Examen Parcial 1

David López

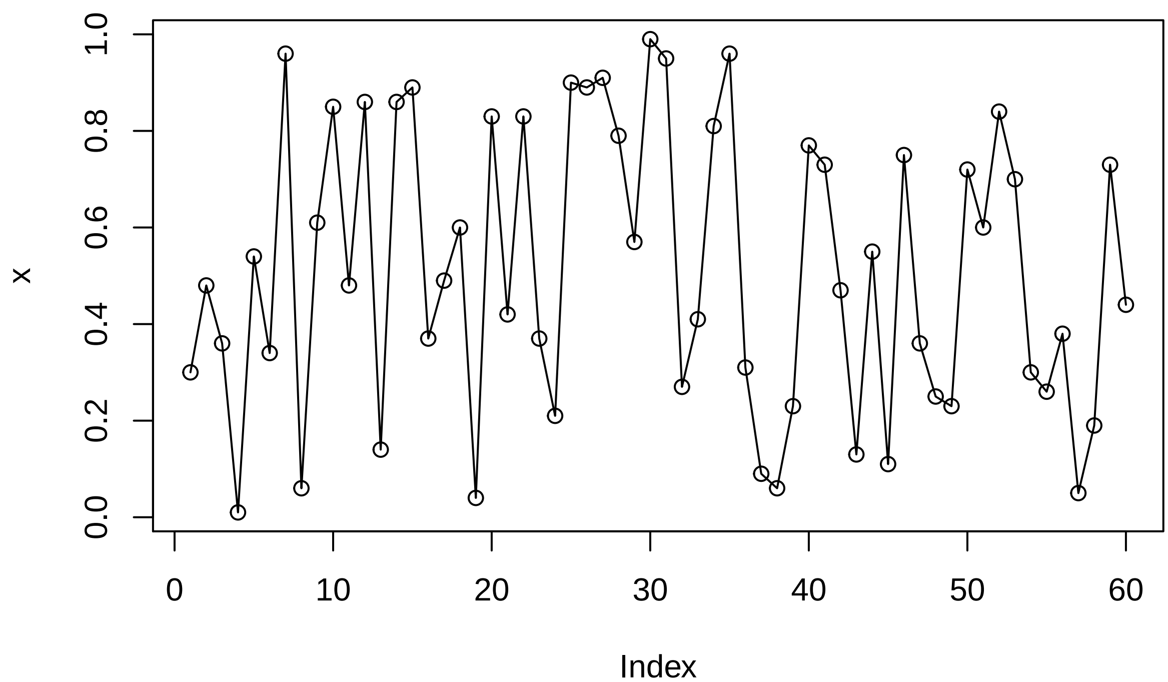
24/9/2020

Al inicio se presentan todas las preguntas que requirieron el uso de R para su interpretación, desarrollo y solución.

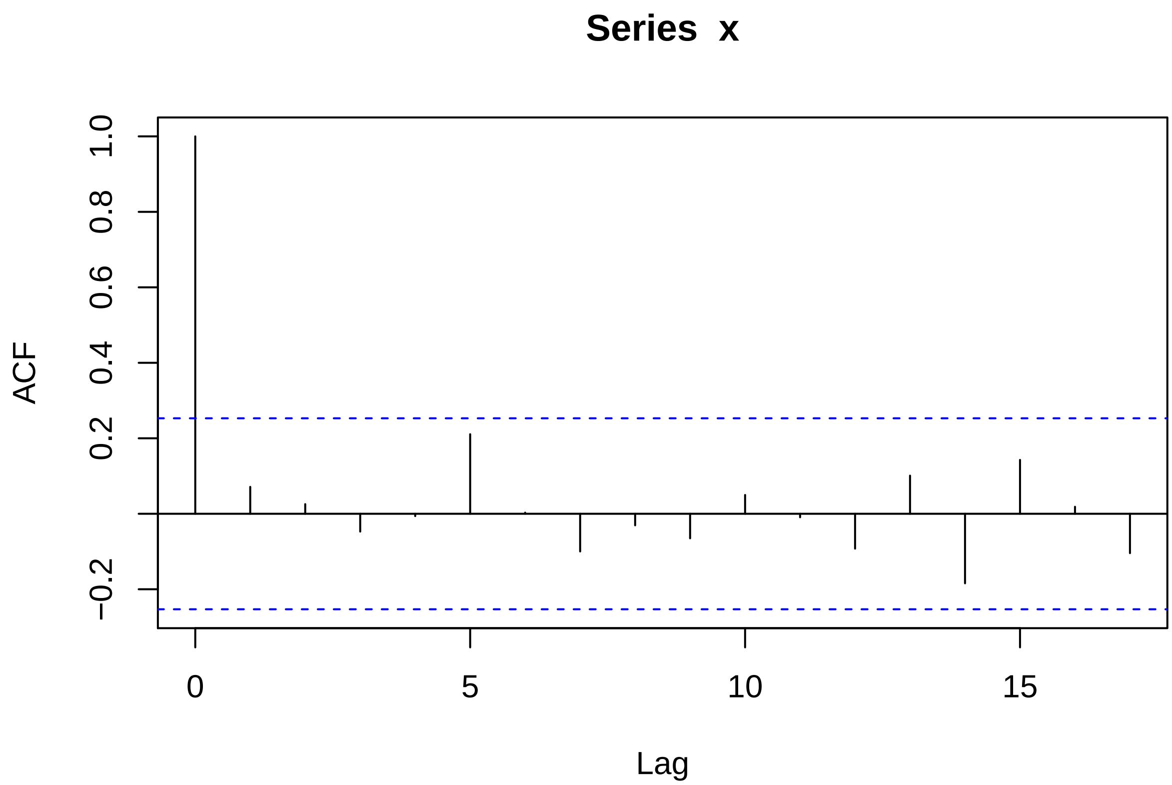
Pregunta 6

En esta pregunta evalúo la correlación de una sucesión de números. Parte de la interpretación se encuentra hasta el final, en la sección del examen hecha a mano.

```
# Pregunta 6
library(stats)
x <- c( 0.30, 0.48, 0.36, 0.01, 0.54, 0.34, 0.96, 0.06, 0.61, 0.85, 0.48, 0.86, 0.14, 0.86, 0.89,
        0.37, 0.49, 0.60, 0.04, 0.83, 0.42, 0.83, 0.37, 0.21, 0.90, 0.89, 0.91, 0.79, 0.57, 0.99,
        0.95, 0.27, 0.41, 0.81, 0.96, 0.31, 0.09, 0.06, 0.23, 0.77, 0.73, 0.47, 0.13, 0.55, 0.11,
        0.75, 0.36, 0.25, 0.23, 0.72, 0.60, 0.84, 0.70, 0.30, 0.26, 0.38, 0.05, 0.19, 0.73, 0.44)
plot(x, type="o")
```



```r
cr1 <- acf(x, lag.max = NULL, type = c("correlation"), plot = TRUE, na.action = na.fail, demean = TRUE)
```




```r
#Prueba de Box-Pierce
Box.test(x,lag=7,type="Box-Pierce")
```

```
##
##  Box-Pierce test
##
## data:  x
## X-squared = 3.7465, df = 7, p-value = 0.8085
```

```r
#Prueba de Ljung-Box
Box.test(x,lag=7,type="Ljung-Box")
```

```
##
##  Box-Ljung test
##
## data:  x
## X-squared = 4.2179, df = 7, p-value = 0.7544
```

Pregunta 9

Para esta pregunta, hice pruebas a mano con n = 1, 2, 3 y 4 para entender al problema más grande, en este caso, para = 10.

```r
# Pregunta 9

cartas <- c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
```

```r
sobres <- c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)

# Tendremos en consideración la cantidad de fallos y la cantidad de aciertos
# Nos vamos por el complemento, que todo sea fallo es igual a, al complmento de al menos un acierto

probaAlMenosUnAcierto <- function(c, s){
  probabilidad <- 0;
  numFallos <- 0;
  hayUnAcierto <- FALSE;
  permutacion <- sample(c, replace = FALSE)
  i <- 1;

  while (i <= 10 && hayUnAcierto == FALSE){

    if (permutacion[i] == s[i]){
      hayUnAcierto <- TRUE;


    }
    numFallos <- numFallos + 1;

      i <- i+1;
  }


  probabilidad <- numFallos/10;
  probabilidad
}


#Llamamos a la función varias veces
m = 1000
suma <- 0
probaSimulada <- 0

for (i in 1:m){
  suma <- suma + probaAlMenosUnAcierto(cartas,sobres)
  }
probaSimulada <- 1 - suma/m
probaSimulada
```

```
## [1] 0.3427
```

(Parcial 1) Simulación

David Isaac López Romero
CU: 173993

4) Para la distribución triangular $Tri(a, c, b)$ con densidad $(a<c<b)$

$$f_x(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} \mathbb{1}_{\{a \le x \le c\}} + \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} \mathbb{1}_{\{c \le x \le b\}}$$

Hallar distribución inversa $F^{-1}(u)$ y obtener muestra de $n=3$ con la semilla.

Busco F.p.a. por casos: Si $x \in [a, c) \Rightarrow$

$$F_x(x) = \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_a^x (t-a)\,dt = \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left\{ \frac{t^2}{2} - at \right\} \Big]_a^x$$

$$= \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left\{ \frac{x^2}{2} - ax - \frac{a^2}{2} + a^2 \right\} = \frac{2}{(b-a)(c-a)} \left\{ \frac{x^2}{2} - ax + \frac{a^2}{2} \right\}$$

$$= \frac{x^2 - 2ax + a^2}{(b-a)(c-a)} = \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} \quad \ldots (*)$$

Si $x \in [c, b) \Rightarrow$

$$F_x(x) = \frac{2}{(b-a)(c-a)} \int_a^c (t-a)\,dt + \frac{2}{(b-a)(b-c)} \int_c^x (b-t)\,dt$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{(c-a)^2}{(b-a)(c-a)} + \frac{2}{(b-a)(b-c)} \left\{ bt - \frac{t^2}{2} \right\} \Big]_c^x = \frac{(c-a)}{b-a} + \frac{2}{(b-a)(b-c)} \left\{ bx - \frac{x^2}{2} - bc + \frac{c^2}{2} \right\}$$

$$= \frac{(c-a)(b-c) + 2bx - x^2 - 2bc + c^2}{(b-a)(b-c)} = \frac{bc - c^2 - ab + ac + 2bx - x^2 - 2bc + c^2}{(b-a)(b-c)}$$

$$= \frac{bc - ab + ac + 2bx - x^2}{(b-a)(b-c)} = \frac{bc - ab + ac + b^2 - b^2 + 2bx - x^2}{(b-a)(b-c)} \quad \ldots (*)$$

Notamos que $(b-a)(b-c) = b^2 - bc - ab + ac$

Por lo que, de $(*)$ resulta que

$$= \frac{(b-a)(b-c) - (b^2 - 2bx + x^2)}{(b-a)(b-c)} = 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)}$$

De esta forma,

(2)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & \text{si } a \leq x < c \\ 1 - \dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & \text{si } c \leq x < b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

Así pues, $F^{-1}(u)$ también es por casos

Si $x \in [a,c)$

$$y = \frac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} \Leftrightarrow y(b-a)(c-a) = (x-a)^2$$

$$\underset{(x>a)}{\Leftrightarrow} x - a = +\sqrt{y(b-a)(c-a)} \Leftrightarrow x = a + \sqrt{y(b-a)(c-a)}$$

$$\therefore X = a + \sqrt{U(b-a)(c-a)} \text{ con } U \sim UniF(0,1)$$

Si $x \in [c,b)$

$$y = 1 - \frac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} \Leftrightarrow (y-1)(b-a)(b-c) = -(b-x)^2$$

$$\underset{x<b}{\Leftrightarrow} b - x = +\sqrt{(1-y)(b-a)(b-c)} \Leftrightarrow x = b - \sqrt{(1-y)(b-a)(b-c)}$$

$$\therefore X = b - \sqrt{(1-U)(b-a)(b-c)} \text{ con } U \sim UniF(0,1)$$

Si $U \sim UniF(0,1) \rightarrow (1-U) \sim UniF(0,1)$ también,

$$\therefore X = b - \sqrt{U(b-a)(b-c)} \text{ con } U \sim UniF(0,1)$$

$$\therefore F^{-1}(u) = \begin{cases} a + \sqrt{u(b-a)(c-a)} & \text{si } 0 \leq u < \dfrac{c-a}{b-a} \;(*) \\ b - \sqrt{u(b-a)(b-c)} & \text{si } \dfrac{c-a}{b-a} \leq u < 1 \end{cases}$$

$(u \in (0,1))$

Scanned by CamScanner

Falta evaluar manualmente con $a=1, c=2, b=3$

set.seed(1968)

runif(3)

$u_1 = 0.1629056$, $u_2 = 0.4126848$, $u_3 = 0.2633616$

Primero, hallamos donde cambia la $F^{-1}(u)$ explícita.

$$u = \frac{2-1}{3-1} = \frac{1}{2}$$

$$F^{-1}(u) = \begin{cases} 1+\sqrt{u(2)(1)} & \text{si } 0 \le u < \frac{1}{2} \\ 3-\sqrt{u(2)(1)} & \text{si } \frac{1}{2} \le u \le 1 \end{cases}$$

$$\therefore F^{-1}(u) = \begin{cases} 1+\sqrt{2u} & \text{sí } 0 \le u < \frac{1}{2} \\ 3-\sqrt{2u} & \text{si } \frac{1}{2} \le u \le 1 \end{cases}$$

Para u_1 $(u_1 < \frac{1}{2})$

$F^{-1}(u_1) = 1.570798739$

Para u_2 $(u_2 < \frac{1}{2})$

$F^{-1}(u_2) = 1.908498542$

Para u_3 = $(u_3 < \frac{1}{2})$

$F^{-1}(u_3) = 1.725756984$

4) Hay n cartas y n sobres. Cada sobre se diseñó para cada carta. Si meten las cartas al azar. Calcular probabilidad ninguna carta se ponga en su propio sobre considerando $n=10$. (En R).

5) Ver si el GLC alcanza un periodo máximo.

$a = 2{,}814{,}749{,}767{,}109$

$c = 59{,}482{,}661{,}568{,}307$

$m = 2^{48}$

Dem:

Debemos usar el teorema Hull & Dobell con el caso particular donde el módulo es de la forma $m = 2^k (\geq 4)$

Un GLC se define

$$Z_i \equiv (a Z_{i-1} + c) \text{ mód } m$$

Ahora, para el GLC que nos dieron,

un GLC tiene periodo completo $\Leftrightarrow$ c es impar y $a \equiv 1 \bmod 4$
$(m = 2^k \geq 4)$

Vemos que c es impar, falta ver la segunda condición.

$a \equiv 1 \bmod 4 \Rightarrow 2{,}814{,}749{,}767{,}108$ se divide por 4
($a-1$ se divide por 4)

5

$$
\begin{array}{r|l}
 & 703,687,441,777 \\
4 & 2,814,749,767,108 \\
\end{array}
$$

0 1 4
2 7
3 4
2 9
1 7
16
0 7
31
30
28
0

$\therefore a = 2,814,749,767,108$

$= 4(703,687,441,777) + 0$

El residuo de la división es 0

$\therefore$ El GLC tiene periodo máximo completo.

6) Probar si los números $2°, 9°, 16°, \ldots,$ en la sucesión están autocorrelacionados con $\alpha = 0.05$

Autocorrelación de rezago (lag) j

$$\rho_j = \frac{Cov(X_i, X_{i+j})}{Desv(X_i)\,Desv(X_{i+j})} = \frac{Cov(X_i, X_{i+j})}{Var(X_i)}$$

$2°, 9°, 16°, \ldots$ es una sucesión

$$\left.\begin{array}{l} 9-2=7 \\ 16-9=7 \end{array}\right\} d\text{- distancia entre cada número.}$$

$X_{i+1} = X_i + 7$ es la formula de la sucesión. $(j = 7)$

(Ver en R) Se aplicó la prueba Box-Pierce y, también, se le aplicó la prueba de Ljung-Box para verificar simultáneamente varias autocorrelaciones, pues es una muestra pequeña.

Box-Pierce se obtuvo 0.8085

Ljung-Box se obtuvo 0.7544

$\therefore$ La sucesión está autocorrelacionada con $\alpha = 0.05$

(6)

8) Procedimiento aceptación-rechazo para muestras de

$$h_x(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{1+|x|} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$$

Verificar eficiencia pues $\int_{-\infty}^{\infty} h_x(x)\,dx = 1,5413$

$h(x) = Ker(x)$

Opciones de v.a's a usar: Normal, Cauchy, Laplace

Consideremos $Y \sim N(0,1)$ como Función mayorizante ($g_Y(y)$)

Buscamos c (mínima) tal que $\frac{h(x)}{g(x)} \leq c$

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\frac{\cancel{e^{-x^2/2}}}{1+|x|}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cancel{e^{-x^2/2}}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{1+|x|}$$

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{MAX}\left\{\frac{h(x)}{g(x)}\right\} = \underset{x\in\mathbb{R}}{MAX}\left\{\frac{\sqrt{2\pi}}{1+|x|}\right\}$$ (Notemos que $\frac{h(x)}{g(x)}$ es par basta optimizar un lado)

Si $x>0 \Rightarrow \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{2\pi}{1+x} = 2\pi(1+x)^{-1}$

$$\Rightarrow \left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)' = -2\pi(1+x)^2 = -\frac{\sqrt{2\pi}}{(1+x)^2} < 0 \quad \forall x>0$$

Análogamente, $\left(\frac{h(x)}{g(x)}\right)' = \frac{\sqrt{2\pi}}{(1-x)^2} > 0 \quad \forall x<0$

Falta verificar el punto singular $x=0$

En $x=0$ $\frac{h(0)}{g(0)} = \sqrt{2\pi}$ que es el valor máximo pues la

Función decrece si $x \to -\infty$ y si $x \to +\infty$

Entonces, si $x=0$, resulta que la $c = \sqrt{2\pi}$

Scanned by CamScanner

Concluimos que

$$\frac{h(x)}{g(x)} \leq \sqrt{2\pi} \Rightarrow h(x) \leq \sqrt{2\pi}\, g(x)$$

· Generamos $u \sim \text{Unif}(0,1)$

· Si $u \leq \frac{h(x)}{c\,g(x)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}\,(1+|x|)} = \frac{1}{1+|x|}$ $\therefore u \leq \frac{1}{1+|x|}$

· Finalmente, si $u \leq \frac{1}{1+|x|}$ se acepta, sino, se rechaza

Sabemos que el número promedio de iteraciones para aceptar $\frac{1}{c}$. La c que tenemos es muy grande pues envuelve a $h(x)$ la cual $\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx = 1.5413$. Le faltan las constantes para que integre 1. La c es para el kernel de esa v.a., no para cada función de densidad de probabilidad.

Como $c = \sqrt{2\pi} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0.3989$

Entonces aproximadamente 4 de cada 10 ensayos se acepta la u, lo cual en cuestión de eficiencia de tiempo es muy bueno.