(b) Una tendencia lineal en el tiempo se ajusta a X al calcular la regresión de X sobre t. Por ejemplo, si el origen del tiempo se sitúa a la mitad de 2005 y la unidad de tiempo usada es el año, entonces el año 2012 corresponde a t = 7.

Si, en cambio, el origen se localiza al final del año 2010 (o al inicio de 2011) y la unidad de tiempo empleada es el semestre, entonces 2007 corresponde a t = -7.

Demuestre que cualquier valor *estimado por tendencia* $\hat X_t = b_0 + b_1 t$, no se altera por la selección del origen, ni por la unidad de medida del tiempo.

Podemos ver la tendencia como modelo de regresión lineal

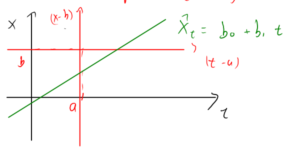
$\hat X_t = b_0 + b_1 t$

$$b_0 = \bar x - b_1 \bar t, \quad b_1 = \frac{n\sum t_i x_i - \sum t_i \sum x_i}{n\sum t_i^2 + (\sum t_i)^2} = \frac{\sum (t_i - \bar t)(x_i - \bar x)}{\sum (t_i - \bar t)^2} = \frac{\sum t_i x_i - n\bar t \bar x}{\sum x_i^2 - n\bar x^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\sum t_i x_i - \sum t_i \sum \frac{x_i}{n}}{n-1}\right)}{\left(\frac{\sum t_i^2 - \frac{1}{n}(\sum t_i)^2}{n-1}\right)}$$

(1) Veremos que no se altera con selección del origen

Consideremos el plano $(t-a, x-b)$



Entonces, la tendencia lineal en el plano $(t-a, x-b)$ tiene coeficientes b_0' y b_1' como

$t_i' = t_i - a$

$x_i' = x_i - b$

$$b_1' = \frac{n\sum t_i' x_i' - \sum t_i' \sum x_i'}{n\sum t_i'^2 - (\sum t_i')^2}$$

$$= \frac{n\sum (t_i - a)(x_i - b) - \sum (t_i - a)\sum (x_i - b)}{n\sum (t_i - a)^2 - \{\sum (t_i - a)\}^2}$$

$$= \frac{n\sum\{t_i x_i - b t_i - a x_i + ab\} - \{(n\bar t - na)(n\bar x - nb)\}}{n\sum (t_i^2 - 2t_i a + a^2) - \{n\bar t - na\}^2}$$

$$= \frac{n\{\sum (t_i x_i) - bn\bar t - an\bar x + nab\} - \{n^2\{\bar t\bar x - b\bar t - a\bar x + ab\}\}}{n\sum (t_i^2 - 2n\bar t + na^2) - n^2\{\bar t - a\}^2}$$

$$= \frac{\cancel{n}\{\sum t_i x_i - bn\bar t - an\bar x + nab - n(\bar t\bar x - b\bar t - a\bar x + ab)\}}{\cancel{n}\{\sum t_i^2 - 2n\bar t + na^2 - n\{\bar t - a\}^2\}}$$

$$= \frac{\sum t_i x_i - n\cancel{b}\bar t - \cancel{an\bar x} + \cancel{nab} - n\bar t\bar x + \cancel{nb}\bar t + \cancel{na\bar x} - \cancel{nab}}{\sum t_i^2 - 2n\bar t + na^2 - n(\bar t^2 - 2\bar t a + a^2)}$$

$$= \frac{\sum t_i x_i - n\bar t\bar x}{\sum t_i^2 - 2\cancel{n\bar t} + \cancel{na^2} - n\bar t^2 + 2\cancel{n\bar t} a - \cancel{na^2}}$$

$$= \frac{\sum t_i x_i - n\bar t\bar x}{\sum t_i^2 - n\bar t^2} = b_1 \leftarrow \text{Original de la tendencia lineal } \hat X_t = b_0 + b_1 t$$

Ahora,

$$b_0' = \bar x' - b_1' \bar t' \overset{b_1' = b_1}{=} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' - b_1 \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i'$$

$$= \frac{1}{n}\sum (x_i - b) - b_1 \frac{1}{n}\sum (t_i - a)$$

$$= \bar x - b - b_1\{\bar t - a\}$$

Así pues, con $b_0' = \bar x - b - b_1\{\bar t - a\}$

$b_1' = b_1$ {original

resulta que

$$\hat X'_{t_i'} = b_0' + b_1' t_i' = \bar x - b - b_1\{\bar t - a\} + b_1(t_i - a)$$

$$= \bar x - b - b_1\{\bar t - \cancel{a} - t_i + \cancel{a}\}$$

$$= \bar x - b - b_1\{\bar t - t_i\}$$

Como es sobre el plano $(t-a, x-b)$ entonces $\hat x'_{t_i'} = \hat x_t - b$

Así, $\hat x'_{t_i'} = \bar x - b - b_1\{\bar t - t_i\}$

$\iff \hat x_{t_i} - \cancel{b} = \bar x - \cancel{b} - b_1\{\bar t - t_i\}$

$\iff \hat x_{t_i} = \bar x - b_1\{\bar t - t_i\}$

$\iff \hat x_{t_i} = \underbrace{\bar x - b_1 \bar t}_{= b_0} + b_1 t_i$

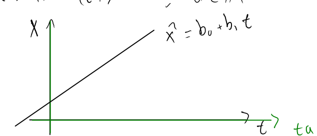
$\iff \hat x_{t_i} = b_0 + b_1 t_i$

Por lo que no varía bajo cambio de origen

(2) No se altera respecto a la unidad de medida de tiempo

Consideremos a $t' = ta$, $a \in \mathbb{R}$

Deducimos que si t es medida de tiempo entonces t' es otra medida de tiempo. La estimación de b_0 y b_1 de $\hat x_{t'}$ se da en el plano $(t', x) = (ta, x)$, $a \in \mathbb{R}$



Hacemos las estimaciones en $(t', x) = (at, x)$

Así pues,

$$b_1' = \frac{n\sum t_i' x_i - \sum t_i' \sum x_i}{n\sum t_i'^2 - (\sum t_i')^2}$$

$$= \frac{n\sum a t_i x_i - \sum a t_i \sum x_i}{n\sum (a t_i)^2 - (\sum a t_i)^2}$$

$$= \frac{na\sum t_i x_i - a(n\bar t)(n\bar x)}{n a^2 \sum t_i^2 - a^2 n^2 \bar x^2}$$

$$= \frac{\cancel{n}\cancel{a}\{\sum t_i x_i - \bar t\bar x\}}{\cancel{n}\cancel{a}\{a\sum t_i^2 - a n \bar x^2\}}$$

=

Así, $b_0' = \bar x - b_1' \bar t'$

$$= \bar x - \frac{\sum t_i x_i - \bar t \bar x}{a\{\sum t_i^2 - n\bar x^2\}} \frac{1}{n}\sum t_i'$$

$$= \bar x - \frac{\sum t_i x_i - \bar t \bar x}{\cancel{a}\{\sum t_i^2 - n\bar x^2\}} \frac{1}{n}\sum \cancel{a} t_i$$

$$= \bar x - \frac{\sum t_i x_i - \bar t \bar x}{\sum t_i^2 - n\bar x^2} \bar t$$

$$= \underbrace{\bar x - b_1 \bar t}_{\text{original}} \quad \therefore b_0' = b_0 \ \{\text{original}$$

Así pues, tenemos que

$\hat X_{at} = b_0 + b_1 t$ $(= \hat X_t)$

∴ No cambia respecto a unidades de tiempo