

Simulación

Generación de Procesos Estocásticos

Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Semana 7



Procesos estocásticos

- Un **proceso estocástico** es un modelo matemático del comportamiento en el tiempo o en el espacio de un fenómeno aleatorio.
- En simulación es una herramienta fundamental para modelar diferentes tipos de situaciones:
 - **Mercado:** precios de activos, número de casos de incumplimiento en un intervalo de tiempo, tasas de interés, tipos de cambio, índices bursátiles, etc.
 - **Series de tiempo:** precipitación mensual, estado de un proceso industrial, etc.
 - **Sistemas dinámicos:** líneas de espera, inventarios, flujos en redes, etc.
 - **Fenómenos físicos:** emisión de partículas radioactivas, etc.
- Una de las principales características de un proceso estocástico es que permite modelar *dependencia* de variables aleatorias, a diferencia del supuesto de una muestra aleatoria en estadística, así como de *comportamientos límite*.

Procesos estocásticos I

- Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad donde Ω es un espacio muestral, \mathcal{F} es una σ -álgebra sobre Ω y $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ es una medida de probabilidad. Sea \mathcal{T} un conjunto de índices (finito o infinito).

Proceso Estocástico

Un *proceso estocástico* es una función $X : \Omega \times \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ tal que $\forall t \in \mathcal{T}$,

$$X_t : \omega \mapsto X(\omega, t) \equiv X_t : \Omega \rightarrow \mathcal{S}$$

es una función \mathcal{F} -medible (i.e. es una variable aleatoria).

El conjunto \mathcal{S} se denomina *espacio de estados*.

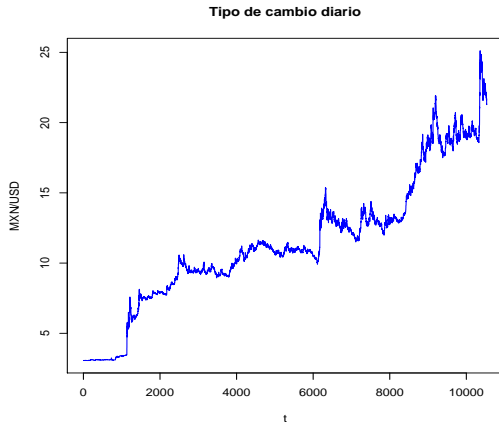
- En la mayoría de las notaciones se obvia el uso del espacio muestral, y entonces se denota a la variable aleatoria simplemente como X_t .
- Para una ω dada, $t \mapsto X(\omega, t) : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ es una *función muestral* o *realización* del proceso. Usualmente estas realizaciones es lo que estudian las series de tiempo.

- Por otra parte, es usual interpretar a t como tiempo y se le llama a y_t el estado del proceso al tiempo t .
- Si el conjunto de índices es un intervalo, se dice que el proceso es de *parámetro continuo*, mientras que si es un conjunto numerable, se dice que el proceso es de *parámetro discreto*.

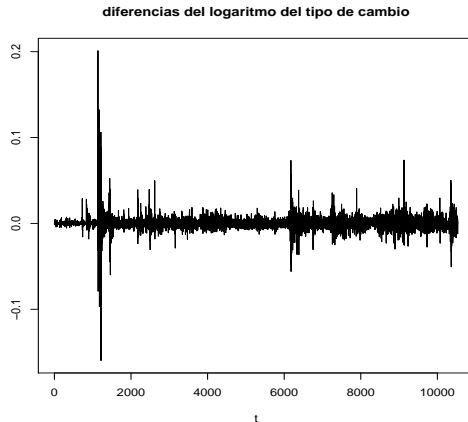
Ejemplos de realizaciones de procesos estocásticos: series de tiempo

- Una *serie de tiempo* es una realización de un proceso estocástico donde el conjunto de índices \mathcal{T} es un conjunto de valores reales positivos.
- La serie de tiempo se puede representar como una sucesión de observaciones $y_{t_1}, y_{t_2}, \dots, y_{t_T}$, o bien, con la siguiente expresión: $\{y_t\}_{t \in T}$, con $t \in \mathcal{T}$.
- Usualmente, una serie de tiempo se visualiza mediante la gráfica $\{(t, y_t)\}$ y uniendo los puntos que son consecutivos en el tiempo (aunque en realidad esto es una simplificación que es muy burda en ocasiones).

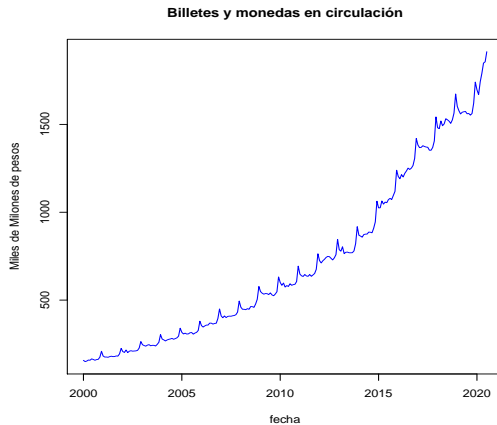
Ejemplos: tipos de cambio



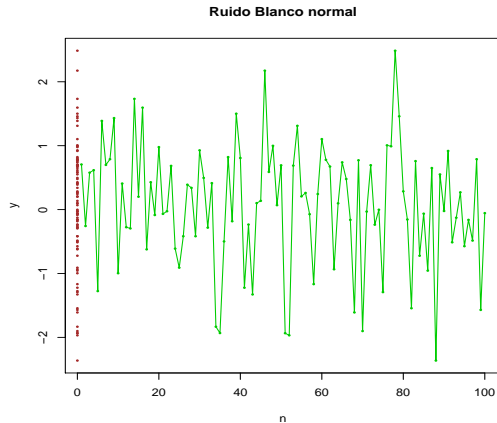
Ejemplos: Diferencias en los tipos de cambio

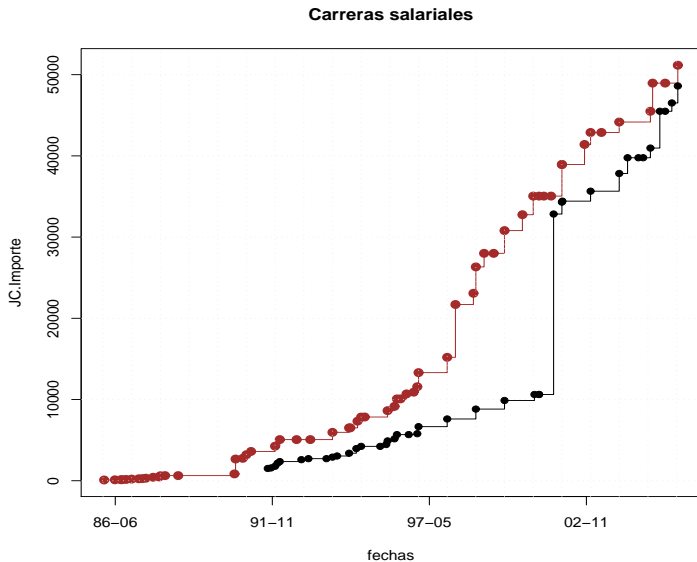


Ejemplos: Billetes y monedas

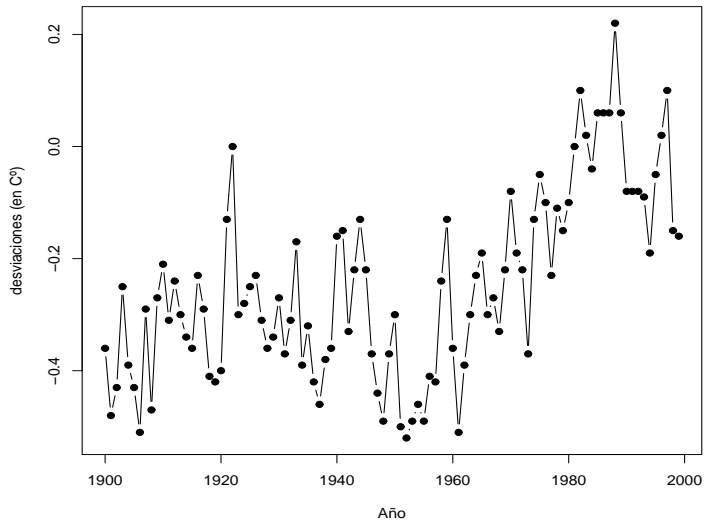


Ejemplos: Ruido Blanco





Desviaciones de la temperatura global promedio (1900–2000)





Otros ejemplos de series temporales

- Otras situaciones prácticas que dan origen a las series de tiempo:
 - Ventas mensuales de vehículos de una agencia.
 - Número de desempleados en el tiempo (Índices de empleo).
 - Calidad de aire o agua.
 - Población de una ciudad o un país.
 - Proporción de células cancerígenas en un órgano cada semana.
 - Demanda mensual o trimestral de cualquier producto.
 - Índices de las diferentes bolsas de valores, o bien, los precios de productos financieros.
 - Número de muertes y de contagiados de COVID-19 en el día t .
- Las fuentes de las series de tiempo pueden ser muy variadas, muchas son de origen industrial (en los procesos de producción), o bien, de naturaleza económica, física, financiera, militar, médica, etc.

Ejemplo de proceso estocástico: PageRank I

Se puede ver la navegación en páginas web como una *caminata aleatoria en una gráfica*

- Los nodos son las direcciones web, que representan los estados \mathcal{S} del proceso.
- Hay un arco dirigido de x a y si x tiene un hipervínculo a y .

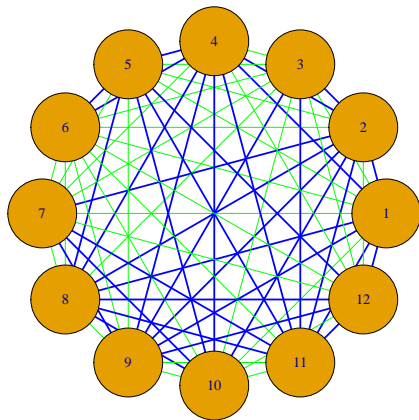
Si Y_k es la posición del navegador de la web en el paso k , entonces definimos la probabilidad de estar en x en el tiempo k : $p_x^k = P(Y_k = x)$.

El **rango de una página** x se define como la probabilidad de estar en x en el largo plazo:

$$PageRank(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} p_x^k$$

```
library(igraph)
g <- graph.full(12)
E(g)$weight <- runif(ecount(g))
E(g)$width <- 2
E(g)$color <- "blue"
E(g)[ weight < 0.5 ]$width <- 0
E(g)[ weight < 0.5 ]$color <- "green"
plot(g, layout = layout.circle, edge.width = E(g)$width, edge.color = E(g)$color, vertex.size = 40)
```

Ejemplo de proceso estocástico: PageRank II



Descripción de un proceso estocástico I

- Una forma de describir un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ es especificar la colección de distribuciones conjuntas de subconjuntos de n variables X_{t_1}, \dots, X_{t_n} para cualquier n :

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n)$$

Claramente esta manera de describir el proceso es muy compleja, pues requiere especificar una gran cantidad de funciones de distribución conjunta y de distribuciones marginales.

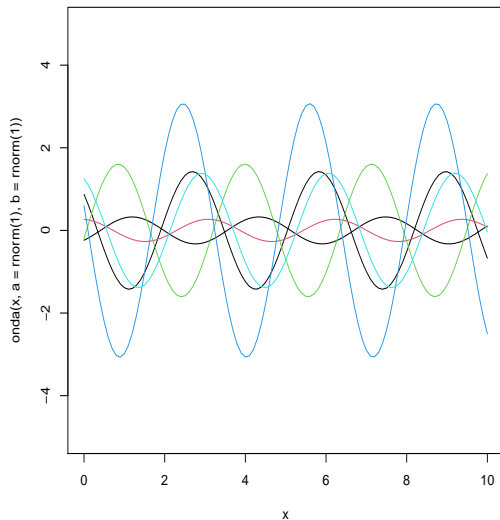
- Otra opción consiste en determinar una fórmula para el valor $X_t = X(t)$ del proceso en cada punto t en términos de una familia de variables cuya distribución es conocida.

Descripción de un proceso estocástico II

- Por ejemplo, considerando $X(t) = A \cos(wt) + B \sin(wt)$, donde w es una constante y $A, B \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $A \perp\!\!\!\perp B$. Usualmente estos procesos corresponden a *series de tiempo*.

```
onda <- function(t,a,b,w=2){a*cos(w*t) + b*sin(w*t)}  
curve(onda(x,a=rnorm(1),b=rnorm(1)),from=0, to=10,ylim=c(-5,5))  
for(i in 1:5) curve(onda(x,a=rnorm(1),b=rnorm(1)),from=0, to=10,add=T,col=i)
```

Descripción de un proceso estocástico III



Descripción de un proceso estocástico III

- Otra forma es estudiar clases de procesos que cumplen ciertas condiciones. Por ejemplo, la clase de *procesos estacionarios* o la clase de *procesos markovianos*.

Procesos estacionarios

Un proceso es estacionario de orden n si para $t_1 < \dots, < t_n \in \mathfrak{T}$, y cualquier $h > 0$, las distribuciones de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ y $(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ son la misma. El proceso estocástico es fuertemente estacionario si se cumple la propiedad para toda n .

Los procesos estocásticos que revisaremos desde el punto de vista de simulación y algunas aplicaciones, son los siguientes:

- Cadenas de Markov
- Procesos Poisson (homogéneos y no homogéneos)
- Procesos de Wiener y movimiento Browniano
- Modelos de series de tiempo

Cadenas de Markov

Procesos de Markov

Los *Procesos Markovianos* son los que cumplen la siguiente propiedad: la probabilidad de que un sistema físico esté en un estado determinado en el tiempo t puede deducirse del conocimiento en el tiempo s , para $s < t$ y no depende de la historia del sistema antes del tiempo s .

Procesos de Markov

Un Proceso de Markov es un proceso $\{X_t \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}\}$ que cumple con la propiedad de Markov:

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}}, \dots, X_{t_0} = x_0) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n)$$

El proceso de Markov es *homogéneo*, si no depende de n :

$$P(X_{t_{n+1}} = j | X_{t_n} = i) = P(X_{t_1} = j | X_{t_0} = i) = p_{ij}$$

Tipos de procesos markovianos

Dependiendo de la estructura del espacio de estados S y del espacio parametral T , se tienen diferentes tipos de procesos estocásticos:

S	T	
	discreto	continuo
	continuo	
discreto	Cadenas de Markov	Cadenas de Markov de parámetro continuo
continuo	Procesos de Markov de parámetro discreto	Procesos de Markov

- En el caso de las cadenas de Markov con un espacio de estados finito, $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, N\}$, el proceso queda especificado por las probabilidades p_{ij} , que cumplen las siguientes propiedades:
 - 1 $p_{ij} \geq 0$,
 - 2 $\sum_{j=1}^N p_{ij} = 1$, para $1 \leq i \leq N$
- Las probabilidades de transición se pueden acomodar en una matriz de dimensión $n \times N$:
$$\mathbf{P} = (p_{ij})$$
- Si el espacio de estados es discreto pero no finito, entonces, la matriz de transiciones es una matriz infinita.

Ejemplo de Cadena de Markov: Modelo simple de inventario

Consideren el inventario de un almacén de un único producto, y los siguientes supuestos:

- No hay demanda no satisfecha.
- X_n = número de artículos en stock al inicio del periodo n
- D_n = número de artículos demandados durante el periodo n . Supongamos $D_n \sim \mathcal{P}(k)$ donde $k < M$.
- El número de artículos en stock al final del periodo es $\max\{X_n - D_n, 0\}$.
- Como política de inventario, se reordena al final de cada periodo si $X_n - D_n \leq 1$ y en ese caso se reabastece para alcanzar tamaño M . Entonces:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - D_n & \text{si } X_n - D_n \geq 2 \\ M & \text{si } X_n - D_n \leq 1 \end{cases}$$

Se puede verificar entonces que $\{X_n\}$ es una cadena de Markov.

Ejemplo de Cadena de Markov: Modelo simple de inventario

Con un nivel de reorden de $M = 5$, y con una demanda promedio de $k = 3$ ítems en el periodo, podemos ver que el espacio de estados es $S = \{2, 3, 4, 5\}$. Ahora, si $X_n - D_n \geq 2$,

$$P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_n - D_n = j | X_n = i) = P(D_n = i - j) > 0$$

si $i \geq j$.

Y para el otro caso, $X_n - D_n \leq 1$, entonces $X_{n+1} = 5$ y

$$P(X_{n+1} = 5 | X_n = i) = P(X_n - D_n \leq 1 | X_n = i) = P(D_n \geq i - 1)$$

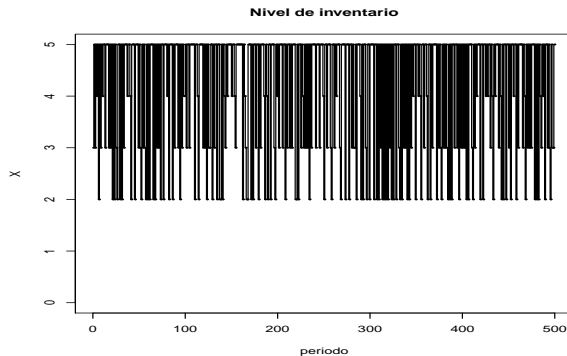
Considerando la distribución Poisson, podemos construir la matriz de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.0498 & 0 & 0 & 0.9502 \\ 0.1494 & 0.0498 & 0 & 0.8008 \\ 0.2240 & 0.1494 & 0.0498 & 0.5768 \\ 0.2240 & 0.2240 & 0.1494 & 0.4026 \end{pmatrix}$$

Para $p_{5,5}$, noten que el inventario pasa de 5 a 5 si la demanda es 0 o al menos 4.

Simulación de Cadena de Markov, $M = 5, k = 3$

```
set.seed(100)
n <- 500 #numero de simulaciones del proceso
D <- rpois(n,3) #demandas
X <- NULL
X[1] <- sample(2:5,1) #nivel inicial del inventario
for(i in 2:n) X[i] <- ifelse(X[i-1]-D[i-1]>=2, (X[i-1]-D[i-1]), 5)
plot(1:n, X, type = "S", main = "Nivel de inventario", ylim = c(0,5), xlab = "periodo")
points(1:n, X, pch = 16, cex = 0.5)
```

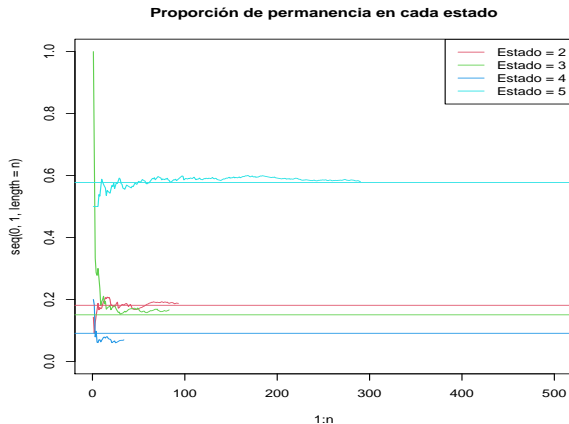


Simulación de Cadena de Markov, $M = 5, k = 3$ I

- ¿Qué proporción de las iteraciones, en promedio, se está en cada estado?

```
table(X)/n  
  
X  
  2    3    4    5  
0.186 0.166 0.068 0.580  
  
Z <- list(NULL)  
for(i in 2:5) Z[[i]] <- 1:length(X[X == i])/which(X == i)  
plot(1:n, seq(0, 1, length = n), type = "n",  
     main = "Proporción de permanencia en cada estado")  
for(i in 2:5) lines(Z[[i]], col = i)  
abline(h = c(0.181211, 0.1504296, 0.09080838, 0.577551), col = 2:5)  
#probabilidades de equilibrio  
legend("topright", legend = paste("Estado =", 2:5), col = 2:5, lty = rep(1,4))
```

Simulación de Cadena de Markov, $M = 5, k = 3$ II

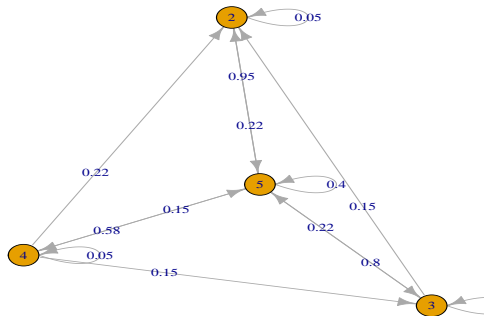


Simulación de Cadena de Markov, $M = 5, k = 3$

```
plot(mcinventario)
```

```
library(markovchain)
mcinventario <- new("markovchain", states=as.character(2:5), transitionMatrix =
matrix(data=c(0.0498, 0, 0, 0.9502,
0.1494, 0.0498, 0, 0.8008,
0.2240, 0.1494, 0.0498, 0.5768,
0.2240, 0.2240, 0.1494, 0.4026), byrow=T, nrow=4), name="Inventario")
steadyStates(mcinventario)
```

```
      2      3      4      5
[1,] 0.181211 0.1504296 0.09080838 0.577551
```



Algoritmo para simular Cadenas de Markov

- En la práctica, surge la necesidad de simular cadenas de Markov porque las matrices de transición son muy grandes o los espacios de estado son enormes.
- En esos contextos, es más práctico generar realizaciones del proceso estocástico.

Algoritmo para simular cadenas de Markov

Si α es la distribución inicial y \mathbf{P} es la matriz de transición, entonces para generar n transiciones X_0, X_1, \dots, X_n :

- 1 Genera X_0 de acuerdo a α
- 2 Para cada i , seleccionar $\mathbf{p} = \mathbf{P}[X_{i-1}, \cdot]$ y generar X_i de acuerdo a la distribución \mathbf{p} .

Ejemplo revisado de inventario

Con el algoritmo dado, la simulación realizada anteriormente queda así:

```
P <- matrix(c(0.0498, 0, 0, 0.9502, 0.1494, 0.0498, 0, 0.8008,
             0.2240, 0.1494, 0.0498, 0.5768, 0.2240, 0.2240, 0.1494, 0.4026),
           byrow=T, nrow=4)

n <- 500 #numero de simulaciones del proceso
X <- NULL
X[1] <- sample(2:5,1) #nivel inicial del inventario
for(i in 2:n) X[i] <- sample(2:5,1,prob=P[X[i-1]-1,])
X

[1] 4 4 5 3 3 5 4 5 3 5 4 4 5 5 4 5 5 5 5 3 5 2 5 4 3 5 4 4 5 5 3 5 2 5 5 5 4
[38] 5 5 5 5 3 5 5 5 5 2 5 2 5 4 5 3 2 5 5 3 5 2 5 5 5 3 5 5 2 5 2 5 4 5 3 5 2
[75] 5 3 5 5 5 5 3 5 4 3 5 3 5 2 5 3 5 5 3 5 3 5 2 5 2 5 5 5 5 4 5 3 2 5 2 5 3
[112] 2 5 5 4 3 5 4 2 5 2 5 2 5 3 5 3 2 5 3 5 5 5 5 3 2 5 4 5 4 5 5 2 5 5 5 2 5
[149] 2 5 3 5 5 3 2 5 5 5 2 5 3 5 3 5 2 5 3 5 3 5 5 2 5 3 5 4 5 5 4 2 5 3 5 5 3 5
[186] 5 5 5 2 5 5 5 3 3 2 5 5 3 5 5 3 5 2 5 5 3 5 2 5 3 5 5 5 4 4 3 5 3 2 5 5 5
[223] 5 4 5 4 2 5 2 5 2 5 3 5 4 3 5 2 5 5 5 3 5 4 2 5 3 5 5 2 5 3 5 5 5 5 5 3 5
[260] 5 5 5 2 2 5 3 5 3 5 5 2 5 2 5 5 5 5 5 3 5 3 5 3 5 3 5 5 5 5 5 2 5 5 5 3 5
[297] 3 5 5 5 2 5 3 5 2 2 5 2 5 3 2 5 5 3 5 5 2 5 4 5 2 5 5 5 5 3 5 5 5 5 3 5 5
[334] 5 5 4 5 4 5 4 5 4 2 5 5 2 5 5 5 5 2 5 5 5 5 4 2 5 3 3 5 3 5 2 5 2 5 5 3 5
[371] 4 5 5 4 5 3 2 5 2 5 3 5 3 5 5 3 5 2 5 3 5 2 5 3 5 2 5 4 5 5 3 5 3 5 5 5 4
[408] 2 5 4 5 3 5 3 5 5 5 5 4 5 2 5 3 5 3 5 5 4 5 3 5 5 3 5 2 5 3 5 5 2 5 4 3 5
[445] 5 2 5 2 5 3 5 3 5 5 4 5 5 5 3 5 5 5 4 5 5 3 5 5 5 5 5 3 5 3 5 2 5 3 5 5
[482] 5 3 5 5 2 2 5 3 5 2 5 3 5 2 5 2 5 5
```

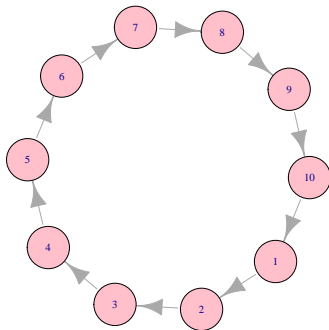


```
table(X)/n

X
 2    3    4    5
0.150 0.182 0.084 0.584
```


Ejemplo de Cadena de Markov: Juego básico I

- Supongamos un juego con tablero circular con celdas marcadas del 1 al 10.



- Comenzando con $X_0 = 1$, se lanza un dado y se avanza ese número de casillas.

Ejemplo de Cadena de Markov: Juego básico II

- Sea X_n = número de la casilla en el n -ésimo movimiento

En este problema, $\mathcal{S} = \{1, \dots, 10\}$ y $\mathcal{T} = \mathbb{Z}^+$

La matriz de probabilidades de transición está dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el algoritmo a esta matriz se obtiene la siguiente realización con 200 observaciones de la cadena:

Ejemplo de Cadena de Markov: Juego básico III

```
P <- matrix(c(0, rep(c(rep(1/6, 6), rep(0, 5)), 3),
               rep(c(rep(1/6, 7), rep(0, 4)), 6)), nrow = 10, byrow = T)
n <- 200
X <- 1 #posición inicial dada por el problema
for(i in 2:n)X[i] <- sample(1:10, 1, prob = P[X[i-1],])
X
```

```
[1] 1 2 3 4 7 1 6 2 6 1 3 4 7 9 5 6 2 6 8 2 8 1 7 2 3
[26] 6 10 2 8 9 2 7 1 5 10 5 10 2 4 6 9 5 10 4 8 9 3 6 9 2
[51] 3 7 2 4 10 5 9 3 9 5 8 3 6 7 10 6 1 2 7 3 6 8 10 2 4
[76] 9 2 5 9 4 9 5 6 8 1 5 10 6 9 2 3 4 7 2 6 2 5 1 5 1
[101] 2 3 5 9 5 7 2 7 1 3 9 5 6 2 8 4 5 6 8 10 3 6 8 10 2
[126] 4 5 6 2 4 9 4 6 1 3 6 8 1 4 8 9 4 10 1 4 9 4 8 4 9
[151] 2 8 10 1 4 9 4 9 5 6 10 6 8 1 5 10 6 2 5 1 7 2 8 3 4
[176] 8 3 5 1 7 2 5 1 5 8 3 7 1 2 5 9 3 8 10 6 8 9 10 3 4
```

```
table(X)/n #proporción de permanencia en cada estado
```

```
X
 1      2      3      4      5      6      7      8      9     10
0.095 0.130 0.090 0.105 0.115 0.115 0.065 0.100 0.105 0.080
```

Procesos de Poisson

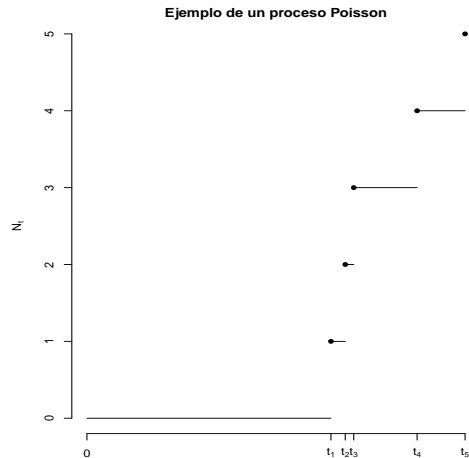
- Los procesos de Poisson son uno de los modelos matemáticos más utilizados en las aplicaciones de diferentes campos: riesgo, confiabilidad, teoría de colas, economía, etc.
- Este proceso fue utilizado por Filip Lundberg (1876-1965) en 1903 en su tesis doctoral: *Aproximaciones de la función de probabilidad / Reaseguro de riesgos colectivos* para determinar la probabilidad de ruina de una compañía de seguros.
- Harald Cramér (1893-1985) y sus discípulos desarrollaron las ideas de Lundberg y construyeron el proceso de ruina (modelo Cramér-Lundberg) que permite describir, en cada instante, la reserva de una compañía de seguros.

- Un proceso Poisson es un tipo particular de *proceso de conteo*, que cuenta la ocurrencia o realizaciones de eventos a lo largo del tiempo.

Procesos de conteo y proceso Poisson

- Un *Proceso de conteo* es un proceso estocástico $\{N_t, t \geq 0\}$ tal que si $0 \leq s \leq t$, entonces $N_s \leq N_t$. Aquí $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+$ y $\mathcal{S} = \mathbb{Z}^+$.
- El *proceso Poisson* es un caso particular de proceso de conteo, que cuenta el número de eventos que ocurren en el intervalo $(0, t]$ o en un espacio determinado.

Procesos de Conteo II



Algunos ejemplos prácticos son los siguientes:

- Llegada de clientes a una estación de servicio, donde el servicio puede estar dado por personas o por máquinas.
- La ocurrencia de accidentes, errores, fallas de sistema y eventos similares asociados con riesgos.
- La llegada de un electrón al ánodo, emitido desde un cátodo de un tubo de vacío.
- Llegadas de correo electrónico o tweets en una jornada de trabajo.
- Número de conejos que hay en una región determinada de un bosque.

Para entender bien el proceso Poisson, necesitan revisar dos tipos de variables aleatorias: la distribución exponencial y la distribución Poisson.

Proceso Poisson

Un proceso de conteo $\{N_t | t \geq 0\}$ es un proceso Poisson con media (o intensidad) λ si se cumplen los siguientes supuestos:

- 1 $N_0 = 0$
- 2 $\{N_t | t \geq 0\}$ tiene incrementos estacionarios independientes
- 3 $\forall s < t$ el conteo $N_t - N_s$ en el intervalo (s, t) sigue una distribución Poisson con media $\lambda(t - s)$,

$$P(N_t - N_s = k) = \exp^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$$

y

$$E(N_t - N_s) = \lambda(t - s), \quad \text{Var}(N_t - N_s) = \lambda(t - s)$$

La intensidad representa el número promedio de eventos que ocurren en una unidad de tiempo. Se usa la notación $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda)$ para decir que $\{N_t | t \geq 0\}$ sigue un proceso Poisson con intensidad λ .

- Hay otras formas de deducir el proceso Poisson, considerando la Ley de los eventos raros y suponiendo un conjunto de axiomas, o bien considerando la distribución de los tiempos de interarribo.

Distribución exponencial y tiempos de interarribo

- En un proceso Poisson $\{N_t | t \geq 0\}$, los puntos en donde ocurren los eventos usualmente son aleatorios y se representan por los tiempos $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$
- Las variables $T_1 = \tau_1, T_2 = \tau_2 - \tau_1, \dots, T_n = \tau_n - \tau_{n-1}$ son conocidos como *tiempos de interarribo*.
- Usualmente se supone que los tiempos de interarribo T_i son variables aleatorias con distribución exponencial.

Proceso Poisson a partir de tiempos de interarribo

Sean T_1, T_2, \dots, T_n iid $\sim \exp(\lambda)$ tiempos de interarribo y $\tau_n = \sum_{i=1}^n T_i$ es el instante en el que ocurre el n -ésimo evento. El proceso Poisson de intensidad λ se puede definir como

$$N_t = \max\{n | \tau_n \leq t\}, \quad t \geq 0$$

Es importante notar que en esta definición,

$$N_t = n \iff \tau_n \leq t < \tau_{n+1}$$

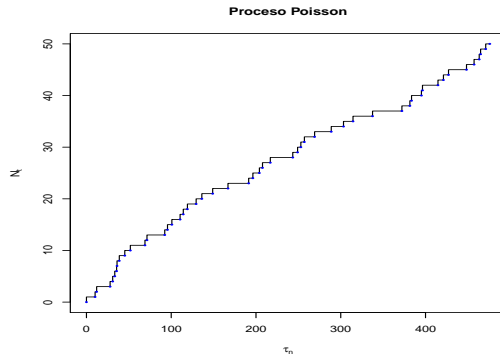
Algoritmo para simular un proceso Poisson

Con la definición anterior, se obtiene un método para simular un proceso Poisson, ya sea a partir de uniformes o exponenciales:

- 1 Definir $\tau_0 = 0$.
- 2 Genera $u_1, u_2, \dots, u_n \sim \mathcal{U}(0, 1)$ independientes, para calcular exponenciales $T_i = -\frac{1}{\lambda} \log u_i$
- 3 Define $\tau_n = \sum_{k=1}^n T_k$ para $n = 1, 2, \dots$
- 4 Para cada $k = 0, 1, \dots$, sea $N_t = k$ para $\tau_k \leq t < \tau_{k+1}$.

Ejemplo de Simulación de Proceso Poisson

```
n <- 50
lambda = 10
TA <- rexp(n,rate=1/lambda)
tau <- cumsum(TA) #tiempos en donde ocurren los eventos
Nt <- 1:length(tau) # proceso de conteo
plot(c(0,tau), c(0,Nt), type="S",main="Proceso Poisson",
     xlab=expression(tau[n]), ylab=expression(N[t]))
points(c(0,tau), c(0,Nt), pch=16, cex=0.5, col="blue")
```



Proceso Poisson y la distribución uniforme

- Existe una fuerte conexión entre el proceso Poisson y la distribución uniforme que se puede explotar para simulación.
- Si un proceso Poisson genera n eventos en $[0, t]$, entonces los tiempos de esos eventos se distribuyen uniformemente en $[0, t]$.
- Por ejemplo, para $N_t = 1$, si $s \leq t$,

$$\begin{aligned}P(\tau_1 \leq s | N_t = 1) &= \frac{P(\tau_1 \leq s, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} = \frac{P(N_s = 1, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} \\&= \frac{P(N_t - N_s = 0, N_s = 1)}{P(N_t = 1)} \\&= \frac{P(N_t - N_s = 0)P(N_s = 1)}{P(N_t = 1)} \\&= \frac{P(N_{t-s} = 0)P(N_s = 1)}{P(N_t = 1)} \\&= \frac{e^{-\lambda(t-s)}\lambda s e^{-\lambda s}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\tau_1 \sim \mathcal{U}(0, t)$.

Teorema

Sean τ_1, τ_2, \dots los tiempos de arribo de un proceso $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Entonces la distribución conjunta de (τ_1, \dots, τ_n) Condicional a $N_t = n$ es la distribución de las estadísticas de orden de n variables iid $\mathcal{U}(0, t)$.

Proceso Poisson y la distribución uniforme II

Demostración.

La función de densidad de (τ_1, \dots, τ_n) se puede escribir como

$$f(s_1, \dots, s_n) = \lim_{\epsilon_1 \rightarrow 0} \dots \lim_{\epsilon_n \rightarrow 0} \frac{P(A)}{\epsilon_1 \dots \epsilon_n}$$

donde $A = \{s_1 \leq \tau_1 \leq s_1 + \epsilon_1, \dots, s_n \leq \tau_n \leq s_n + \epsilon_n\}$, suponiendo que $0 \leq s_1 < \dots < s_n < t$ y considerar el evento A dado que $N_t = n$.

Para $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ suficientemente pequeñas, A equivale al evento de que el intervalo $(s_i, s_i + \epsilon_i]$ contiene exactamente un arribo y no ocurren otros arribos en $[0, t]$. Por tener incrementos estacionarios e independientes,

$$\begin{aligned} P(A|N_t = n) &= \frac{P(N_{s_1+\epsilon_1} - N_{s_1} = 1, \dots, N_{s_n+\epsilon_n} - N_{s_n} = 1, N_t = n)}{P(N_t = n)} \\ &= \frac{\lambda \epsilon_1 e^{-\lambda \epsilon_1} \dots \lambda \epsilon_n e^{-\lambda \epsilon_n}}{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n / n!} = \frac{n! \epsilon_1 \dots \epsilon_n}{t^n} \end{aligned}$$

Dividiendo por el producto de las ϵ 's y haciendo que cada $\epsilon_i \rightarrow 0$, se obtiene el resultado. □

Segundo algoritmo para Procesos Poisson

Basados en la relación entre la uniforme y el proceso Poisson, podemos generar un nuevo método:

Algoritmo 2 para simular procesos Poisson

- 1 Simular el número de arribos N en $[0, t]$ como $N \sim \mathcal{P}(\lambda t)$
- 2 Generar u_1, \dots, u_N iid $\mathcal{U}(0, t)$
- 3 Definir $\tau_i = u_{(i)}$ para $i = 1, \dots, N$.

Ejemplo: simular un proceso Poisson con $\lambda = 1/2$ en $[0, 40]$:

```
t <- 40
lambda <- 0.5
N <- rpois(1, lambda*t)
u <- runif(N, 0, t)
taus <- sort(u)
taus

[1] 1.608756 6.143016 7.199460 7.346574 9.958573 11.315775 11.324987
[8] 13.329329 22.163531 22.218888 24.981638 29.451546 30.749841 31.065448
[15] 31.444322 33.514341 33.824356 34.488484 34.603991 37.440704 39.767153

length(taus)

[1] 21
```

Superposición y adelgazamiento (thinning) de procesos Poisson I

- Una propiedad interesante de los procesos Poisson es que se pueden descomponer (o agregar) según los tipos de eventos que ocurren en el tiempo.
- Por ejemplo, el número de nacimientos N_t en un intervalo $(0, t]$ se puede separar en el número de nacimientos de varones $N_t^{(v)}$ y el número de nacimientos de mujeres $N_t^{(m)}$. El proceso 'suma' $N_t = N_t^{(v)} + N_t^{(m)}$ es un proceso *superpuesto*, y cada proceso componente es un proceso *adelgazado*.
- En el ejemplo, los nacimientos de niños y niñas son independientes. Entonces

$$\begin{aligned}P(N_t^{(m)} = m, N_t^{(v)} = v) &= P(N_t^{(m)} = m, N_t^{(v)} = v, N_t = m + v) \\&= P(N_t^{(m)} = m, N_t^{(v)} = v | N_t = m + v) P(N_t = m + v) \\&= P(N_t^{(m)} = m | N_t = m + v) P(N_t = m + v)\end{aligned}$$

y sustituyendo las probabilidades y reagrupando se puede ver que las probabilidades son independientes y Poisson:

$$P(N_t^{(m)} = m, N_t^{(v)} = v) = P(N_t^{(m)} = m) P(N_t^{(v)} = v)$$

Superposición y adelgazamiento (thinning) de procesos Poisson II

Adelgazamiento y Superposición

- Si los arribos son independientes y se pueden identificar de tipos k con probabilidad p_k para $k \in \{1, \dots, m\}$, $\sum_{k=1}^m p_k = 1$ y sea $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda)$ el proceso que cuenta los arribos. Si $N_t^{(k)}$ es el número de eventos de tipo k en $(0, t)$, entonces $N_t^{(k)} \sim \mathcal{P}(\lambda p_k)$ y los procesos

$$N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(m)} \text{ son independientes.}$$

Decimos que cada proceso $N_t^{(k)}$ es un *proceso Poisson adelgazado*.

- Si $N_t^{(1)}, \dots, N_t^{(m)}$ son m procesos Poisson independientes con parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ respectivamente, entonces el proceso

$$N_t = N_t^{(1)} + \dots + N_t^{(m)} \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \dots + \lambda_m)$$

Decimos que el proceso N_t es un *proceso Poisson superpuesto*.

- En una región de Safari, avisamientos de leones, tigres y jirafas ocurren con distribución Poisson con parámetros λ_l , λ_t y λ_j con unidad de tiempo hora. Los avisamientos son independientes. ¿Cuál es la probabilidad de no ver ningún animal en 24 horas? Si se vieron tres animales en un día, ¿cuál es la probabilidad de que cada especie haya sido vista?
- Para la primera pregunta: $P(N_{24} = 0) = e^{-24(\lambda_l + \lambda_t + \lambda_j)}$
- Para la segunda pregunta:

$$P(L_{24} = 1, T_{24} = 1, J_{24} = 1) = \frac{P(L_{24} = 1)P(T_{24} = 1)P(J_{24} = 1)}{P(N_{24} = 3)}$$

- Los procesos adelgazados serán de particular utilidad para simular procesos Poisson no homogéneos.

Proceso de Poisson no homogéneos

En situaciones realistas los eventos no ocurren de manera homogénea en el tiempo. Por ejemplo, en un restaurante, la llegada de clientes varía conforme son los tiempos de los alimentos. En estos casos es mejor considerar un proceso en donde la tasa de arribo varíe con el tiempo.

Proceso Poisson no homogéneo (PPNH)

$\{N_t | t \geq 0\}$ es un *proceso Poisson no homogéneo* con función de intensidad $\lambda(t)$, $t \geq 0$ si

- $N_0 = 0$
 - $\forall t > 0, N_t \sim \mathcal{P} \left(\int_0^t \lambda(s) ds \right)$
 - $\forall 0 \leq t_1 \leq \dots < t_m$, los incrementos $N_{t_{i+1}} - N_{t_i}$ son independientes.
-
- Aunque los incrementos son independientes, no son necesariamente estacionarios.
 - Un proceso de Poisson no homogéneo es un proceso de Markov
 - Si $0 \leq s < t$, $N_t - N_s \sim \mathcal{P} \left(\int_s^t \lambda(u) du \right)$

Hay varias formas de generar un PPNH (ver por ejemplo: [Radhakrishna](#)). Consideraremos el método de *adelgazamiento*:

- La idea básica es ‘envolver’ un proceso Poisson no homogéneo con uno que sí sea homogéneo en un intervalo de tiempo.
- Método equivalente a aceptación y rechazo.

Supongan que queremos simular las primeras T unidades de tiempo de un proceso N_t^* .

- 1 Encuentra λ tal que $\lambda(t) \leq \lambda \forall t \leq T$
- 2 Asigna $n \leftarrow 0$; $n^* \leftarrow 0$; $\tau \leftarrow 0$; $\tau^* \leftarrow 0$
- 3 Genera $w \sim \exp(\lambda)$ y asigna $\tau \leftarrow \tau + w$; $n \leftarrow n + 1$
- 4 Genera $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Si $u \leq \frac{\lambda(\tau)}{\lambda}$, actualiza $n^* \leftarrow n^* + 1$ y $\tau^* \leftarrow \tau$.
- 5 regresa al paso 2.

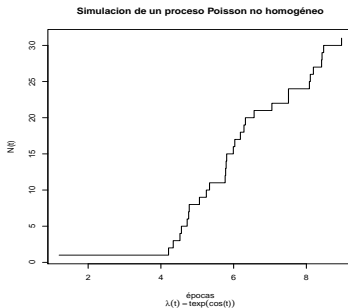
Ejemplo. Simulación de un PPNH

Consideren simular un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad $\lambda(t) = te^{\cos(t)}$.

```
lambdat <- function(t){t*exp(cos(t))}

poisson.nohomogeneo <- function(lambdat,n){
  lambda <- 5 #mayoriza la función lambdat
  TT <- rexp(n,lambda) #genera variables exponenciales para los tiempos.
  s <- cumsum(TT) #acumula los tiempos en el vector s
  u <- runif(n) #obtien n uniformes
  ss <- s[u <= lambdat(n)/lambda] #obtien los tiempos que cumplen la condición de aceptación
  Ns <- 1:length(ss) # Conteo
  plot(ss, Ns, type = "s", xlab = "épocas", ylab = "N(t)",
       main = "Simulación de un proceso Poisson no homogéneo",
       sub = expression(lambda(t) == t*exp(paste("cos","(t)"))))
  return(list(epocas = ss, cuenta= Ns))
}

x <- poisson.nohomogeneo(lambdat,50)
```



¿Porqué *thinning* funciona para PPNH?

La prueba de que *thinning* funciona se basa en el siguiente resultado que establece las características para dos procesos Poisson no homogéneos que se construyen con la misma condición del algoritmo dado.

Teorema (Lewis & Shedler, 1979)

- Considerar un PPNH con función de intensidad $\lambda_u(t), t \geq 0$. Suponer que $T_1^*, \dots, T_n^* \in (0, t_0]$ son eventos de tiempo para ese PPNH.
- Sea $\lambda(t)$ una función de intensidad tal que $0 \leq \lambda(t) \leq \lambda_u(t) \quad \forall t \in [0, t_0]$.
- Si el i -ésimo evento de tiempo T_i^* es borrado independiente de los otros eventos de tiempo con probabilidad $1 - \lambda(t)/\lambda_u(t)$ para $i = 1, 2, \dots, n$, entonces los eventos restantes de tiempo forman un PPNH con función de intensidad $\lambda(t)$ en $(0, t_0]$.

La aplicación para nuestro caso supone que el proceso que cubre al PPNH tiene $\lambda_u(t) = \lambda$ es constante, y por lo tanto es un proceso Poisson homogéneo. Es otro caso de A-R.

Procesos Poisson espaciales I

- Hemos manejado procesos Poisson asociados a tiempo, pero también sirve para modelar distribución de eventos o puntos en el espacio:
 - distribución de árboles en un bosque
 - distribución de galaxias en el espacio
 - clusters de cáncer en un mapa de la República Mexicana

Proceso Poisson espacial

Para $p \geq 1$ y $A \subset \mathbb{R}^p$, sea N_A el número de puntos en el conjunto A . Una colección de variables aleatorias $\{N_A | A \subseteq \mathbb{R}^p\}$ es un proceso Poisson espacial con parámetro λ si

- 1 Para cada conjunto acotado $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $N_A \sim \mathcal{P}(\lambda|A|)$ donde $|A|$ es el tamaño de A (área, volumen, etc).
- 2 si $A \cap B = \emptyset$, entonces $N_A \perp\!\!\!\perp N_B$.

Ejemplos

- Un proceso espacial en el plano tiene parámetro $\lambda = 0.5$. Encontrar la probabilidad de que un disco de radio 2 centrado en $(3,4)$ contenga exactamente 5 puntos.

Solución.

Si A denota el área del círculo, $|A| = \pi r^2 = 4\pi$. La probabilidad es entonces:

$$P(N_C = 5) = \frac{e^{-\lambda|A|}(\lambda|A|)^5}{5!} = 0.152$$

□

- La distribución uniforme también tiene una relación importante con el proceso espacial como lo tiene con el proceso en el tiempo. Dado un conjunto acotado A , condicional a $N_A = n$, la ubicación de los puntos es uniforme en A .

Simulación de un proceso Poisson espacial I

- Para simular un proceso Poisson espacial con parámetro λ sobre A , primero se simula el número de puntos $N \sim \mathcal{P}(\lambda|A|)$ en A y se generan los N puntos distribuidos uniformemente en A .
- Por ejemplo, si $A = [0, 1] \times [0, 1]$ y $\lambda = 100$

Simulación de un proceso Poisson espacial II

```
circulo <- function(c1,c2,r,add = F,...){  
  #función auxiliar para dibujar círculos  
  x <- seq(-r, r, length.out = 1000)  
  y <- sapply(x, function(z) sqrt(r^2-z^2))  
  if(add){  
    lines(c1 + c(x, rev(x)),c(c2 + y, c2 + rev(-y)), type = "l",...)  
  } else {  
    plot(c1 + c(x, rev(x)), c(c2 + y, c2 + rev(-y)), type = "l",...)  
  }  
}  
  
# Genera un proceso Poisson espacial en un cuadrado de área A^2 y cuenta el  
# número de puntos en el círculo centrado en (c1,c2) de radio r  
PPoiS <- function(lambda,A,c1,c2,r){  
  N <- rpois(1,lambda*A^2)  
  xpoints <- runif(N)  
  ypoints <- runif(N)  
  ct <- sum((xpoints-c1)^2 + (ypoints-c2)^2 <= r^2) #número de puntos en el círculo  
  par(pty = "s")  
  plot(xpoints, ypoints, xlab = "x", ylab = "y", pch=20)  
  circulo(c1,c2,r,add=T)  
  return(ct)  
}  
  
par(mfrow=c(1,2))  
PPoiS(lambda = 100, A = 1, c1 = 0.7, c2 = 0.7, r=0.2)  
  
Warning in if (add) {: la condición tiene longitud > 1 y sólo el primer elemento será usado  
  
[1] 9  
  
PPoiS(lambda = 100, A = 1, c1 = 0.7, c2 = 0.7, r=0.2)  
  
Warning in if (add) {: la condición tiene longitud > 1 y sólo el primer elemento será usado
```