

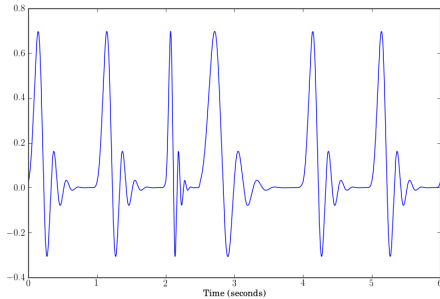
Reconstruction parcimonieuse des signaux

Leo Davy

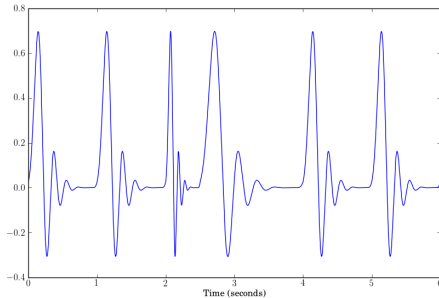
Université de Montpellier

Montpellier, 1 Juin 2021

Signaux



Signaux



Example (familles
de signaux)

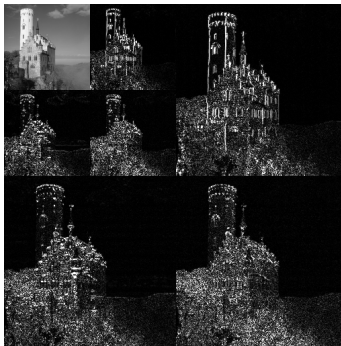
- \mathbb{R}^N
- $L^2(\mathbb{R})$

Definition

Un signal est une application $f : X \rightarrow Y$

Exemples de problèmes

- Compresser un signal
- Décomposer un signal en éléments simples
- Reconstruire un signal en utilisant un minimum de mesures



TODO:

ajouter image fourier-dirac+fourier
sous-échantillonné

Traitement du signal

Mesure du signal

Opérateur d'analyse

$$A : f \mapsto (c_i(f))_I$$

avec $c_i(f) = \langle f, \varphi_i \rangle$.

$$y_m = \left\langle \begin{array}{c} \text{Image of a basketball game} \\ \text{Heatmap of the image} \end{array} \right\rangle$$

Traitement du signal

Mesure du signal

Opérateur d'analyse

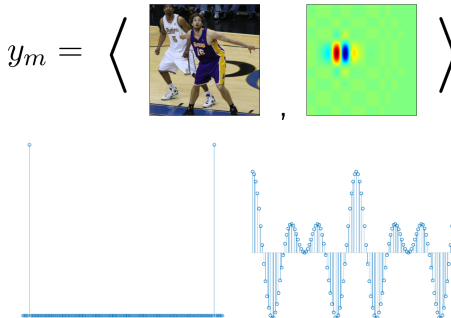
$$A : f \mapsto (c_i(f))_I$$

avec $c_i(f) = \langle f, \varphi_i \rangle$.

Reconstruction

Opérateur de synthèse

$$S : (c_i(f))_I \mapsto f$$



Traitement du signal

Mesure du signal

Opérateur d'analyse

$$A : f \mapsto (c_i(f))_I$$

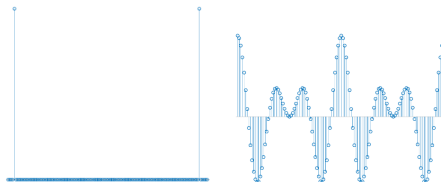
avec $c_i(f) = \langle f, \varphi_i \rangle$.

Reconstruction

Opérateur de synthèse

$$S : (c_i(f))_I \mapsto f$$

$$y_m = \left\langle \begin{array}{c} \text{Image of a basketball player} \end{array}, \begin{array}{c} \text{Heatmap of the image} \end{array} \right\rangle$$



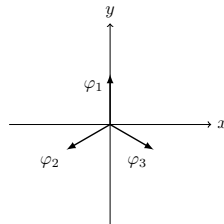
Quelles conditions pour reconstruire
n'importe quel signal f de \mathcal{F} à partir de
 $A(f)$?

Théorie des frames

Definition

On appelle $F = (\varphi_i)_I$ un frame de H si $\exists m, M > 0$ tels que

$$m\|f\|_2^2 \leq \sum_I |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \leq M\|f\|_2^2, \quad \forall f \in H$$

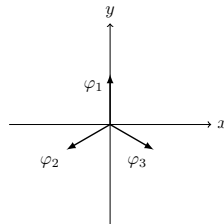


Théorie des frames

Definition

On appelle $F = (\varphi_i)_I$ un frame de H si $\exists m, M > 0$ tels que

$$m\|f\|_2^2 \leq \sum_I |\langle f, \varphi_i \rangle|^2 \leq M\|f\|_2^2, \quad \forall f \in H$$



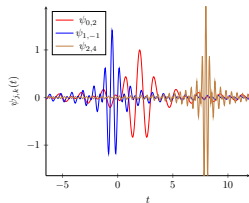
Frame serré

Si $m = M$, formule de reconstruction :

$$f = \frac{1}{M} \sum_I \langle f, f_i \rangle f_i.$$

Décomposition en ondelettes

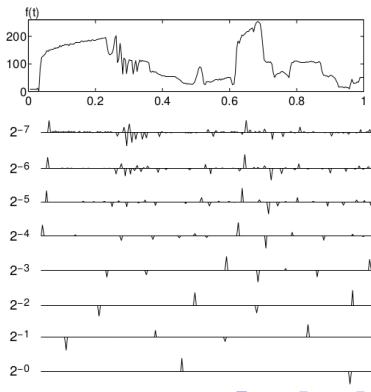
Ondelette ψ de Shannon (temporelle)



$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \right)$$

$$\psi_{j,k} := 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k).$$

j : échelle (fréquence), k : localisation

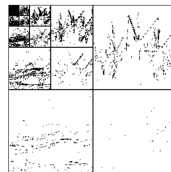


Compression par les ondelettes

Moments nuls : $\langle P, \psi_{j,k} \rangle = 0$ si $\deg(P) \leq m$



(a)



(b)

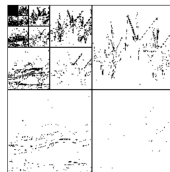


Compression par les ondelettes

Moments nuls : $\langle P, \psi_{j,k} \rangle = 0$ si
 $\deg(P) \leq m$



(a)



(b)

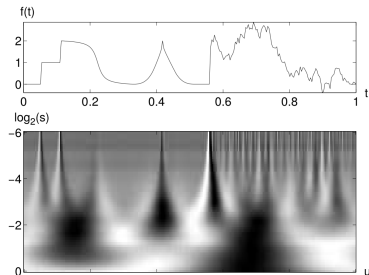


Compression par les ondelettes

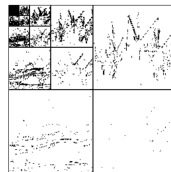
Moments nuls : $\langle P, \psi_{j,k} \rangle = 0$ si $\deg(P) \leq m$

Jaffard 91 : $f \in C^\alpha$ et ψ avec $m \geq \alpha$ moments nuls, alors

$$|\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq C_\alpha 2^{-j(\alpha + \frac{1}{2})}$$



(a)



(b)



Une représentation parcimonieuse "optimale" ?

Soit $D = (\varphi_i)_I$ une famille de vecteurs (dictionnaire d'atomes),
 $f \in \text{Vect}(D)$:

1 Reconstruction : Quels $(c_i)_J$ pour que $f = \sum_J c_i \varphi_i$?

Une représentation parcimonieuse "optimale" ?

Soit $D = (\varphi_i)_I$ une famille de vecteurs (dictionnaire d'atomes),
 $f \in \text{Vect}(D)$:

- 1 Reconstruction : Quels $(c_i)_I$ pour que $f = \sum_I c_i \varphi_i$?
- 2 Reconstruction parcimonieuse : Quels $(c_i)_I$ minimise le nombre de coefficients non nuls et reconstruit f ?

Une représentation parcimonieuse "optimale" ?

Soit $D = (\varphi_i)_I$ une famille de vecteurs (dictionnaire d'atomes), $f \in \text{Vect}(D)$:

- 1 Reconstruction : Quels $(c_i)_J$ pour que $f = \sum_J c_i \varphi_i$?
- 2 Reconstruction parcimonieuse : Quels $(c_i)_I$ minimise le nombre de coefficients non nuls et reconstruit f ?

Problème P0 (décomposition atomique) :

$$\min \|x\|_0 : f = F_D x$$

avec $x = (c_i)_J$ et F_D matrice dont les colonnes sont les φ_i .

Une représentation parcimonieuse "optimale" ?

Soit $D = (\varphi_i)_I$ une famille de vecteurs (dictionnaire d'atomes),
 $f \in \text{Vect}(D)$:

- 1 Reconstruction : Quels $(c_i)_J$ pour que $f = \sum_J c_i \varphi_i$?
- 2 Reconstruction parcimonieuse : Quels $(c_i)_I$ minimise le nombre de coefficients non nuls et reconstruit f ?

Problème P0 (décomposition atomique) :

$$\min \|x\|_0 : f = F_D x$$

avec $x = (c_i)_J$ et F_D matrice dont les colonnes sont les φ_i .
Est-ce bien posé ? Est-ce calculable ?

Example (Fourier-Dirac)

$$D = (T, W) \text{ avec } T = (\delta_k)_{0 \leq k \leq N-1} \text{ et } W = \left(\frac{e^{-\frac{2i\pi k \cdot}{N}}}{\sqrt{N}} \right)_{0 \leq k \leq N-1}$$

Theorem (Donoho-Stark 89)

Soit $f \in \mathbb{R}^N$ un signal non nul, alors

$$\|F_T f\|_0 + \|F_W f\|_0 \geq 2\sqrt{N} \quad (1)$$

Theorem (Donoho-Stark 89)

Soit $f \in \mathbb{R}^N$ et $x = (x_T, x_W)$ tel que $f = F_T x_T + F_W x_W$ et $\|x\|_0 < \sqrt{N}$. Alors x est l'unique solution de P0.

Principe d'incertitude \rightarrow Unicité de la décomposition atomique
Cas particulier du dictionnaire Fourier-Dirac ?

Principe d'incertitude \rightarrow Unicité de la décomposition atomique
 Cas particulier du dictionnaire Fourier-Dirac ? Non, la matrice
 clef dans la preuve est :

$$F_W^t F_T = \begin{bmatrix} \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_1, \varphi_N \rangle \\ \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle & \ddots & \vdots & \langle \psi_2, \varphi_N \rangle \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_N, \varphi_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle \psi_N, \varphi_N \rangle. \end{bmatrix}$$

Principe d'incertitude \rightarrow Unicité de la décomposition atomique
 Cas particulier du dictionnaire Fourier-Dirac ? Non, la matrice
 clef dans la preuve est :

$$F_W^t F_T = \begin{bmatrix} \langle \psi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \psi_1, \varphi_2 \rangle & \cdots & \langle \psi_1, \varphi_N \rangle \\ \langle \psi_2, \varphi_1 \rangle & \ddots & \vdots & \langle \psi_2, \varphi_N \rangle \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \langle \psi_N, \varphi_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle \psi_N, \varphi_N \rangle. \end{bmatrix}$$

Quantité clef : $M = \max_{i,j} |\langle \psi_i, \varphi_j \rangle|$ (incohérence)

Soit $D = (\Psi, \Phi)$ une paire de bases arbitraires de \mathbb{R}^N et $M = \max_{i,j} |\langle \psi_i, \varphi_j \rangle|$.

Theorem (Principe d'incertitude généralisé)

Soit $f \in \mathbb{R}^N$ un signal non nul. Alors

$$\|F_{\Psi} f\|_0 + \|F_{\Phi} f\|_0 \geq \frac{2}{M}$$

Dictionnaire Fourier-Dirac : $M = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Soit $D = (\Psi, \Phi)$ une paire de bases arbitraires de \mathbb{R}^N et $M = \max_{i,j} |\langle \psi_i, \varphi_j \rangle|$.

Theorem (Principe d'incertitude généralisé)

Soit $f \in \mathbb{R}^N$ un signal non nul. Alors

$$\|F_\Psi f\|_0 + \|F_\Phi f\|_0 \geq \frac{2}{M}$$

Theorem (Unicité de la solution de P0 généralisé)

Soit $f \in \mathbb{R}^N$ alors la décomposition atomique x de f est unique si $\|x\|_0 < \frac{1}{M}$.

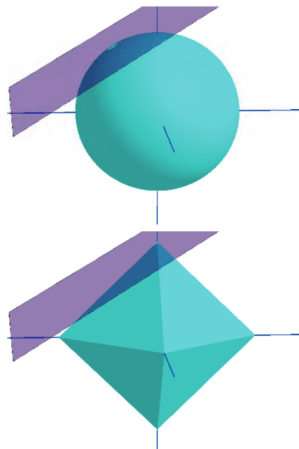
Dictionnaire Fourier-Dirac : $M = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

P1 :

$$\min \|x\|_1 : f = F_D x \quad (2)$$

Avantages :

- 1 Sous des hypothèses de parcimonie, la solution de P1 coïncide avec celle de P0.
- 2 Beaucoup d'algorithmes efficaces de résolution (Programmation linéaire)



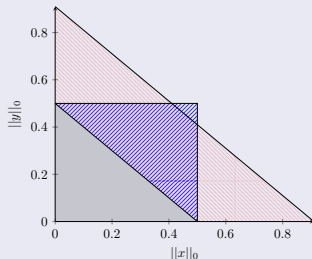
Theorem

Soit $D = (\Phi, \Psi)$ une paire de bases orthonormales et soit $f \in \mathbb{R}^N$ un signal, x_0 la solution de $P0$ pour $f = F_D x$, si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

■ (Donoho-Huo 98)

$$\|x_{0,\Phi}\|_0 + \|x_{0,\Psi}\| < \frac{1}{2M}$$

alors x_0 est l'unique solution de $P1$.



Theorem

Soit $D = (\Phi, \Psi)$ une paire de bases orthonormales et soit $f \in \mathbb{R}^N$ un signal, x_0 la solution de $P0$ pour $f = F_D x$, si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

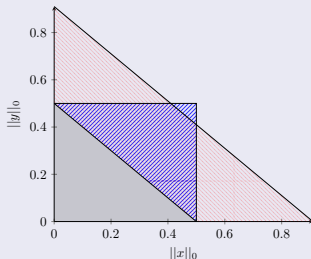
- (Donoho-Huo 98)

$$\|x_{0,\Phi}\|_0 + \|x_{0,\Psi}\|_0 < \frac{1}{2M}$$

- (Elad-Bruckstein 02)

$$\|x_{0,\Phi}\|_0 + \|x_{0,\Psi}\|_0 < \frac{\sqrt{2}-0.5}{M} \sim \frac{0.92}{M}$$

alors x_0 est l'unique solution de $P1$.



Theorem

Soit $D = (\Phi, \Psi)$ une paire de bases orthonormales et soit $f \in \mathbb{R}^N$ un signal, x_0 la solution de $P0$ pour $f = F_D x$, si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- (Donoho-Huo 98)

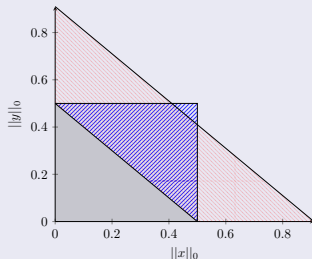
$$\|x_{0,\Phi}\|_0 + \|x_{0,\Psi}\|_0 < \frac{1}{2M}$$

- (Elad-Bruckstein 02)

$$\|x_{0,\Phi}\|_0 + \|x_{0,\Psi}\|_0 < \frac{\sqrt{2}-0.5}{M} \sim \frac{0.92}{M}$$

- $\|x_{0,\Phi}\|_0 < \frac{1}{2M}$ et $\|x_{0,\Psi}\|_0 < \frac{1}{2M}$

alors x_0 est l'unique solution de $P1$.



Theorem

Soit $D = (\Phi, \Psi)$ une paire de bases orthonormales et soit $f \in \mathbb{R}^N$ un signal, x_0 la solution de $P0$ pour $f = F_D x$, si l'une des hypothèses suivantes est vérifiée :

- (Donoho-Huo 98)

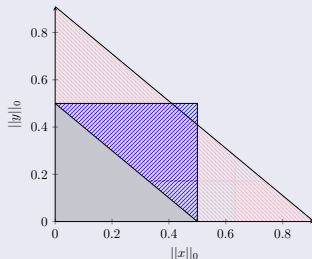
$$\|x_{0,\Phi}\|_0 + \|x_{0,\Psi}\|_0 < \frac{1}{2M}$$

- (Elad-Bruckstein 02)

$$\|x_{0,\Phi}\|_0 + \|x_{0,\Psi}\|_0 < \frac{\sqrt{2}-0.5}{M} \sim \frac{0.92}{M}$$

- $\|x_{0,\Phi}\|_0 < \frac{1}{2M}$ et $\|x_{0,\Psi}\|_0 < \frac{1}{2M}$

alors x_0 est l'unique solution de $P1$.



Généralisations : Dictionnaire de bases arbitraire, frames (Torrésani 15).

Comment démontrer ces théorèmes ?
Avec un principe d'incertitude.

Comment démontrer ces théorèmes ?

Avec un principe d'incertitude.

$\mathcal{N} = \{\delta : F_D \delta = 0\}$. On pose

$$\mu(\Gamma_\Phi, \Gamma_\Psi) = \sup_{\delta \in \mathcal{N}} \frac{\sum_{i \in \Gamma_\Phi} |\delta_{\Phi,i}| + \sum_{i \in \Gamma_\Psi} |\delta_{\Psi,i}|}{\|\delta_\Phi\|_1 + \|\delta_\Psi\|_1} \quad (3)$$

Comment démontrer ces théorèmes ?

Avec un principe d'incertitude.

$\mathcal{N} = \{\delta : F_D \delta = 0\}$. On pose

$$\mu(\Gamma_\Phi, \Gamma_\Psi) = \sup_{\delta \in \mathcal{N}} \frac{\sum_{i \in \Gamma_\Phi} |\delta_{\Phi,i}| + \sum_{i \in \Gamma_\Psi} |\delta_{\Psi,i}|}{\|\delta_\Phi\|_1 + \|\delta_\Psi\|_1} \quad (3)$$

Lemma (Donoho-Huo 98)

Si $\mu(\Gamma_\Phi, \Gamma_\Psi) < \frac{1}{2}$ alors n'importe quelle solution de $f = F_D x$ supportée sur $\Gamma_\Phi \cup \Gamma_\Psi$ est l'unique solution de P1.

On sait :

- Trouver la décomposition atomique d'un signal parcimonieux

On sait :

- Trouver la décomposition atomique d'un signal parcimonieux

On sait :

- Trouver la décomposition atomique d'un signal parcimonieux

Difficultés :

- Hypothèses de parcimonie fortes

On sait :

- Trouver la décomposition atomique d'un signal parcimonieux

Difficultés :

- Hypothèses de parcimonie fortes

Solutions :

- Candes-Romberg 06: Pour l'équivalence P0-P1, avec probabilité tendant vers 1, il suffit d'avoir $\|x\|_0 < \frac{C}{M^2 \log(N)}$.

On sait :

- Trouver la décomposition atomique d'un signal parcimonieux
- Représenter un signal régulier avec peu de coefficients (ondelettes)

Difficultés :

- Hypothèses de parcimonie fortes

Solutions :

- Candes-Romberg 06: Pour l'équivalence P0-P1, avec probabilité tendant vers 1, il suffit d'avoir $\|x\|_0 < \frac{C}{M^2 \log(N)}$.

On sait :

- Trouver la décomposition atomique d'un signal parcimonieux
- Représenter un signal régulier avec peu de coefficients (ondelettes)

Difficultés :

- Hypothèses de parcimonie fortes
- Il faut faire toutes les mesures puis enlever la plupart des coefficients

Solutions :

- Candes-Romberg 06: Pour l'équivalence P0-P1, avec probabilité tendant vers 1, il suffit d'avoir $\|x\|_0 < \frac{C}{M^2 \log(N)}$.

On sait :

- Trouver la décomposition atomique d'un signal parcimonieux
- Représenter un signal régulier avec peu de coefficients (ondelettes)

Difficultés :

- Hypothèses de parcimonie fortes
- Il faut faire toutes les mesures puis enlever la plupart des coefficients

Solutions :

- Candes-Romberg 06: Pour l'équivalence P0-P1, avec probabilité tendant vers 1, il suffit d'avoir $\|x\|_0 < \frac{C}{M^2 \log(N)}$.
- Candes-Romberg 06: Pour reconstruire un signal avec S coefficients non nuls, avec probabilité tendant vers 1, il suffit de faire $S \log(N)$ mesures et résoudre P1.

Compressed sensing

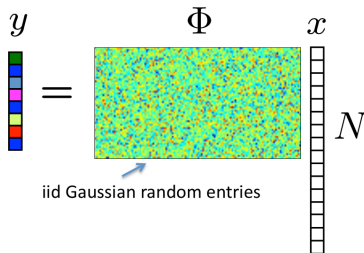
Idée : Exploiter la parcimonie pour faire moins de mesures

Compressed sensing

Idée : Exploiter la parcimonie pour faire moins de mesures

Cadre du problème : F_Φ matrice d'analyse, $\Omega \subset \{0, \dots, N-1\}$.

On mesure $y_\Omega = F_{\Phi, \Omega} s$, on veut retrouver s .

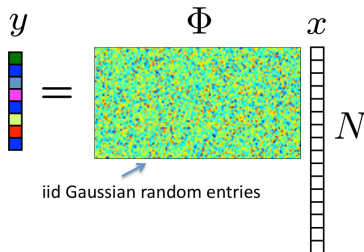


Compressed sensing

Idée : Exploiter la parcimonie pour faire moins de mesures

Cadre du problème : F_Φ matrice d'analyse, $\Omega \subset \{0, \dots, N-1\}$.

On mesure $y_\Omega = F_{\Phi, \Omega} s$, on veut retrouver s .



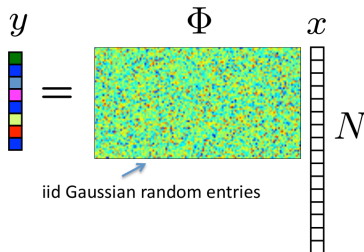
Difficulté : système sous déterminé $K := \mathbb{E}(|\Omega|) \ll N$

Compressed sensing

Idée : Exploiter la parcimonie pour faire moins de mesures

Cadre du problème : F_Φ matrice d'analyse, $\Omega \subset \{0, \dots, N-1\}$.

On mesure $y_\Omega = F_{\Phi, \Omega} s$, on veut retrouver s .



Difficulté : système sous déterminé $K := \mathbb{E}(|\Omega|) \ll N$

Solution : s est parcimonieux dans une base

P1 (Compressed Sensing):

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \|x\|_1 : F_{\Phi, \Omega} x = F_{\Phi, \Omega} s$$

- Matrice gaussienne $F_{G, \Omega} = (c_{i,j})_{(i,j) \in \Omega \times \{0, \dots, N-1\}}$ avec $c_{i,j} \sim N(0, \frac{1}{\sqrt{N}})$
- Matrice de Fourier $F_{F, \Omega}$ restriction aux lignes indexées par Ω de la matrice de Fourier.

Axiomes

Definition

On dit que F_Ω vérifie

- λ -UUP si

$$\frac{K}{2N} \|x\|_2^2 \leq \|F_\Omega x\|_2^2 \leq \frac{3K}{2N} \|x\|_2^2$$

est vrai avec probabilité au moins $1 - \mathcal{O}(N^{-\rho/\alpha})$ pour tout signal $x \in \mathbb{R}^N$ S -parcimonieux qui vérifie

$$S \leq \alpha \frac{K}{\gamma}.$$



Axiomes

Definition

On dit que F_Ω vérifie

- λ -UUP si

$$\frac{K}{2N} \|x\|_2^2 \leq \|F_\Omega x\|_2^2 \leq \frac{3K}{2N} \|x\|_2^2$$

- λ -ERP si, en notant $\sigma = \text{sign}(x)$, il existe $P \in \mathbb{R}^N$ tel que

1 $P(t) = \sigma(t), \forall t \in \text{supp}(x)$

2 $\exists Q \in \mathbb{R}^\Omega$ tel que $P = F_\Omega^* Q$

3 $P(t) < \frac{1}{2}, \forall t \notin \text{supp}(x)$

est vrai avec probabilité au moins $1 - \mathcal{O}(N^{-\rho/\alpha})$ pour tout signal $x \in \mathbb{R}^N$ S -parcimonieux qui vérifie

$$S \leq \alpha \frac{K}{\gamma}.$$



Example

- La matrice Gaussienne $F_{G,\Omega}$ vérifie $\log(N)$ -UUP et $\log(N)$ -ERP
- La matrice de Fourier $F_{F,\Omega}$ vérifie $\log(N)^5$ -UUP et $\log(N)$ -ERP

Theorem (Candes-Tao 04)

*Soit F_Ω qui vérifie λ -ERP et λ -UUP. Soit $K \geq \lambda$.
Soit s un signal dans \mathbb{R}^N tel que ses coefficients dans une base de référence décroissent comme :*

$$|\theta_{(n)}| \leq Cn^{-\frac{1}{p}}$$

pour un certain $C > 0$ et $0 < p \leq 1$.

On pose $r = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, alors n'importe quelle solution x de (P1) vérifie :

$$\|s - x\|_2 \leq C_r \left(\frac{K}{\lambda} \right)^{-r}$$

avec probabilité au moins $1 - \mathcal{O}(N^{-\frac{\rho}{\alpha}})$, pour certains ρ et α .

Conséquences des théorèmes

TODO : ajouter image des reconstructions CS

Conclusion

- On peut représenter de façon parcimonieuse des signaux réguliers (ondelettes)
- On peut résoudre le problème de décomposition atomique (P1)
- Pour reconstruire un signal S -parcimonieux, $S \log(N)$ mesures suffisent (Compressed sensing)

Les ondelettes par l'analyse multi-échelle TODO:enlever

Si on a des sous espaces emboîtés

$$\{0\} = \lim_{N \rightarrow -\infty} \bigcap_{-\infty}^N V_j \subset \cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset \lim_{N \rightarrow \infty} \bigcup_{-\infty}^{+\infty} V_j = L^2(\mathbb{R})$$

avec $V_j = V_{j-1} \oplus W_j$, alors on a la formule de reconstruction :

$$f = \pi_{V_0}(f) + \sum_{k \geq 1} \pi_{W_k}(f) \quad , \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (4)$$

TODO:enlever

Deux propriétés supplémentaires pour que l'analyse soit multi-échelle :

- $f \in V_0 \iff f(\cdot - k) \in V_0 \forall k \in \mathbb{Z}.$
- $f \in V_0 \iff f(2^j \cdot) \in V_j \forall j \in \mathbb{Z}$

Et les ondelettes ?

Definition

On note

$$\psi_{j,k} := 2^{j/2} \psi(2^j \cdot - k). \quad (5)$$

On appelle ψ une ondelette si $(\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$ est une base de $L^2(\mathbb{R})$.

j : échelle (fréquence), k : localisation

TODO:enlever

La famille $(\psi_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de W_j . De plus, on peut associer à ψ une application φ appelée ondelette d'échelle et telle que $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (\varphi(\cdot - k))_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de V_0 .
Formule de reconstruction valable sur $L^2(\mathbb{R})$.

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \varphi_k \rangle \varphi_k + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \right) \quad (6)$$

Approximation rapide ? TODO:enlever

Mallat : $\sum_{k=0}^{+\infty} k^{2r} |\langle f, g_k \rangle|^2 \iff \varepsilon_{(g_k)}(N, f) = o(N^{-2r})$

Jaffard (91) : f α -Lipschitzienne en t_0 et ψ a $m > \alpha$ moments

nuls $\implies |\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq C_\alpha 2^{-j(\alpha + \frac{1}{2})} (1 + |2^{-j}k - t_0| 2^{j\alpha})$ TODO :

ajouter images décroissance coeffs ondelette discret et continue

Conséquences : JPEG2000, une représentation parcimonieuse des signaux ?

TODO:enlever Premier cas : On connaît une base Ψ telle que $s = \Psi x_0$ avec x_0 parcimonieux.

On prend une mesure Φ incohérente avec Ψ et on cherche la solution P1 de $y = F_\Phi F_\Psi x$ (c'est x_0 sous des hypothèses fortes).

Second cas: On ne sait pas dans quelle base le signal est parcimonieux.

On prend les vecteurs de Φ tirés uniformément au hasard sur S^{N-1} , alors la distribution de F_Φ est invariante par changement de base, donc $F_{\Phi,\Omega}$ est presque sûrement incohérente avec une base Ψ arbitraire.

TODO:enlever Premier cas : On connaît une base Ψ telle que $s = \Psi x_0$ avec x_0 parcimonieux.

On prend une mesure Φ incohérente avec Ψ et on cherche la solution P1 de $y = F_\Phi F_\Psi x$ (c'est x_0 sous des hypothèses fortes).

Compressed sensing : on ne fait que les mesures indexées par Ω .

Quelle est la probabilité pour que la solution de P1 de $y_\Omega = F_{\Phi,\Omega} F_\Psi x$ soit différente de x_0 ?

Second cas: On ne sait pas dans quelle base le signal est parcimonieux.

On prend les vecteurs de Φ tirés uniformément au hasard sur S^{N-1} , alors la distribution de F_Φ est invariante par changement de base, donc $F_{\Phi,\Omega}$ est presque sûrement incohérente avec une base Ψ arbitraire.

Donc pour une matrice F_Φ de ce type, la probabilité de succès ou d'échec de la reconstruction ne dépend pas de la base Ψ .

TODO:enlever Premier cas : On connaît une base Ψ telle que $s = \Psi x_0$ avec x_0 parcimonieux.

On prend une mesure Φ incohérente avec Ψ et on cherche la solution P1 de $y = F_\Phi F_\Psi x$ (c'est x_0 sous des hypothèses fortes).

Compressed sensing : on ne fait que les mesures indexées par Ω .

Quelle est la probabilité pour que la solution de P1 de $y_\Omega = F_{\Phi,\Omega} F_\Psi x$ soit différente de x_0 ? Faible.

Second cas: On ne sait pas dans quelle base le signal est parcimonieux.

On prend les vecteurs de Φ tirés uniformément au hasard sur S^{N-1} , alors la distribution de F_Φ est invariante par changement de base, donc $F_{\Phi,\Omega}$ est presque sûrement incohérente avec une base Ψ arbitraire.

Donc pour une matrice F_Φ de ce type, la probabilité de succès ou d'échec de la reconstruction ne dépend pas de la base Ψ .

Résoudre P0 ?

On sait que dans le cas d'une paire de bases incohérentes, la solution est unique si suffisamment parcimonieuse.
Comment obtenir une telle solution ?

Résoudre P0 ?

On sait que dans le cas d'une paire de bases incohérentes, la solution est unique si suffisamment parcimonieuse.

Comment obtenir une telle solution ? En général : très difficile

Résoudre P0 ?

On sait que dans le cas d'une paire de bases incohérentes, la solution est unique si suffisamment parcimonieuse.

Comment obtenir une telle solution ? En général : très difficile

Solution : résoudre un autre problème et exploiter la parcimonie.