Simulación ITAM
27 de octubre de 2020 2020-II

Examen Parcial 2

Reglas:

- El examen es individual. Si detecto que hay colaboración, no pregunto y automáticamente el examen está reprobado para las partes detectadas.
- Cualquier duda sobre el examen, tiene que preguntarse directamente a MI correo personal: jorge.delavegagongora@gmail.com. No garantizo respuesta inmediata, pero estaré al pendiente.
- La entrega del examen es vía mi correo electrónico, en formato pdf, antes de la medianoche. No hay extensiones ni prórrogas. No es tarea, es un examen.
- Si tu número de cuenta termina en non, resuelve 1, 3, 5.
- Si tu número de cuenta termina en par, resuelve 2, 4, 5.
- El parcial se tiene que entregar a más tardar el día de mañana 28/10/20 antes de la medianoche. Acorté el plazo, dado que estoy pidiendo sólo tres problemas.

Preguntas

1. La densidad de Rayleigh es $f(x) = \frac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/\sigma^2}$, $x \geq 0$, $\sigma > 0$. Responder usando $\sigma = 10$, $n = 10000$.

    i. Implementa una función para generar muestras de tamaño n de Rayleigh(σ) usando variables antitéticas.

    ii. ¿Cuál es el porcentaje de reducción en varianza de $\frac{x+x'}{2}$ de este método comparado con $\frac{x_1+x_2}{2}$ para X_1 y X_2 independientes?

2. Supongan que $V \sim \exp(1)$ y consideren que dado $V = v, W \sim \exp(1/v)$ (entonces, $\mathrm{E}(W|V = v) = v$). Describir un algoritmo para estimar $P(VW \leq 3)$, que solo requiera generar una variable aleatoria por muestra. Programar el algoritmo y mostrar que funciona, generando 100 muestras.

3. Si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son cualesquiera dos estimadores insesgados de θ, encontrar el valor de c^* que minimiza la varianza del estimador $\hat{\theta}_c = c\hat{\theta}_1 + (1-c)\hat{\theta}_2$.

4. Se puede mostrar que si se suman números aleatorios uniformes hasta que su suma exceda 1, entonces el número esperado de sumandos es igual a e. Esto es, si

$$N = \text{mín}\{n | \sum_{i=1}^{n} u_i > 1\}$$

Entonces $\theta = E(N) = e$

i. Estimar e, utilizando 1000 corridas.

ii. Estimar la varianza en (i) y dar un intervalo de confianza del 95 % para $\hat{\theta}$.

5. En las aplicaciones de seguridad informática, un "tarro de miel" es una trampa establecida en una red para detectar y contratacar a hackers informáticos. Se obtienen datos de una Base de Datos central y se observan ataques contra cuatro puertos de la computadora: – 80, 135, 139, 445– durante un año.

Los puertos son los estados de una Cadena de Markov, junto con un estado correspondiente a la ausencia de ataques a puertos. Datos semanales se monitorean y el puerto más atacado durante la semana se registra. La matriz de transición para los ataques semanales es la siguiente:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} 80 & 135 & 139 & 445 & \emptyset \end{array} \\ \begin{array}{c} 80 \\ 135 \\ 139 \\ 445 \\ \emptyset \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 8/13 & 3/13 & 1/13 & 1/13 \\ 1/16 & 3/16 & 3/8 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1/11 & 4/11 & 5/11 & 1/11 \\ 0 & 1/8 & 1/2 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Considerando una distribución inicial $\pi = (0, 0, 0, 0, 1)$

i. Simular el ataque a los puertos durante 100 semanas.

ii. Encontrar la distribución estacionaria de los puertos atacados.