1n \sum y_i\right\}}{n\left\{\sum x_i^2 - n\frac1n\sum x_i \frac1n \sum x_i\right\}}$$

$$= \frac{n\sum x_iy_i - \sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Otra Forma

Conjetura $b_1 = \frac{S_{xy}}{S_x^2}$

$$b_1 = \frac{\left(\frac{\sum x_iy_i - \sum x_i\left\{\frac1n \sum y_i\right\}}{\cancel{n-1}}\right)}{\left(\frac{\sum x_i^2 - \frac1n(\sum x_i)^2}{\cancel{n-1}}\right)} = \frac{\sum x_iy_i - \frac1n\sum x_i\sum y_i}{\sum x_i^2 - \frac1n(\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{n\sum x_iy_i - \sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Ahora 2.2

P.D. $\sum (y_i - \hat y_i)\hat y_i = 0$ $\qquad \left(\begin{array}{l} b_0 = \bar y - b_1\bar x \\ b_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}\end{array}\right)$

$$\sum (y_i-\hat y_i)\hat y_i = \sum e_i\hat y_i = \sum e_i(b_1 + b_0 x_i)$$

$$= b_1\sum e_i + b_0\sum e_i x_i \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} 0$$

Vemos que

$$\sum e_i = \sum(y_i-\hat y_i) = \sum(y_i - b_0 - b_1x_i) = \sum y_i - nb_0 - b_1\sum x_i = 0 \cdots (*)$$

Primera ecuación normal

Asimismo,

$$\sum e_i x_i = \sum x_i(y_i-\hat y_i) = \sum x_i(y_i - b_0 - b_1 x_i)$$

$$= \sum x_iy_i - b_0\sum x_i - b_1\sum x_i^2 = \sum x_iy_i - b_0 n\bar x - b_1\sum x_i^2$$

$$= \sum x_iy_i - (\bar y - b_1\bar x)n\bar x - b_1\sum x_i^2$$

$$= \sum x_iy_i - n\bar x\bar y + b_1 n\bar x^2 - b_1\sum x_i^2$$

$$= \sum x_iy_i - n\bar x\bar y - b_1\left(\sum x_i^2 - n\bar x^2\right)$$

$$= \cancel{\sum x_iy_i - n\bar x\bar y} - \left\{\frac{\cancel{\sum x_iy_i - n\bar x\bar y}}{\cancel{\sum x_i^2 - n\bar x^2}}\right\}\left(\cancel{\sum x_i^2 - n\bar x^2}\right)$$

$$= 0 \cdots (**)$$

Conjetura

$$\sum (x_i-\bar x)y_i = \sum(x_i-\bar x)(y_i-\bar y)$$

$$\sum(x_i-\bar x)(y_i-\bar y) = \sum x_iy_i - n\bar x\bar y$$

$$= \sum x_iy_i - n\bar x\frac1n\sum y_i = \sum x_iy_i - \bar x\sum y_i$$

$$= \sum x_iy_i - \sum y_i\bar x = \sum x_iy_i - \bar x y_i = \sum(x_i-\bar x)y_i$$

3. A partir de una muestra de n = 200 parejas de observaciones, se calcularon las siguientes cantidades:

$$\Sigma X_i = 11.34,\ \ \Sigma Y_i = 20.72,\ \ \Sigma X_i^2 = 12.16,\ \ \Sigma Y_i^2 = 84.96\ \ \text{y}\ \ \Sigma X_iY_i = 22.13$$

Con base en estas cantidades, **estime** las dos regresiones

$$\hat Y_i = b_0 + b_1X_i \qquad \text{y} \qquad \hat X_i = a_0 + a_1Y_i.$$

Deduzca una recta estimada para Y a partir de la segunda ecuación.
Grafique las dos rectas estimadas de Y en la misma gráfica y **comente** acerca de ellas, en particular acerca de cómo se podrían interpretar las mismas y por qué difieren.

Recordemos que

$b_0 = \bar y - b_1\bar x$ y $b_1 = \dfrac{\sum(x_i-\bar x)(y_i-\bar y)}{\sum(x_i-\bar x)^2}$

$$= \frac{n\sum x_iy_i - \sum x_i\sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{\sum x_iy_i - n\bar x\bar y}{\sum x_i^2 - n\bar x^2}$$

Así pues,

$$b_1 = \frac{200\ (22.13) - (11.34)(20.72)}{200\ (12.16) - (11.34)^2} = 1.819496047$$

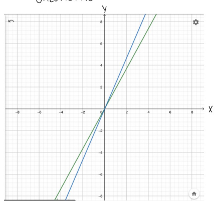
Así pues,

$$b_0 = \frac{1}{200}(20.72) - \frac{b_1}{200}(11.34) = 4.34574146 \times 10^{-4}$$

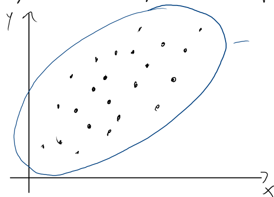
Ahora graficamos las dos rectas de $\hat{Y}$ ① y ② en la misma gráfica

$\hat{Y} = 0.0004357764782 + 1.834846146\,\overline{X}$ ①

$\hat{Y} = \dfrac{\hat{X} - 0.01227700637}{0.4287933748}$ ②



Al estimar a Y a partir de X y a X a partir de Y resulta en rectas distintas. Para verlo mejor, supongamos un diagrama de dispersión.

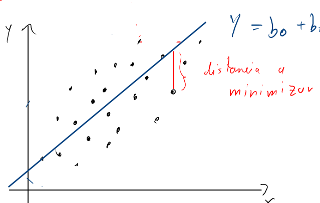


— en esta nube se encuentra toda la muestra

Cuando estimamos a Y a través de X por el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ utilizamos Mínimos Cuadrados óptimos

$$\min_{(\beta_0,\beta_1)\in\mathbb{R}^2} SCR = \min_{(\beta_0,\beta_1)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) \right)^2$$

que minimiza la distancia entre una recta de estimación con los valores Y_i. Como se ve adelante

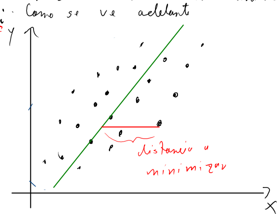


Por otro lado, si estimamos X a partir de Y con

$\hat{X}_i = \alpha_0 + \alpha_1 Y_i$ hacemos la misma estimación por minimización de cuadrados pero ahora es

$$\min_{(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^2} \widehat{SCR} = \min_{(\alpha_0,\alpha_1)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - (\alpha_0 + \alpha_1 Y_i) \right)^2$$

que minimiza la distancia entre una recta de estimación con los valores X_i. Como se ve adelante



Como se minimizan distancias diferentes se obtienen rectas distintas.