(Parcial 2) Simulación David Isaac López Romero

CU: 173993

3) Si $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son cualesquiera dos estimadores insesgados de θ, encontrar el valor c^* que minimiza la varianza del estimador

$\hat{\theta}_c = c\hat{\theta}_1 + (1-c)\hat{\theta}_2$

Sol:

Vemos que $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ son independientes pues son dos estimadores distintos. (Usan los mismos valores, pero no dependen uno del otro)

$$Var(\hat{\theta}_c) = Var(c\hat{\theta}_1 + (1-c)\hat{\theta}_2) = c^2 Var(\hat{\theta}_1) + (1-c)^2 Var(\hat{\theta}_2)$$

Como $\hat{\theta}_1$ y $\hat{\theta}_2$ tienen varianza positiva, $Var(\hat{\theta}_1) = k\,Var(\hat{\theta}_2)$, $k>0$

(Si $Var(\hat{\theta}_1), Var(\hat{\theta}_2) = 0$ ya conozco a θ y no sirve tener un estimador)

$$\therefore Var(\hat{\theta}_c) = c^2 Var(\hat{\theta}_1) + (1-c)^2 Var(\hat{\theta}_2) = c^2 k\,Var(\hat{\theta}_2) + (1-c)^2\ Var(\hat{\theta}_2)$$

$$= \{c^2 k + (1-c)^2\} Var(\hat{\theta}_2)$$

Busco minimizar la varianza; entonces, $\min\limits_{c\in\mathbb{R}} \{c^2k + (1-c)^2\}$

Sea $F(c) = c^2k + (1-c)^2$ entonces,

$$F'(c) = 2ck + 2(1-c)(-1) = 2ck + 2(c-1) = 2ck + 2c - 2$$

Ahora,

$$F'(c) = 0 \iff 2ck + 2c - 2 = 0 \iff ck + c - 1 = 0 \iff c(k+1) = 1$$

$$\iff c = \frac{1}{k+1}$$

Además,

$F''(c) = 2k + 2 > 0$, pues $k>0$ $\therefore$ F es cóncava. $\forall c\in\mathbb{R}$

$\therefore c^* = \frac{1}{k+1}$ es mínimo

Así pues $\hat{\theta}_c$ minimiza la varianza si $\hat{\theta}_c = c\hat{\theta}_1 + (1-c)\hat{\theta}_2$, $c = \frac{1}{k+1}$

i.e. $\hat{\theta}_{c^*} = \frac{1}{k+1}\hat{\theta}_1 + \frac{k}{k+1}\hat{\theta}_2$

//

Escaneado con CamScanner