

# Numeričko računanje svojstvenih vrijednosti Dirichletovog Laplaciana

Metoda konačnih razlika

Davor Penzar

2019.

## Uvodno objašnjenje

Za prirodni broj  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , za otvoreni neprazni skup  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  i za neprekidnu dvostruko diferencijabilnu funkciju  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Laplaceov operator u točki  $\mathbf{x} \in \Omega$  označavamo s

$$\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} u(\mathbf{x}) + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(\mathbf{x}) + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} u(\mathbf{x}),$$

gdje su  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  vektori ortonormirane baze od  $\mathbb{R}^n$ . Laplaceov operator skraćeno nazivamo i *Laplacian*.

## 1. Svojstvena funkcija i svojstvena vrijednost Dirichletovog Laplaciana

**Definicija 1.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  neprazni otvoreni skup. Neprekidnu funkciju  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  dvostruko diferencijabilnu na  $\Omega$  različitu od konstantne nul-funkcije i pripadnu konstantu  $\lambda \in \mathbb{R}$  koje zadovoljavaju Dirichletov rubni uvjet

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{u } \Omega \\ u = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

zovemo **svojstvenom funkcijom** i (pripadnom) **svojstvenom vrijednošću** Dirichletovog Laplaciana na  $\Omega$ .

Pretpostavimo da za neki neprazni otvoreni skup  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  poznajemo svojstvenu funkciju  $u: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  i pripadnu svojstvenu vrijednost  $\lambda \in \mathbb{R}$  Dirichletovog Laplaciana na  $\Omega$ . Za skup  $S \subseteq \mathbb{R}$  takav da vrijedi  $\Omega \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^2$  funkciju  $u$  možemo dodefinirati do funkcije na cijelom  $S$  vrijednosti 0. Obratno, ako postoji funkcija  $v: S \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna na  $\overline{\Omega}$  čija je restrikcija  $v|_{\Omega}$  dvostruko diferencijabilna funkcija različita od konstantne nul-funkcije i za čiju restrikciju  $v|_{\overline{\Omega}}$  postoji konstanta  $\mu \in \mathbb{R}$  tako da  $v|_{\overline{\Omega}}$  i  $\mu$  zadovoljavaju uvjet (1), onda su  $v|_{\overline{\Omega}}$  i  $\mu$  svojstvena funkcija i pripadna svojstvena vrijednost Dirichletovog Laplaciana na  $\Omega$  — to posebno vrijedi i ako je  $v|_{S \setminus \overline{\Omega}}$  konstantna nul-funkcija. Uočimo da je, ako je vrijednost funkcije na rubu skupa  $\Omega$  konstantna, a izvan tog skupa poprima (također konstantno) tu istu vrijednost kao i na rubu, i ta šira funkcija neprekidna.

## 2. Numeričko računanje svojstvene funkcije i svojstvene vrijednosti Dirichletovog Laplaciana

Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  proizvoljni neprazni otvoreni ograničeni skup. Definiramo

$$\begin{aligned}x_{\min} &:= \min \left( \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \left( (x, y) \in \overline{\Omega} \right) \right\} \right) \in \mathbb{R}, \\y_{\min} &:= \min \left( \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \left( (x, y) \in \overline{\Omega} \right) \right\} \right) \in \mathbb{R}, \\x_{\max} &:= \max \left( \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} \left( (x, y) \in \overline{\Omega} \right) \right\} \right) \in \mathbb{R}, \\y_{\max} &:= \max \left( \left\{ y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R} \left( (x, y) \in \overline{\Omega} \right) \right\} \right) \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Vrijednosti  $x_{\min}, y_{\min}, x_{\max}, y_{\max} \in \mathbb{R}$  dobro su definirane jer je  $\overline{\Omega}$  neprazni kompakt. Definiramo sada točke

$$\begin{aligned}A &:= (x_{\min}, y_{\min}) \in \mathbb{R}^2, \\B &:= (x_{\max}, y_{\min}) \in \mathbb{R}^2, \\C &:= (x_{\max}, y_{\max}) \in \mathbb{R}^2, \\D &:= (x_{\min}, y_{\max}) \in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Točke  $A, B, C, D \in \mathbb{R}^2$  očito su vrhovi pravokutnika čije su stranice paralelne s koordinatnim osima; štoviše, tim su redom vrhovi pozitivno orijentirani. Označimo još taj pravokutnik s  $P \subseteq \mathbb{R}^2$  i duljine njegovih stranica s

$$\begin{aligned}a &:= |x_{\max} - x_{\min}| = \|B - A\| = \|D - C\| \geq 0, \\b &:= |y_{\max} - y_{\min}| = \|C - B\| = \|A - D\| \geq 0.\end{aligned}$$

Dokažimo da je  $\overline{\Omega} \subseteq \overline{P}$ . U tu svrhu, pretpostavimo suprotno, to jest, da postoji  $T \in \overline{\Omega} \setminus \overline{P}$ . Neka su koordinate od  $T$  označene s  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Kada bi bilo  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$  i  $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ , onda bi bilo  $T \in \overline{P}$ . Dakle, vrijedi  $x < x_{\min}$ ,  $x > x_{\max}$ ,  $y < y_{\min}$  ili  $y > y_{\max}$  — to je, pak, u kontradikciji s definicijom vrijednosti  $x_{\min}, y_{\min}, x_{\max}$  i  $y_{\max}$ .

Također, dokažimo da je  $P$  najmanji takav pravokutnik. Pretpostavimo, suprotno, da postoji pravokutnik  $Q \subseteq \mathbb{R}^2$  čije su stranice paralelne s koordinatnim osima takav da je  $\overline{\Omega} \subseteq \overline{Q} \subset \overline{P}$ . Razmislimo li što implicira desna (stroga) inkluzija, zaključujemo da to znači da postoji točka na  $\partial P$  koja nije sadržana u  $\overline{Q}$  — budući da su oba pravokutnika paralelni s koordinatnim osima, to znači da je cijela jedna stranica pravokutnika  $P$  disjunktna s  $\overline{Q}$ . No, po definiciji vrijednosti  $x_{\min}, y_{\min}, x_{\max}$  i  $y_{\max}$ , od kojih svaka (na neki način) definira jednu stranicu pravokutnika  $P$ , to znači da postoji točka  $T \in \overline{\Omega}$  koja je na  $\partial P$ , a koja nije u  $\overline{Q}$ . To je kontradikcija s inkluzijom  $\overline{\Omega} \subseteq \overline{Q}$ , drugim riječima, pravokutnik  $P$  je najmanji pravokutnik čije su stranice paralelne s koordinatnim osima i čije zatvorenje sadrži cijeli  $\overline{\Omega}$ .

Dokažimo, konačno, da je  $\Omega \subseteq P$ . Ponovo pretpostavljamo suprotno, to jest, da postoji točka  $T \in \Omega \cap \partial P$  (već je poznato da je  $\Omega \subseteq \overline{P}$ ). Po definiciji otvorenog skupa, to znači da postoji  $\varepsilon > 0$  takav da za svaku točku  $T^* \in \mathbb{R}^2$  za koju je  $\|T^* - T\| < \varepsilon$  vrijedi  $T^* \in \Omega$ . No, vrijedi  $\Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \overline{P}$  pa, koliko god malo *izađemo* iz  $\overline{P}$  od točke  $T$  (koja je, prisjetimo se, na rubu pravokutnika  $P$ ), nismo više u skupu  $\Omega$ . Dakle, takva točka  $T$  ne postoji, to jest,  $\Omega \subseteq P$ .

Kako je, po pretpostavci,  $\Omega \neq \emptyset$  i otvoren, iz svega dokazanog zaključujemo:

1.  $x_{\min} < x_{\max}$  i  $y_{\min} < y_{\max}$ ,

2.  $a > 0$  i  $b > 0$ .

Pretpostavimo da je  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ . Neka su  $m, n \in \mathbb{N}$  takvi da vrijedi  $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$ . To znači da postoji  $h > 0$  takav da je  $a = mh$  i  $b = nh$ , to jest, da je  $h = \frac{a}{m} = \frac{b}{n}$ . Diskretiziramo sada interval  $[x_{\min}, x_{\max}]$  ekvidistantnom podjelom na  $m + 1$  točaka, a interval  $[y_{\min}, y_{\max}]$  ekvidistantnom podjelom na  $n + 1$  točaka:

$$\begin{aligned} x_i &:= x_{\min} + ih \in \mathbb{R}, & i &= 0, 1, \dots, m, \\ y_j &:= y_{\min} + jh \in \mathbb{R}, & j &= 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Očito je  $x_0 = x_{\min}$ ,  $x_m = x_{\max}$ ,  $y_0 = y_{\min}$  i  $y_n = y_{\max}$ . Po dokazanomu prije znamo da za svaki uređeni par  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$  takav da je  $(x_i, y_j) \in \Omega$  (ako takav par postoji) točke  $(x_{i-1}, y_j)$ ,  $(x_i, y_{j-1})$ ,  $(x_{i+1}, y_j)$  i  $(x_i, y_{j+1})$  su dobro definirane i nalaze se u  $\bar{P}$ . Za proizvoljnu funkciju  $f: \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , inspirirani indeksiranjem diskretizacije skupa  $\bar{P}$ , označimo  $f_{i,j} := f(x_i, y_j) \in \mathbb{R}$  za svaki uređeni par  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$ .

Pretpostavimo da je funkcija  $u: \bar{P} \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna i takva da je  $u|_{\Omega}$  dvostruko diferencijabilna funkcija koja nije konstantna nul-funkcija, ali da je  $u|_{\bar{P} \setminus \Omega}$  konstantna nul-funkcija. Posebno je tada  $u(T) = 0$  za svaku točku  $T \in \partial\Omega$ . Za proizvoljnu točku  $(x, y) \in \Omega$  možemo aproksimirati, metodom konačnih razlika (pomoću Taylorovog reda),

$$\Delta u(x, y) \approx \frac{u(x+l, y) + u(x, y+l) - 4u(x, y) + u(x-l, y) + u(x, y-l)}{l^2} \quad (2)$$

za neki *dovoljno mali*  $l > 0$ , i to takav da je  $(x-l, y) \in \bar{P}$ ,  $(x, y-l) \in \bar{P}$ ,  $(x+l, y) \in \bar{P}$  i  $(x, y+l) \in \bar{P}$  (da izrazi s desne strane jednakosti budu definirani). Činjenica da je  $u$  (neprekidna) konstantna nul-funkcija i na  $\partial\Omega$  i izvan  $\bar{\Omega}$  (ako je  $\bar{\Omega} \subset \bar{P}$ ) nam ovdje ide u korist — pomakom za  $l$  po koordinatnim osima nije potrebno da točno *pogodimo* rub skupa  $\Omega$  ako je točka  $(x, y)$  *vrlo blizu* rubu od  $\Omega$ , nego rub možemo malo i *prekoračiti* jer se pri *izlasku* s  $\bar{\Omega}$  ne događaju ekstremne oscilacije po  $u$ , nego vrijednost funkcije  $u$  ostaje ista kao na  $\partial\Omega$ . Također, zbog neprekidnosti funkcije  $u$ , u točkama koje su u  $\Omega$ , ali *vrlo blizu*  $\partial\Omega$ , funkcija  $u$  poprima vrijednost blizu 0, stoga greške aproksimacije u blizini ruba skupa  $\Omega$  nisu ništa veće nego u  $\Omega$ .

Pretpostavimo da je  $h$  zadovoljavajuće mali pomak za aproksimaciju (2) i da je diskretizacija skupa  $\bar{P}$  *dovoljno fina* da postoji uređeni par  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$  takav da je  $(x_i, y_j) \in \Omega$  i  $u_{i,j} \neq 0$  (ako barem jedno od toga ne vrijedi, umjesto brojeva  $m$  i  $n$  uzmemo neke njihove višekratnike dobivene množenjem brojeva  $m$  i  $n$  istim brojem; za dovoljno finu diskretizaciju moguće je barem posljednja 2 zahtjeva ispuniti jer je  $\Omega$  neprazan i otvoren i, kako je  $u$  neprekidna funkcija koja na  $\Omega$  poprima vrijednost različitu od 0, postoji područje unutar  $\Omega$  na kojem cijelom  $u$  poprima ne-nul vrijednosti). Definiramo sada matricu

$$U := \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,n} \\ u_{1,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{m,0} & u_{m,1} & \cdots & u_{m,n} \end{pmatrix} \in M_{m+1, n+1}(\mathbb{R}).$$

Također, definiramo vektor  $\mathbf{u} = (u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{((m+1)(n+1)-1)}) \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$  tako da je  $u_{i,j} = u^{(i+(m+1)j)}$  za svaki uređeni par  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$  — vektor  $\mathbf{u}$  dobiven je konkatencijom stupaca matrice  $U$  redom od prvog do zadnjeg. Konačno, definiramo i kvadratnu matricu  $D = \left( d^{(r,s)} \right)_{r,s} \in M_{(m+1)(n+1)}(\mathbb{R})$  ovako:

1. slično kao što je od indeksiranja matrice  $U$  dobiveno indeksiranje vektora  $\mathbf{u}$ , za uređene parove  $(i_0, j_0), (i_1, j_1) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$  označimo

$$d_{(i_0, j_0), (i_1, j_1)} = d^{(i_0 + (m+1)j_0, i_1 + (m+1)j_1)},$$

2. ako je  $(x_i, y_j) \in \Omega$  za neki uređeni par  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$ , onda je

$$\begin{aligned} d_{(i, j), (i-1, j)} &= \frac{1}{h^2}, \\ d_{(i, j), (i, j-1)} &= \frac{1}{h^2}, \\ d_{(i, j), (i, j)} &= -\frac{4}{h^2}, \\ d_{(i, j), (i+1, j)} &= \frac{1}{h^2}, \\ d_{(i, j), (i, j+1)} &= \frac{1}{h^2}, \end{aligned}$$

3. svi su ostali elementi matrice  $D$  jednaki 0.

S ovakvom notacijom, jednako kao što je vektor  $\mathbf{u}$  diskretizacija funkcije  $u$  na  $\bar{P}$ , vektor  $D\mathbf{u}$  aproksimacija je diskretizacije  $\Delta u$  aproksimacijom (2) na  $\bar{P}$  (to jest, barem su njegovi elementi čiji indksi pripadaju skupu  $\Omega$  aproksimacija Laplaciana na  $\Omega$ ). Suprotnim smjerom od reindexiranja matrice  $U$  do vektora  $\mathbf{u}$ , vektor  $D\mathbf{u}$  možemo reindexirati u matričnu formu.

Pretpostavimo, naposljetku, da postoji  $\lambda \in \mathbb{R}$  takav da vrijedi

$$-D\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}. \quad (3)$$

Kako je  $D\mathbf{u}$  aproksimacija Laplaciana od  $u$  na  $\Omega$ , jednađžba (3) neodoljivo podsjeća na uvjet (1). Nadalje, tu jednađžbu možemo transformirati u oblik

$$(D + \lambda I)\mathbf{u} = 0 \quad (4)$$

iz kojeg, budući da  $\mathbf{u}$  po pretpostavci nije nul-vektor, vidimo da je  $\lambda$  svojstvena vrijednost matrice  $D$  i  $\mathbf{u}$  pripadni svojstveni vektor (alternativno, uzimamo li da je  $\mu \in \mathbb{R}$  svojstvena vrijednost matrice  $M$  ako je  $\det(M - \mu I) = 0$ , onda je  $-\lambda$  svojstvena vrijednost matrice  $D$ ).

Neka je  $\mu \in \mathbb{R}$  proizvoljna vrijednost. Neka je  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$  proizvoljan vektor čiji su elementi analogno notirani i indeksirani kao elementi vektora  $\mathbf{u}$ . Neka je  $(i, j) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, n\}$  proizvoljan uređeni par. Ako je  $(x_i, y_j) \in \Omega$ , onda se na indeksu  $(i, j)$  vektora  $(D + \mu I)\mathbf{v}$  nalazi

$$\frac{v_{i+1, j} + v_{i, j+1} - 4v_{i, j} + v_{i-1, j} + v_{i, j-1}}{h^2} + \mu v_{i, j}.$$

Ako je, s druge strane,  $(x_i, y_j) \notin \Omega$ , onda se na indeksu  $(i, j)$  vektora  $(D + \mu I)\mathbf{v}$  nalazi  $\mu v_{i, j}$ . Zaključujemo da za svaku svojstvenu vrijednost matrice  $D$  različitu od 0 pripadni svojstveni vektori reinterpretirani kao diskretizacija neke funkcije na  $\bar{P} \setminus \Omega$  nužno poprimaju vrijednost 0 (to jest, barem poprimaju u točkama tog skupa koje pripadaju odabranoj diskretizaciji).

*Napomena 2.* Umjesto matrice  $D$ , možemo proučavati matricu  $h^2 D$  kao nekakvo poopćenje. Naime, na taj način račun ne ovisi o dijametru skupa  $\Omega$  ni o koraku diskretizacije, nego samo o obliku skupa  $\Omega$ . Pritom ostaju isti:

1. nul-vrijednosti matrice:  $h^2 0 = 0$  u smjeru  $D \mapsto h^2 D$ ,  $\frac{0}{h^2} = 0$  obratno,
2. svojstveni vektori:

$$D\mathbf{v} = \mu\mathbf{v} \implies (h^2 D)\mathbf{v} = h^2 (D\mathbf{v}) = h^2 (\mu\mathbf{v}) = (h^2 \mu)\mathbf{v}$$

u smjeru  $D \mapsto h^2 D$  za proizvoljnu svojstvenu vrijednost  $\mu \in \mathbb{R}$  matrice  $D$  i pripadni svojstveni vektor  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$ ,

$$\begin{aligned} (h^2 D)\mathbf{v}_{h^2} = \mu_{h^2} \mathbf{v}_{h^2} &\iff h^2 (D\mathbf{v}_{h^2}) = \mu_{h^2} \mathbf{v}_{h^2} \implies \\ &\implies D\mathbf{v}_{h^2} = h^{-2} (\mu_{h^2} \mathbf{v}_{h^2}) = (h^{-2} \mu_{h^2}) \mathbf{v}_{h^2} \end{aligned}$$

obratno za proizvoljnu svojstvenu vrijednost  $\mu_{h^2} \in \mathbb{R}$  matrice  $h^2 D$  i pripadni svojstveni vektor  $\mathbf{v}_{h^2} \in \mathbb{R}^{(m+1)(n+1)}$ ,

3. omjeri i predznaci svojstvenih vrijednosti: iz prethodne točke vidimo da su svojstvene vrijednosti pri prijelazu iz jedne matrice u drugu skalirane strogo pozitivnim koeficijentom  $h^2$  odnosno  $h^{-2}$ .

## Zaključak

Koristimo notaciju i definirane vrijednosti kao u dijelu 2.

Za *dovoljno finu* diskretizaciju skupa  $\bar{P}$  uvjet (1) možemo numerički riješiti (s određenim skaliranjem — ovisnom o dijametru skupa  $\Omega$  — svojstvene vrijednosti) traženjem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora matrice  $h^2 D$  pod uvjetom da svojstveni vektor na  $\bar{P} \setminus \Omega$  sadrži isključivo vrijednosti 0 (što će biti zadovoljeno ako je ta svojstvena vrijednost različita od 0). Uistinu, za *dovoljno finu* diskretizaciju vektor  $h^2 D\mathbf{u}$  i vektorska diskretizacija  $\Delta u$  prilično bi se podudarale do na koeficijent skaliranja, stoga bi za fiksirano rješenje uvjeta (1) postojala *dovoljno fina* diskretizacija tako da ono bude blisko nekom svojstvenom vektoru i pripadnoj svojstvenoj vrijednosti matrice  $h^2 D$  pomnoženoj s odgovarajućim koeficijentom.

Međutim, preostaje jedna restrikcija — pretpostavili smo da vrijedi  $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ . Taj problem rješava neograničenost skupa  $\mathbb{Q}$  i njegova gustoća u  $\mathbb{R}$ : ako je  $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ , za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji  $q \in (\frac{a}{b}, \frac{a}{b} + \varepsilon) \cap \mathbb{Q}$  i, za neki takav  $q$ , umjesto stranice  $a$  za straincu pravokutnika  $P$  možemo uzeti stranicu veličine  $qb$  tako da je  $P$  sadržan u novom, većem pravokutniku — na primjer, neka su nove granice po apscisi  $x'_{\min} = x_{\min} - \frac{qb-a}{2}$  i  $x'_{\max} = x_{\max} + \frac{qb-a}{2}$  (jednako tako, mogli smo korigirati i stranicu  $b$ , a mogli smo korigirati i sva 4 vrha pravokutnika). Doduše, ako neki takav racionalni broj prikazan kao do kraja skraćeni razlomak ima nepotrebno veliki brojnik ili nazivnik (na primjer, 50-eroznamenasti broj u dekadskom zapisu), možda je bolja solucija uzeti veći pravokutnik, ali koji dopušta grublju (još uvijek *dovoljno finu*) ekvidistantnu diskretizaciju. Ostatak razmatranja ionako ne ovisi o činjenici da je  $P$  najmanji pravokutnik čije su stranice paralelne s koordinatnim osima i koji sadrži cijeli  $\bar{\Omega}$ , ta je pretpostavka služila samo zato da ne baratamo suviše velikim strukturama jer ionako uzimamo da je  $u$  izvan  $\Omega$  konstantna nul-funkcija.