4 kartki

A 18.04.2023

Imię i nazwisko	1	2	3	suma
Dawid Mularczyk	4	5	10	19

1. Wyznaczyć obszar zbieżności punktowej i jednostajnej ciągu funkcyjnego $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$

$$f_n(x) = x + \frac{e^{-nx}}{n}.$$

2. Wyznaczyć obszar zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 4^n} (x-1)^{2n}$ oraz jego sumę. Wskazać największy przedział, w którym suma zadanego szeregu jest funkcją ciągłą.

3. Rozwinąć funkcję $f(x) = \pi - x$ w $(0, \pi)$ w szereg kosinusów i naszkicować wykres sumy tego szeregu w przedziale $[-3\pi, 3\pi]$.

Dawid Mularczyk ① $\boxed{4}$

Z.1

1° zb. punktowa

$$A = \frac{e^{nx}}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{nx}}{n} \overset{H}{\underset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \frac{e^{nx}\cdot x}{1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$

1) $x < 0$

$$\lim_{n\to\infty} \left(x + \frac{e^{-nx}}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} x + A \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$$ +

2) $x = 0$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x + \frac{e^{-nx}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x = 0$$ +

3) $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} x + \frac{e^{-nx}}{n} = \lim_{n\to\infty} x + \frac{1}{e^{nx}\cdot n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

~~więc~~ wniosek:

$$\begin{cases} f_n(x) \xrightarrow{\langle 0;\infty)} f \\ f = x \end{cases}$$ (*)

, przy czym w przedziale $(-\infty;0)$ granica jest nieskończona (pkt 1)

$f_n(x) \to f$ w $\langle 0;\infty)$ +

4

2° zb. jednostajna

Liczę supremum

$$\sup\{|f_n(x) - f|, x \geq 0\}$$

$$\sup\{|x + \frac{e^{-nx}}{n} - x|, x\in\langle 0;\infty)\} = \sup\left\{\frac{e^{-nx}}{n};\ x \in \langle 0,+\infty)\right\} = g(0) = \frac{1}{n}$$

$g(x)$

$$g(x) = \frac{e^{-nx}}{n} = \frac{1}{ne^{nx}} \downarrow \text{ w } \langle 0,+\infty)$$

sup. nie zostało wyznaczone!

$f(x)$

$$f(x) = x + \frac{e^{-nx}}{n} - x = \frac{e^{-nx}}{n} = \frac{1}{e^{nx}\cdot n}$$

$$f'(x) = -\frac{n\cdot e^{xn}\cdot(n)}{(e^{nx}\cdot n)^2} \quad \frac{n^2\cdot e^{xn}}{(e^{nx}\cdot n)^2}$$ źle

$f'(x) = 0 \iff n^2 \cdot e^{xn} = 0$ brak miejsc zerowych

funkcja jest $\uparrow$ w całej D. ?

$$f'(x) = -e^{-nx} < 0 \ (\forall x \geq 0)$$

więc $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{nx}\cdot n} \to 0$

tu ma Pan kolizję oznaczeń. wcześniej $f(x) = x$ (patrz (*))

STOP $\sup |0 \cancel{\ }| = \cancel{\ } 0$ 2

②

$\lim 0 \to 0$ ($x \to \infty$)

mylą ciągu od 0

wniosek: mierz $1_n \xrightarrow{(0;\infty)} 1$

$\boxed{5}$

Z.2

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{(-1)^n}{n \cdot 4^n} \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)(4 \cdot 4^n)} \cdot \frac{n\, 4^n}{(-1)^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{4}$$

$\tilde{R} = 4$, ale potęga przy x równa $2n$ więc

$$R = \sqrt[2]{4} = 2$$

$|x-1| < 2$

$x \in (-1; 3)$

sprawdzam $x = -1 \wedge x = 3$

$x = -1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 4^n} \cdot (-2)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot ((-1)\cdot 2)^{2n}}{n \cdot 4^n} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{4^n}{n \cdot 4^n} \longrightarrow$$ zb. z kr. ~~Leibniza~~ Leibniza

4

$x = 3$

$\sum_{n=1}^{\infty} 1_n(x) \to$ zb. z kr. Leibniza

wnioski

1° szereg zbieżny w przedziale $x \in [-1; 3]$,
niejednostajnie na krańcach

co tu piszę 2

2° zbieżny w $x=-1 \wedge x=3$ warunkowo 0

3° w $x \in (-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ zbieżny suma:

$t = \frac{(x-1)^2 \cdot (-1)}{4}$

$S(t) = \frac{1}{n} \cdot t^n$

3

David [illegible]

Brak zał: $|x-1| < 2$

tzn. że $|t| \leq 1$

$(\frac{1}{n} t^n)' = \frac{1}{n} \cdot n \cdot t^{n-1} = t^{n-1}$

$S_1(t) = t^{n-1} = \left| \begin{array}{l} a_1 = 1, \\ q = t \end{array} \right| = \frac{1}{1-t}$

$S(t) = \int S_1(t)$

$\circledast \int_0^t S_1(t)dt = \int_0^t \frac{1}{1-t} dt = \ln|1-t|$

$S(0) = 0$

[illegible] na zmy $= \ln\left|1 - \frac{(x-1)^2 \cdot (-1)}{4}\right|$

sprawdzam krańce z tw. Abela

$\lim_{x \to -1^+} \ln|1+1| = \ln 2$ ✓

$\lim_{x \to 3^-} \ln|1+1| = \ln 2$ ✓

1

zmiana na zmy $\ln\left|1 - \frac{(x-1)^2 \cdot (-1)}{4}\right|$ ograniczone

że (znak)

na ~~przedziale $x \in \langle 0;\infty)$ ciąg~~ ... co przedziale $\langle -1;3 \rangle$

~~zmieniamy przedział gdzie jest ciągłość~~

Zad. Dla $|x-1| < 2$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n 4^n} (x-1)^{2n} = \left| \begin{array}{l} \text{podst}: t = -\frac{(x-1)^2}{4} \\ |x-1| < 2 \iff |t| < 1 \end{array} \right| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n = S(t)$

$S'(t) \overset{t\omega}{=} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}$
$S(0) = 0$
$\Rightarrow S(t) = 0 + \int_0^t \frac{1}{1-s} ds = -\ln|1-t|$

$f(x) = S(t)\Big|_{t = -\frac{(x-1)^2}{4}} = -\ln\left|1 + \frac{(x-1)^2}{4}\right|$

jest to wyjątkowy przykład cięgłości ciągła.

chaos!

2.3

$\boxed{10}$

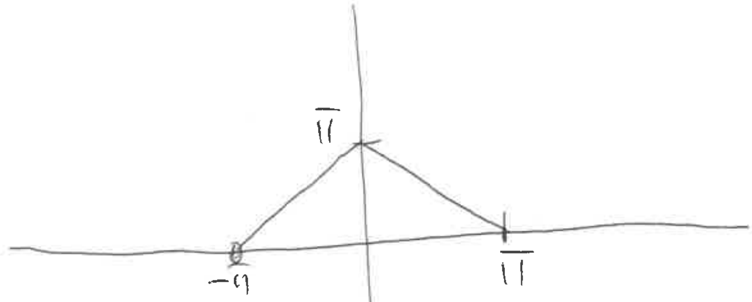
Rozw. $\tilde{f}(x)$ na przedz. $\langle -\pi ; \pi \rangle$

4

mamy, że

$b_n = 0$ (szereg kosinusów)

~~dla:~~



$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \pi - x, & x \in (0;\pi\rangle \\ 0, & x = 0 \\ x + \pi, & x \in \langle -\pi ; 0) \end{cases}$$

Funkcja $\tilde{f}(x)$ jest:

1) parzysta
2) monotoniczna na skończonej liczbie przedziałów $f\uparrow\langle-\pi;0)$, $f\downarrow(0;\pi\rangle$
3) $\tilde{f}(x) = f(x)$ w $(0;\pi)$

Warunki Dirichleta

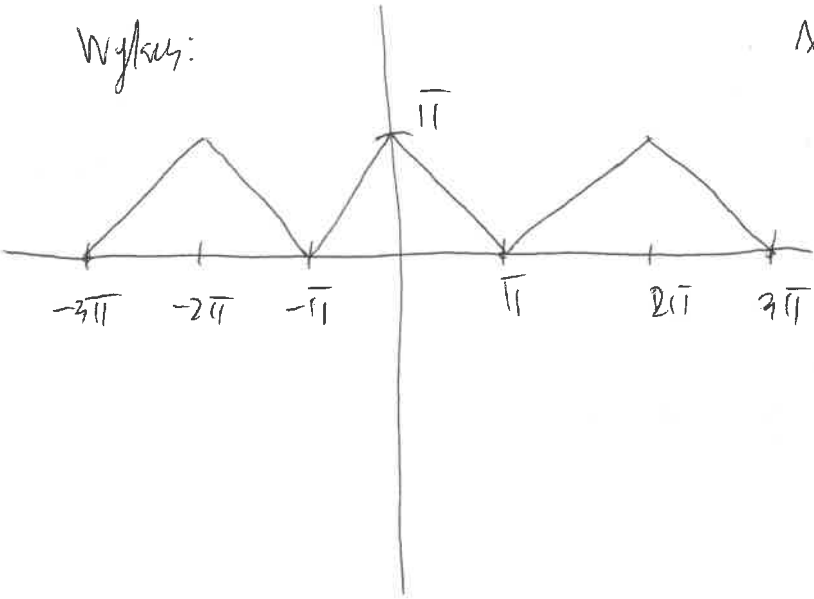
1) $\frac{\hat{f}_-(x) + \hat{f}_+(x)}{2} = \hat{f}(x)$

Spełnione w $\langle-\pi;\pi\rangle \setminus \{0\}$ z wł. f. ciągłych

w $x=0$

$$\frac{0+0}{2} = 0 = f(0) \checkmark$$

Wykres:



$$\frac{\hat{f}_+(a) + \hat{f}_-(b)}{2} = \hat{f}(a) = \tilde{f}(b)$$

$$\frac{f(-a) + f_+(a)}{2} = f(a) = f(b)$$

$$\frac{0+0}{2} = 0 = \tilde{f}(a) = \tilde{f}(b) \checkmark$$

Z w/w wynika, że można $\tilde{f}(x)$ w szereg Fouriera

$\omega = 2\pi$

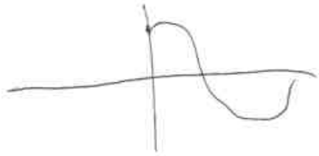
$L = \pi$

Z. ~~3~~

$f(x) = \pi - x$

(5) Daniel Makarczyk

$$a_0 = \frac{2 \cdot 1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\,dx = \frac{2 \cdot 1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} \pi - \int_0^{\pi} x \right] = \ldots$$



$$(*) \quad \pi \int_0^{\pi} 1\,dx = \pi [x]_0^{\pi} = \pi^2$$

$$(+) \quad \int_0^{\pi} x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$$

$\frac{\cos \pi \cdot n}{n^2}$

$$\ldots \frac{2 \cdot 1}{\pi}\left[\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right] = \frac{2\pi}{2} = \pi$$ +

$$a_n = \frac{2 \cdot 1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\cdot \cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[(\pi - x)\cdot \frac{1}{n}\sin nx - \frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} =$$

$\pi - x$	$\cos nx$
-1	$+\ \frac{1}{n}\sin nx$
0	$-\ -\frac{1}{n^2}\cos nx$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(-\frac{(-1)^n}{n^2} - \left[(\pi \cdot 0) - \frac{1}{n^2}\right]\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1 - (-1)^n}{n^2}\right) = a_n$$ +

ważne!

$\forall x \in (0, \pi)$ (także $\forall x \in \langle 0, \pi \rangle$ również $\forall x \in \langle -\pi, \pi \rangle$)

$$\pi - x = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right)\cdot \cos nx$$

ale $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1-(-1)^n}{n^2} \cos nx \neq \pi - x$ dla $x \in \mathbb{R}$

bo:

wykres $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ narysował Pan na str 4.

$y = f(x)$ – okresowa, $\omega = 2\pi$

$y = \pi - x$ – nie jest okresowa