



# Wave-Function-Collapse

Funktionsweise und Anwendungsfälle

Bachelorarbeit

Betreuer: Prof. Dr. rer. nat. Matthias Hopf

Studiengang: Bachelor Media Engineering

Fakultät: Elektrotechnik Feinwerktechnik Informationstechnik

Davoud Tavakol

Matrikelnummer: 3540912

Sommersemester 2023

Abgabedatum: 20 Juli 2023

Hinweis: Diese Erklärung ist in alle Exemplare der Abschlussarbeit fest einzubinden. (Keine Spiralbindung)

## **Prüfungsrechtliche Erklärung der/des Studierenden**

Angaben des bzw. der Studierenden:

Name: Tavakol

Vorname: Davoud

Matrikel-Nr.: 3540912

Fakultät: EFI

Studiengang: Media Engineering

Semester: 8

### **Titel der Abschlussarbeit:**

Wave-Function-Collapse - Funktionsweise und Anwendungsfälle

---

Ich versichere, dass ich die Arbeit selbständig verfasst, nicht anderweitig für Prüfungszwecke vorgelegt, alle benutzten Quellen und Hilfsmittel angegeben sowie wörtliche und sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet habe.

Nürnberg 28.06.2023

---

Ort, Datum, Unterschrift Studierende/Studierender

### **Erklärung der/des Studierenden zur Veröffentlichung der vorstehend bezeichneten Abschlussarbeit**

Die Entscheidung über die vollständige oder auszugsweise Veröffentlichung der Abschlussarbeit liegt grundsätzlich erst einmal allein in der Zuständigkeit der/des studentischen Verfasserin/Verfassers. Nach dem Urheberrechtsgesetz (UrhG) erwirbt die Verfasserin/der Verfasser einer Abschlussarbeit mit Anfertigung ihrer/seiner Arbeit das alleinige Urheberrecht und grundsätzlich auch die hieraus resultierenden Nutzungsrechte wie z.B. Erstveröffentlichung (§ 12 UrhG), Verbreitung (§ 17 UrhG), Vervielfältigung (§ 16 UrhG), Online-Nutzung usw., also alle Rechte, die die nicht-kommerzielle oder kommerzielle Verwertung betreffen.

Die Hochschule und deren Beschäftigte werden Abschlussarbeiten oder Teile davon nicht ohne Zustimmung der/des studentischen Verfasserin/Verfassers veröffentlichen, insbesondere nicht öffentlich zugänglich in die Bibliothek der Hochschule einstellen.

Hiermit  genehmige ich, wenn und soweit keine entgegenstehenden Vereinbarungen mit Dritten getroffen worden sind,  
 genehmige ich nicht,

dass die oben genannte Abschlussarbeit durch die Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm, ggf. nach Ablauf einer mittels eines auf der Abschlussarbeit aufgebrachten Sperrvermerks kenntlich gemachten Sperrfrist

von    Jahren (0 - 5 Jahren ab Datum der Abgabe der Arbeit),

der Öffentlichkeit zugänglich gemacht wird. Im Falle der Genehmigung erfolgt diese unwiderruflich; hierzu wird der Abschlussarbeit ein Exemplar im digitalisierten PDF-Format auf einem Datenträger beigefügt. Bestimmungen der jeweils geltenden Studien- und Prüfungsordnung über Art und Umfang der im Rahmen der Arbeit abzugebenden Exemplare und Materialien werden hierdurch nicht berührt.

Nürnberg 28.06.2023

---

Ort, Datum, Unterschrift Studierende/Studierender

**Datenschutz:** Die Antragstellung ist regelmäßig mit der Speicherung und Verarbeitung der von Ihnen mitgeteilten Daten durch die Technische Hochschule Nürnberg Georg Simon Ohm verbunden. Weitere Informationen zum Umgang der Technischen Hochschule Nürnberg mit Ihren personenbezogenen Daten sind unter nachfolgendem Link abrufbar: <https://www.th-nuernberg.de/datenschutz/>

## **Abstract**

zum schluss..



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einleitung</b>	<b>7</b>
<b>2 Textursynthesen im Vergleich</b>	<b>9</b>
2.1 Pixel basierende Textursynthese . . . . .	10
2.2 Pyramid basierende Textur Analyse / Synthese . . . . .	12
2.3 Patch basierende Textursynthesen . . . . .	14
<b>3 Wave-Function-Collapse</b>	<b>17</b>
3.1 Constraint-Satisfaction-Problem . . . . .	18
3.1.1 Was ist ein Constraint-Satisfaction-Problem (CSP)? . . . . .	18
3.1.2 CSP-Beispiel an Sudoku . . . . .	19
3.2 WFC und die Model Synthese . . . . .	22
3.2.1 Unterschiede zwischen WFC und Model Synthese . . . . .	25
3.2.2 Simple Tile Model und Overlapping Model . . . . .	26
3.3 Beispiel Implementierung . . . . .	31
<b>4 Fazit</b>	<b>35</b>



# **1. Einleitung**

Die automatische Generierung von Inhalten wie Texte, Images oder Modellen ist heutzutage Standard in vielen Bereichen der Industrie. Um solche Inhalte mit vordefinierten Parametern zu erstellen, werden oft zwei Methoden zur Generierung verwendet. AI's (Künstliche Intelligenzen) wie DALL-E2, Midjourney und Algorithmen wie die Patch Synthese. Der Vorteil von solchen Tools ist es, dass diese in kurzer Zeit qualitative Resultate generieren können und auch, wie oben erwähnt, vordefinierte Parameter als Input erhalten können um die Resultate für ihren Gebrauch anzupassen. In dieser Bachelorarbeit werde ich mich auf den Wave-Function-Collapse Algorithmus, dessen Herkunft, Funktionsweise und Anwendungsfälle fokussieren. Zuerst werden gängige nicht interaktive Textursynthesen wie die Pixel basierende Textursynthese, Pyramid basierende Textursynthese und der Patch basierende Textursynthese erläutert und wie Wave-Function-Collapse sowie andere Textursynthesen davon inspiriert wurden. Daraufhin wird das Konzept zum Lösen von Constraint-Satisfaction-Problemen (CSP) eingegangen und die Funktionsweise vom WFC Algorithmus, solche Probleme zu lösen. Anhand von Sudoku wird im Detail die Funktionsweise von solchen CSP's selbst aufgezeigt. Wave-Function-Collapse als Algorithmus für Procedural-Content-Generation (PCG) wird mit der Model Synthese von Paul Merrell verglichen und deren Unterschiede genauer betrachtet. Es wird deutlich, dass der Wave-Function-Collapse Algorithmus sowie die Model Synthese beide sowohl in ihrer Verwendung von Pixelgauiger / diskreten Synthese sowie im Lösen von CSP ähnliche Methoden verwenden und beide sich dadurch als PCG's verwenden lassen und dadurch interaktiv verwendet werden können wie beispielsweise in Videospielen.



## 2. Textursynthesen im Vergleich

Es gibt viele Möglichkeiten Textursynthese mit Algorithmen zu erzielen. Die meisten dieser Methoden basieren auf demselben Grundprinzip aus kleineren Input-Images größere oder gleich große Output-Images zu generieren. Nach D.Gomathi und Rajvi Shah [1, S.1], kann die Textursynthese wie folgt definiert werden.

Ziel einer Textursynthese ist es aus einer Texturprobe eine neue Textur zu generieren die, “wenn sie von einem menschlichen Beobachter wahrgenommen wird, durch denselben zugrundeliegenden Prozess erzeugt wird.” Das Ergebnis muss der Texturprobe ähnlich sein aber dennoch in der Wahrnehmung genügend Variation enthalten. So eine Synthese ist nicht möglich, wenn man die Eingabetextur einfach mehrfach kachelt. Dadurch erhält man keine “sauberer” Übergänge, und die einzelnen Blöcke sind klar erkennbar. (siehe Abbildung 2.1)

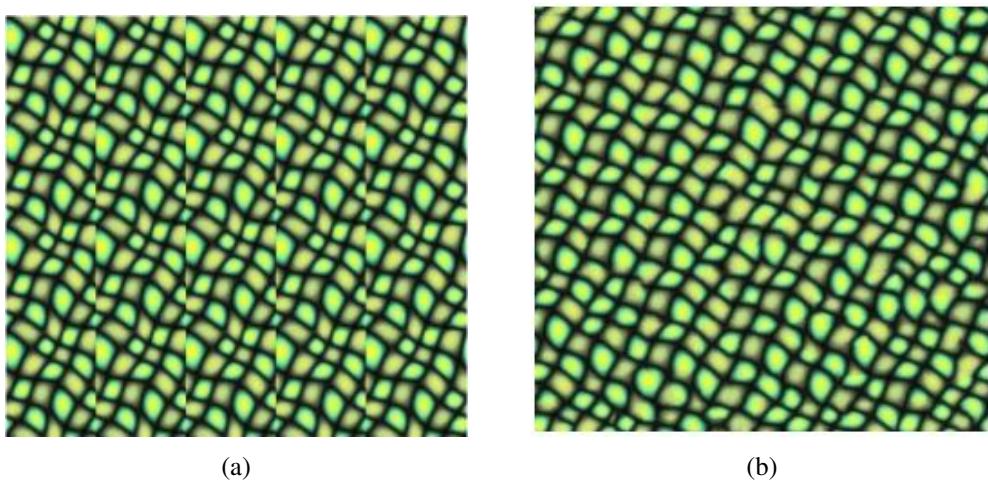


Abbildung 2.1: (a) Blockartige Textur, (b) Textursynthese

Dadurch ergeben sich folgende Metriken die erfüllt werden müssen.

- Wenn Texturprobe gegeben, generiere eine neue Textur, die der Probe gleicht.
- Die neue Textur kann eine beliebige Größe haben die vom Benutzer festgelegt wird.
- Es sollen keine sichtbaren Übergänge, Artefakte oder fehlerhafte Kanten sichtbar sein.

- Dasselbe Muster soll nicht mehrfach in der neuen Textur vorkommen. [1, S.2]

Im Folgenden werde ich auf drei verschiedene Textursyntheseverfahren eingehen da diese sich fundamental voneinander unterscheiden und verschiedene Ansätze von Synthesen aufzeigen. Es wird nicht in Detail auf alle verfahren eingegangen da dieser Abschnitt nur Hintergrundinformationen darlegen soll.

## 2.1 Pixel basierende Textursynthese

Bei dieser Methode werden neue Texturen Pixel für Pixel generiert. Jeder neue Pixelwert wird von seinen lokalen Nachbarn festgelegt. Dieser verfahren verwenden meistens Markow-Netzwerke (*Markov Random Field*)<sup>1</sup> die relativ gute Resultate liefern mit wenig Rechenlast. Markov Random Fields Methoden beurteilen jeden Pixel nach einer kleinen Menge von Nachbarn. Voraussetzung hierfür ist, dass das Input-Image stationär und lokal ist. Ein Image wird als stationär bezeichnet wenn, unter korrekter Fenstergröße, jeder betrachtete Bereich ähnlich zueinander aussehen. Lokal ist ein Image dann, wenn jeder Pixel allein von seinen Nachbarn bestimmt werden kann. [1]

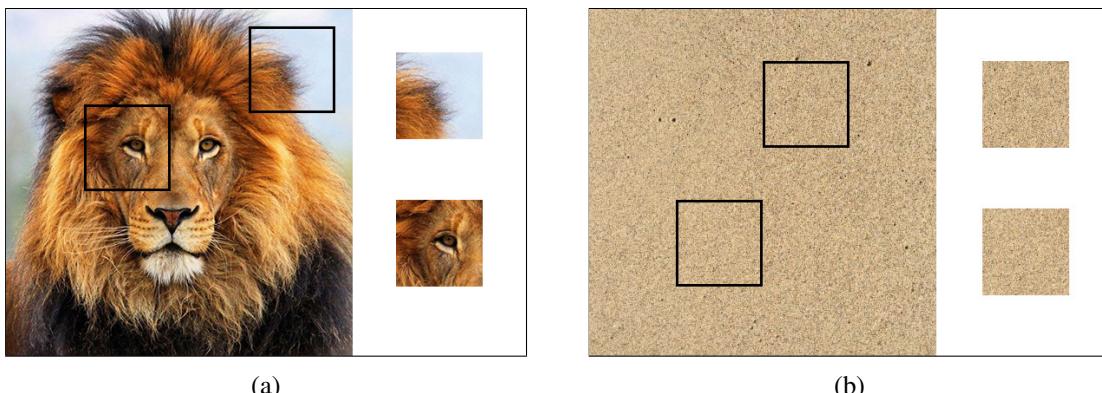


Abbildung 2.2: (a) Nicht stationär und lokal, (b) stationär und lokal.

Unterschiedliche Bereiche einer Textur sehen sich immer ähnlich (siehe Abbildung 2.2 (b)). Dies ist nicht der Fall für normale Images wie wir bei Abbildung 2.2 (a) erkennen können. Zudem ist es möglich jeden Pixel in (b) allein durch seine benachbarten Pixel zu bestimmen. Diese Attribute bezeichnet man als Stationär und Lokal. [1] Im Folgenden die Funktionsweise eines Algorithmus basierend auf Markov Random Fields nach Efros und T. Leung: [2]

---

<sup>1</sup>Auf Markow-Netzwerke und Markow-Ketten wird am Ende dieses Abschnitts genauer eingegangen.

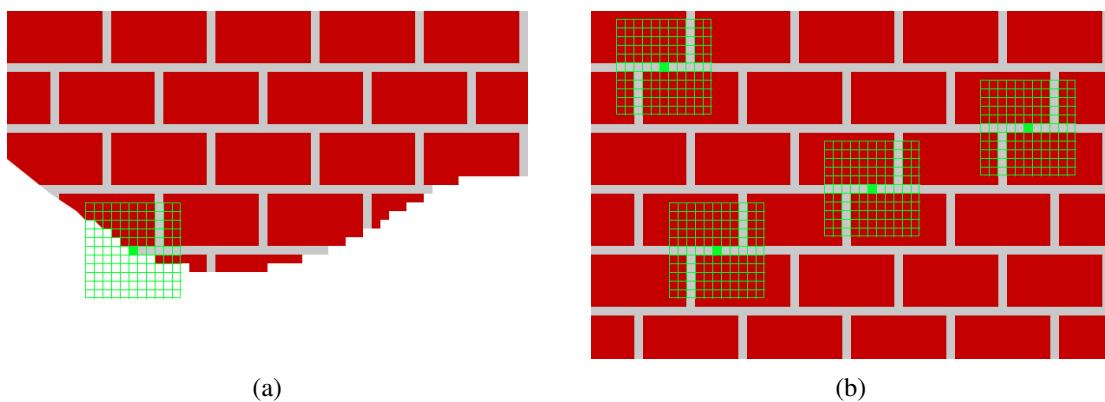


Abbildung 2.3: (a) Pixelsynthese, (b) Sampling des Input-Images.

- Zuerst wird vom Input-Image eine Teiltextrur einer bestimmten Größe (z.B.  $5 \times 5$  Pixel Fenster) ausgewählt. Von diesem Feld aus werden Spiralförmig neue Pixel generiert.
  - Für jeden Pixel der betrachtet wird, wird ein Fenster einer selbst bestimmten Größe zentral über das Pixel gelegt. Die Größe des Fensters muss nach Größe der einzelnen Elemente der Textur gewählt werden.
  - Mit dieser Gruppe von Pixel (der Zentrale Pixel und alle seiner Nachbarn im Fenster) werden nun alle im Input-Image ähnlichen  $N$  Kandidaten gesucht.
  - Danach wird zufällig von einer dieser Kandidaten ausgewählt und der betrachtete Pixel im Output wird aus diesem Kandidaten kopiert.
  - Dieser Prozess wiederholt sich so lange, bis alle nicht bekannten Pixel generiert wurden. [1, S.4]

Markow-Netzwerk und Markov-Kette

Wie bereits erwähnt basieren einige Textursynthesen auf sogenannte Markow-Netwerke oder Markov-Ketten (*Markov Chain*). In diesem Abschnitt möchte ich kurz erklären, um was es sich genau bei diesen beiden Begriffen handelt. Ein Markow-Netzwerk kann als Generalisierung einer Markow-Kette im 3D-Raum angesehen werden. Eine Markow-Kette dient dazu Wahrscheinlichkeiten zukünftiger Ereignisse anzugeben. Sie basiert auf die Theorie, dass bereits begrenzte Informationen über den vergangenen Zustand eines Systems ausreicht, um Prognosen für die zukünftige Entwicklung des Systems zu erstellen. Die Markow-Kette, oder auch Markow-Kette erster Ordnung, beschreibt konkret: "Der zukünftige Zu-

stand des Prozesses ist nur durch den aktuellen Zustand bedingt und wird nicht durch vergangene Zustände beeinflusst. [CCC]"

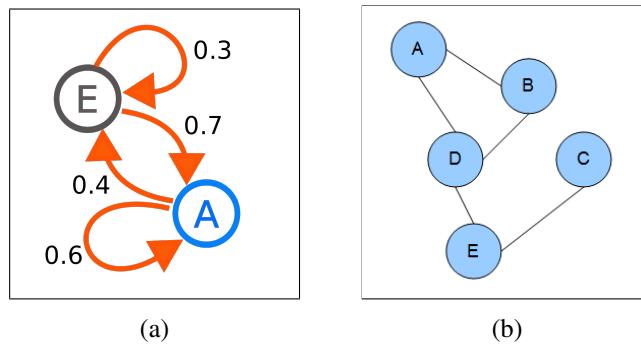


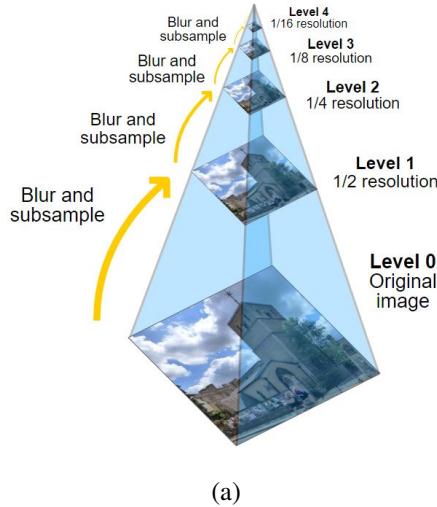
Abbildung 2.4: (a) Markow-Kette mit 2 möglichen Zuständen und deren Wahrscheinlichkeiten. Beispiel: Falls zustand  $E$ , dann gibt es eine 30% Chance das der Zustand  $E$  wieder Eintritt oder eine 70% Chance das  $A$  Eintritt. Falls wir den Zustand  $A$  haben dann sind es 60% für  $A$  und 40% für  $E$ . (b) Ein Markow-Netzwerk mit seinen Abhängigkeiten. Beispiel:  $A$  ist abhängig von  $B$  und  $D$ .  $B$  von  $A$  und  $D$ .  $D$  von  $A$ ,  $B$  und  $E$ .  $E$  von  $D$  und  $C$ . Und zuletzt ist  $C$  nur von  $E$  abhängig.

In einer Markow-Kette erster Ordnung hängt der Zustand nur vom vorhergehenden Zustand ab, während in einer in einer Markow-Kette höherer Ordnung, ein Markov-Netzwerk, jeder Zustand von seinen Nachbarn in einer von mehreren Richtungen abhängt. [DDD] Ein Markow-Netzwerk kann als Feld oder Graph von Zufallsvariablen dargestellt werden, wobei die Verteilung jeder Zufallsvariablen von den benachbarten Variablen abhängt, mit denen sie verbunden ist (siehe Abbildung 2.2).

## 2.2 Pyramid basierende Textur Analyse / Synthese

Bei der Pyramid-Methode wird das Verfahren der Bildpyramide verwendet. Hierbei werden aus dem Input-Image mehrere Output-Images in verschiedenen Auflösungen mithilfe von Glättung und Downsampling generiert (siehe Abbildung 2.5 (a)). [3]

Zudem wird ein Bildrauschen, (*Noise-Image*) der in der Regel uniform Weiß ist, verwendet. Das Noise-Image wird dann mithilfe von Histogram-Matching und der Image-Pyramid so verändert, dass es dem Input-Image ähnlich ist.



(a)

Abbildung 2.5: (a) Bildpyramide

Histogram-Matching ist die Generalisierung des Punktoperators, mehr spezifisch der Histogrammäqualisation. Bei der Histogrammäqualisation (auch Histogrammausgleich, Histogrammeinebnung, Histogrammegalisierung oder Histogrammequalisierung genannt) werden die Kontraste von Grauwertbildern derart verbessert, sodass sie über eine bloße Kontrastverstärkung hinausgeht. Dabei wird die Gleichverteilung mithilfe der Grauwertverteilung berechnet, damit der gesamte zur Verfügung stehende Wertebereich optimal ausgenutzt wird. [4] Bei dem Fall von der Pyramid-Methode nimmt der Algorithmus ein Input-Image und zwingt es über ein Paar von Nachschlagetabellen, ein bestimmtes Histogramm zu haben. Die beiden Nachschlagetabellen Tabellen sind:

1. Die kumulative Verteilungsfunktion (*cumulative distribution function (CDF)*) eines Bildes und
2. die inverse kumulative Verteilungsfunktion eines Bildes.

Die CDF ist eine Nachschlagetabelle, die das Intervall [0,256] auf das Intervall [0,1] abbildet. Die inverse CDF ist eine Nachschlagetabelle, die von [0, 1] auf [0, 256] zurückführt. Sie wird (mit linearer Interpolation) neu abgetastet, sodass die Stichproben gleichmäßig auf dem Intervall [0, 1] verteilt sind. [3]

Während der Algorithmus weiter Iteriert, beginnt das Noise-Image dem Input-Image zu ähneln. Wir Stoppen die den Prozess, wenn wir eine ausreichende Ähnlichkeit erreicht haben oder wir eine von uns festgelegte Anzahl von Iterationen erreicht haben.



Abbildung 2.6: (a) Projektion der Bildpyramide, (b) Input-Image, (c) Teilband-Bilder vom Input-Image.

Obwohl die Pyramid-Methode ist im Detail viel komplizierter ist, werde ich sie hier nicht weiter Behandeln da sie für das weitere Verständnis dieser Arbeit keine Relevanz hat und nur eine weitere Synthesemethode darstellen soll.

## 2.3 Patch basierende Textursynthese

Die Patch-Based Textursynthese (*auch Quilten genannt*) ist gewissermaßen eine Erweiterung der Pixel basierende Textursynthese. Hier werden statt einzelne Pixel gleich direkt ganze Felder (*Patches*) verglichen und generiert (siehe Abbildung 2.7). Auch hier werden die Patches mithilfe ihrer benachbarten Pixel bestimmt und ausgewertet. Dadurch erhöht sich die Qualität und die Geschwindigkeit des Algorithmus.

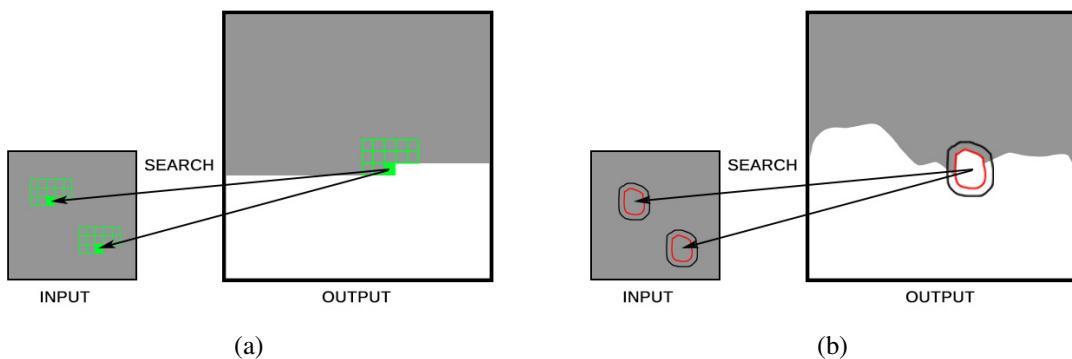


Abbildung 2.7: (a) Pixel-Based, (b) Patch-Based.

Ein Problem dieser Synthese im Vergleich zur Pixel-Based Synthese ist, dass sich hier die neuen Patches mit bereits vorhandenen Patches überschneiden. Es gibt viele Methoden, um dieses Problem zu lösen. Eine davon ist es Patches mit verschiedenen Größen zu

verwenden, damit die Konfliktbereiche zwischen den Patches durch das Phänomen der visuellen Maskierung (*Visual Masking*) reduziert werden. Gerade bei stationären Texturen erreicht diese Methode gute Ergebnisse. [5]

Die Funktionsweise des Algorithmus nach D.Gomathi und Rajvi Shah:

1. Generierung des ersten Patches in der oberen-linken Ecke des Output-Images. Der Patch wird zufällig aus dem Input-Image ausgewählt.
2. Von links-nach-rechts und von oben-nach-unten werden im Output-Image folgende Aufgaben ausgeführt.
  - Auswahl des nächsten hinzuzufügenden Feldes aus dem Input-Image aus den am besten passenden Patches.
  - Berechnen der Fehlerfläche zwischen diesem neuen Patch und seinem Überlappungsbereich mit bereits verarbeiteten Patches.
  - Berechnen des Pfades mit den geringsten Kosten durch die Fehlerfläche, um die Patch grenze zu bestimmen, und fügen Sie dann den neuen Patch zum Output-Image hinzu.

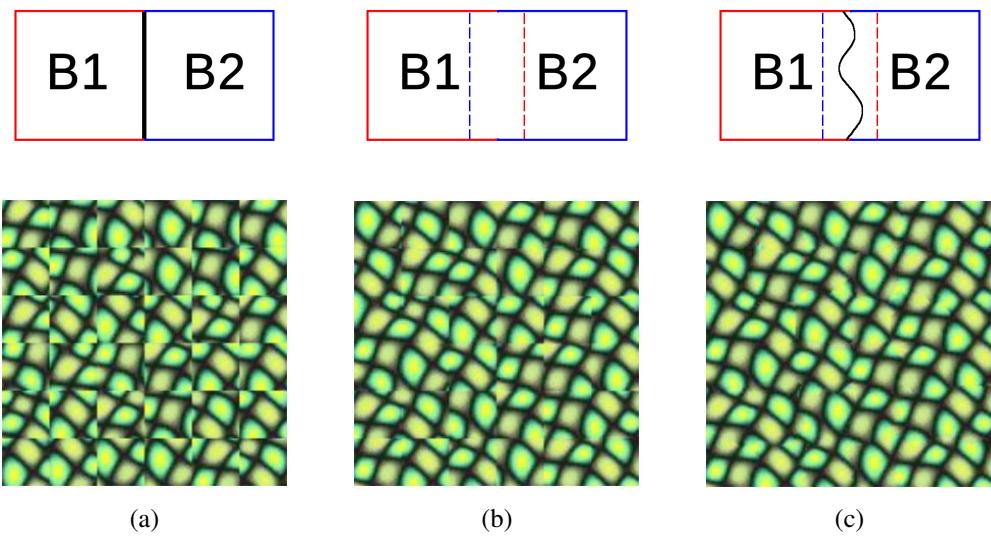


Abbildung 2.8: (a) Zufällige Patch Anordnung, (b) Patches eingeschränkt durch Nachbarn, (c) Minimal Fehler Randschnitt. Nach Alexei A. Efros und William T. Freeman. [5]



### 3. Wave-Function-Collapse

Wichtig bei allen Textursynthesen ist, dass die Muster des Output-Images immer lokal ähnlich oder gleich dem Input-Images sind. Das wird größtenteils dadurch erzielt, dass aus dem Input-Image kleinere Subimages, Patches oder Pixel extrahiert werden. Bei den Verfahren, wo die lokale Ähnlichkeit nicht 1-zu-1 bzw. pixelgenau stattfindet, werden die Pixel und deren Farbwert oft nach Grundlage der Abstandsmetrik (z.B. dem euklidischen Abstand von Pixelfarvektoren) beurteilt. Solche Verfahren finden meistens in der rein visuellen Computergrafik Anwendung. Diese Methodiken haben große Nachteile im Gegensatz zu Algorithmen wo das lokale Muster des Outputs pixelgenau dem Input-Image gleicht. Gerade bei PCG (Procedural-Content-Generation) kann die Pixelgenauigkeit von großen Nutzen sein da dadurch Abgrenzungen der Pixel innerhalb des Output-Images klar definiert sein können. [6] Von allen oben beschriebenen Textursynthese Methoden ist WFC wahrscheinlich der Patch-Based Methode am ähnlichsten.

Gumin hat sich von der Arbeit von Paul Merrell inspirieren lassen, obwohl dieser sich hauptsächlich mit der Generierung von 3D-Modellen befasst hatte. Bei seinem Verfahren werden die Modelle mithilfe von bereits erstellten Bausteinen zusammengesetzt. Das ist dahingehend wichtig da in vielen Textursynthesen gerade bei den Übergängen die Pixel sich mischen und somit Artefakte bilden können. Dieser Verhalten ist bei WFC und dem Verfahren von Paul Merrell nicht möglich da es sich um eine diskrete Synthese handelt. Jedes lokale Muster ist immer im Input wiederzufinden (siehe Abbildung 3.1). [6, 7, 8]

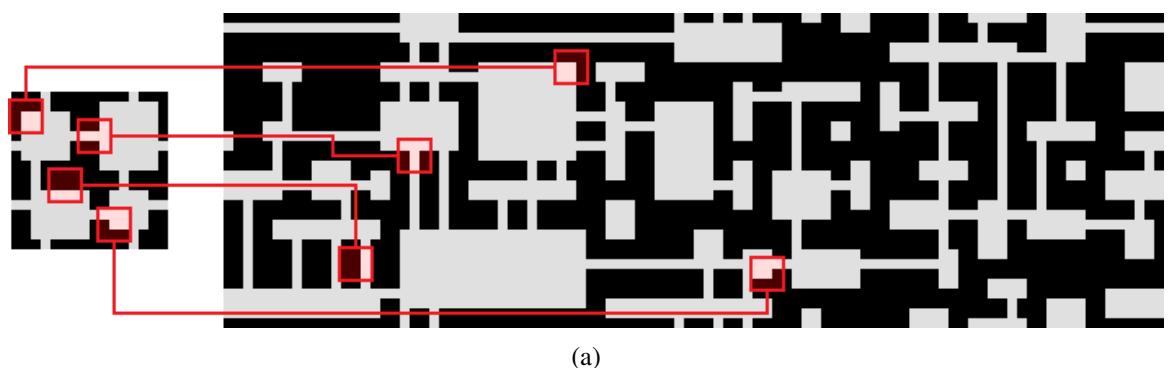


Abbildung 3.1: (a) WFC generiertes Muster.

## 3.1 Constraint-Satisfaction-Problem

Der WFC von Gumin ist lose an der Quantenmechanik angelehnt. Das liegt daran, dass bei der Synthese von WFC in jeder Zelle des  $N \times N$  Output-Images theoretisch jedes Muster / Pixelwert vorkommen kann bevor sie final festgelegt werden. Dieser Zustand nennt sich *Superposition*. Jede Zelle hat mehrere Eigenwerte (*eigenstates*) und somit auch eine maximale Entropie bzw. einen maximalen Informationsgehalt. Auch hat jede Zelle bestimmte Regeln, bestimmt durch ihre Nachbarn, die erfüllt werden müssen. Denn nicht jede Zelle kann an jeder Position auftauchen, sobald bereits eine Zelle ein Eigenwert erhält. (Siehe Patch-Based Textursynthese. Nicht jeder Patch kann an einer beliebigen Position sein. Sie müssen sich schließlich an den Nachbarn anpassen damit die Synthese nahtlos ist.) Sobald eine Zelle bekannt wird (*Observation*) und damit nur einen Eigenwert besitzt, dann wird die Entropie aller anderen Zellen angepasst. "Nach dieser Auffassung ist der "collapse" der Wellenfunktion kein physikalischer Prozess und spiegelt lediglich eine Aktualisierung unserer Informationen über das System wider" [9, S.5, 2.2 The wave function] Da der WFC Algorithmus genau auf diese Art und Weise seine Synthese durchführt, dann kann man den WFC auch als Löser für solche Bedingungserfüllungsprobleme (*Constraint-Satisfaction-Problem*) verwenden.

### 3.1.1 Was ist ein Constraint-Satisfaction-Problem (CSP)?

Grundsätzlich beschreiben CSP's Gruppen von Objekten denen Variablen zugeteilt sind. Diesen Variablen sind Regeln, sogenannte (*constraints*), auferlegt die erfüllt werden müssen. Jeder dieser Variablen hat zu Beginn eine Superposition und kann damit jeden Wert enthalten. Die Aufgabe von Algorithmen zum Lösen von CSP's (*solver*) ist es einen Zustand (*State*) zu finden in denen alle constraints erfüllt sind und jeder Variable nur noch ein Wert zugeordnet ist. Für solche Probleme finden sich oft bei der Künstlichen Intelligenz und aus dem Operations Research. [10] Im Fall von WFC sind die Objekte, denen die Variablen zugeteilt sind, die einzelnen Bereiche im Output-Image. Jeder dieser Bereiche muss ein lokales Muster aus dem Input zugeordnet werden. Immer, wenn einem Bereich ein Wert zugeordnet wird, dann werden auch die benachbarten Bereiche damit beeinflusst (*Propagation*). Der Gesamtprozess, wenn sich eine Gruppe aus Superpositionen mit mehreren Eigenwerten zu einem einzelnen Eigenwert aufgrund von Interaktion mit der Außenwelt (*Observation*) reduziert, nennt sich Wave-Function-Collapse. [9] Während dem Prozess einen gültigen State für das CSP zu finden, dann gibt es immer Situationen in dem es mehrere gültige Optionen für eine Variable gibt. Wenn so eine Situation auftritt, dann haben verschiedene Solver verschiedene Ansätze. Einige Algorithmen wähle zufällig eine der möglichen Werte

von momentan zulässigen Optionen. Bei so einem Ansatz kann es sein das der Algorithmus nicht auf einen Zustand kommen kann, in dem alle constraints erfüllt werden können. In so einem Fall gibt es Rücksetzverfahren (*Backtracking*) bei dem der Algorithmus zu seinem letzten Ergebnis zurückfällt und ein anderen Wert für die Variable setzt, um aus dem ungültigen Zustand zu kommen. Andere Algorithmen verwenden zusätzliche Heuristiken abgesehen von den bereits bekannten constraints, um die Möglichkeit eines ungültigen Zustandes zu reduzieren. [6]

### 3.1.2 CSP-Beispiel an Sudoku

Es gibt viele verschiedene CSP Probleme. Eines der bekanntesten Probleme, welchen viele Menschen schon fast täglich selbst lösen, ist Sudoku. Sudoku ist ein CSP welcher am besten auch die Funktionsweise von Gomins WFC aufzeigt, da die Constraints der Probleme sehr ähnlich sein können.

Wenn wir ein Sudoku Feld ohne initiale Zahlen betrachten (*unobserved*), dann kann in jedem einzelnen Feld theoretisch jede Zahl vorhanden sein (*Superposition*).

(a)

Abbildung 3.2: (a) Sudoku Feld unbeobachtet in einer Superposition.

Die Regeln (*constraints*) dieses CSP sind wie folgt:

1. Jede Zeile, Spalte und jedes Quadrat (je 9 Felder) muss mit den Zahlen 1-9 ausgefüllt werden.
  2. Keine Zahl innerhalb der Zeile, Spalte oder des Quadrats darf sich wiederholen.

Der nächste Schritt ist die *Observation*, sprich das erste Feld mit seinen vielen Eigenwerten einen festen wert Zuordnen. Dadurch treten für die benachbarten die Constraints ein, die bestimmen welche Werte sie nun noch einnehmen können.

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	5	6
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9

(a)

Abbildung 3.3: (a) Sudoku Feld mit dem ersten Input.

Nach dem ersten Input reduziert sich die Entropie aller Zellen in jeder betroffenen Zeile, Spalte und Quadrat bzw. ihre Anzahl an möglichen Eigenwerten reduziert sich. Als nächsten Schritt könnte man jetzt eine beliebige Zelle auswählen und diese auf einen Zufälligen möglichen Eigenwert setzen. Allerdings besteht so immer die Möglichkeit, dass der Prozess an einen Punkt kommt, an dem kein gültiger Zustand erreicht werden kann. Um dieses Szenario unwahrscheinlicher zu machen (aber immer noch möglich!) können wir uns Heuristiken zu nutzen machen, um eine Auswahl zu treffen die uns wahrscheinlicher zu einem gültigen Endzustand bringt. In diesem Fall können wir uns eine Zelle aussuchen die Bereits eine sehr niedrige Anzahl an möglichen Eigenwerten hat. Dadurch ist die Chance geringer das wir eine Zelle auf einen ungünstigen Wert setzen, der später zu einem ungültigen

Endzustand führt.<sup>2</sup>

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2		2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2		2	3	1	2	3	1	2	3	1
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2		1	2		1	2		2	1	2	1	2		1	2	
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	4	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2		5	6		1	2	3	1	2	3
4			4			4						4			4		
7	8	9	7	8	9	7	8	9				7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2		2	1	2	1	2	3	1	2	3
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	4	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
1	2	3	1	2	3	1	2		2	3	2	3	1	2	3	1	2
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9
2	3		2	3		2			1	2		2	3		2	3	
4	5	6	4	5	6	4	5	6	1	4	5	6	4	5	6	4	5
7	8	9	7	8	9	7	8	9		7	8	9	7	8	9	7	8
1	2	3	1	2	3	1	2		2	3	2	3	1	2	3	1	2
4	5	6	4	5	6	4	5	6	4	6	4	5	6	4	5	6	4
7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9	7	8	9

(a)

Abbildung 3.4: (a) Sudoku Feld mit mehreren festgelegten Zellen. Blau markierte Zellen sind mögliche Kandidaten für nächsten Zyklus.

Dieser Zyklus wiederholt sich so lange, bis alle Zellen ausgefüllt sind.

## 3.2 WFC und die Model Synthese

Wir hatten bereits erwähnt das Gumin's Wave-Function-Collapse Algorithmus von Paul Merrell's diskreter Model Synthese inspiriert ist. Die Model Synthese hingegen ist nicht nur ein Löser für CSP's wie WFC, sondern ebenfalls auch von der Patch-Based Synthese inspiriert. Textursynthese funktionierte im Allgemeinen relativ gut in vielen Bereichen.

---

<sup>2</sup>Dies ist nicht zwingend der Fall für WFC. Dazu später mehr.

Allerdings taten sich einige Synthesen schwer damit, mit festen Strukturen als Input zu arbeiten, als auch Objekte im 3D-Raum zu generieren. Diese Probleme wollte Paul Merrell mit seiner Model Synthese lösen.

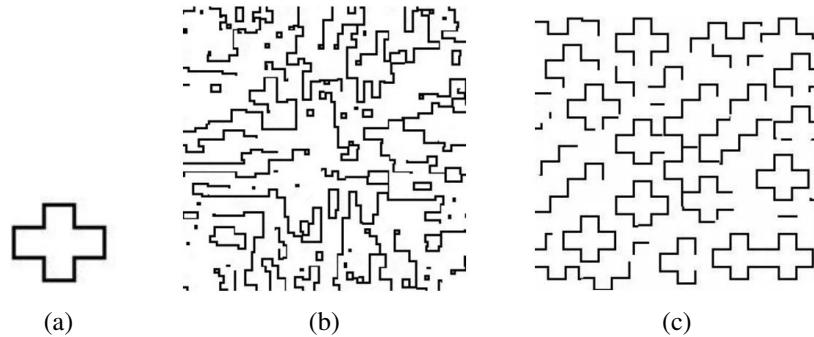


Abbildung 3.5: (a) Input Struktur, (b) Alexei A. Efros and Thomas K. Leung 1999, (c) Kwatra et al., 2005. [7]

In Abbildung 3.5 können wir klar die Schwachstellen von anderen Textursynthesen erkennen.

Paul Merrell erkannte das viele natürliche und künstliche Objekte aus sich immer wiederholenden Komponenten bestehen. Deswegen kam er auf die Idee, anstatt mit einzelnen Pixel, lieber mit ganzen Komponenten zu Arbeiten. Dadurch konnte er neue Objekte sowohl in 2D als auch in 3D-Raum generieren.

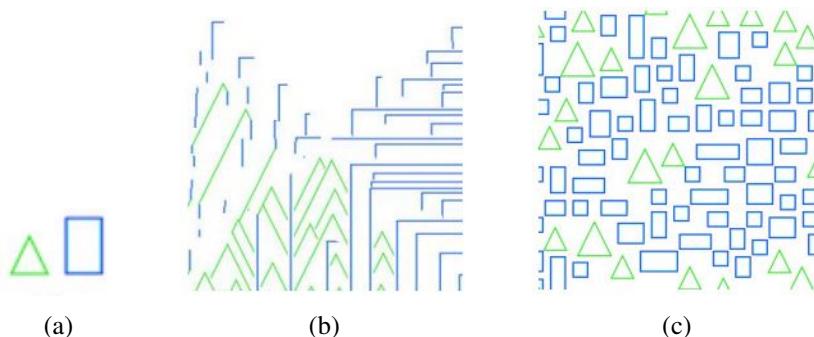


Abbildung 3.6: (a) Input Struktur, (b) Alexei A. Efros and Thomas K. Leung, (c) Paul Merrell Model Synthese. [7]

Anders als bei Sudoku, gibt es hier die Regel der Adjazenz-Bedingung (*adjacency constraint*). Die Adjazenz-Bedingung stellt sicher, dass alle Teile des Modells nahtlos zusammenpassen und dass das neue Modell dem Input ähnelt.

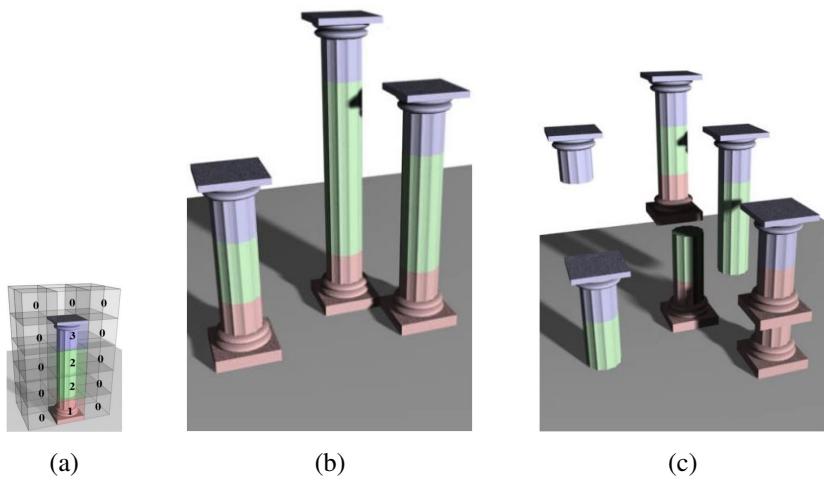
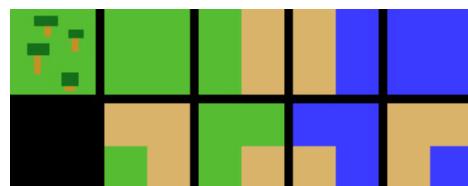


Abbildung 3.7: (a) 3D-Modell in Komponenten aufgeteilt, (b) Komponente nahtlos zusammengesetzt, (c) Komponente halten Adjazenz-Bedingung nicht ein. [7]

Der Grundsätzliche ablauf der Model Synthese, im 2D-Raum, ist wie folgt:

1. Erstelle Module.



2. Wähle Zelle unter eventueller Berücksichtigung von Heuristiken.
3. Kollabiere Zelle auf einen Eigenwert.
4. Errechne neue mögliche Eigenwerte der benachbarten Zellen (*Propagation*).



## 5. Wiederhole Schritte 2 - 4.

An diesem Punkt ist es wichtig zu erwähnen, dass es sich hierbei bereits um die “Simple Tile Model” des WFC Algorithmus handelt.

### 3.2.1 Unterschiede zwischen WFC und Model Synthese

Tatsächlich ist der WFC Algorithmus von Gumin und die Model Synthese von Merrell, in der Ausführung der oben genannten Schritte, exakt derselbe Algorithmus.

Der Unterschied zwischen den beiden Algorithmen besteht lediglich in der Implementierung der einzelnen Schritte sowie in zusätzlichen Optimierungen, die die Model Synthese im Vergleich zu WFC besitzt. Laut Paul Merrell gibt es mehrere Unterschiede in der Implementierung.

Eine davon ist die Reihenfolge der Auswahl der nächsten Zelle. Während WFC nach der niedrigsten Entropie Heuristik seine Zelle auswählt, wählt die Model Synthese nach der Scanline-Methode, in der erst Reihe für Reihe durch das Modell / Bild iteriert wird, seine Zelle aus. Interessanterweise verursacht die Zellenauswahl von WFC mehr Fehlerzustände bei großen Output-Images. Auch die Komplexität des Inputs kann dazu beitragen das WFC nicht zu einem Ergebnis kommt, während das bei der Model Synthese wesentlich unwahrscheinlicher ist.

Ein weiterer Grund warum die Model Synthese gerade bei großen Modellen wesentlich öfter zu Ergebnissen kommt, ist die Blockweise Generierung vom Output-Image. In Paul

Merrells Model Synthese wird der Output Blockweise generiert und nicht komplett in einem Durchgang. Das ist für die Generierung von großen Outputs, vor allem bei 3D-Modellen, von großer Bedeutung da dadurch die Fehlerquote bei einigen Inputs signifikant reduziert wird. WFC teilt sein CSP nicht in kleinere Blöcke auf, da der Output von WFC in der Regel kleiner ist, und die Verarbeitung im 2D-Raum wesentlich einfacher. Das bedeutet nicht das WFC von so einer Implementierung nicht profitieren würde, vor allem wenn man WFC im 3D-Raum verwenden möchte. Jedoch kann ab diesen Punkt einfach die Model Synthese verwendend werden. [11]

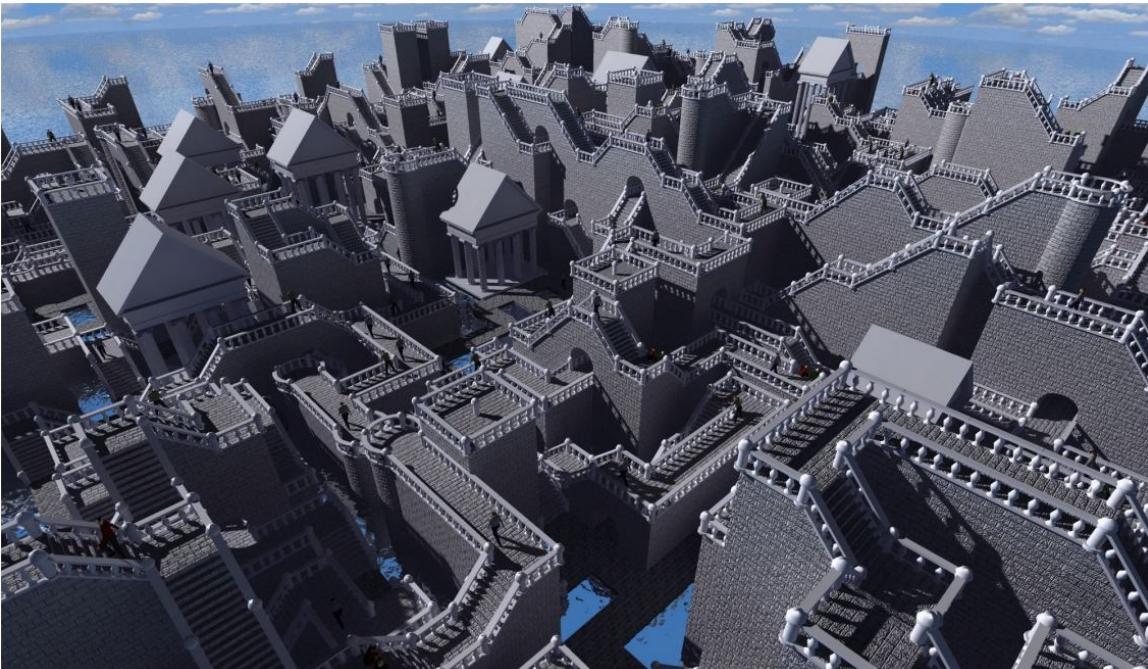


Abbildung 3.8: 3D-Modell generiert mit Model Synthese. Aus [11]

Neben weiteren Unterschieden wie die Laufzeit und der Erweiterbarkeit der beiden Algorithmen so gibt es noch einen weiteren Unterschied den WFC implementiert. Das sogenannte Overlapping Model von WFC, das in der Originalversion von Gumin vorkommt, ist das, was WFC initial so bekannt gemacht hat.

### 3.2.2 Simple Tile Model und Overlapping Model

Anders als bei der Simple Tile Model von WFC, wo die einzelnen Module / Patches für die Synthese einzeln bereitgestellt werden, benötigt das Overlapping Model von WFC ein komplettes Input-Image welches Analysiert wird. Aus dieser Analyse werden die Module automatisch generiert. Zudem haben sich die Patches bei der Simple Tile Model nicht überschnitten was bei dem Overlapping Model, offensichtlich, der Fall ist. Das hat den Vorteil

das die Patches ganz einfach aus dem Input errechnet werden können und der Output sieht dem Input ähnlicher da die Patches enger aneinander liegen. [11]

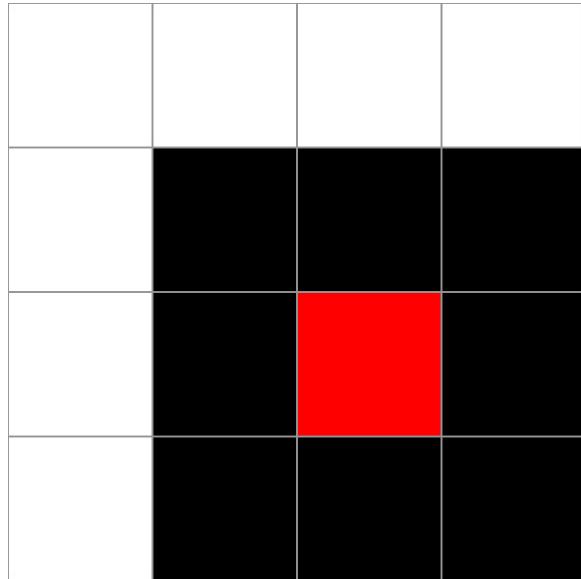


Abbildung 3.9:  $4 \times 4$  Pixel Red-Maze Beispiel Input. [6]

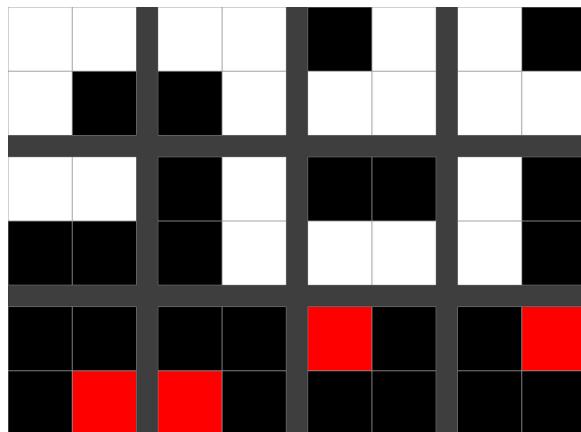


Abbildung 3.10: Alle Red-Maze Module der Größe  $N = 2$  mit Spiegelungen und Rotationen. [6]

Bei einem  $N = 2$  Patch gibt es insgesamt 9 verschiedene Möglichkeiten wie diese übereinander liegen können. (Wenn  $N = 3$  dann  $(2(N - 1) + 1)^2 = 36$  offsets.) Der WFC Algorithmus legt eine Indexstruktur an, die die Möglichkeiten beschreibt, wie ein die Muster nebeneinander platziert werden können. Bei diesem Model enthält der Index die vorberechnete Anzahl an gültigen Patches, die an einem anderen Index mit  $x, y$ -Offset platziert werden darf. Man kann sich vorstellen das jede Zelle im Sudoku Feld ein bestimmte  $x, y$  Koordinate besitzt damit durch diese iteriert werden kann. Sobald ein Feld einen Wert be-

sitzt, dann werden in allen benachbarten Zellen die Patches entfernt, die nicht nutzbar sind. [6]

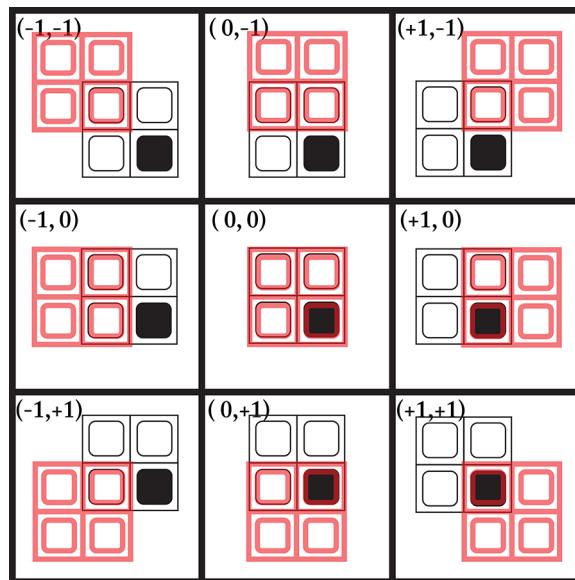


Abbildung 3.11: Die 9 Möglichkeiten wie die Patches übereinander liegen können. Aus [6]

In Abbildung 3.11 sehen wir einen Ausschnitt einer einzelnen Zelle mit allen möglichen Patches die an seinen benachbarten  $x, y$ -Offsets erlaubt sind. Angemerkt sei das bei offset  $(0,0)$  (kein Offset) immer nur ein möglicher Patch nutzbar ist, der betrachtete Patch (bzw. die Zelle mit bereits einzelnen Eigenwert) selbst. (Siehe z.B. Offset  $(-1,0)$ . Dort sind nur Patches möglich die Rechts 2 weiße Pixel besitzen damit sie sich nahtlos mit den 2 weißen Pixel bei  $(0,0)$  überlappen können) [6]

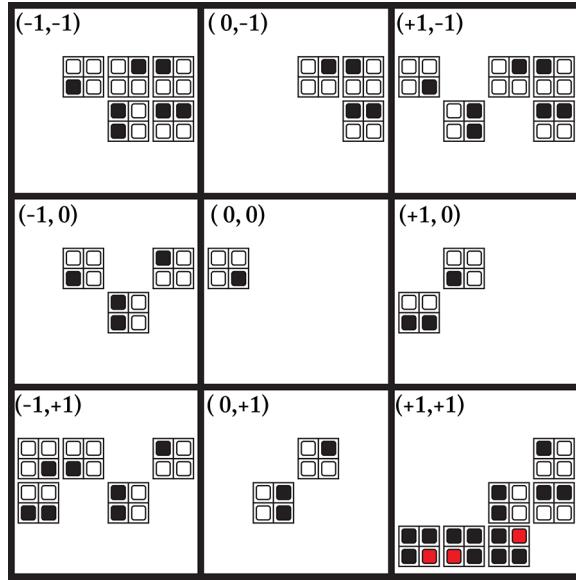


Abbildung 3.12: Ausschnitt einer Zelle. Von 12 möglichen Patches sind nur die gültigen Optionen für die benachbarten Zellen mit  $x, y$ -Offset möglich. Aus [6]

In diesem Beispiel wurden mit  $N = 2$ , also eine Fenstergröße von 2 Pixel, die Module aus dem Input generiert. Die Fenstergröße wird selbst von Entwickler festgelegt und hat direkten Einfluss auf den Output. Falls  $N = 1$  festgelegt wird dann befinden wir uns wieder beim Simple Tile Model. Allerdings funktioniert  $N = 1$  in diesem Fall nicht, da jeder Pixel zu einem “Patch” wird die wir diese selbstverständlich nicht mehr überlappen können. Bei zu kleiner Fenstergröße kann es sein, das der Output nicht dem Input ähneln. Andersrum bei einer zu großen Fenstergröße dem Input zu ähnlich. Man muss aufpassen welche Größe man wählt, um ein gewünschtes Ergebnis zu erhalten.

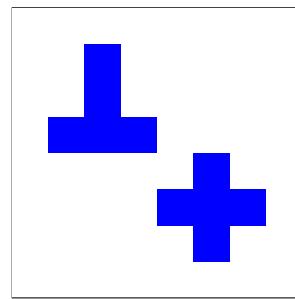


Abbildung 3.13: Beispiel Input-Image ( $8 \times 8$  Pixel) für Overlapping Model.

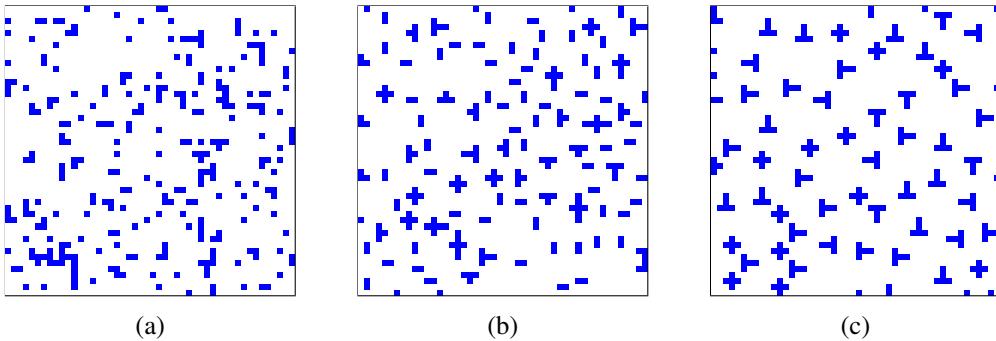


Abbildung 3.14: (a) Output mit  $N = 2$ , (b) Output mit  $N = 3$ , (c) Output mit  $N = 4$ . Beispiele generiert mit Kchapelier's Overlapping Model.<sup>3</sup>

Es ist wichtig anzumerken das viele der hier gezeigten Texturen auch mit aktuellen Textursynthese-Algorithmen generiert werden können. Der Vorteil von Model Synthese und WFC im Vergleich zu anderen Synthesen ist das der generierte Content auch Interaktiv genutzt werden kann, da wir vollen Kontrolle über die lokalen Muster des Outputs haben. Gerade der Simple Tile Model bietet sich deswegen für Procedural-Content-Generation (PCG) an, da wir hier auch volle Kontrolle über die einzelnen Module / Patches haben, dann zusammengesetzt werden für den Output. Dadurch bietet sich WFC gerade für die Spiele-Entwicklung an, da dadurch keine unvorhersehbaren Artefakte entstehen können. Andersrum hingegen wenn statt einem lokalen und stationären (siehe Abbildung 2.3) Input ein Foto verwendet wird, dann würden die anderen Synthesemethoden passendere Ergebnisse liefern im Gegensatz zur Model Synthese und WFC. Es sei erwähnt das der Input für WFC nicht “strikt” eine Textur wie in Abbildung 2.3 (b) sein muss. Sie sollte allerdings Selbstähnlichkeit besitzen und nur wenige unterschiedliche Pixelfarben verwenden.

Bereits ein Tag nach der Veröffentlichung von Gumin’s WFC am 30. September 2016 haben viele Entwickler bereits begonnen mit diesem Algorithmus zu experimentieren. Grund für die große Beliebtheit dafür ist nicht nur die bereits erwähnten Pixelgenauigkeit und die damit einhergehende Möglichkeit den Output Interaktiv zu nutzen, sondern auch die live Generierung des Outputs selbst. Viele PCG’s Methoden variieren in ihrer Laufzeit bei der Generierung ihres Outputs. Dies führt dazu das manchmal bereits Großteile des Outputs sofort generiert werden, dafür aber der Abschluss aufgrund von komplexen constraint solving Algorithmen nicht gleichmäßig entsteht. [6] Da WFC nach der niedrigsten Entropie Heuristik seine nächste Zelle auswählt und im Overlapping Model alle benachbarten Zellen, die nicht kollabiert sind, alle möglichen Pixelwerte enthalten, dann führt das zu einer sehr schön anzusehenden Generierung des Outputs.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup>Maxim Gumin’s erster WFC tweet “Procedural generation from a single example by wave function collapse <https://github.com/mxgn/WaveFunctionCollapse>”

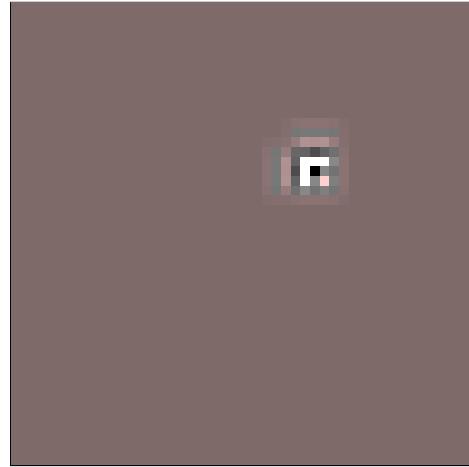


Abbildung 3.15: Resultat des ersten Zyklus mit dem Red-Maze Input. Da am Anfang die Entropie überall gleich ist, wird die Anfangszelle zufällig gewählt. Da der Algorithmus bereits die möglichen Patches der benachbarten Zellen ausgewertet hat, werden die Zellen mit allen verwendbaren Patches eingefärbt. (Die Pixelfarben werden dann gemischt). Dadurch ist der Bereich direkt um der Anfangszelle nicht in einer einheitlichen Farbe dargestellt, da es dort bereits weniger Optionen gibt die verwendet werden können. (Siehe Abbildung 3.12) [6].

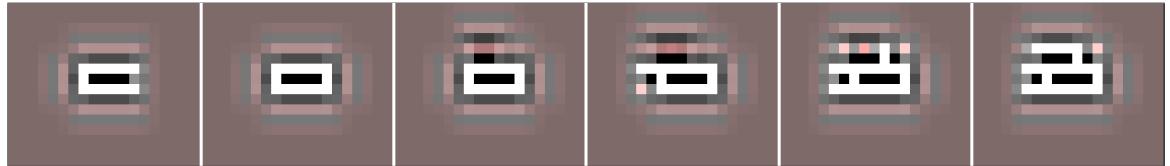


Abbildung 3.16: Die nächsten Zyklen für das Red-Maze Input. [6]

### 3.3 Beispiel Implementierung

Joseph Parker war einer der ersten, die WFC verwendet haben. In seinem *Proc Skater 2016* verwendet er den Algorithmus in Unity um einzigartige 3D Skateparks zu generieren. Er verwendete selbst erstellte Blöcke, aus denen die Karten generiert werden sollen, anstatt sie automatisch aus einem Input zu analysieren. [12] J. Parker zufolge benutzt er das Simple Tile Model für den Skatepark.<sup>5</sup>

---

<https://twitter.com/ExUtumno/status/781833475884277760>

und Danny Wynne's "3d tile placement with WFC. This algorithm is amazing. Inspired by @OskSta and based on @ExUtumno work #screenshotsaturday #gamedev #indiedev"

<https://twitter.com/dwtw/status/810166761270243328> [6]

<sup>5</sup>Persönliche Kommunikation, 23. Mai 2023

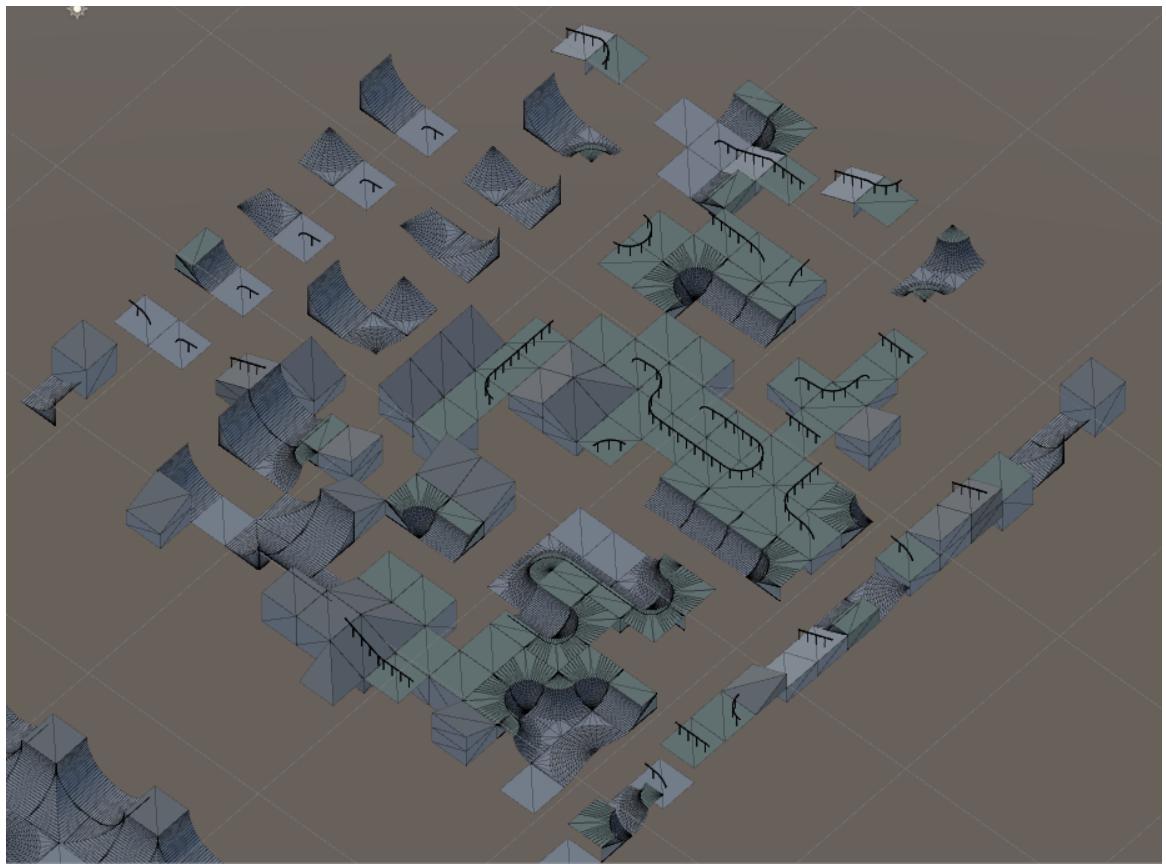


Abbildung 3.17: Blöcke zu Generierung des Skateparks in *Proc Skater 2016*. [12]

Die adjacency constraints für diese Blöcke werden aus einer ruleset *.xml* ausgelesen und angewendet.

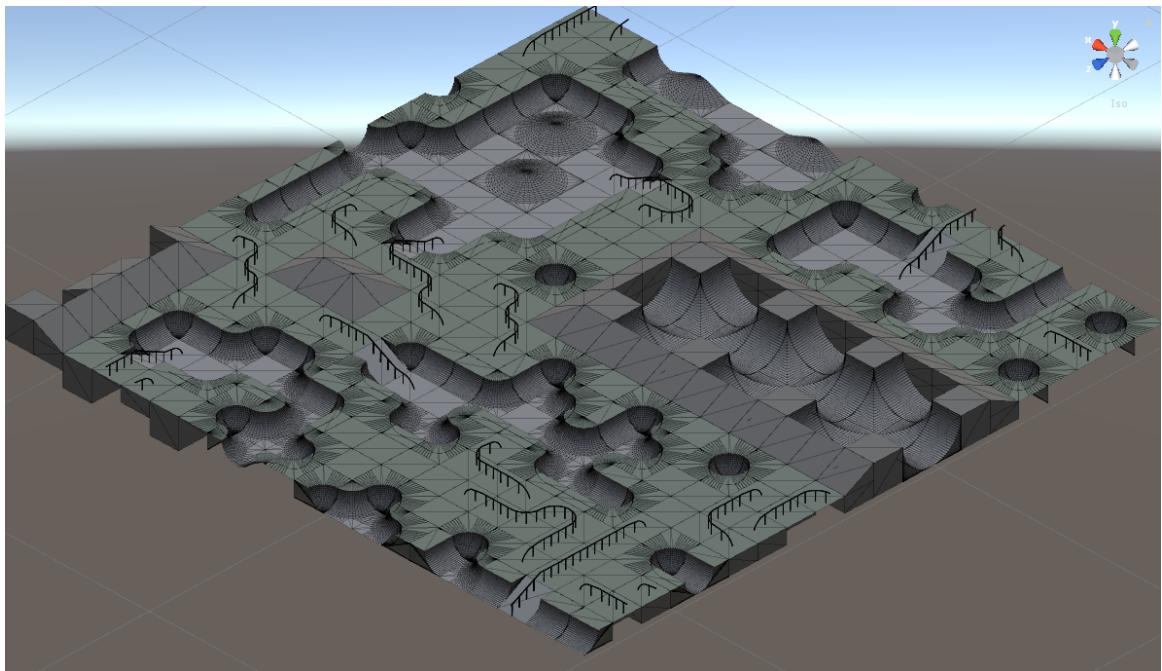


Abbildung 3.18: Typisches Level in *Proc Skater 2016*. [12]

Parker verwendete allerdings nicht nur das Simple Tile Model, sondern auch das Overlapping Model in Proc Skater 2016. Der umliegende Hintergrund (*backdrop*) ist mit dem Overlapping Model erstellt. Weiter erklärte Parker, dass das Tile Model und das Overlapping Model sich jeweils für unterschiedliche Bereiche gut anwenden lassen. „Das Tiled Model ist besser für Straßen, Labyrinthe oder alles mit formalen Übergängen. Overlapping Model für Plattform artige Situationen, in denen man eher eine Art Markow-Kette für die Größe der Features haben möchte.<sup>5</sup>“

Eine weitere kommerzielle Implementierung von WFC ist *Caves of Qud*, entwickelt von Freehold Games. Laut Brian Bucklew, einem der Entwickler bei Freehold Games, verwendet *Caves of Qud* ein Mehrfachdurchlauf (*multipass*) von WFC. Dadurch können größere Komplexitäten bei der Generierung erreicht werden. Ein weiterer Vorteil, der sich dadurch ergeben hat, ist die einfache Handhabung von WFC. Sobald das zugrundeliegende Sys-

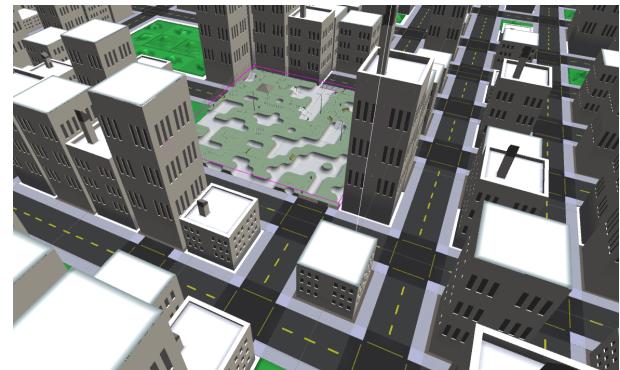


Abbildung 3.19: Overlapping Model für das Backdrop in *Proc Skater 2016*. [12]

---

<sup>5</sup>Persönliche Kommunikation, 23. Mai 2023

tem vorhanden ist, kann jeder Entwickler einfach Input-Images einspielen und Spielbaren Content generieren.<sup>6</sup> [6]

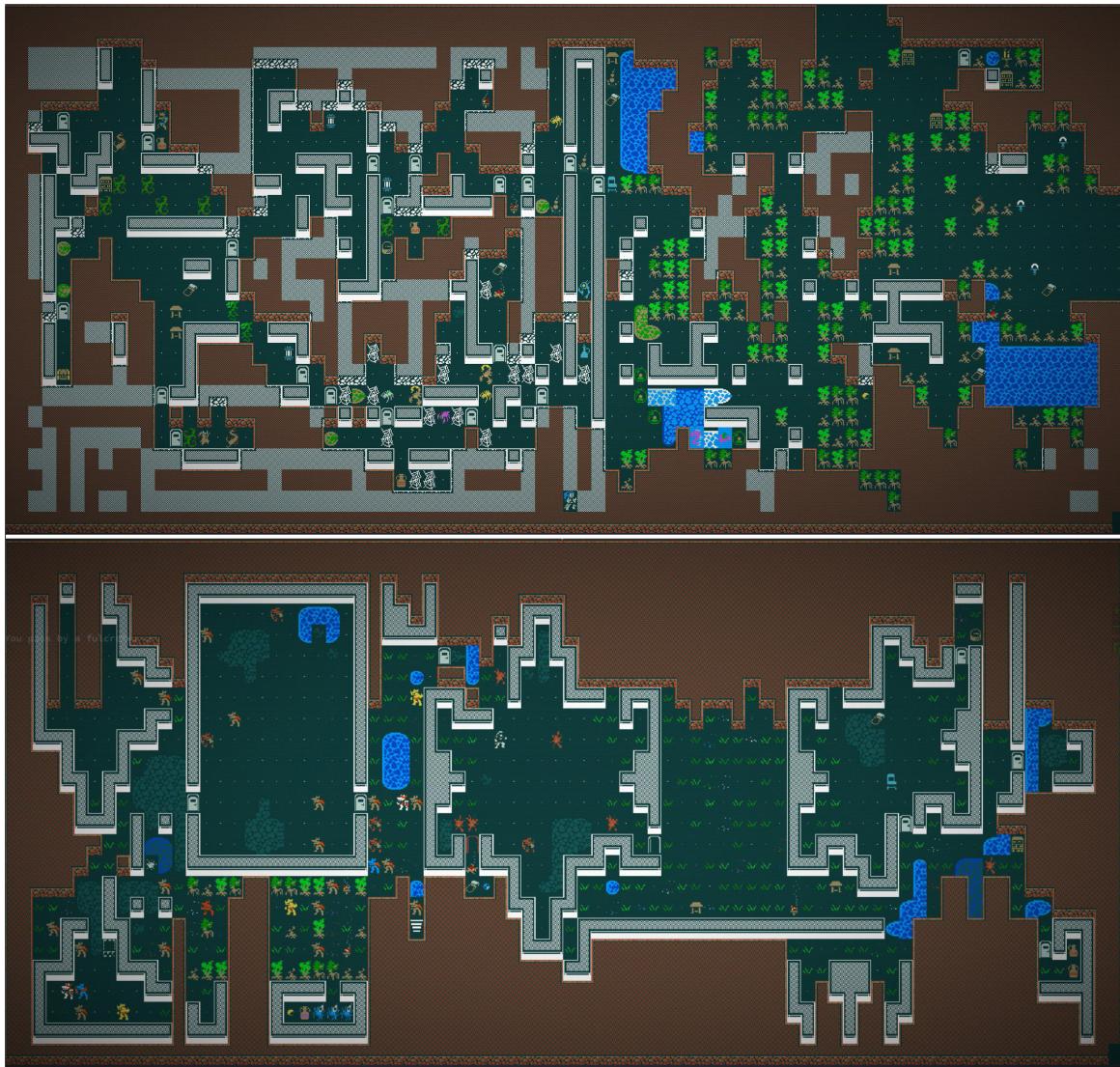


Abbildung 3.20: Zwei Spielbare Karten von *Caves of Qud*. [6]

Wave-Function-Collapse kann nicht nur auf flachen Ebenen mit quadratischen Zellen verwendet werden. Oskar Stålberg verwendete WFC nicht nur im 2D und 3D-Raum, sondern auch auf irregulären Rastern. In einem Beispiel implementiert Stålberg WFC auf einer Sphäre mit einem Dreiecks-Raster.<sup>7</sup>

---

<sup>6</sup>Aus Forums-Korrespondenz <https://forums.somethingawful.com/showthread.php?threadid=3563643&userid=68893&perpage=40&pagenumber=23#post467126402>

<sup>7</sup>Beispiele auf seiner Website <https://oskarstalberg.tumblr.com/> oder seinem Twitter <https://twitter.com/OskSta/status/784847588893814785>

## **4. Fazit**

Wave-Function-Collapse



## Literatur

- [1] D Gomathi und Rajvi Shah. *Texture Synthesis*. Dez. 2009.
- [2] Alexei A. Efros und Thomas K. Leung. „Texture Synthesis by Non-parametric Sampling“. In: *IEEE International Conference on Computer Vision*. Corfu, Greece, Sep. 1999, S. 1033–1038.
- [3] David J. Heeger und James R. Bergen. „Pyramid-Based Texture Analysis/Synthesis“. In: *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. SIGGRAPH '95. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 1995, S. 229–238. ISBN: 0897917014. DOI: [10.1145/218380.218446](https://doi.org/10.1145/218380.218446). URL: <https://doi.org/10.1145/218380.218446>.
- [4] Thomas Lehmann u. a. *Bildverarbeitung für die Medizin - Grundlagen, Modelle, Methoden, Anwendungen*. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 2013. ISBN: 978-3-642-60487-4.
- [5] Alexei A. Efros und William T. Freeman. „Image Quilting for Texture Synthesis and Transfer“. In: *Proceedings of the 28th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques*. SIGGRAPH '01. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2001, S. 341–346. ISBN: 158113374X. DOI: [10.1145/383259.383296](https://doi.org/10.1145/383259.383296). URL: <https://doi.org/10.1145/383259.383296>.
- [6] Isaac Karth und Adam M. Smith. „WaveFunctionCollapse is constraint solving in the wild“. In: *Proceedings of the 12th International Conference on the Foundations of Digital Games* (2017).
- [7] Paul C Merrell. „Model synthesis“. Diss. The University of North Carolina at Chapel Hill, 2009.
- [8] Maxim Gumin. *Wave Function Collapse Algorithm*. Version 1.0. Sep. 2016. URL: <https://github.com/mxgmn/WaveFunctionCollapse>.
- [9] Henrik Zinkernagel. „Niels Bohr on the wave function and the classical/quantum divide“. In: *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 53 (Feb. 2016), S. 9–19. DOI: [10.1016/j.shpsb.2015.11.001](https://doi.org/10.1016/j.shpsb.2015.11.001).

`shpsb.2015.11.001`. URL: <https://doi.org/10.1016%2Fj.shpsb.2015.11.001>.

- [10] Christophe Lecoutre. „Constraint Networks: Techniques and Algorithms“. In: 2009.
- [11] Paul C Merrell. „Comparing Model Synthesis and Wave Function Collapse“. Diss. Juli 2018.
- [12] Oscar Morante Joseph Parker Ryan Jones. *Proc Skater 2016*. <https://selfsame.itch.io/unitywfc>. Accessed: 2023-05-26. URL: <https://arcadia-clojure.itch.io/proc-skater-2016>.