Simulación

Pruebas para números pseudoaleatorios.

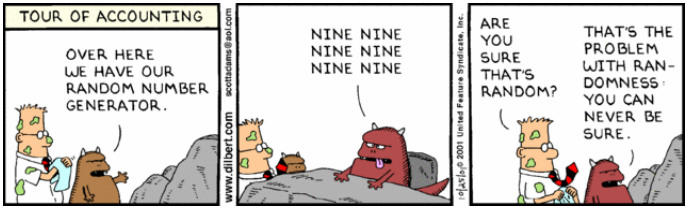
Jorge de la Vega Góngora

Departamento de Estadística,
Instituto Tecnológico Autónomo de México

Semana 3

Pruebas para números pseudoaleatorios.

Propiedades de los buenos generadores I



Recordemos algunas propiedades deseables en números pseudoaleatorios que se piden para tener calidad para propósitos de simulación:

1. Los números *deben* parecer distribuirse uniformemente y ser independientes.
2. Los métodos para generarlos deben ser rápidos y eficientes.
3. Deben ser capaces de replicarse.
4. Se debería poder generar más de una secuencia de números.
5. Un generador debe tener periodo muy largo.

Propiedades de los buenos generadores II

- El punto [2] se cumple utilizando, por ejemplo, GLC's.
- El punto [3] se puede cumplir en `R`, utilizando la función `set.seed(x)`. De esta forma se pueden generar las mismas secuencias de números aleatorios cuando se usa un generador.
- El punto [4] lo podemos poner en práctica utilizando un generador con periodo grande, y generado las diferentes secuencias con diferentes semillas. Por ejemplo, podemos generar la primer secuencia de longitud n_1 con cualquier valor, una segunda secuencia haciendo $Z_0 = Z_{n_1}$ de longitud n_2 y así sucesivamente para varios valores $n_1, n_2, \ldots, n_k$.
- El punto [5] lo cumplimos con la adecuada selección de parámetros y utilizando generadores de periodo extendido.

Entonces sólo nos queda revisar el punto [1]: para eso revisaremos técnicas y métodos para verificar que los números se comportan aleatoriamente de manera uniforme y son independientes.

Nociones de sucesiones aleatorias

- En 1939, Richard von Misses[1] dijo que para tener una definición propia de probabilidad, se requiere de una defincón propia de sucesión aleatoria.
- La idea fundamental de una sucesión de números aleatorios uniformes $U_1, U_2, \ldots$ es que para dos números $u, v \in [0,1]$, si $u < v$, y $\nu(n)$ es la frecuencia de números U_i para $i = 1, \ldots, n$ que caen en (u, v), se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{n} = v - u$$

  En este caso se dice que la sucesión $\{U_i\}$ es *equidistribuída*.
- Equivalentemente, $P(u \leq U_n < v) = v - u$ para todo $u, v \in [0,1]$ con $u < v$.
- Pregunta: ¿Toda sucesión equidistribuída es aleatoria?

[1] En su libro *Probability, Statistics and Truth* (Dover, 1957)

Sucesiones k-distribuídas

- Una generalización de equidistribución a más dimensiones, considera los valores adyacentes de la sucesión:

$$P(u_1 \leq U_i < v_1, u_2 \leq U_{i+1} < v_2) = (v_1 - u_1)(v_2 - u_2)$$

para cualquier $i \in \mathbb{N}$, u_1, u_2, v_1, v_2 con $0 \leq u_j < v_j \leq 1$ y $j = 1, 2$.

- Lo podemos extender a cualquier $k \in \mathbb{N}$:

Definición. Sucesión k-distribuída

La sucesión $\{U_1, U_2, \ldots\}$ es k-distribuída si

$$P(u_1 \leq U_i < v_1, \ldots, u_k \leq U_{i+k-1} < v_k) = (v_1 - u_1) \cdots (v_k - u_k)$$

para todo u_j, v_j con $0 \leq u_j < v_j \leq 1$ para $1 \leq j \leq k$

- Notar que si $k > 1$, una sucesión k-distribuída es siempre $k-1$-distribuída. (¿Porqué?)
- Finalmente, una sucesión es ∞-distribuída si es k-distribuída para cualquier $k \in \mathbb{N}$.

Nociones de sucesión infinita distribuída uniformemente

- Borel probó que casi todos los números reales (con respecto a la medida uniforme) tienen una expansión digital $\infty-$distribuída (se dice que son *números normales*).
- A la fecha no sabemos si π o e son números normales.
- Nociones similares de uniformidad para sucesiones de números reales en $[0,1)$ se estudiaron por Weyl (1916), Korobov (1948), Franklin (1963,1965) entre otros.
- Sucesiones que probablemente cumplan estas definiciones se pueden construir, pero son imprácticas para simulación y con frecuencia no se ven aleatorias.

Tipos de pruebas para números pseudoaleatorios I

- Maurice Kendall y Babington-Smith introdujeron el concepto de aleatoriedad local: cada subsucesión 'razonablemente' larga, debe *parecer* aleatoria y pasar un conjunto simple de pruebas estadísticas.
- Ellos propusieron un conjunto o bateria pequeña de pruebas:
  1. La frecuencia de cada dígito
  2. La frecuencia de cada par en valores sucesivos (prueba serial)
  3. La frecuencia de ciertos bloques de cinco dígitos (poker)
  4. longitud de los gaps entre las ocurrencias de un dígito dado

  Las frecuencias son comparadas contra las esperadas via una distribución χ^2. Replicaron las pruebas con partes disjuntas de su tabla de dígitos aleatorios, y pasaron las pruebas.
- A partir de lo anterior, se han definido **baterías de pruebas** de distinta complejidad de estadísticas que los conjuntos de números a prueba tienen que pasar.
- En general, se consideran dos tipos de pruebas:
  - pruebas de uniformidad o igualdad a una distribución dada (bondad de ajuste),

Tipos de pruebas para números pseudoaleatorios II

- y las pruebas de independencia:

Tipo de prueba:	Uniformidad	Independencia[2]
Hipótesis a probar	$H_0 : u_i \sim \mathcal{U}(0,1)$	$H_0 : u_i \perp\!\!\!\perp u_j \forall i \neq j$
Ejemplos	Kolmogorov-Smirnov (KS). Prueba de bondad de ajuste χ^2 $qq-$plots.	Rachas Autocorrelación gaps o espacios póker

- Existen muchas más pruebas para cada caso. Aquí la imaginación es el límite. Nos concentraremos en las pruebas que se indican en la tabla anterior.
- Al finalizar esta sección se comentarán otros conjuntos de pruebas para números aleatorios.

[2] el símbolo $\perp\!\!\!\perp$ significa independencia entre variables aleatorias

¿Cuándo se aplican las pruebas? I

- Las pruebas se aplican cuando:
  - No se conoce el método utilizado para generar los números aleatorios.
  - Se está experimentando con un nuevo generador de números aleatorios.
  - El método utilizado no está bien documentado.
  - Se mezclan métodos en una simulación muy grande.
  - Se quiere verificar que no hay errores de programación en el generador.
- Las pruebas deben aplicarse a **varias muestras** de números del generador bajo observación.
- Sin embargo, *aún si un conjunto de números pasa todas las pruebas, no hay garantía absoluta de aleatoriedad*.
- Las pruebas se pueden utilizar para probar que una muestra viene de alguna distribución específica.
  - Cualquier dato de entrada a un modelo de simulación puede probarse contra la distribución objetivo.
  - En la práctica, determinar la distribución apropiada para los datos de entrada en una simulación es una tarea a la que hay que dedicar tiempo y consume recursos.

¿Cuándo se aplican las pruebas? II

- Proceso equivalente al proceso de ‘data cleaning’ en análisis de datos.

- Hay 4 pasos en el desarrollo de un modelo útil para datos de entrada:
  1. Recabar datos del sistema real de interés.
  2. Identificar una distribución de probabilidad que represente el proceso de entrada.
  3. Estimar los parámetros adecuados para el modelo de probabilidad correspondiente (si son modelos paramétricos).
  4. Evaluar la distribución y parámetros escogidos para bondad de ajuste.

¿Cómo se aplican las pruebas?

- Las pruebas se deben aplicar a un conjunto de datos como completo, así como a una o varias particiones en subconjuntos.
- Por la naturaleza de los dígitos aleatorios, se espera con baja probabilidad, que una tabla de dígitos tenga secciones que por sí mismas no pasen las pruebas bondad de ajuste y de aleatoriedad.

Pruebas de bondad de ajuste

Función de distribución empírica

La prueba de Kolmogorov-Smirnov, es una prueba de bondad de ajuste para funciones de distribución basada en la *distribución empírica*. Esta distribución es la base para un conjunto de pruebas conocidas como *no paramétricas* o *libres de distribución*.

Definición. Función de distribución empírica (EDF)

Dada una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de variables con función de distribución F, se define como la función:

$$F_n(x) = \frac{\#(X_i \leq x)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty, x]}(X_i)}{n}$$

- Ejercicio 1: para la muestra aleatoria 1,0,1,1,0,0,0,1,0,1,0, calcular su EDF
- Ejercicio 2: para la muestra aleatoria 4, 5, 4, 7, 7, 7, 7, 8, 6, 7, 8, 5, 3, 6, 8, calcular su EDF

Función de distribución empírica I

Hay una estrecha relación entre la distribución empírica y las *estadísticas de órden*.

Definición. Estadísticas de orden

Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una distribución F, las *estadísticas de orden* se definen como los datos ordenados de menor a mayor: $X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$, donde:

- $X_{(1)} = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\}$
- $\cdots$
- $X_{(n)} = \text{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$

En particular, la función de distribución tiene saltos en los valores de las estadísticas de orden:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1)} \\ i/n & \text{si } X_{(i-1)} \leq x < X_{(i)}, \quad i = 1, \ldots n \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(n)} \end{cases}$$

donde $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ son las estadísticas de orden asociadas a la muestra.

Función de distribución empírica II

Cuando hay empates entre los valores, los escalones de $F_n(x)$ son del tamaño del número de valores repetidos de $X_{(j)}$.

Distribución de la función de distribución empírica

Teorema

Sea F_n la función de distribución empírica para una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ de F. Entonces

$$P\left(F_n(x) = \frac{k}{n}\right) = \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k} \qquad \forall x$$

Demostración.

Definamos $Z_i = I_{(-\infty, X_i]}(x)$. Entonces podemos ver que $Z_i \sim$ **Bernoulli** $(F(x))$. Como Z_i depende de una muestra independiente, entonces las Z_i son independientes. De este modo $\sum_{i=1}^{n} Z_i \sim$ **Bin** $(n, F(x))$.
Por lo tanto

$$P(\sum_{i=1}^{n} Z_i = k) = \binom{n}{k} F(x)^k (1 - F(x))^{n-k}$$

Dividiendo ambos términos de la probabilidad por n obtenemos el resultado. □

EDF - características I

Derivado del teorema anterior, se tiene que para una x fija,

$$E[F_n(x)] = F(x)$$

$$Var(F_n(x)) = \frac{F(x)(1-F(x))}{n}$$

Y por el Teorema del Límite Central:

$$F_n(x) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(F(X), \frac{F(x)[1-F(x)]}{n}\right)$$

$$\therefore \sqrt{n}(F_n(x) - F(x)) \overset{a}{\sim} \mathcal{N}\left(0, F(x)(1-F(x))\right)$$

Para estimar $F(x) \quad \forall x$, podemos utilizar el teorema de Glivenko-Cantelli, que establece la convergencia uniforme de F_n a F:

EDF - características II

Teorema (Glivenko-Cantelli)

con probabilidad 1, la convergencia de $F_n(x)$ a $F(x)$ es uniforme:

$$P(sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - F(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0) = 1$$

- Consideremos la distancia máxima entre dos distribuciones $D_n = sup_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x) - F(x)|$. Entonces el teorema anterior establece que $P(lim_{n\to\infty} D_n = 0) = 1$, así que la distribución de D_n converge a la función que concentra toda su masa en 0.
- Sin embargo, la función de distribución asintótica de $\sqrt{n}D_n$ converge a otra distribución, que ¡no depende de la función de la que la muestra fue obtenida! La distribución límite se conoce como la *distribución de Kolmogorov*[3], y no la estudiaremos en este curso.
- Tanto D_n como $F_n(X)$ son ejemplos de estadísticas *libre de distribución* o *no paramétricas*.

[3] la función de distribución es de la forma: $P(D_n \leq x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{x}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-(2k-1)^2\pi^2/(8x^2)}$

Pruebas de Uniformidad: Prueba de Kolmogorov-Smirnov

La prueba de Kolmogorov–Smirnov (KS) es una *prueba de bondad de ajuste* para distribuciones *continuas*. Formalmente, queremos probar la hipótesis:

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \quad \forall x \qquad \text{vs.} \qquad H_1 : F(x) \neq F_0(x) \quad \text{para alguna } x$$

donde F_0 es la función de distribución objetivo que se supone siguen los datos. La estadística de prueba se basa en la función de distribución empírica.

La estadística de prueba se define como $D_n = \text{máx}_x \, |F_n(x) - F_0(x)|$. Se rechaza la hipótesis nula si D_n es "muy grande".
Una aproximación para muestras grandes ($n \geq 35$) para el p-value es

$$P(D_n > c) \approx 2e^{-2nc^2}$$

donde c se reemplaza por el valor de la estadística obtenida.

KS Ejemplo

Apliquen la prueba de KS a los siguientes 100 números y verifiquen uniformidad:

```
set.seed(1)
uniformes <- runif(100)
uniformes
```

```
  [1] 0.26550866 0.37212390 0.57285336 0.90820779 0.20168193 0.89838968 0.94467527 0.66079779 0.62911404 0.06178627
 [11] 0.20597457 0.17655675 0.68702285 0.38410372 0.76984142 0.49769924 0.71761851 0.99190609 0.38003518 0.77744522
 [21] 0.93470523 0.21214252 0.65167377 0.12555510 0.26722067 0.38611409 0.01339033 0.38238796 0.86969085 0.34034900
 [31] 0.48208012 0.59956583 0.49354131 0.18621760 0.82737332 0.66846674 0.79423986 0.10794363 0.72371095 0.41127443
 [41] 0.82094629 0.64706019 0.78293276 0.55303631 0.52971958 0.78935623 0.02333120 0.47723007 0.73231374 0.69273156
 [51] 0.47761962 0.86120948 0.43809711 0.24479728 0.07067905 0.09946616 0.31627171 0.51863426 0.66200508 0.40683019
 [61] 0.91287592 0.29360337 0.45906573 0.33239467 0.65087047 0.25801678 0.47854525 0.76631067 0.08424691 0.87532133
 [71] 0.33907294 0.83944035 0.34668349 0.33377493 0.47635125 0.89219834 0.86433947 0.38998954 0.77732070 0.96061800
 [81] 0.43465948 0.71251468 0.39999437 0.32535215 0.75708715 0.20269226 0.71112122 0.12169192 0.24548851 0.14330438
 [91] 0.23962942 0.05893438 0.64228826 0.87626921 0.77891468 0.79730883 0.45527445 0.41008408 0.81087024 0.60493329
```

KS: Pasos a seguir (caso uniforme) I

1. Calcular las estadísticas de orden de la muestra $r_{(i)}$. Sea n el número de valores.

```
unif_ord <- sort(uniformes,decreasing=F)
head(unif_ord,20)
```

```
 [1] 0.01339033 0.02333120 0.05893438 0.06178627 0.07067905 0.08424691 0.09946616 0.10794363 0.12169
[11] 0.14330438 0.17655675 0.18621760 0.20168193 0.20269226 0.20597457 0.21214252 0.23962942 0.24479
```

2. Calculen

$$D^+ = \max_i \{\frac{i}{n} - r_{(i)}\}$$

$$D^- = \max_i \{r_{(i)} - \frac{i-1}{n}\}$$

(Valores correspondientes a $F_0 \equiv \mathcal{U}(0,1)$).

KS: Pasos a seguir (caso uniforme) II

```
Dp <- max(1:length(unif_ord)/length(unif_ord)-unif_ord)
Dp
```

```
[1] 0.04712408
```

```
Dm <- max(unif_ord - 0:(length(unif_ord)-1)/length(unif_ord))
Dm
```

```
[1] 0.07627171
```

3. Calculen $D = \text{máx}(D^+, D^-)$

```
Dmax <- max(Dp,Dm)
Dmax
```

```
[1] 0.07627171
```

4. Usen una tabla apropiada para encontrar el valor crítico D_α de la distribución de D. Rechazas H_0 si $D > D_\alpha$ (o mejor aún, obtén un p-value).

```
pval <- 2*exp(-2*length(unif_ord)*Dmax^2)
pval
```

```
[1] 0.6247976
```

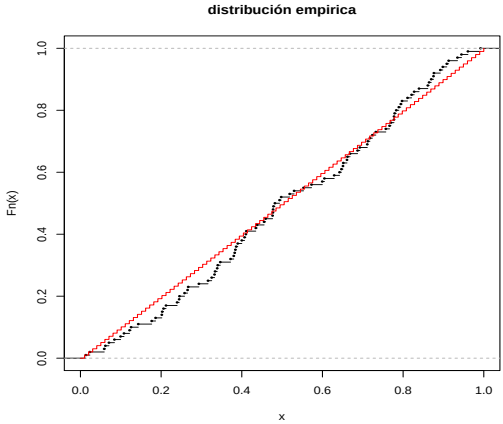
KS en R

En R se pueden usar las funciones `ecdf` para obtener la función de distribución empírica, y `ks.test` para hacer la prueba de Kolmogorov-Smirnov.

```
# antes vemos la distribución empírica
Fn <- ecdf(unif_ord)
summary(Fn) #resumen de los puntos generados.

Empirical CDF:   100 unique values with summary
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
0.01339 0.32308 0.48781 0.51785 0.76719 0.99191
```

KS en R

```
plot(Fn,  main = "distribución empirica", xlim = c(0,1), ylim = c(0,1), pch = 16, cex = 0.5)
sq <- seq(0, 1, length = 100)
lines(sq, punif(sq), type = "s", col = "red", lwd = 1)
```



En un sólo paso:

```
ks.test(unif_ord,"punif")


One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  unif_ord
D = 0.076272, p-value = 0.6058
alternative hypothesis: two-sided

# Solo para corroborar el calculo de D:
sq <- seq(0,1,length=100000)
max(abs(Fn(sq)-punif(sq)))

[1] 0.07626316
```

Pruebas alternativas a KS

Hay otras pruebas similares a la prueba KS. Todas ellas comparan la función de distribución empírica con la teórica utilizando diferentes métricas funcionales.

- Kolmogorov-Smirnov: D_n
- Cramér-von Misses:

$$W_n = n \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(x) - F(x))^2 dF(x)$$

- Anderson-Darling

$$A_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(F_n(x) - F(x))^2 dF(x)}{F(x)(1 - F(x))}$$

Sin embargo, de acuerdo a L'Ecuyer & Simmard (2007), estas últimas dos estadísticas no son tan potentes como la prueba de KS para probar aleatoriedad.

Pruebas alternativas a KS

Ejemplo: Para el criterio de Cramér-von Misses:

```
library(CDFt)
res <- CramerVonMisesTwoSamples( uniformes,runif( length( uniformes)))
pval <- 1/6*exp(-res)
res

[1] 0.0473

pval

[1] 0.1589669
```

Pruebas de uniformidad: Prueba de χ^2 de Pearson

La prueba de χ^2 de Pearson (1900) es la primera prueba de bondad de ajuste; incluso es una de las primeras pruebas de inferencia estadística.

- La hipótesis estadística a probar es la misma que la de la prueba de KS:

$$H_0 : F(x) = F_0(x) \quad \forall x \text{ vs. } H_a : F(x) \neq F_0(x) \text{ para alguna } x$$

- La prueba "compara" el histograma obtenido de los datos observados con la verdadera densidad de la distribución supuesta de los datos.
- La prueba es mucho más conveniente para distribuciones discretas que para distribuciones continuas.
- Versión 'discreta' de la prueba de K-S.

Procedimiento para χ^2

1. Particiona el rango de la distribución supuesta en k subintervalos con límites $\{a_0, a_1, \ldots, a_k\}$, y define a N_j como el número de observaciones en cada subintervalo, para cada j.
2. Calcular la proporción esperada de observaciones en el intervalo $(a_{j-1}, a_j]$ como $p_j = \int_{a_{j-1}}^{a_j} dF(x)$.
3. La estadística de prueba es

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_j - np_j)^2}{np_j}.$$

Se rechaza la hipótesis nula si χ^2 es grande, considerando que $\chi^2 \overset{a}{\sim} \chi^2_{k-1}$.

χ^2 Ejemplo

La siguiente función en R hace la prueba descrita.

```
prueba.chisq.uniforme <- function(x, k = ceiling(length(x)/5)){
        n <- length(x)
        part <- seq(0, 1, length = k + 1) #partición
        z <- hist(x, breaks = part, plot = F)$counts
        ch <- (k/n)*sum((z-n/k)^2) #estadística chi
        pval <- pchisq(ch, k - 1, lower.tail = F)
        return(list(part = part, freqs = z, estadística = ch, pval = pval))
}
```

Apliquen la prueba a los mismos datos del ejemplo anterior. ¿Qué se concluye?

```
prueba.chisq.uniforme(uniformes, k = 49)

$part
 [1] 0.00000000 0.02040816 0.04081633 0.06122449 0.08163265 0.10204082 0.12244898 0.14285714 0.16326531 0.18367347
[11] 0.20408163 0.22448980 0.24489796 0.26530612 0.28571429 0.30612245 0.32653061 0.34693878 0.36734694 0.38775510
[21] 0.40816327 0.42857143 0.44897959 0.46938776 0.48979592 0.51020408 0.53061224 0.55102041 0.57142857 0.59183673
[31] 0.61224490 0.63265306 0.65306122 0.67346939 0.69387755 0.71428571 0.73469388 0.75510204 0.77551020 0.79591837
[41] 0.81632653 0.83673469 0.85714286 0.87755102 0.89795918 0.91836735 0.93877551 0.95918367 0.97959184 1.00000000

$freqs
 [1] 1 1 1 2 2 2 1 1 1 3 2 2 2 2 1 2 5 0 5 3 2 2 2 5 2 2 0 1 1 2 1 4 3 2 2 3 0 3 6 2 2 1 5 1 3 1 1 1 1

$estadística
[1] 44.06

$pval
[1] 0.6349913
```

χ^2 Ejemplo

La función `chisq.test` en R hace la prueba descrita, pero requerimos pasarle como parámetro las probabilidades de la distribución objetivo:

```
h1 <- hist(uniformes, breaks = 50, right = F, plot = F)
#crea las probabilidades esperadas sobre la partición creada:
breaks_cdf <- punif(h1$breaks)
null.probs <- breaks_cdf[-1] - breaks_cdf[-length(breaks_cdf)]
a <- chisq.test(h1$counts, p = null.probs, rescale.p = T,
                simulate.p.value = T)
a


Chi-squared test for given probabilities with simulated p-value (based on 2000 replicates)

data:  h1$counts
X-squared = 44, df = NA, p-value = 0.6897
```

Observaciones sobre KS y χ^2

- Para que la prueba de χ^2 sea aceptable, debe haber por lo menos 5 observaciones por subintervalo en la partición.
- Ambas pruebas son aceptables cuando el tamaño de muestra es muy grande. En particular χ^2 es válida si la muestra es mayor a 50 datos.
- La prueba de KS es más potente que la prueba de χ^2 y puede ser aplicada a muestras más pequeñas.

Gráficas de probabilidad o $qq-$plots

Las gráficas de probabilidad o qq-plots (quantile-quantile plots) comparan los cuantiles de la muestra contra los cuantiles teóricos de la población.

- Un $p-$cuantíl o $p-$percentíl es un número x_p tal que $F(x_p) = P(X < x_p) = p$. Para distribuciones discretas, no es único, y usualmente se redondea al entero más cercano.
- Una gráfica consiste de los puntos $(X_{(i)}, q_i)$, donde q_i es el $\frac{i}{n}$-cuantíl de la distribución objetivo.

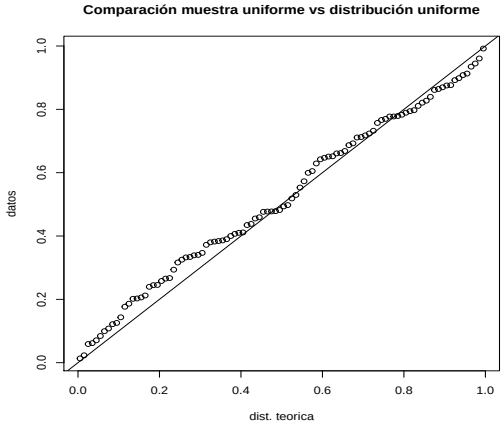
Se recomienda utilizar el cuantíl $\frac{i-0.5}{n}$ en lugar de $\frac{i}{n}$ como corrección por continuidad.

$qq-$plot Ejemplo I

- Si el $qq-$plot sigue la recta identidad cuando se grafica contra la distribución teórica, entonces se puede decir que los datos siguen adecuadamente la distribución objetivo.
- Sin embargo, esta no es una prueba estadística, sólo una guía visual.
- La siguiente función crea gráficas de probabilidad para cualquier distribución:

```
graf.teorica <- function(fun.quan, x, tit, ...){
                        z <- sort(x, decreasing = F)
                        plot(fun.quan(ppoints(z),...), z, main = tit,
                             xlab = "dist. teorica", ylab = "datos")
                        abline(a = 0, b = 1)}
graf.teorica(qunif, uniformes, tit = "Comparación muestra uniforme vs distribución uniforme")
```

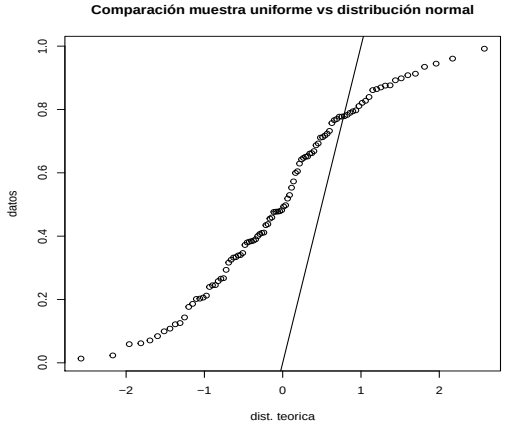
$qq-$plot Ejemplo II



$qq-$plot Ejemplo 2 I

- Comparamos ahora en relación a la distribución normal estándar para ver la desviación:

```
graf.teorica(qnorm, uniformes, tit = "Comparación muestra uniforme vs distribución normal",0,1)
```



Pruebas de independencia

Pruebas relevantes

Las pruebas de independencia que revisaremos son las siguientes:

- Rachas (signos, runs, etc.)
- Prueba de gaps
- Prueba de poker
- Autocorrelación

La mayoría de estas pruebas son no paramétricas o libres de distribución.

Independencia: Prueba de rachas

Racha

Una *racha* es una sucesión continua de eventos similares de un tipo (tipo 1) y seguida por sucesiones de otros eventos de otro tipo (tipo 2). La longitud de la racha es el número de eventos similares en esa sucesión. En esta definición se consideran sólo dos tipos de eventos, pero puede haber más de dos tipos en general.

- Un ejemplo de racha es el siguiente, con eventos A y B : AA BBB AA B AAA BBBBBB A BB. En este ejemplo, se tienen 8 rachas (se cuentan todas).
- Ejemplos de rachas: números crecientes o números decrecientes; en volados: águila o sol, autos amarillos que pasan por un crucero vs otro tipo de autos, etc.

La teoría general y la prueba para rachas de más de dos tipos se puede encontrar en el siguiente paper: Mood, A. M.,*The distribution theory of runs* Ann. Math. Statist. Volume 11, Number 4 (1940), 367-392.

Prueba de rachas I

- Las rachas tratan de identificar patrones en el acomodo sucesivo de las observaciones. El siguiente patrón intutivamente no es aleatorio:

$$ABABABABABAB\ldots$$

  Otro patrón no aleatorio es el siguiente, en donde se forman dos conglomerados de tipos de eventos:

$$AAAAAAABBBBB\ldots$$

- Las rachas pueden analizarse desde dos puntos de vista, dando origen a diferentes pruebas:
  - número de rachas y
  - longitud de las rachas
- Cada uno de estos o la combinación de ellos se puede usar para probar la hipótesis de aleatoriedad/independencia. Las siguientes podrían ser criterios para rechazar aleatoriedad:
  - muy pocas rachas

Prueba de rachas II

- demasiadas rachas
- demasiadas rachas de longitud grande, etc.

- Los datos se pueden dicotomizar artificialmente para formar los dos grupos que se consideran para la formación de rachas:
  - comparación respecto a un valor focal (media, mediana,etc.)
  - series crecientes o decrecientes

Prueba de rachas: Ejemplo

- Para el siguiente conjunto de 10 datos:

$$0.86, 0.11, 0.23, 0.03, 0.13, 0.06, 0.55, 0.64, 0.87, 0.10$$

Si consideramos su mapeo a rachas crecientes, tomando los signos de las diferencias $x_{n+1} - x_n$ como los dos objetos que forman las rachas:

$$0.11 - 0.86 = -; 0.23 - 0.11 = +; 0.03 - 0.23 = -; 0.13 - 0.03 = +; 0.06 - 0.13 = -;$$

$$0.55 - 0.06 = +; 0.64 - 0.55 = +; 0.87 - 0.64 = +; 0.10 - 0.87 = -$$

Se obtiene la nueva serie: $- + - + - + + + -$, que tiene 9 elementos, y 7 rachas, con seis rachas de longitud 1 y una de longitud 3.

- Noten que como se tienen dos tipos de objetos en la muestra, el total de rachas R debe ser al menos 2. Entonces en general, $R \geq 2$ y $R \leq n_1 + n_2$, donde n_i son el número de eventos tipo i, y $n_1 + n_2 = n$ el total de eventos.

Modelo para prueba de rachas basada en número de rachas

- Consideren una sucesión de n elementos, con n_1 elementos del tipo 1 y n_2 elementos del tipo 2. Entonces $n = n_1 + n_2$.
- Sea R_i el número de rachas de tipo i para $i = 1, 2$, y $R = R_1 + R_2$ el total de rachas. Estas son consideradas variables aleatorias. ¿Cuál es la distribución de cada R_i y de R?
- Con estas distribuciones, se puede calcular una prueba para la hipótesis

$$H_0 : \text{la muestra es aleatoria vs } H_a : \text{la muestra no es aleatoria}$$

- Para obtener estas distribuciones, tenemos que repasar algunos resultados de combinatoria.
- Bajo H_0 cada arreglo de los $n_1 + n_2$ elementos tiene la misma probabilidad. Entonces el número total de arreglos distinguibles es $(n_1 + n_2)!/n1!n2!$.
- Para calcular la probabilidad de observar $R_1 = r_1$ y $R_2 = r_2$, ya tenemos el denominador, pero para el numerador, usamos el siguiente lema.

Lema previo

Lema 1.

El número de formas distinguibles de distribuir n objetos no distinguibles en r celdas distinguibles sin celdas vacías es $\binom{n-1}{r-1}$, $n \geq r$.

Demostración.

Supongamos que los objetos indistinguibles son asteriscos (*). Se colocan los n asteriscos en una fila y para poner las r celdas, se insertan $r-1$ divisiones entre cualesquiera dos asteriscos en la línea.

Eg: si $n = 5$ y $r = 4$: $*|**|*|*$. Aquí hay 4 posibles lugares entre los asteriscos, en donde se pueden insertar 3 divisiones para simular 4 celdas.

En esta configuración, habrá $n-1$ posiciones en las que las $r-1$ divisiones pueden insertarse. Entonces el problema es equivalente al número de subconjuntos de tamaño $r-1$ de un total de $n-1$ elementos, es decir, $\binom{n-1}{r-1}$ posibles acomodos. □

Distribución conjunta de R_1 y R_2 I

- Entonces, para calcular la distribución conjunta de R_1 y R_2 $P(R_1 = r_1, R_2 = r_2)$, el numerador es el número de arreglos distinguibles de n objetos con r_1 rachas tipo 1 y r_2 rachas tipo 2.

Distribución conjunta de R_1 y R_2

La distribución conjunta de R_1 y R_2 es

$$f_{R_1,R_2}(r_1, r_2) = \frac{c\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2-1}{r_2-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}} \quad r_i \in \{1, 2, \ldots, n_i\}, r_1 = r_2 \text{ ó } r_1 = r_2 \pm 1$$

donde $c = 2$ si $r_1 = r_2$, o $c = 1$ si $r_1 = r_2 \pm 1$.

Distribución conjunta de R_1 y R_2 II

Demostración.

- Notar que bajo H_0, que supone aleatoriedad, cada posible arreglo de los n elementos es equiprobable, por lo que el total de casos a considerar es $\binom{n_1+n_2}{n_1} = \binom{n_1+n_2}{n_2}$.
- Para obtener una sucesión con r_1 rachas de objetos tipo 1, los n_1 objetos deben ser colocados en r_1 celdas. Por el resultado anterior, esto se puede hacer de $\binom{n_1-1}{r_1-1}$ formas. El mismo argumento aplica si se requieren r_2 rachas de objetos tipo 2.
- Ya empaquetados los datos en rachas, el número de arreglos distinguibles comenzando con una racha de tipo 1 es $\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2-1}{r_2-1}$. Similarmente para una sucesión que empieza con una racha tipo 2.
- Como las rachas alternan por definición, necesariamente $r_1 = r_2 \pm 1$ o $r_1 = r_2$. Si $r_1 = r_2 + 1$, la sucesión debe comenzar con una racha tipo 1. Si $r_1 = r_2 - 1$, la sucesión empieza con una racha tipo 2. Si $r_1 = r_2$ se puede comenzar con cualquier racha, por lo que el número de arreglos se duplica.

Distribución marginal de R_i I

Distribución marginal de R_1

$$f_{R_1}(r_1) = \frac{\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2+1}{r_1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}} \quad r_1 \in \{1, 2, \ldots, n_1\}$$

Similarmente, se obtiene la distribución marginal para R_2, intercambiando en la ecuación anterior los valores de n_1 y n_2.

Distribución marginal de R_i II

Demostración.

Como $r_2 \in \{r_1 - 1, r_1, r_1 + 1\}$, tenemos que $f_{R_1}(r_1) = \sum_{r_2} f_{R_1,R_2}(r_1, r_2)$. Así que:

$$\begin{aligned}
\binom{n_1+n_2}{n_1} f_{R_1}(r_1) &= 2\binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2-1}{r_1-1} + \binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2-1}{r_1-2} + \binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2-1}{r_1} \\
&= \binom{n_1-1}{r_1-1}\left[\binom{n_2-1}{r_1-1} + \binom{n_2-1}{r_1-2} + \binom{n_2-1}{r_1-1} + \binom{n_2-1}{r_1}\right] \\
&= \binom{n_1-1}{r_1-1}\left[\binom{n_2}{r_1-1} + \binom{n_2}{r_1}\right] \\
&= \binom{n_1-1}{r_1-1}\binom{n_2+1}{r_1}
\end{aligned}$$

□

Distribución de $R = R_1 + R_2$ I

Finalmente, juntando los resultados anteriores, podemos obtener la distribución exacta del número total de rachas R:

Distribución del número total de rachas R

$$P(R=r) = \begin{cases} \dfrac{2\binom{n_1-1}{k-1}\binom{n_2-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}, & r = 2k \\ \dfrac{\binom{n_1-1}{k}\binom{n_2-1}{k-1}+\binom{n_2-1}{k}\binom{n_1-1}{k-1}}{\binom{n_1+n_2}{n_1}}, & r = 2k+1 \end{cases}$$

Distribución de $R = R_1 + R_2$ II

Demostración.

Si el número de rachas r es par, entonces es de la forma $r = 2k$ para algún número natural k y se tiene el mismo número de rachas de ambos tipos. Los posibles valores de r_1 y r_2 son entonces $r/2 = r_1 = r_2$ y la distribución conjunta se suma sobre este par de valores. Haciendo $k = r/2$ se obtiene el resultado.
Si r impar, entonces $r = 2k \pm 1$. En este caso, la densidad conjunta se suma sobre los dos pares de valores:

- $r_1 = \frac{r-1}{2} = k$ y $r_2 = \frac{r+1}{2} = k + 1$, y
- $r_1 = \frac{r+1}{2} = k + 1$ y $r_2 = \frac{r-1}{2} = k$. Haciendo las sustituciones correspondientes se obtiene el resultado.

Distribución de $R = R_1 + R_2$ III

Un poco (bueno, no tanto) más elaborado de probar, es el hecho de que:

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(R) &= 1 + \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} \\ \mathsf{Var}(R) &= \frac{2n_1 n_2(2n_1 n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)} \end{aligned}$$

Ejemplo: prueba de hipótesis de independencia. I

Con los resultados anteriores, podemos probar la hipótesis de aleatoriedad. la función `fr` en el código de `R` es la distribución del número total de rachas que acabamos de obtener. Esta función también está en `randtests` como funciones `*Runs`.
Si $n_1 = 5$ y $n_2 = 4$, tenemos entonces que:

```
fr <- function(n1,n2,r){
       if(r<2 || r>n1+n2) error("r tiene que ser mayor a 1 o menor que la suma de n1 y n2")
              if( r %% 2 ==0) {
              sol <- 2*choose(n1-1,r/2-1)*choose(n2-1,r/2-1)/choose(n1+n2,n1)
       } else {
              sol <- (choose(n1-1,(r-1)/2)*choose(n2-1,(r-3)/2) +
             choose(n1-1,(r-3)/2)*choose(n2-1,(r-1)/2))/choose(n1+n2,n1)
       }
       return(sol)
}
```

Ejemplo: prueba de hipótesis de independencia. II

```
fr(n1=5,n2=4,r=9) #equivalente a druns(9,5,4)

[1] 0.007936508

fr(n1=5,n2=4,8)

[1] 0.06349206

fr(n1=5,n2=4,2)

[1] 0.01587302

fr(n1=5,n2=4,3)

[1] 0.05555556
```

Para una prueba de dos lados que rechace la hipótesis nula para $R \leq 2$ o $R \geq 9$, el nivel de significancia exacto sería $f_R(2) + f_R(9) = 0.024$
Para la región crítica definida por $R \leq 3$ o $R \geq 8$, sería $\alpha = 18/126 = 0.143$

Prueba de rachas para muestras grandes

- La distribución de R se puede conocer de manera exacta, pero comienza a ser difícil de manejar si n es grande. Se puede usar una aproximación asintótica bajo ciertos supuestos cuando $n_i \geq 10$.
- Supongamos que $n_1 \to \infty$ de tal forma que $\frac{n_1}{n} \to \lambda$ y $\frac{n_2}{n} \to 1 - \lambda$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathsf{E}(R/n) &\to 2\lambda(1-\lambda), \text{y} \\ \mathsf{Var}(R/\sqrt{n}) &\to 4\lambda^2(1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Así que

$$Z = \frac{R - 2n\lambda(1-\lambda)}{2\sqrt{n}\lambda(1-\lambda)}$$

es asintóticamente $\mathcal{N}(0,1)$.

Ejemplo

Considerando la siguiente muestra de números pseudoaleatorios:

```
set.seed(100)
x <- runif(50); head(x)

[1] 0.30776611 0.25767250 0.55232243 0.05638315 0.46854928 0.48377074

#función para contar las rachas:
nrachas <- function(x){
        n <- length(x)
        signo <- x[-1] - x[-n]
        n1 <- sum(signo < 0)
        s <- ifelse(signo < 0, -1, 1)
        R <- 1 + sum(s[-1] !=  s[-(n-1)]) #cuenta los cambios de signo
        return(list(R=R, n1=n1, lambda=n1/length(x)))
}
res <- nrachas(x); res

$R
[1] 34

$n1
[1] 21

$lambda
[1] 0.42

lambda <- res$lambda
z <- (nrachas(x)$R -       2*length(x)*lambda*(1-lambda))/(2*sqrt(length(x)) * lambda * (1-lambda));z

[1] 2.798239

pnorm(z)

[1] 0.9974309
```

Entonces $z_0 = 2.7982387$, y el p-value es 0.9974309.

Limitaciones de la prueba de rachas basada en el número de rachas I

Distribución respecto a la media (o un umbral)

La prueba de rachas puede no estar observando todas las posibles condiciones para aleatoriedad cuando se considera el número de rachas. Por ejemplo, la siguiente sucesión pasa la prueba:

```
x <- c(0.63, 0.72, 0.79, 0.81, 0.52, 0.94, 0.83, 0.93, 0.87, 0.67,
       0.54, 0.83, 0.89, 0.55, 0.88, 0.77, 0.74, 0.95, 0.82, 0.86,
       0.43, 0.32, 0.36, 0.18, 0.08, 0.19, 0.18, 0.27, 0.36, 0.34,
       0.31, 0.45, 0.49, 0.43, 0.46, 0.35, 0.25, 0.39, 0.47, 0.41)
z <- ( nrachas(x)$R - 2*length(x)*lambda*(1-lambda) )/( 2*sqrt(length(x))*lambda*(1-lambda) )
pnorm(z)
```

```
[1] 0.9827158
```

Limitaciones de la prueba de rachas basada en el número de rachas II

Distribución respecto a la media (o un umbral)

Sin embargo, los primeros 20 números están por encima de la media 0.5565 y los otros 20 por debajo, lo cual es altamente improbable si los números son aleatorios.
La prueba de rachas se puede modificar para considerar posibles tendencias en el comportamiento de la racha, considerando la siguiente modificación.
Para n "grande" ($n > 20$), la distribución asintótica de R tiene media y varianza dada por:

$$\begin{aligned} \mu_R &= \frac{2n-1}{3} \\ \sigma_R^2 &= \frac{16n-29}{90} \end{aligned}$$

Limitaciones de la prueba de rachas basada en el número de rachas III

Distribución respecto a la media (o un umbral)

donde n es el número de datos en la muestra. Si $n > 20$, la distribución de R es aproximadamente $\mathcal{N}\left(\mu_R, \sigma_R^2\right)$. La estadística de prueba es

$$z_0 = \frac{R - (2n-1)/3}{\sqrt{(16n-29)/90}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Prueba de Rachas de Levene y Wolfowitz (1944) I

Basada en el número de rachas de diferentes longitudes

Una versión más de la prueba de rachas considera el caso de rachas crecientes o decrecientes, junto con la longitud de las diferentes rachas. Por ejemplo:

$$0.134, 0.279, 0.866, 0.197, 0.011, 0.923, 0.990, 0.876$$

- Sea R_k el número de rachas de longitud k. El total de rachas es $R = R_1 + R_2 + \cdots$
- Levene y Wolfowitz mostraron en este caso que en una sucesión de n $U(0,1)$, el número esperado de rachas crecientes de longitud $k \geq 1$ está dada por:

$$E(R_k) = \frac{(k^2 + k - 1)(n - k - 1)}{(k + 2)!}, \quad 1 \leq k \leq n$$

- Como usualmente n es grande, se puede considerar la aproximación:

$$E(R_k) \approx \frac{(k^2 + k - 1)}{(k + 2)!} n, \quad k << n$$

Prueba de Rachas de Levene y Wolfowitz (1944) II

Basada en el número de rachas de diferentes longitudes

- Entonces, para n fija $E(R_k)$ decrece conforme $k \to n$ y es usual considerar la distribución conjunta de $(R_1, R_2, \ldots, R_j, S_j)$ para alguna $j > 1$, donde $S_j = \sum_{k=j+1}^{n} R_k$. Usualmente se considera $j = 5$.
- Una observación importante aquí es que las $R_i's$ no son independientes, y por lo tanto no se puede aplicar la prueba χ^2 de directa.
- Si n es el número de observaciones, y se define a r_6 como el número de rachas que son de longitud igual o mayor a 6, entonces la estadística de Levene-Wolfowitz es:

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} a_{ij}(r_i - nb_i)(r_j - nb_j) = \frac{1}{n}(\mathbf{r} - \mathbf{nb})'\mathbf{a}(\mathbf{r} - \mathbf{nb})$$

donde $\mathbf{a_{6\times 6}}$ es una matriz simétrica y $\mathbf{b}_{6\times 1}$ son constantes, que provienen de las estadísticas de orden. La matriz está dada por

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 4,529.4 & 9,044.9 & 13,568 & 18,091 & 22,615 & 27,892 \\ & 18,097 & 27,139 & 36,187 & 45,234 & 55,789 \\ & & 40,721 & 54,281 & 67,852 & 83,685 \\ & & & 72,414 & 90,470 & 111,580 \\ & & & & 113,262 & 139,476 \\ & & & & & 172,860 \end{pmatrix}$$

Prueba de Rachas de Levene y Wolfowitz (1944) III

Basada en el número de rachas de diferentes longitudes

y $\mathbf{b} = (\frac{1}{6}, \frac{5}{24}, \frac{11}{120}, \frac{19}{720}, \frac{29}{5040}, \frac{1}{840})$.

- Se puede probar que la estadística tiene una distribución asintótica χ^2_6. (D. Knuth: *The Art of Computer Programming, Vol.2*) Se recomienda $n \geq 4,000$.

Prueba de rachas: Ejemplo I

La función siguiente devuelve el valor de la estadística y los valores de r_i, así como el p-value de la prueba. Por ejemplo, si se genera una muestra aleatoria:

```
set.seed(1)
x <- runif(5000) #genera una muestra de 5000 números aleatorios
prueba.rachas <- function(x){
a <- matrix(c(4529.4,  9044.9, 13568,  18091,  22615,  27892,
              9044.9, 18097,   27139,  36187,  45234,  55789,
                          13568,  27139,   40721,  54281,  67852,  83685,
                          18091,  36187,   54281,  72414,  90470, 111580,
                          22615,  45234,   67852,  90470, 113262, 139476,
                          27892,  55789,   83685, 111580, 139476, 172860), nrow = 6)
b <- c(1/6,5/24,11/120,19/720,29/5040,1/840)
n <- length(x)
x1 <- c(1) #inicializa el indicador de cambios de signo
x1[2:length(x)] <- sign(diff(x)) #guardamos los cambios de signos de la muestra
cambios <- c((1:length(x1))[x1==-1],length(x)+1) #contamos los cambios de signo
tabla <- table(c(cambios[1]-1,diff(cambios)),exclude=NULL)
aa <- tabla[match(1:length(x),as.numeric(names(tabla)))]
aa <- ifelse(is.na(aa),0,aa)
aa[6] <- sum(aa[6:n])  #agrupa el número de rachas de longitud 6 o más
r <- aa[1:6]
names(r) <- c(1:5,">=6")
R <- as.numeric((r-n*b)%*%a%*%t(t((r-n*b)))/n) #Estadística de Levene-Wolfowitz
return(list(x=head(x,10),R=R,r=r,pval=pchisq(R,6,lower.tail=F)))
}
```

Prueba de rachas: Ejemplo II

```
prueba.rachas(x)

$x
 [1] 0.26550866 0.37212390 0.57285336 0.90820779 0.20168193 0.89838968 0.94467527 0.66079779 0.62911404 0

$R
[1] 6.999105

$r
  1   2   3   4   5 >=6
831 996 502 125  28   5

$pval
[1] 0.32093
```

Prueba de rachas: Ejemplo II

En el paquete `randtests` hay una versión de la prueba de rachas (Wald-Wolfowitz, altas y bajas con respecto a un umbral). También hay una versión de la prueba en el paquete `snpar` (supplementary Non-parametric statistics methods).

```
library(randtests)
runs.test(x,threshold = mean(x))


Runs Test

data:  x
statistic = -0.14035, runs = 2495, n1 = 2449, n2 = 2551, n = 5000, p-value = 0.8884
alternative hypothesis: nonrandomness

runs.test(x) #por default es la mediana


Runs Test

data:  x
statistic = 0, runs = 2501, n1 = 2500, n2 = 2500, n = 5000, p-value = 1
alternative hypothesis: nonrandomness
```

Prueba de gaps

- La prueba de gaps (o “huecos”) investiga la relevancia del intervalo entre la recurrencia de un mismo dígito. Lo interesante es medir la longitud L de los gaps para un cierto dígito.
- Por ejemplo, en la siguiente serie, la longitud de los gaps asociados con el 6 se puede determinar:

```
x <- c(
1, 3, 7, 4, 8, 6, 2, 5, 1, 6, 4, 4, 3, 3, 4, 2, 1, 5, 8, 7,
0, 7, 6, 2, 6, 0, 5, 7, 8, 0, 1, 1, 2, 6, 7, 6, 3, 7, 5, 9,
0, 8, 8, 2, 6, 7, 8, 1, 3, 5, 3, 8, 4, 0, 9, 0, 3, 0, 9, 2,
2, 3, 6, 5, 6, 0, 0, 1, 3, 4, 4, 6, 9, 9, 8, 5, 6, 0, 1, 7,
5, 6, 7, 9, 4, 9, 3, 1, 8, 3, 3, 6, 6, 7, 8, 2, 3, 5, 9, 6,
6, 7, 0, 3, 1, 0, 2, 4, 2, 0, 6, 4, 0, 3, 9, 3, 6, 8, 1, 5)
table(x)
```

```
x
 0  1  2  3  4  5  6  7  8  9
14 11 10 16 10 10 18 11 11  9
```

- En este ejemplo, hay 18 números ‘6’ que se repiten, y los gaps son los siguientes: el primero es de longitud 3, el segundo es de longitud 12, el tercero es de longitud 1, etc.

Prueba de gaps I

- En general, la probabilidad de un gap de longitud x para el dígito U está dada por:

$$P(L = x) = P(U \text{ seguido de exactamente } x \text{ dígitos no } U) = (0.1)(0.9)^x$$

  para $x = 0, 1, 2, \ldots$.
- Para llevar a cabo la prueba de independencia, se tienen que obtener todos las longitudes de los gaps de todos los dígitos y analizarlos, aplicando alguna prueba de bondad de ajuste como la prueba de KS o la de χ^2.
- La función de distribución teórica para los dígitos es:

$$P(L \leq x) = F_L(x) = 0.1 \sum_{j=0}^{x} (0.9)^j = 1 - 0.9^{x+1}$$

Prueba de gaps: ejemplo I

- Con los datos provistos anteriormente, y para el caso del dígito 6, se tienen 17 gaps siguientes:

```
gaps <- function(x){ #calcula todos las longitudes de gaps de la serie x
  lgaps <- NULL
  for (i in 0:9){
    pos <- which(x==i)
    l <- diff(pos)
    lgaps <- c(lgaps,l-1)}
  L <- table(lgaps)
  return(L)
}
l <- gaps(x)
cumsum(l/sum(l))
```

```
        0         1         2         3         4         5         6         7         8         9
0.1000000 0.1909091 0.2454545 0.3000000 0.3545455 0.4000000 0.4545455 0.5090909 0.5636364 0.6181818
       12        13        14        15        16        17        19        21        22        24
0.7545455 0.8181818 0.8272727 0.8545455 0.8909091 0.9090909 0.9181818 0.9272727 0.9636364 0.9727273
       37
1.0000000
```

Prueba de gaps: ejemplo II

- Para calcular las frecuencias teóricas, podemos usar la distribución geométrica.

```
pgeom(as.numeric(names(l)),prob=0.1)
```

```
 [1] 0.1000000 0.1900000 0.2710000 0.3439000 0.4095100 0.4685590 0.5217031 0.5695328 0.6125795 0.6513216 0.6861894
[12] 0.7175705 0.7458134 0.7712321 0.7941089 0.8146980 0.8332282 0.8499054 0.8784233 0.9015229 0.9113706 0.9282102
[23] 0.9721872 0.9749684 0.9817520
```

```
(D <- max(abs(cumsum(l/sum(l))-pgeom(as.numeric(names(l)),prob=0.1))))
```

```
[1] 0.068559
```

```
(pval <- 2*exp(-2*sum(l)*D^2))
```

```
[1] 0.7111109
```

Prueba de gaps a números aleatorios

- Cuando se aplica la prueba de gaps a números aleatorios, se utilizan clases de intervalos para representar a los dígitos.
- Por ejemplo, se pueden considerar una partición del intervalo unitario en los intervalos:

$$[0, 0.1), [0.1, 0.2), \ldots, [0.9, 1]$$

- Entonces se asocia el dígito que corresponde a cada intervalo y se utiliza el conjunto de digitos obtenido.

Prueba de gaps: ejemplo

Realizar la prueba de gaps para la siguiente lista de datos:

```
set.seed(1)
(x <- runif(10))
```

```
 [1] 0.26550866 0.37212390 0.57285336 0.90820779 0.20168193 0.89838968 0.94467527 0.66079779 0.62911404 0
```

Prueba de gaps ejemplo

- En el paquete `randtoolbox` se tiene la prueba de gaps

```
library(randtoolbox)
Loading required package: rngWELL
This is randtoolbox. For an overview, type 'help("randtoolbox")'.

Attaching package: 'randtoolbox'
The following object is masked from 'package:randtests':
    permut
x
 [1] 0.26550866 0.37212390 0.57285336 0.90820779 0.20168193 0.89838968 0.94467527 0.66079779 0.62911404 0.06
gap.test(x)

 Gap test

chisq stat = 1.1, df = 3, p-value = 0.77

 (sample size : 10)

length observed freq theoretical freq
1   2   1.2
2   1   0.62
3   0   0.31
4   0   0.16
```

Pruebas de póker

- Esta prueba mide la frecuencia de ciertas combinaciones de 5 números a la vez, (pero se puede cambiar por supuesto) basado en el juego de póker, como $aaaaa$, $aaaab$, $aabb$, etc. Compara los resultados obtenidos en la muestra contra los valores teóricos, utilizando una prueba ji-cuadrada.
- Por ejemplo, en una “mano” de tamaño 3, hay tres posibilidades:
  1. Todos los dígitos son diferentes
  2. Todos son iguales
  3. Hay dos dígitos iguales

  Las probabilidades de los eventos son:
  1. P(Caso 1) = (0.9)(0.8) = 0.72
  2. P(Caso 2) = 0.01
  3. P(Caso 3) = $\binom{3}{2}(0.1)(0.9) = 0.27$

Ejemplo de aplicación

```
separa <- function(x){ #separa un número en sus dígitos componentes.
                w <- substring(as.character(x),3)
                if(nchar(w) < 4) for(i in 1:(4-nchar(w))) w <- paste(w, "0", sep = "")
                return(as.numeric(unlist(strsplit(w,""))))
}

tabla <- function(x,k){ # Hace una tabla de frecuencias de cada dígito
         tabla <- table(x)
         aa <- tabla[match(0:(k-1),as.numeric(names(tabla)))]
         aa <- ifelse(is.na(aa),0,aa)
         r <- aa[1:k]
         names(r) <- 0:(k-1)
         return(r)
}
```

Ejemplo de aplicación

```
prueba.poker<-function(vec){
        z <- round(vec,4) #redondeo a 4 decimales
        N <- length(z)
        ow <- options("warn") #apaga los warnings por un momento
        options(warn = -1)
        dim(z) <- c(N,1)  #convierte el vector de datos a una matriz columna
        z1 <- apply(z, 1, separa) #separa cada numero aleatorio en los componentes
        z2 <- t(apply(z1, 2, tabla, k=10)) #crea una tabla de frecuencias
                # frecuencias de ceros unos, dos y tres de la tabla de frecuencias anterior,
                # para caracterizar los posibles juegos en cada "mano":
                # pachuca: hay 6 ceros y 4 unos siempre.
                # un par : hay 7 ceros y 1 dos y 2 unos.
                # dos pares: hay 2 dos, 8 ceros
                # una tercia: hay 1 tres y 1 uno, 8 ceros
                # un pokar: hay 1 cuatro y 9 ceros
        z1 <- apply(z2, 1, table)
        pachuca <- sum(unlist(lapply(z1,function(x){ifelse(x[1]==6,1,0)})))
        unpar <- sum(unlist(lapply(z1,function(x){ifelse(x[1]==7,1,0)})))
        dospar <- sum(unlist(lapply(z1,function(x){ifelse((x[1]==8)&(x[2]==2),1,0)})))
        tercia <- sum(unlist(lapply(z1,function(x){ifelse((x[1]==8)&(length(x)==3),1,0)})))
        pokar <- sum(unlist(lapply(z1,function(x){ifelse(x[1]==9,1,0)})))
        esp <- N*c(0.504, 0.432, 0.027, 0.036, 0.001)
        obs <- c(pachuca, unpar, dospar, tercia, pokar)
        prueba <- sum((obs-esp)^2/esp)
        pval <- 1 - pchisq(prueba,4)
        #names(obs) <- 0:9
        options(ow)
return(list(cbind(Esperado=esp,Observado=obs),Estadistica=prueba,pval=round(pval,5)))
}
```

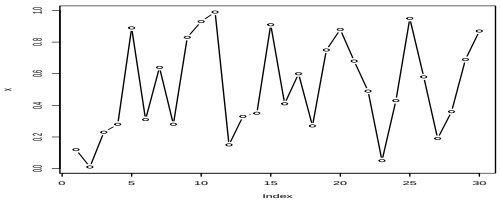
Ejemplo de aplicación

```
prueba.poker(runif(1000))

[[1]]
     Esperado Observado
[1,]      504       523
[2,]      432       412
[3,]       27        27
[4,]       36        36
[5,]        1         2

$Estadistica
[1] 2.6

$pval
[1] 0.62
```

Pruebas para autocorrelación I

- Las pruebas de autocorrelación miden la dependencia entre subseries de una serie. Los números pueden estar relacionados de múltiples maneras:
  - pueden mostrar tendencias crecientes o decrecientes, o los números pueden estar intercalados.
  - pueden estar relacionados subseries, digamos cada i-ésimo número. En la serie que sigue, se puede ver que cada quinto número se tiene una observación grande:

```
x <- c( 0.12, 0.01, 0.23, 0.28, 0.89, 0.31, 0.64, 0.28, 0.83, 0.93,
        0.99, 0.15, 0.33, 0.35, 0.91, 0.41, 0.60, 0.27, 0.75, 0.88,
        0.68, 0.49, 0.05, 0.43, 0.95, 0.58, 0.19, 0.36, 0.69, 0.87)
plot(x,type="b")
```



- La *autocorrelación* es una medida que nos dice cuánto puede depender una observación de otras observaciones generadas con el mismo proceso estocástico.

Pruebas para autocorrelación II

- Para una muestra $X_1, \ldots, X_n$, la autocorrelación de rezago (lag) j se define como

$$\rho_j = \frac{\text{Cov}(X_i, X_{i+j})}{sd(X_i)sd(X_{i+j})} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_{i+j})}{\text{Var}(X_1)},$$

  si las variables tienen la misma distribución (o en general, el proceso es estacionario).
- Se pueden obtener estimadores a partir de una muestra de varias formas para la autocorrelación:
  - $\text{Var}(X_1)$ se puede estimar con $s_n^2 = \frac{\sum(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$.
  - $\text{Cov}(X_i, X_{i+j})$ se puede estimar con $\hat{c}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j}(X_i - \bar{X})(X_{i+j} - \bar{X})}{n-j}$, o bien con $\hat{c}_j' = \hat{c}_j \frac{n-j}{n}$

Autocorrelación

- En cualquiera de los casos anteriores,
  i. $\hat{\rho}_j = \frac{\hat{c}_j}{s_n^2}$ es un estimador sesgado de ρ_j.
  ii. Estimadores para diferentes rezagos estarán correlacionados, esto es: $\text{Cov}(\hat{\rho}_j, \hat{\rho}_k) \neq 0$.
  iii. Si n es pequeña y j grande, entonces $\hat{\rho}_j$ es un estimador pobre para ρ_j.

Una prueba se puede basar en las autocorrelaciones para diferentes valores del rezago j. La hipótesis a probar es que $H_0 : \rho_j = 0$ para $j = 1, \ldots, k$. Otra forma de ver esta prueba es que las observaciones forman una serie de *ruido blanco*.

Prueba adaptada para uniformes

Sean $u_1, \ldots, u_n \sim \mathcal{U}(0,1)$. Para una j dada, queremos probar:

$$H_0 : \rho_j = 0 \qquad H_1 : \rho_j \neq 0$$

Como $E(u_i) = \frac{1}{2}, \text{Var}(u_i) = \frac{1}{12}$, entonces

$$\rho_j = \frac{c_j}{\sigma^2} = \frac{E(u_i u_{i+j}) - \frac{1}{4}}{\frac{1}{12}} = 12E(u_1 u_{1+j}) - 3$$

para cualquier i (la serie es estacionaria).
Estimamos $E(u_1 u_{1+j})$ con: $\frac{1}{h+1}\sum_{k=0}^{h} u_{1+kj}u_{1+(k+1)j}$ donde $h = \llcorner \frac{n-1}{j} \lrcorner - 1$ [4].
h es el número de pares que se pueden formar, cuando las observaciones están espaciadas cada j observaciones.

[4] $\llcorner x \lrcorner = n$ si $n \leq x \leq n+1$, el entero más cercano a x que es menor o igual a x. En `R` corresponde a la función `floor`.

Prueba adaptada para uniformes

De este modo, $\hat{\rho}_j = \frac{12}{h+1} \sum_{k=0}^{h} u_{1+kj} u_{1+(k+1)j} - 3$. Se puede probar con un poco de álgebra que $\text{Var}(\hat{\rho}_j) = \frac{13h+7}{(h+1)^2}$. Usando el teorema del límite central para sumas de variables aleatorias,

$$A_j = \frac{\hat{\rho}_j}{\sqrt{\text{Var}(\hat{\rho}_j)}} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Aquí aplicamos una prueba estándar de variables aleatorias normales.
En `pruebas.r` se encuentra la función `prueba.correl` y tiene 2 argumentos: `init` que da el valor a partir del punto en donde se comenzaron a contar los rezagos, y `sig` que da el nivel de significancia escogido. El output de la función corresponde a los valores de la estadística de prueba A_j para diferentes j y los p-values obtenidos de la prueba. Adicionalmente, se genera una gráfica para visualizar los p-values.

```
> prueba.correl(x, init=1, sig=0.01)
```

Autocorrelaciones para ruido blanco

- Alternativamente, se puede calcular la función de autocorrelación para una serie de observaciones. en `R`, la función `acf` calcula la función de autocorrelación para varios rezagos y aplica la prueba descrita anteriormente.
- Debe quedar claro que siempre $\rho_0 = 1$ y que los límites de confianza que se muestran en la gráfica que se obtiene pueden dejar afuera 5 % de las observaciones.
- Si la serie muestra dependencia, entonces algunos valores de las autocorrelaciones pueden salir muy significativas.
- Adicionalmente, se puede calcular la función de autocorrelación parcial, `pacf` que complementa a la función `acf`.

Función de autocorrelación

Si una serie es débilmente estacionaria, entonces

$$\rho_k = \frac{Cov(y_t, y_{t-k})}{\sqrt{var(y_t)var(y_{t-k})}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}.$$

La autocorrelación tiene las siguientes propiedades:

- $\rho_0 = 1$
- $-1 \leq \rho_k \leq 1$.
- $\{y_t\}$ no es serialmente correlacionada si $\rho_k = 0 \quad \forall k > 0$.

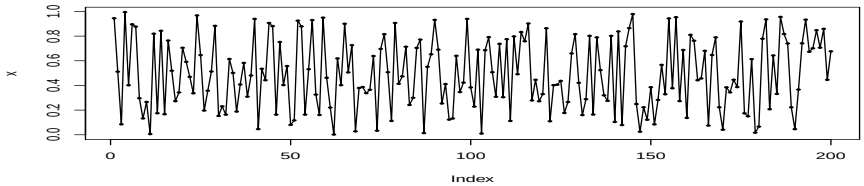
Para una serie estacionaria, el coeficiente de autocorrelación muestral se define como:

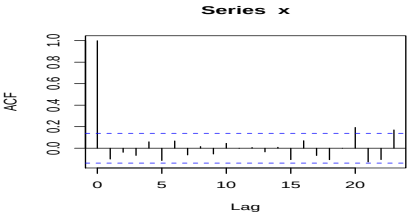
$$r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}(y_t - \bar{y})(y_{t-k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}$$

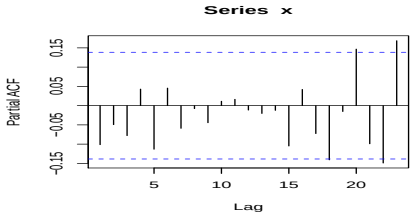
la gráfica de r_k vs. k es el correlograma de una serie temporal

Ejemplo

```
layout(matrix(c(1,1,2,3),nrow=2,byrow=T)); x <- runif(200)
plot(x, type = "o", pch = 16, cex = 0.6)
acf(x)
pacf(x)
```







Pruebas de autocorrelación: Bartlett

Se puede probar que $\hat{\rho}_1$ es un estimador consistente de ρ_1. En particular, si $\{y_t\}$ es una serie de ruido blanco (iid con $\mu = 0$, $\sigma^2 < \infty$) entonces

$$\hat{\rho_1} \sim N(0, 1/N)$$

En la práctica, se prueba la hipótesis $H_0 : \rho_1 = 0$ vs $H_a : \rho_1 \neq 0$ utilizando la estadística de prueba $t = \sqrt{N}\hat{\rho}_1$ que tiene distribución normal estándar, bajo la hipótesis nula.
Lo mismo sucede para $\hat{\rho}_k$. Esta prueba se conoce como la prueba de Bartlett (no confundir con la prueba de Bartlett de homoscedasticidad).
Observación: cuando N es pequeña, digamos menor que 30, la prueba puede ser sesgada.

Autocorrelación para ruido blanco

- Cuando la serie de tiempo es un ruido blanco, las propiedades de la función de autocorrelación son bien conocidas, y esto nos puede ayudar.
  - Los coeficientes de autocorrelación de una serie de ruido blanco se aproximan a una distribución normal con media 0 y varianza $\frac{1}{n}$, donde n es el número de observaciones en la serie. Así que 95 % de los coeficientes de autocorrelación deben estar entre $\pm 1.96/\sqrt{n}$, que son los límites críticos incluídos en las gráficas.
  - También las autocorrelaciones parciales deben ser cercanas a 0 cuando el modelo es un modelo de ruido blanco.

Pruebas de autocorrelación: Box-Pierce y Ljung-Box

La prueba de Box-Pierce (1970) prueba simultáneamente que varias autocorrelaciones son 0:

$$H_0 : \rho_1 = \ldots = \rho_m = 0 \quad vs. \quad \rho_i \neq 0 \text{ para alguna } i$$

La estadística de prueba en este caso es $Q^*(m) = N \sum_{i=1}^{m} \hat{\rho}_i{}^2$. Se puede demostrar que la distribución asintótica de $Q^*(m)$ es una ji-cuadrada con m grados de libertad (χ^2_m)
La prueba de Ljung-Box (1978) modifica $Q^*(m)$ para incrementar el poder estadístico de la prueba cuando se tienen muestras pequeñas. En este caso, se considera

$$Q(m) = N(N+2) \sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_i{}^2}{N-i}$$

En la práctica una buena elección de m es tomar $m = \log(N)$.

Ejemplos I

Llevar a cabo las pruebas de Bartlett, Box-Pierce y Ljung-Box para los siguientes datos:

```
set.seed(1)
u <- runif(100)
u
```

```
  [1] 0.266 0.372 0.573 0.908 0.202 0.898 0.945 0.661 0.629 0.062 0.206 0.177 0.687 0.384 0.770 0.498 0.718 0.992 0.380
 [20] 0.777 0.935 0.212 0.652 0.126 0.267 0.386 0.013 0.382 0.870 0.340 0.482 0.600 0.494 0.186 0.827 0.668 0.794 0.108
 [39] 0.724 0.411 0.821 0.647 0.783 0.553 0.530 0.789 0.023 0.477 0.732 0.693 0.478 0.861 0.438 0.245 0.071 0.099 0.316
 [58] 0.519 0.662 0.407 0.913 0.294 0.459 0.332 0.651 0.258 0.479 0.766 0.084 0.875 0.339 0.839 0.347 0.334 0.476 0.892
 [77] 0.864 0.390 0.777 0.961 0.435 0.713 0.400 0.325 0.757 0.203 0.711 0.122 0.245 0.143 0.240 0.059 0.642 0.876 0.779
 [96] 0.797 0.455 0.410 0.811 0.605
```

Solución.

Ejemplos II

```
#Prueba de Barttlet:
rho1 <- acf(u,1,plot=F)$acf[2]
bt <- sqrt(length(u))*rho1
1-pnorm(bt)/2 #p-value

[1] 0.72

#Prueba de Box-Pierce:
Box.test(u,lag=3,type="Box-Pierce")


Box-Pierce test

data:  u
X-squared = 3, df = 3, p-value = 0.4

#Prueba de Ljung-Box:
Box.test(u,lag=3,type="Ljung-Box")


Box-Ljung test

data:  u
X-squared = 3, df = 3, p-value = 0.4
```

□

Función de autocorrelación parcial

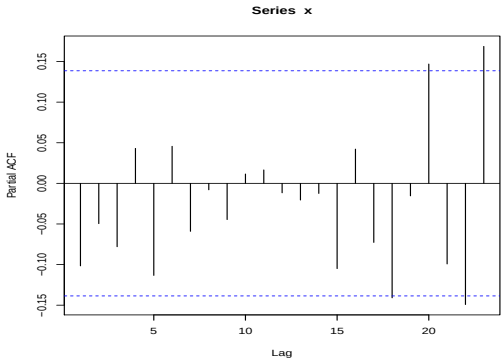
- Las *autocorrelaciones parciales* se usan para medir el grado de asociación entre y_t y y_{t-k}, cuando se ha eliminado el efecto de los rezagos intermedios $1, 2, 3, \ldots, k-1$.
- El coeficiente de correlación parcial de orden k se denota por α_k y se calcula haciendo la regresión de y_t contra los rezagos $y_{t-1}, \ldots, y_{t-k}$:

$$y_t = b_0 + b_1 y_{t-1} + \cdots + b_k y_{t-k}$$

  A esta regresión se le llama *autorregresión*, porque es y contra si misma.
- El valor α_k es el coeficiente b_k de esta regresión.
- La función de autocorrelación parcial se grafica: α_k vs. k.

Ejemplo

```
pacf(x)
```



Interpretación de las gráficas

- Atributos de las gráficas:
  - En ambas gráficas, acf y pacf, se pueden observar dos líneas azules, basadas en los límites discutidos: estas sirven para indicar qué correlaciones son significativas (las que rebasen las líneas son importantes).
  - La cola de la acf se acerca a 0 con un decaimiento sinusoidal.
  - La pacf sólo tiene dos rezagos significativos.
- En el estudio de series de tiempo, estas dos gráficas nos puede ayudar a identificar un modelo de tipo autorregresivo y de promedios móviles que sirve para estimar la serie de tiempo (modelos ARIMA de Box y Jenkins).

Otras baterías de pruebas para números aleatorios

- Como diferentes pruebas son sensibles a diferentes tipos de desviaciones de la hipótesis nula de uniformidad e independencia, se requiere un conjunto de pruebas que recorra el espacio de hipótesis alternativas.
- Algunos ejemplos de baterías de pruebas que son populares son los siguientes
  - Fishman & Moore (1982, 1986): pruebas de bondad de ajuste sobre transformaciones de la muestra.
  - Vattulainen, Ala-Nissila & Kankaala (1994, 1995): basados en modelos físicos.
  - DIEHARD tests de Marsaglia (1985, 1995): incluye 18 pruebas de bondad de ajuste.
  - DIEHARDer tests de Robert G. Brown (2003): prueba generadores, no conjuntos de datos. Combina Marsaglia y NIST.
  - NIST Test Suite (2000)
  - TestU01 (L'Ecuyer, 1985) (inluye DIEHARD y NIST): son aproximadamente 60 pruebas.