Simulación ITAM
26 de septiembre de 2020 2020-II

Tarea 3. Fecha de entrega: Lunes 12 de octubre de 2020

Lecturas

Continúan las mismas lecturas de la tarea pasada:

- Generating Nonhomogeneous Poisson Process
- Generating a non-homogeneous Poisson Process
- Casella y Robert, capítulo 2
- Dagpunar, Capítulos 3 y 4. Secciones 7.1-7.3

Problemas

1. Para un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad dada por

$$\lambda(t) = \begin{cases} 5, t \in (1,2], (3,4], \cdots \\ 3, t \in (0,1], (2,3], \cdots \end{cases}$$

   a) Grafiquen una ejemplo del proceso considerando el intervalo de tiempo [0,100].
   b) Grafiquen el proceso hasta obtener 100 eventos
   c) Estimen la probabilidad de que el número de eventos observados en el periodo de tiempo (1.25,3] es mayor que 2.

2. Simular un proceso Poisson no homogéneo con función de intensidad dada por $\lambda(t) = sen(t)$

3. Un **proceso Poisson compuesto** es un proceso estocástico $\{X_t | t \geq 0\}$ que se puede representar como una suma aleatoria $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, donde $\{N_t | t \geq 0\}$ es un proceso Poisson y Y_i son iid e independientes del proceso N_t. Escriban un programa para simular un proceso $\mathcal{P}(\lambda)$-$\mathcal{G}(\cdot,\cdot)$ donde Y tiene distribución gamma. Estimen la media y la varianza de X_{10} para varias elecciones de los parámetros y comparar con los valores teóricos.

4. Para un movimiento Browniano, encontrar:
   - $P(B_2 \leq 1)$
   - $E(B_4 | B_1 = x)$
   - $Corr(B_{t+s}, B_s)$
   - Var$(B_4 | B_1)$
   - $P(B_3 \leq 5 | B_1 = 2)$

5. Supongan que la acción XYZ se vende hoy por \$80 por acción y sigue un movimiento browniano geométrico con drift 0.10 y volatilidad 0.5. Encuentren la probabilidad de que en 90 días el precio de XYZ se eleve a por lo menos \$100.

6. El precio de una acción se modela con un movimiento Browniano geométrico con drift $\mu = -0.25$ y volatilidad $\sigma = 0.4$. La acción actualmente se vende a $35. Supongan que hay una opción para comprar esa acción en 6 meses a $40. Encuentren la ganancia esperada de la opción.

7. Supongan que X,Y son iid $\mathcal{U}(0,1)$ y definan Z como

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si } X^2 + Y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   - Obtener $E(Z)$.
   - Simulando Z, escribir un programa para estimar π.

8. En varios problemas de la vida real nos interesa calcular con bastante precisión probabilidades en las colas. Supongamos que nos interesa estimar $P(X > 20)$, con $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pueden comprobar que simular X no servirá. La mejor forma de resolver el problema es expresar esa probabilidad como una integral y usar un cambio de variable para reescribir esa integral como una esperanza bajo la distribución $\mathcal{U}(0,1/20)$. Deduzcan una aproximación de Monte Carlo a $P(X > 20)$ junto con una estimación de error.

9. Usar Monte Carlo para encontrar un intervalo de confianza del 95 % para la siguiente integral:
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} exp\left\{\frac{1}{2}\left[x^2 + (y-1)^2 - \frac{x(y-1)}{10}\right]\right\} dxdy$$

10. Otro modelo para simular precios de acciones es el siguiente modelo binomial: si S_i denota el precio en el tiempo ih donde $i = 0, 1, 2, \ldots,$ y h es un incremento de tiempo positivo. Sean μ y σ la tasa de interés y la volatilidad respectivamente. Sean

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(e^{-\mu h} + e^{(\mu+\sigma^2)h} + \frac{1}{2}\sqrt{(e^{-\mu h} + e^{(\mu+\sigma^2)h})^2 - 4}\right) \\ \nu &= u^{-1} \\ p &= \frac{e^{\mu h} - \nu}{u - \nu} \end{aligned}$$

   Entonces
$$S_i = X_i S_{i-1}$$
   donde $X_i, i = 0, 1, \ldots$ son variables bernoulli independientes con distribución $P(X_i = u) = p$, $P(X_i = \nu) = 1 - p$ para toda i.

   - Simular el precio al final de cada semana durante el siguiente año con $S_0 = 100$, $\mu = 0.2$ por año, $\sigma = 0.3$ por año, y $h = 1/52$ años.
   - Supongan que hay 252 dias hábiles en un año. Hacer $h = 1/252$.
     Para cualquier realización, sea $S_{max} = max\{S_j | j = 0, 1, \ldots, 756\}$. La pérdida $= S_{max} - S_{756}$ denota la diferencia entre vender la acción en el pico de su precio durante los siguientes tres años y venderla después de tres años.
     Simular 200 realizaciones de la pérdida y construir su distribución empírica.

Problemas opcionales (mayor complejidad):

1. Un hospital tiene 5 ambulancias para emergencias. El área de cobertura de casos se aproxima con un circulo de diámetro 5km, con el hospital en el centro. La distribución física de los accidentes es un proceso Poisson en el espacio, con una tasa de λ casos por hora. Si una ambulancia no está disponible el paciente tiene que esperar hasta que alguna se libere. Una ambulancia siempre toma una ruta en línea recta a la escena de la emergencia y regresa al hospital. Supongan que las ambulancias viajan a una velocidad constante de ν km/hr y que sólo se requiere una ambulancia para cada emergencia.

   - Mostrar que el tiempo total de viaje de retorno (x horas) se puede muestrear tomando $x = 10\sqrt{U}/v$ donde $U \sim \mathcal{U}(0,1)$
   - Simular el sistema para obtener para cada paciente el tiempo entre la ocurrencia de la emergencia y la llegada al hospital.

2. **Marginalización de Monte Carlo** es una técnica para calcular una densidad marginal cuando se simula de una densidad conjunta. Sea $(X_i, Y_i) \sim f_{XY}(x,y)$, independiente, y la correspondiente densidad marginal $f_X(x) = \int f_{XY}(x,y)dy$.

   - Sea $w(x)$ una densidad arbitraria. Mostrar que

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f_{XY}(x^*, y_i)w(x_i)}{f_{XY}(x_i, y_i)} = \int\int \frac{f_{XY](x^*,y)w(x)}}{f_{XY}(x,y)} f_{XY}(x,y)\, dxdy = f_X(x^*).$$

     La fórmula anterior provee un estimado de Monte Carlo de f_X, cuando la distribución conjunta es conocida salvo una constante.
   - Sea $X|Y = y \sim \mathcal{G}(y, 1)$ y $Y \sim \exp(1)$. Usar la técnica de arriba para graficar la densidad marginal de X (pueden usar cualquier densidad). Comparar con la marginal exacta.
   - Mostrar que si se elije $w(x) = f_X(x)$ funciona para producir la distribución marginal y que es óptima en el sentido de que la varianza del estimador resultante es menor.