

Calcul d'un temps de descente

DAVY Léo, CARPENTIER Florian

Université Paul Sabatier - Toulouse 3

L2 Parcours Spécial Mathématiques

May 12, 2018

Abstract

Nous allons ici vous présenter la mathématisation de l'un des sujets du projet. Celui-ci a des applications concrètes, notamment dans le milieu de l'aéronautique, par exemple pour calculer les meilleures trajectoires de descente vers les aéroports. Cependant, la résolution de ce problème date de bien avant l'aéronautique, en 1638, Galilée est le premier à s'intéresser à ce problème. Jean Bernoulli sera le premier à résoudre ce problème en 1696, des solutions de Newton, Leibnitz et Jacques Bernoulli seront aussi retenues à la suite d'un défi lancé par Jean Bernoulli. La solution au problème est appelée courbe de brachistochrone, c'est un arc de cycloïde. Ces études auront permis de développer le calcul différentiel et variationnel.

1 Étude mécanique du problème

Nous allons maintenant étudier une approche mécanique du problème. On peut l'assimiler à une bille lâchée dans un toboggan avec certains paramètres, le toboggan démarre en $(0, 0)$ et s'arrête en $(1, 1)$, (sans pertes de généralités). On a donc $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $y(0) = 0, y(1) = 1$ et y continue. La bille est également lâchée sans vitesse initiale. On l'assimile à un point de masse m et on négligera les frottements. L'abscisse curviligne de la bille sera notée S . On applique à ce système un PFD et on remarque que la réaction du toboggan ne travaille pas. On a ainsi :

$$E_c(t) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dS}{dt}\right)^2, \text{ et } E_p(t) = -mgy(x(t)) \quad (1)$$

Avec la loi de conservation de l'énergie et les conditions initiales on a :

$$E_c(t) + E_p(t) = E_c(0) + E_p(0) = 0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 - mgy(x(t)) \quad (2)$$

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{\frac{2mgy}{m}} = \sqrt{2gy} = S'(t) \quad (3)$$

On obtient donc, avec un changement de variable la formule suivante :

$$T(y) - T(0) = \int_0^{T(y)} dt = \int_0^{l(y)} \frac{dS}{\sqrt{2gy}} \quad (4)$$

Par ailleurs, avec le théorème de Pythagore on obtient :

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx \quad (5)$$

Avec l'expression précédente et 4 on obtient finalement :

$$T(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2}}{\sqrt{2gy}} dx \quad (6)$$

Cependant l'expression précédente présente des problèmes de singularité en 0. En effet, on sait, qu'en 0, on a $y(0) = 0$ donc l'expression à intégrer va varier très rapidement à proximité de l'origine. Mais aussi, le calcul va dépendre de la dérivée de y qui n'est pas supposée connue. Afin de résoudre cette équation, qui n'admet pas forcément de solution analytique, il faut donc recourir à des méthodes numériques.

2 Méthode de résolution ouverte

La singularité apparaissant en 0, on va utiliser une méthode dite "ouverte" dans laquelle nous allons étudier l'intégrale sans calculer la valeur de la fonction à intégrer en 0 en utilisant la méthode vue en cours du point milieu.

On supposera dans cette partie que $y \in \mathcal{C}^1$ et que $y(x) > 0$, pour tout $x \neq 0$. Pour simplifier les notations, on pose

$$f(x) := \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2gy(x)}} \quad (7)$$

En notant $T_N(y)$ la valeur de $T(y)$ avec la méthode du point milieu avec un pas de $1/N$ on obtient:

$$T(y) \simeq T_N(y) := \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \quad (8)$$

Théorème 1. Si f est de la forme $f(x) = x^{-\beta} + g(x)$ avec g une fonction régulière et $0 < \beta < 1$, Alors la méthode du point milieu est d'ordre $1 - \beta$.

Remarque : g régulière signifie que g est, au moins, partout \mathcal{C}^1 , la fonction f peut donc représenter assez fidèlement un grand nombre de fonctions.

Proof. Nous souhaitons mesurer l'erreur entre la méthode exacte et la méthode du point milieu.

$$|T(y) - T_N(y)| = \left| \int_0^{\frac{1}{N}} f(x) dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{1}{2N}\right) + \int_{\frac{1}{N}}^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \quad (9)$$

On applique l'inégalité triangulaire

$$|T(y) - T_N(y)| \leq \left| \int_0^{\frac{1}{N}} f(x) dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{1}{2N}\right) \right| + \left| \int_{\frac{1}{N}}^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \quad (10)$$

Par ailleurs,

$$\int_0^{\frac{1}{N}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{N}} x^{-\beta} + g(x)dx = \frac{(\frac{1}{N})^{-\beta+1}}{-\beta+1} + \int_0^{\frac{1}{N}} g(x)dx = \mathcal{O}(N^{\beta-1}) \quad (11)$$

On remarque dans l'expression précédente qu'il est nécessaire d'avoir $\beta \neq 0$ afin de ne pas faire de division par zéro. Il nous reste donc à majorer le second terme, d'après le cours, la méthode du point milieu est d'ordre $p = 1$ et d'après le théorème 4, il existe une constante $C > 0$, telle que, en posant $J_i = [\frac{2i-1}{2N}, \frac{2i+1}{2N}]$, $i \in [1, \dots, N-1]$ on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_{J_i} f(x)dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{i}{N}\right) \right| &\leq C \left(\frac{1}{N}\right)^3 \sup_{x \in J_i} |f''(x)| \\ &\leq \frac{C}{N^3} (\| -\beta(-\beta-1)x^{-\beta-2} + g''(x) \|_{\infty, J_i}) \\ &\leq CN^{\beta-1} i^{-\beta-2} + \left\| \frac{C}{N^3} g''(x) \right\|_{\infty, J_i} \end{aligned} \quad (12)$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{1}{N}}^1 f(x)dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| &= \left| \sum_{i=1}^{N-1} \int_{J_i} f(x)dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N-1} \left| \int_{J_i} f(x)dx - \frac{1}{N} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \\ &\leq CN^{\beta-1} \sum_{i=1}^{N-1} i^{-\beta-2} + \frac{C}{N^3} \sum_{i=1}^{N-1} \|g''(x)\|_{\infty, J_i} \end{aligned} \quad (13)$$

Or,

$$\|g''(x)\|_{\infty, J_i} \leq \|g''(x)\|_{\infty, [0,1]}, \forall i \quad (14)$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{N-1} \|g''(x)\|_{\infty, J_i} \leq \sum_{i=1}^{N-1} \|g''(x)\|_{\infty, [0,1]} = (N-1) \|g''(x)\|_{\infty, [0,1]} \quad (15)$$

Et par ailleurs,

$$0 < \sum_{i=1}^{N-1} i^{-\beta-2} \leq \sum_{i=1}^{N-1} i^{-2} \leq \sum_{i=1}^{\infty} i^{-2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (16)$$

finalement :

$$\left| \int_{\frac{1}{N}}^1 f(x)dx - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-1} f\left(\frac{2i+1}{2N}\right) \right| \leq CN^{\beta-1} \frac{\pi^2}{6} + \frac{C}{N^2} \|g''(x)\|_{\infty, [0,1]} = \mathcal{O}(N^{\beta-1}) \quad (17)$$

En combinant 11 et l'expression précédente on obtient bien que la méthode est d'ordre $1 - \beta$. Le théorème est donc bien démontré. \square

Ce résultat nous assure que nous avons au moins une solution numérique, cependant, cette méthode n'étant pas très efficace, nous allons essayer dans la suite de trouver une méthode plus efficace.

3 Résolution avec un changement de variable

Nous allons dans cette partie considérer que le comportement de la fonction y est connu en 0 et est de la forme

$$y(x) \sim_0 c.x^\alpha, \text{ avec } \beta = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{2} & , \text{ si } \alpha < 1 \\ \frac{\alpha}{2} & , \text{ si } 1 < \alpha < 2 \end{cases} \quad (18)$$

Et on pose $x = u^\rho$, avec $\rho = \frac{1}{1-\beta}$.

$$\frac{dx}{du} = \rho u^{\rho-1} \quad (19)$$

On a donc

$$T(y) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(u^\rho) \rho u^{\rho-1} du = \rho \int_0^1 f(u^\rho) u^{\rho-1} du \quad (20)$$

On applique maintenant la méthode du point milieu et on obtient directement

$$T(y) \simeq \frac{\rho}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f\left(\left(\frac{2i+1}{2N}\right)^\rho\right) \left(\frac{2i+1}{2N}\right)^{\rho-1} \quad (21)$$

Cette méthode est d'ordre $\rho - 1$.

4 Comparaison des deux méthodes

La méthode du changement de variable est plus efficace si

$$\rho - 1 = \frac{\beta}{1 - \beta} > 1 - \beta \quad (22)$$

Comme $0 < \beta < 1$, l'inégalité précédente est toujours vérifiée . Nous allons maintenant comparer les deux méthodes sur des plusieurs exemples.

Cas d'un toboggan de type $y(x) = x$: Dans ce cas on a $\alpha = 1$ et $\beta = \frac{1}{2}$, donc la première méthode est d'ordre $\frac{1}{2}$ et la seconde est d'ordre 1.

Cas d'un toboggan de type $y(x) = \sqrt{x}$: Dans ce cas on a $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{3}{4}$, donc la première méthode est d'ordre $\frac{1}{4}$ et la seconde est d'ordre 3.

Cas d'un toboggan de type $y(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(5 - 3x)$: Dans ce cas on a (au voisinage de 0) $\alpha = \frac{3}{2}$ et $\beta = \frac{3}{4}$, donc la première méthode est d'ordre $\frac{1}{4}$ et la seconde est d'ordre 3.

Ainsi, la seconde méthode est bien plus efficace que la première, cela s'explique par le fait que le changement de variable permet d'éviter la singularité en 0.

5 Application Numérique

Nous allons dans un premier temps étudier la fonction $x \mapsto x$. Par un calcul on peut obtenir la valeur exacte de $T(x \mapsto x) = \frac{2}{\sqrt{10}} \approx 0.63245553203$. On peut voir ci-dessous les valeurs obtenues avec les méthodes les plus classiques. On peut y observer que la méthode des rectangles à gauche est sensiblement plus efficace car elle contient un rectangle supplémentaire à proximité de 1. La méthode du trapèze est une méthode hybride des deux premières, est très proches de leurs valeurs. Cependant, la vitesse de convergence n'est pas satisfaisante.

	Rect à gauche	Rect à droite	Trapèze
N = 101	0.588234190031346	0.5596004309853696	0.5739173105083577
N = 501	0.6121548130243415	0.5986303676112116	0.6053925903177766
N = 2001	0.6222128575640632	0.6152980965952546	0.6187554770796588
N = 10001	0.6278537067166106	0.6247228921422507	0.6262882994294302
N = 300001	0.6316129255212698	0.6310366283806264	0.6313247769509484

Dans le tableau suivant on peut observer les valeurs avec la méthode de Simpson et avec le changement de variable $\rho = 2$. On remarque que les valeurs obtenues sont bien plus proches de la valeur attendue, afin de comparer l'efficacité des deux méthodes, dans les deux dernières colonnes sont affichées les valeurs des rapports des temps approchés et temps exact. Il est clair que la méthode du changement de variable est très efficace. On remarque également que la valeur la plus proche est celle obtenue avec $N = 100$, elle est d'ailleurs quasiment exacte, On peut suggérer que le fait que la perte de précision avec l'augmentation du nombre de points évalués provient du fait qu'à chaque opération sur des nombres à virgule flottante réalisée par l'ordinateur, il y a une perte d'information sur les nombres évalués, ainsi ces pertes très locales peuvent être observées avec un nombre de points suffisamment important.

	Simpson	Chgmt var.	Simpson/ $\frac{2}{\sqrt{10}}$	Chgmt var./ $\frac{2}{\sqrt{10}}$
N = 101	0.5429105877244202	0.632455532033676	0.08584170115149097	0.10000000000000002
N = 501	0.5915569042287318	0.6324555320336555	0.09353335914804418	0.09999999999999677
N = 2001	0.6118405759154913	0.6324555320337623	0.09674048924010567	0.100000000000001365
N = 10001	0.6231962142068161	0.6324555320339558	0.09853597330438613	0.100000000000004425
N = 300001	0.6307602576051508	0.6324555320266917	0.099731953577341	0.0999999999998957

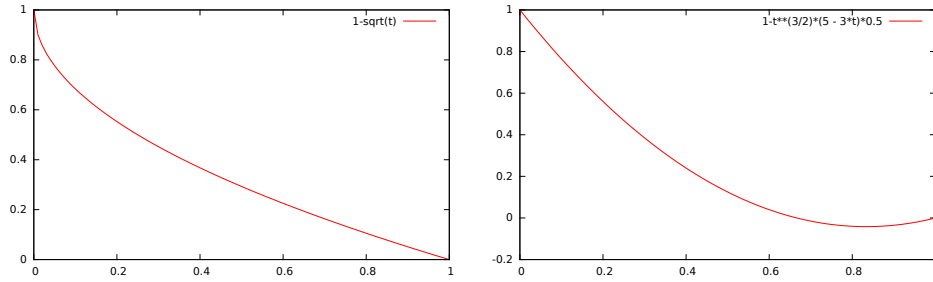


Figure 1: $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(5 - 3x)$

Les valeurs obtenues avec les méthodes des rectangles ne sont pas affichées mais comme toutes les valeurs obtenues dans ce document, elles peuvent être reproduites et également exportées au format \LaTeX depuis : github.com/DavyL/CalculTpsDescente/blob/master/main.py

Etude de la fonction : $f(x) = \sqrt{x}$

	Trapèze	Simpson	Chgmt var.
N = 101	0.4414629538811862	0.4104369376355152	0.5785154925953274
N = 501	0.485809387840139	0.46570869302794915	0.5785217623125455
N = 2001	0.5127500044321911	0.4986240922028768	0.5785220112658342
N = 10001	0.5344815065700885	0.5250505889294617	0.5785220272494653
N = 300001	0.5596944890057428	0.5556663980153529	0.5785220279112407

Etude de la fonction : $f(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}(5 - 3x)$ On remarque ici que certaines valeurs ne sont pas définies avec le changement de variable, En effet, le programme à partir d'un certain rang, considère réaliser une division par zéro.

	Trapèze	Simpson	Chgmt var.
N = 101	0.6260184369409418	0.5834531246438184	0.8021436648059572
N = 501	0.6844340936028838	0.658521444514206	non définie
N = 2001	0.7188625645940457	0.7009068135150682	non définie
N = 10001	0.7464279324772518	0.7344868671634918	non définie
N = 300001	0.7783351590003321	0.7732398139627539	non définie