Numeričko računanje svojstvenih vrijednosti Dirichletovog Laplaciana

Metoda konačnih razlika

Davor Penzar

2019.

Uvodno objašnjenje

Za prirodni broj $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, za otvoreni neprazni skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i za neprekidnu dvostruko diferencijabilnu funkciju $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$ Laplaceov operator u točki $\mathbf{x} \in \Omega$ označavamo s

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} u(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} u(\mathbf{x}),$$

gdje su $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ vektori ortonormirane baze od R^n. Laplaceov operator skraćeno nazivamo i *Laplacian*.

1. Svojstvena funkcija i svojstvena vrijednost Dirichletovog Laplaciana

Definicija 1. Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ neprazni otvoreni skup. Neprekidnu funkciju $u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ dvostruko diferencijabilnu na Ω različitu od konstantne nul-funkcije i pripadnu konstantu $\lambda \in \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju Dirichletov rubni uvjet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{u } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

zovemo **svojstvenom funkcijom** i (pripadnom) **svojstvenom vrijednosti** Dirichletovog Laplaciana na Ω.

Pretpostavimo da za neki neprazni otvoreni skup $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ poznajemo svojstvenu funkciju $u \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ i pripadnu svojstvenu vrijednost $\lambda \in \mathbb{R}$ Dirichletovog Laplaciana na Ω. Za skup $S \subseteq R$ takav da vrijedi $\overline{\Omega} \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^2$ funkciju u možemo dodefinirati do funkcije na cijelom S vrijednosti 0. Obratno, ako postoji funkcija $v \colon S \to \mathbb{R}$ neprekidna na $\overline{\Omega}$ čija je restrikcija $v|_{\Omega}$ dvostruko diferencijabilna funkcija različita od konstantne nul-funkcije i za čiju restrikciju $v|_{\overline{\Omega}}$ postoji konstanta $\mu \in \mathbb{R}$ tako da $v|_{\overline{\Omega}}$ i μ zadovoljavaju uvjet (1), onda su $v|_{\overline{\Omega}}$ i μ svojstvena funkcija i pripadna svojstvena vrijednost Dirichletovog Laplaciana na Ω — to posebno vrijedi i ako je $v|_{S \setminus \overline{\Omega}}$ konstantna nul-funkcija. Uočimo da je, ako je vrijednost funkcije na rubu skupa Ω konstantna, a izvan tog skupa poprima (također konstantno) tu istu vrijednost kao i na rubu, i ta *šira* funkcija neprekidna na cijelom S.

2. Numeričko računanje svojstvene funkcije i svojstvene vrijednosti Dirichletovog Laplaciana

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ proizvoljni neprazni otvoreni ograničeni skup. Definiramo

$$\begin{aligned}
x_{\min} &:= \min\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}\left((x, y) \in \overline{\Omega}\right)\right\}\right) \in \mathbb{R},\\
y_{\min} &:= \min\left(\left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}\left((x, y) \in \overline{\Omega}\right)\right\}\right) \in \mathbb{R},\\
x_{\max} &:= \max\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R}\left((x, y) \in \overline{\Omega}\right)\right\}\right) \in \mathbb{R},\\
y_{\max} &:= \max\left(\left\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}\left((x, y) \in \overline{\Omega}\right)\right\}\right) \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Vrijednosti $x_{\min}, y_{\min}, x_{\max}, y_{\max} \in \mathbb{R}$ dobro su definirane jer je $\overline{\Omega}$ neprazni kompakt, a $\mathbb{R}$ topološki potpun. Definiramo sada točke

$$\begin{aligned}
A &:= (x_{\min}, y_{\min}) \in \mathbb{R}^2,\\
B &:= (x_{\max}, y_{\min}) \in \mathbb{R}^2,\\
C &:= (x_{\max}, y_{\max}) \in \mathbb{R}^2,\\
D &:= (x_{\min}, y_{\max}) \in \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Točke $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$ očito su vrhovi pravokutnika čije su stranice paralelne s koordinatnim osima; štoviše, tim su redom vrhovi pozitivno orijentirani. Označimo još taj pravokutnik s $P \subseteq \mathbb{R}^2$ i duljine njegovih stranica s

$$\begin{aligned}
a &:= |x_{\max} - x_{\min}| = \|B - A\| = \|D - C\| \geq 0,\\
b &:= |y_{\max} - y_{\min}| = \|C - B\| = \|A - D\| \geq 0.
\end{aligned}$$

Dokažimo da je $\overline{\Omega} \subseteq \overline{P}$. U tu svrhu, pretpostavimo suprotno, to jest, da postoji $T \in \overline{\Omega} \setminus \overline{P}$. Neka su koordinate od T označene s $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Kada bi bilo $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ i $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$, onda bi bilo $T \in \overline{P}$. Dakle, vrijedi $x < x_{\min}$, $x > x_{\max}$, $y < y_{\min}$ ili $y > y_{\max}$ jer je $\mathbb{R}$ totalno uređeni skup — to je, pak, u kontradikciji s definicijom vrijednosti $x_{\min}$, $y_{\min}$, $x_{\max}$ i $y_{\max}$.

Također, dokažimo da je P najmanji takav pravokutnik. Pretpostavimo, suprotno, da postoji pravokutnik $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ čije su stranice paralelne s koordinatnim osima takav da je $\overline{\Omega} \subseteq \overline{Q} \subset \overline{P}$. Razmislimo li što implicira desna (stroga) inkluzija, zaključujemo da to znači da postoji točka na ∂P koja nije sadržana u $\overline{Q}$ — budući da su oba pravokutnika paralelni s koordinatnim osima, to znači da je cijela jedna stranica pravokutnika P disjunktna s $\overline{Q}$. No, po definiciji vrijednosti $x_{\min}$, $y_{\min}$, $x_{\max}$ i $y_{\max}$, od kojih svaka (na neki način) definira jednu stranicu pravokutnika P, to znači da postoji točka $T \in \overline{\Omega}$ koja je na ∂P, a koja nije u $\overline{Q}$. To je kontradikcija s inkluzijom $\overline{\Omega} \subseteq \overline{Q}$, drugim riječima, pravokutnik P je najmanji pravokutnik čije su stranice paralelne s koordinatnim osima i čije zatvorenje sadrži cijeli $\overline{\Omega}$.

Dokažimo, konačno, da je $\Omega \subseteq P$. Ponovo pretpostavljamo suprotno, to jest, da postoji točka $T \in \Omega \cap \partial P$ (već je poznato da je $\Omega \subseteq \overline{P}$). Po definiciji otvorenog skupa, to znači da postoji $\varepsilon > 0$ takav da za svaku točku $T^* \in \mathbb{R}$ za koju je $\|T^* - T\| < \varepsilon$ vrijedi $T^* \in \Omega$. No, vrijedi $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \overline{P}$ pa, koliko god malo *izađemo* iz $\overline{P}$ od točke T (koja je, prisjetimo se, na rubu pravokutnika P), nismo više u skupu Ω. Dakle, takva točka T ne postoji, to jest, $\Omega \subseteq P$.

Sada kada točno znamo u kakvom su odnosu Ω, P i njihova zatvorenja, napomenimo zašto je bitno naglasiti da je P najmanji pravokutnik s pokazanim svojstvima **čije su stranice paralelne**

s koordinatnim osima. Naime, ako je Ω već i sam pravokutnik, ali čije stranice nisu paralelne s koordinatnim osima, očito je Ω najmanji pravokutnik čije zatvorenje sadrži $\overline{\Omega}$, a u $\overline{P}$ tada postoje točke koje nisu u $\overline{\Omega}$. U tom slučaju, ipak, koordinatni sustav možemo *zarotirati* (odaberemo drugačiju ortonormiranu bazu) tako da su koordinatne osi paralelne sa stranicama pravokutnika Ω.

Kako je, po pretpostavci, Ω neprazan i otvoren, iz svega dokazanog zaključujemo:

1. $x_{\min} < x_{\max}$ i $y_{\min} < y_{\max}$,
2. $a > 0$ i $b > 0$.

Pretpostavimo da je $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Neka su $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$. To znači da postoji $h > 0$ takav da je $a = mh$ i $b = nh$, to jest, da je $h = \frac{a}{m} = \frac{b}{n}$. Diskretiziramo sada interval $[x_{\min}, x_{\max}]$ ekvidistantnom podjelom na $m + 1$ točaka, a interval $[y_{\min}, y_{\max}]$ ekvidistantnom podjelom na $n + 1$ točaka:

$$\begin{aligned} x_i &\coloneqq x_{\min} + ih \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, \ldots m, \\ y_j &\coloneqq y_{\min} + jh \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, \ldots n. \end{aligned}$$

Očito je $x_0 = x_{\min}$, $x_m = x_{\max}$, $y_0 = y_{\min}$ i $y_n = y_{\max}$. Po dokazanomu prije znamo da za svaki uređeni par $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ takav da je $(x_i, y_j) \in \Omega$ (ako takav par postoji) točke (x_{i-1}, y_j), (x_i, y_{j-1}), (x_{i+1}, y_j) i (x_i, y_{j+1}) su dobro definirane i nalaze se u $\overline{P}$. Za proizvoljnu funkciju $f \colon \overline{P} \to \mathbb{R}$, inspirirani indeksiranjem diskretizacije skupa $\overline{P}$, označimo $f_{i,j} \coloneqq f(x_i, y_j) \in \mathbb{R}$ za svaki uređeni par $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$.

Pretpostavimo da je funkcija $u \colon \overline{P} \to \mathbb{R}$ neprekidna i takva da je $u|_{\Omega}$ dvostruko diferencijabilna funkcija koja nije konstantna nul-funkcija, ali da je $u\Big|_{\overline{P} \setminus \Omega}$ konstantna nul-funkcija. Posebno je tada $u(T) = 0$ za svaku točku $T \in \partial\Omega$. Za proizvoljnu točku $(x, y) \in \Omega$ možemo aproksimirati, metodom konačnih razlika (pomoću Taylorovog reda),

$$\Delta u(x, y) \approx \frac{u(x + l, y) + u(x, y + l) - 4u(x, y) + u(x - l, y) + u(x, y - l)}{l^2} \tag{2}$$

za neki *dovoljno mali* $l > 0$, i to takav da je $(x - l, y) \in \overline{P}$, $(x, y - l) \in \overline{P}$, $(x + l, y) \in \overline{P}$ i $(x, y + l) \in \overline{P}$ (da izrazi s desne strane jednakosti budu definirani). Činjenica da je u neprekidna, a konstantna nul-funkcija i na $\partial\Omega$ i izvan $\overline{\Omega}$ (ako je $\overline{\Omega} \subset \overline{P}$) nam ovdje ide u korist — pomakom za l po koordinatnim osima rub od Ω možemo malo i *prekoračiti* jer se pri *izlasku* s $\overline{\Omega}$ ne događaju ekstremne oscilacije po u. To jest, u točkama koje su u Ω, ali *vrlo blizu* $\partial\Omega$, funkcija u poprima vrijednost blizu 0, stoga greške aproksimacije u blizini ruba skupa Ω (gdje je moguće *prekoračiti* rub aproksimacijom (2)) nisu ništa veće nego u Ω.

Pretpostavimo da je h zadovoljavajuće mali pomak za aproksimaciju (2) i da je diskretizacija skupa $\overline{P}$ *dovoljno fina* da postoji uređeni par $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ takav da je $(x_i, y_j) \in \Omega$ i $u_{i,j} \neq 0$ (ako barem jedno od toga ne vrijedi, umjesto brojeva m i n uzmemo neke njihove višekratnike dobivene množenjem brojeva m i n istim brojem; za dovoljno finu diskretizaciju moguće je barem posljednja 2 zahtjeva ispuniti jer je Ω neprazan i otvoren i, kako je u neprekidna funkcija koja na Ω poprima vrijednsost različitu od 0, postoji područje unutar Ω na kojem cijelom u poprima ne-nul vrijednosti). Definiramo sada matricu

$$U \coloneqq \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,n} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m,0} & u_{m,1} & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{m+1,n+1}(\mathbb{R}).$$

Također, definiramo vektor $\mathbf{u} = \left(u^{(0)}, u^{(1)}, \ldots, u^{((m+1)(n+1)-1)}\right) \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$ tako da je $u_{i,j} = u^{(i+(m+1)j)}$ za svaki uređeni par $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ — vektor $\mathbf{u}$ dobiven je konkatenacijom stupaca (promatranih kao vektori) matrice U redom od prvog do zadnjeg. Konačno, definiramo i kvadratnu matricu $D = \left(d^{(r,s)}\right)_{r,s} \in \mathrm{M}_{(m+1)(n+1)}(\mathbb{R})$ ovako:

1. slično kao što je od indeksiranja matrice U dobiveno indeksiranje vektora $\mathbf{u}$, za uređene parove $(i_0, j_0), (i_1, j_1) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ označimo
$$d_{(i_0,j_0),(i_1,j_1)} = d^{(i_0+(m+1)j_0, i_1+(m+1)j_1)},$$
2. ako je $(x_i, y_j) \in \Omega$ za neki uređeni par $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$, onda je
$$\begin{aligned} d_{(i,j),(i-1,j)} &= \frac{1}{h^2}, \\ d_{(i,j),(i,j-1)} &= \frac{1}{h^2}, \\ d_{(i,j),(i,j)} &= -\frac{4}{h^2}, \\ d_{(i,j),(i+1,j)} &= \frac{1}{h^2}, \\ d_{(i,j),(i,j+1)} &= \frac{1}{h^2}, \end{aligned}$$
3. svi su ostali elementi matrice D jednaki 0.

S ovakvom notacijom, jednako kao što je vektor $\mathbf{u}$ diskretizacija funkcije u na $\overline{P}$, vektor $D\mathbf{u}$ aproksimacija je diskretizacije Δu aproksimacijom (2) na $\overline{P}$ (to jest, barem su njegovi elementi čiji indeksi pripadaju skupu Ω aproksimacija Laplaciana na Ω). Suprotnim smjerom od reindeksiranja matrice U do vektora $\mathbf{u}$, vektor $D\mathbf{u}$ možemo reindeksirati u matričnu formu.

Pretpostavimo, naposljetku, da postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi
$$-D\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}. \tag{3}$$
Kako je $D\mathbf{u}$ aproksimacija Laplaciana od u na Ω, jednadžba (3) neodoljivo podsjeća na uvjet (1). Nadalje, tu jednadžbu možemo transformirati u oblik
$$(D + \lambda I)\, \mathbf{u} = 0 \tag{4}$$
iz kojeg, budući da $\mathbf{u}$ po pretpostavci nije nul-vektor, vidimo da je λ svojstvena vrijednost matrice D i $\mathbf{u}$ pripadni svojstveni vektor (alternativno, uzimamo li da je $\mu \in \mathbb{R}$ svojstvena vrijednost matrice M ako je $\det(M - \mu I) = 0$, onda je $-\lambda$ svojstvena vrijednost matrice D, to jest, λ je svojstvena vrijednost matrice $-D$).

Neka je $\mu \in \mathbb{R}$ proizvoljna vrijednost. Neka je $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$ proizvoljan vektor čiji su elementi analogno notirani i indeksirani kao elementi vektora $\mathbf{u}$. Neka je $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ proizvoljan uređeni par. Ako je $(x_i, y_j) \in \Omega$, onda se na indeksu (i, j) vektora $(D + \mu I)\, \mathbf{v}$ nalazi
$$\frac{v_{i+1,j} + v_{i,j+1} - 4v_{i,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j-1}}{h^2} + \mu v_{i,j}.$$
Ako je, s druge strane, $(x_i, y_j) \notin \Omega$, onda se na indeksu (i, j) vektora $(D + \mu I)\, \mathbf{v}$ nalazi $\mu v_{i,j}$. Zaključujemo da za svaku svojstvenu vrijednost matrice D različitu od 0 pripadni svojstveni

vektori reinterpretirani kao diskretizacija neke funkcije na $\overline{P} \setminus \Omega$ nužno poprimaju vrijednost 0 (to jest, barem poprimaju u točkama tog skupa koje pripadaju odabranoj diskretizaciji).

Nadalje, primijetimo da za svaki uređeni par $(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\}$ vektor $\mathbf{e}_{(i,j)} \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$, koji na mjestu (i, j) sadrži 1, a svugdje ostalo 0 (notacija je analogna vektoru $\mathbf{u}$), je svojstveni vektor matrice D s pripadnom svojstvenom vrijednosti 0 ako nijedna od točaka $\left(x_{i\pm1}, y_{j\pm1}\right)$ (od onih koje su među njima definirane, to jest, čiji indeksi po x i y su definirani) nije u Ω. Štoviše, svi su takvi vektori (za različite uređene parove (i, j)) međusobno ortonormirani, dakle, i nezavisni.

Bilo bi lijepo dokazati da su sve svojstvene vrijednosti čiji se svojstveni vektori mogu interpretirati kao aproksimacija diskretizacije svojstvene funkcije Dirichletovog Laplaciana skupa Ω različite od 0, po mogućnosti i realne i strogo veće od 0, i tada bismo znali da je, za traženje svojstvenih funkcija Dirichletovog Laplaciana na Ω koje pripadaju najmanjim $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ svojstvenim vrijednostima dovoljno tražiti prvih $N_0 + k$ svojstvenih vrijednosti (svaku svojstvenu vrijednost računamo onoliko puta kolika joj je geometrijska kratnost) i pripadnih svojstvenih vektora matrice D, gdje je

$$N_0 = \operatorname{card}\left(\left\{(i, j) \in \{0, 1, \ldots, m\} \times \{0, 1, \ldots, n\} : \left(x_i, y_j\right) \notin \Omega\right\}\right) \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

i za k takav da je $N_0 + k \leq (m + 1)(n + 1)$. Na taj način *rijetku* matricu D mogli bismo u *Pythonu* prikazati kao objekt odgovarajuće potklase klase `scipy.sparse.spmatrix` (iz paketa *SciPy*), a svojstvene vrijednosti i vektore tražiti funkcijom `scipy.sparse.linalg.eigs` (očito također iz paketa *SciPy*)[1].

Napomena 2. Umjesto matrice D, možemo proučavati matricu $h^2 D$ kao nekakvo poopćenje. Naime, na taj način račun ne ovisi o dijametru skupa Ω ni o koraku diskretizacije, nego samo o obliku skupa Ω. Pritom ostaju isti:

1. nul-vrijednosti matrice: $h^2 0 = 0$ u smjeru $D \mapsto h^2 D$, $h^{-2} 0 = 0$ obratno,

2. svojstveni vektori:

$$D\mathbf{v} = \mu\mathbf{v} \implies \left(h^2 D\right)\mathbf{v} = h^2 (D\mathbf{v}) = h^2 (\mu\mathbf{v}) = \left(h^2 \mu\right)\mathbf{v}$$

   u smjeru $D \mapsto h^2 D$ za proizvoljnu svojstvenu vrijednost $\mu \in \mathbb{R}$ matrice D i pripadni svojstveni vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$,

$$\begin{aligned}\left(h^2 D\right)\mathbf{v}_{h^2} = \mu_{h^2}\mathbf{v}_{h^2} \iff h^2 \left(D\mathbf{v}_{h^2}\right) = \mu_{h^2}\mathbf{v}_{h^2} \implies \\ \implies D\mathbf{v}_{h^2} = h^{-2}\left(\mu_{h^2}\mathbf{v}_{h^2}\right) = \left(h^{-2}\mu_{h^2}\right)\mathbf{v}_{h^2}\end{aligned}$$

   obratno za proizvoljnu svojstvenu vrijednost $\mu_{h^2} \in \mathbb{R}$ matrice $h^2 D$ i pripadni svojstveni vektor $\mathbf{v}_{h^2} \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$,

3. predznaci i međusobni omjeri svojstvenih vrijednosti: iz prethodne točke vidimo da su svojstvene vrijednosti pri prijelazu iz jedne matrice u drugu skalirane strogo pozitivnim koeficijentom h^2 odnosno h^{-2}.

[1]Memorijski je ovo inteligentnija solucija — matrica D elemente različite od 0 ima na svega 5 dijagonala, to jest, ukupno takvih elemenata ima manje od $5(m + 1)(n + 1)$ elemenata. Ukupno elemenata u matrici D ima $(m + 1)^2 (n + 1)^2$, dakle, udio onih koji su različiti od 0 ograničen je odozgo s $\frac{5}{(m+1)(n+1)}$. *Finijom* diskretizacijom ili većom domenom ovaj omjer teži u 0, a veličina matrice raste kvadratno. S druge strane, vremenski je ekstremno bolja solucija matricu D prikazati kao objekt klase `numpy.ndarray`, a svojstvene vrijednosti tražiti funkcijom `numpy.linalg.eig`, koji su oboje implementirani u paketu *NumPy*.

Zaključak

Koristimo notaciju i definirane vrijednosti kao u dijelu 2.

Za *dovoljno finu* diskretizaciju skupa $\overline{P}$ uvjet (1) možemo numerički riješiti (s određenim skaliranjem — ovisnom o dijametru skupa Ω — svojstvene vrijednosti) traženjem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora matrice $h^2 D$ pod uvjetom da svojstveni vektor na $\overline{P} \setminus \Omega$ sadrži isključivo vrijednosti 0 (što će biti zadovoljeno barem ako je ta svojstvena vrijednost različita od 0). Uistinu, za *dovoljno finu* diskretizaciju vektor $h^2 D\mathbf{u}$ i vektorska diskretizacija Δu *prilično* bi se podudarale do na koeficijent skaliranja, stoga bi za fiksirano rješenje uvjeta (1) postojala *dovoljno fina* diskretizacija tako da ono bude blisko nekom svojstvenom vektoru i pripadnoj svojstvenoj vrijednosti matrice $h^2 D$ pomnoženoj s odgovarajućim koeficijentom.

Međutim, preostaje jedna restrikcija — pretpostavili smo da vrijedi $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Taj problem *rješava* neograničenost skupa $\mathbb{Q}$ i njegova gustoća u $\mathbb{R}$: ako je $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $q \in \left(\frac{a}{b}, \frac{a}{b} + \varepsilon\right) \cap \mathbb{Q}$ i, za neki takav q, umjesto stranice a za straincu pravokutnika P možemo uzeti stranicu veličine qb tako da je P sadržan u novom, većem pravokutniku — na primjer, neka su nove granice po apscisi $x'_{\text{min}} = x_{\text{min}} - \frac{qb-a}{2}$ i $x'_{\text{max}} = x_{\text{max}} + \frac{qb-a}{2}$ (jednako tako, mogli smo korigirati i stranicu b, a mogli smo korigirati i sva 4 vrha pravokutnika). Doduše, ako neki takav racionalni broj prikazan kao do kraja skraćeni razlomak ima nepotrebno veliki brojnik ili nazivnik (na primjer, 50-eroznamenkasti broj u dekadskom zapisu), možda je bolja solucija uzeti veći pravokutnik, ali koji dopušta grublju (još uvijek *dovoljno finu*) ekvidistantnu diskretizaciju. Ostatak razmatranja ionako ne ovisi o činjenici da je P najmanji pravokutnik čije su stranice paralelne s koordinatnim osima i koji sadrži cijeli $\overline{\Omega}$, ta je pretpostavka služila samo zato da ne baratamo suviše velikim strukturama jer ionako uzimamo da je u izvan Ω konstantna nul-funkcija.