

Calcul d'un temps de descente

DAVY Léo, CARPENTIER Florian

April 17, 2018

Abstract

Nous allons ici vous présenter la mathématisation de l'un des sujets du projet. Celui-ci a des applications concrètes, notamment dans le milieu de l'aéronautique, par exemple pour calculer les meilleures trajectoires de descente vers les aéroports. Cependant, la résolution de ce problème date de bien avant l'aéronautique, en 1638, Galilée est le premier à s'intéresser à ce problème. Jean Bernoulli sera le premier à résoudre ce problème en 1696, des solutions de Newton, Leibnitz et Jacques Bernoulli seront aussi retenues à la suite d'un défi lancé par Jean Bernoulli. La solution au problème est appelée courbe de brachistochrone, c'est un arc de cycloïde. Ces études auront permis de développer le calcul différentiel et variationnel.

1 Étude mécanique du problème

Nous allons maintenant étudier une approche mécanique du problème. On peut l'assimiler à une bille lâchée dans un toboggan avec certains paramètres, le toboggan démarre en $(0, 0)$ et s'arrête en $(1, 1)$, (sans pertes de généralités). On a donc $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $y(0) = 0, y(1) = 1$ et y continue. La bille est également lâchée sans vitesse initiale. On l'assimile à un point de masse m et on négligera les frottements. L'abscisse curviligne de la bille sera notée S . On applique à ce système un PFD et on remarque que la réaction du toboggan ne travaille pas. On a ainsi :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dS}{dt}\right)^2, \text{ et } E_p(t) = -mgy(x(t)) \quad (1)$$

Avec la loi de conservation de l'énergie et les conditions initiales on a :

$$E_c(t) + E_p(t) = E_c(0) + E_p(0) = 0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 - mgy(x(t)) \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{2mgy}{m}} = \sqrt{2gy} = S'(t) \quad (3)$$

On obtient donc, avec un changement de variable la formule suivante :

$$T(y) - T(0) = \int_0^{T(y)} dt = \int_0^{l(y)} \frac{dS}{\sqrt{2gy}} \quad (4)$$

Par ailleurs, avec le théorème de Pythagore on obtient :

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx \quad (5)$$

Avec l'expression précédente et 4 on obtient finalement :

$$T(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (6)$$

Cependant l'expression précédente présente des problèmes de singularité en 0. En effet, on sait, qu'en 0, on a $y(0) = 0$ donc l'expression à intégrer va varier très rapidement à proximité de l'origine. Mais aussi, le calcul va dépendre de la dérivée de y qui n'est pas supposée connue. Afin de résoudre cette équation, qui n'admet pas forcément de solution analytique, il faut donc recourir à des méthodes numériques.

2 Méthode de résolution ouverte

La singularité apparaissant en 0, on va utiliser une méthode dite "ouverte" dans laquelle nous allons étudier l'intégrale sans calculer la valeur de la fonction à intégrer en 0 en utilisant la méthode vue en cours du point milieu.

On supposera dans cette partie que $y \in \mathcal{C}^1$ et que $y(x) > 0$, pour tout $x \neq 0$. Pour simplifier les notations, on pose

$$f(x) := \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}} \quad (7)$$

En notant $T_N(y)$ la valeur de $T(y)$ avec la méthode du point milieu avec un pas de $1/N$ on obtient:

$$T(y) \simeq T_N(y) := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \quad (8)$$

Theorème 1. Si f est de la forme $f(x) = x^{-\beta} + g(x)$ avec g une fonction régulière et $0 < \beta < 1$, Alors la méthode du point milieu est d'ordre $1 - \beta$.

Remarque : g régulière signifie que g est, au moins, partout \mathcal{C}^1 , la fonction f peut donc représenter assez fidèlement un grand nombre de fonctions.

Proof. Nous souhaitons mesurer l'erreur entre la méthode exacte et la méthode du point milieu.

$$|T(y) - T_N(y)| = \left| \int_0^{\frac{1}{N}} f(x) dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{1}{2N}\right) + \int_{\frac{1}{N}}^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \quad (9)$$

On applique l'inégalité triangulaire

$$|T(y) - T_N(y)| \leq \left| \int_0^{\frac{1}{N}} f(x) dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{1}{2N}\right) \right| + \left| \int_{\frac{1}{N}}^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \quad (10)$$

Par ailleurs,

$$\int_0^{\frac{1}{N}} f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{N}} x^{-\beta} + g(x) dx = \frac{x^{-\beta+1}}{-\beta+1} + \int_0^{\frac{1}{N}} g(x) dx = \mathcal{O}(N^{\beta-1}) \quad (11)$$

On remarque dans l'expression précédente qu'il est nécessaire d'avoir $\beta \neq 0$ afin de ne pas faire de division par zéro. Il nous reste donc à majorer le second terme, d'après le cours, la méthode du point milieu est d'ordre $p = 1$ et d'après le théorème 4, il existe une constante $C > 0$, telle que, en posant $J_i = [\frac{2i-1}{2N}, \frac{2i+1}{2N}]$, $i \in [1, \dots, N-1]$ on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{J_i} f(x) dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{i}{N}\right) \right| &\leq C \left(\frac{1}{N}\right)^3 \sup_{x \in J_i} |f''(x)| \\ &\leq \frac{C}{N^3} (\| -\beta(-\beta-1)x^{-\beta-2} + g''(x) \|_{\infty, J_i}) \quad (12) \\ &\leq CN^{\beta-1} i^{-\beta-2} + \left\| \frac{C}{N^3} g''(x) \right\|_{\infty, J_i} \end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{N}}^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{N-1} \int_{J_i} f(x) dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N-1} \left| \int_{J_i} f(x) dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \\ &\leq CN^{\beta-1} \sum_{i=1}^{N-1} i^{-\beta-2} + \frac{C}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \|g''(x)\|_{\infty, J_i} \quad (13) \end{aligned}$$

Or,

$$\|g''(x)\|_{\infty, J_i} \leq \|g''(x)\|_{\infty, [0,1]}, \forall i \quad (14)$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{N-1} \|g''(x)\|_{\infty, J_i} \leq \sum_{i=1}^{N-1} \|g''(x)\|_{\infty, [0,1]} = (N-1) \|g''(x)\|_{\infty, [0,1]} \quad (15)$$

Et par ailleurs,

$$0 < \sum_{i=1}^{N-1} i^{-\beta-2} \leq \sum_{i=1}^{N-1} i^{-2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (16)$$

finalement :

$$\left| \int_{\frac{1}{N}}^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \leq CN^{\beta-1} \frac{\pi^2}{6} + \frac{C}{N^2} \|g''(x)\|_{\infty, [0,1]} = \mathcal{O}(N^{\beta-1}) \quad (17)$$

En combinant 11 et l'expression précédente on obtient bien que la méthode est d'ordre $1 - \beta$. Le théorème est donc bien démontré. \square

Ce résultat nous assure que nous avons au moins une solution numérique, cependant, cette méthode n'étant pas très efficace, nous allons essayer dans la suite de trouver une méthode plus efficace.

3 Résolution avec un changement de variable

Nous allons dans cette partie considérer que le comportement de la fonction y est connu en 0 et est de la forme

$$y(x) \sim_0 c.x^\alpha, \text{ avec } \beta = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} & , \text{ si } \alpha < 1 \\ \frac{\alpha}{2} & , \text{ si } 1 < \alpha < 2 \end{cases} \quad (18)$$

Et on pose $x = u^\rho$, avec $\rho = \frac{1}{1-\beta}$.

$$\frac{dx}{du} = \rho u^{\rho-1} \quad (19)$$

On a donc

$$T(y) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(u^\rho) \rho u^{\rho-1} du = \rho \int_0^1 f(u^\rho) u^{\rho-1} du \quad (20)$$

On applique maintenant la méthode du point milieu et on obtient directement

$$T(y) \simeq \frac{\rho}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\left(\frac{2i+1}{2N}\right)^\rho\right) \left(\frac{2i+1}{2N}\right)^{\rho-1} \quad (21)$$

Cette méthode est d'ordre $\rho - 1$.

4 Comparaison des deux méthodes

La méthode du changement de variable est plus efficace si

$$\rho - 1 = \frac{\beta}{1 - \beta} > 1 - \beta \quad (22)$$

Comme $0 < \beta < 1$, l'inégalité précédente est toujours vérifiée. Nous allons maintenant comparer les deux méthodes sur des plusieurs exemples.

Cas d'un toboggan de type $y(x) = x$: Dans ce cas on a $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$, donc la première méthode est d'ordre $\frac{1}{2}$ et la seconde est d'ordre 2.

Cas d'un toboggan de type $y(x) = \sqrt{x}$: Dans ce cas on a $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{4}$, donc la première méthode est d'ordre $\frac{1}{4}$ et la seconde est d'ordre 4.

Cas d'un toboggan de type $y(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(5 - 3x)$: Dans ce cas on a (au voisinage de 0) $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{3}{4}$, donc la première méthode est d'ordre $\frac{1}{4}$ et la seconde est d'ordre 4.

Ainsi, la seconde méthode est bien plus efficace que la première, cela s'explique par le fait que le changement de variable permet d'éviter la singularité en 0.