

Algorithmes proximaux pour la segmentation de textures anisotropes

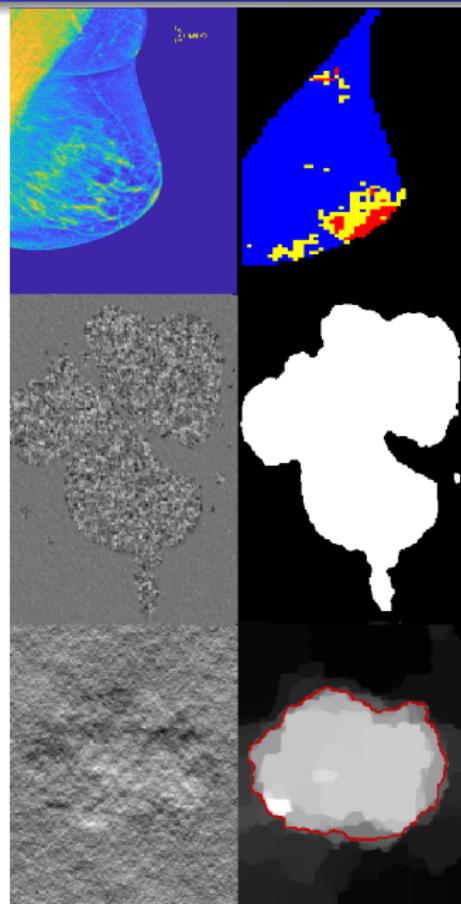
codirigé par Patrice ABRY et Nelly PUSTELNIK,
Laboratoire de Physique, ENS de Lyon

Leo DAVY

1. Tour d'horizon
2. Modélisation anisotrope
3. Analyse locale et segmentation

2 Septembre 2022

Segmentation de textures



- Classique en traitement d'images
- Nombreuses applications :

- médecine
- biologie
- physique

→ Texture : ensemble de pixels ayant les mêmes propriétés.

→ Estimation : caractérisation locale des propriétés de texture.

→ Segmentation : grouper les pixels par textures homogènes.

Etat-de-l'art

1 Estimation

- Analyse multi-échelles (ondelettes) :

$$c(j, k) = \int X(t)\psi_j(t - k)dt \text{ avec } \psi_j(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t)$$

- Régularité locale : $|c(j, k)| \sim_{j \rightarrow -\infty} \underbrace{\sigma_k^2}_{\text{variance loc.}} \underbrace{2^{jh_k}}_{\text{régularité loc.}}$ (isotrope)

- $\log |c(j, \cdot)| \sim \underbrace{v}_{\log \sigma^2} + jh$

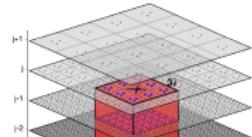
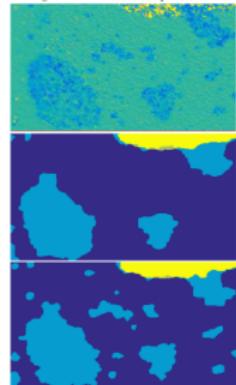


Figure 1: Definition of p -leaders.



Références :

- Pascal, B. et Pustelnik, N. et Abry, P., **Strongly convex optimization for joint fractal feature estimation and texture segmentation**, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2021

Etat-de-l'art

1 Estimation

- Analyse multi-échelles (ondelettes) :

$$c(j, k) = \int X(t)\psi_j(t - k)dt \text{ avec } \psi_j(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t)$$

- Régularité locale : $|c(j, k)| \sim_{j \rightarrow -\infty} \underbrace{\sigma_k^2}_{\text{variance loc.}} \underbrace{2^{jh_k}}_{\text{régularité loc.}}$ (isotrope)

- $\log |c(j, \cdot)| \sim \underbrace{v}_{\log \sigma^2} + jh$

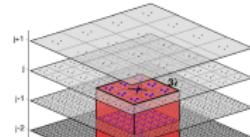
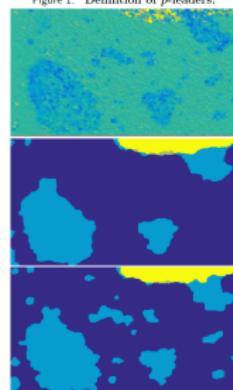


Figure 1: Definition of p -leaders.

2 Segmentation

- Compromis précision / solution localement constante

$$\hat{h} = \arg \min_{\tilde{h}} \underbrace{\|h - \tilde{h}\|}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\lambda \text{TV}(\tilde{h})}_{\text{pénalisation}}$$



Références :

- Pascal, B. et Pustelnik, N. et Abry, P., **Strongly convex optimization for joint fractal feature estimation and texture segmentation**, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2021

Etat-de-l'art

1 Estimation

- Analyse multi-échelles (ondelettes) :

$$c(j, k) = \int X(t)\psi_j(t - k)dt \text{ avec } \psi_j(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\psi(2^{-j}t)$$

- Régularité locale : $|c(j, k)| \sim_{j \rightarrow -\infty} \underbrace{\sigma_k^2}_{\text{variance loc.}} \underbrace{2^{jh_k}}_{\text{régularité loc.}}$ (isotrope)

- $\log |c(j, \cdot)| \sim \underbrace{v}_{\log \sigma^2} + jh$

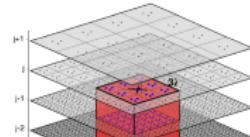
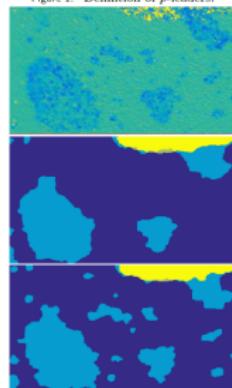


Figure 1: Definition of p -leaders.

2 Segmentation

- Compromis précision / solution localement constante

$$\hat{h} = \arg \min_{\tilde{h}} \underbrace{\|h - \tilde{h}\|}_{\text{attache aux données}} + \underbrace{\lambda \text{TV}(\tilde{h})}_{\text{pénalisation}}$$



3 Estimation et segmentation conjointe

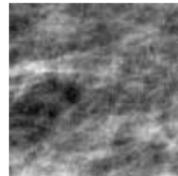
$$(\hat{v}, \hat{h}) = \arg \min_{\tilde{v}, \tilde{h}} \|\log |c| - \tilde{v} - j\tilde{h}\|_2^2 + \lambda \text{TV}(\tilde{v}, \tilde{h})$$

Références :

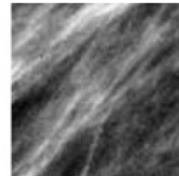
- Pascal, B. et Pustelnik, N. et Abry, P., **Strongly convex optimization for joint fractal feature estimation and texture segmentation**, *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2021

Nouveaux descripteurs

- Etat-de-l'art (isotrope) :
mesure de régularité (h_k, σ_k)



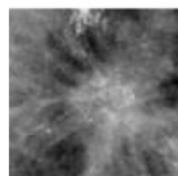
$H = 0.17, A_2 = 0.22$



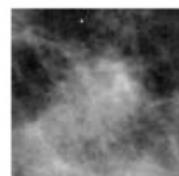
$H = 0.34, A_2 = 0.34$



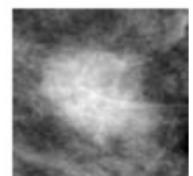
$H = 0.58, A_2 = 0.69$



$H = 0.41, A_2 = 0.17$



$H = 0.65, A_2 = 0.32$



$H = 0.73, A_2 = 0.22$

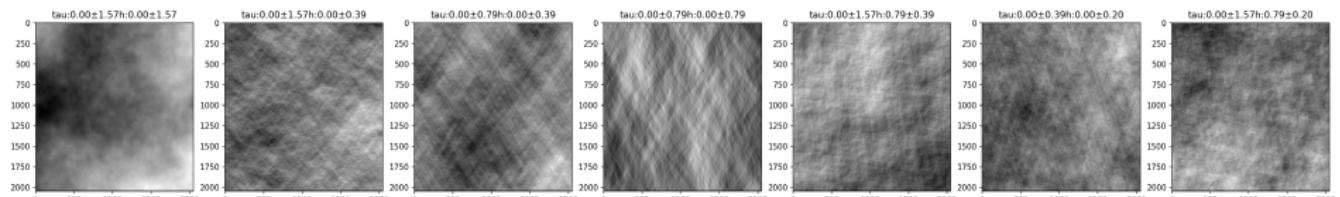
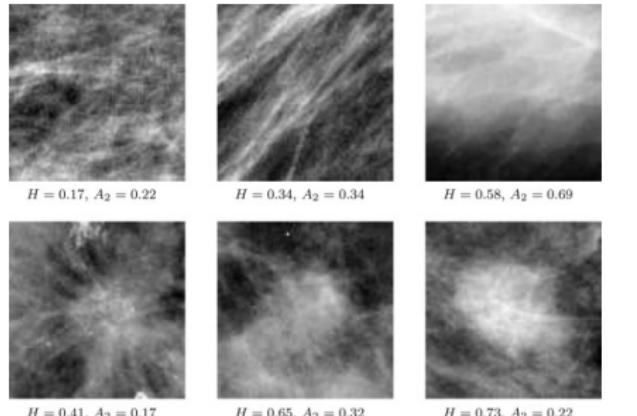
- Richard F.J.P., **Analysis of Anisotropic Brownian Textures and Application to Lesion Detection in Mammograms**, *Procedia Environmental Sciences, Spatial Statistics Conference, 2015*

Nouveaux descripteurs

- Etat-de-l'art (isotrope) : mesure de régularité (h_k, σ_k)

- Comment modéliser l'anisotropie ?

$$X_t^f = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1 \right) \sqrt{f(\xi)} \hat{W}(d\xi)$$



- Richard F.J.P., **Analysis of Anisotropic Brownian Textures and Application to Lesion Detection in Mammograms**, Procedia Environmental Sciences, Spatial Statistics Conference, 2015

Nouveaux descripteurs

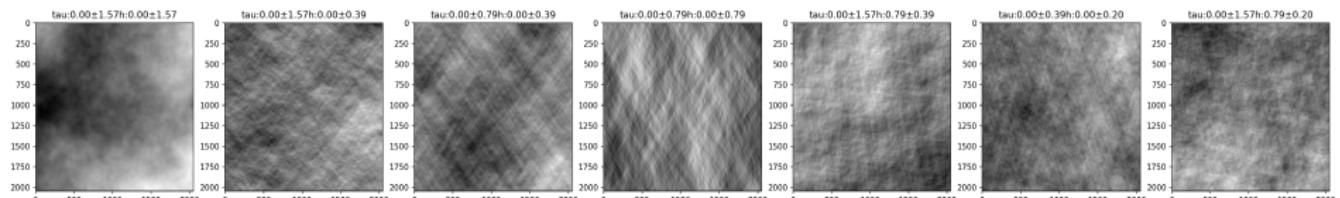
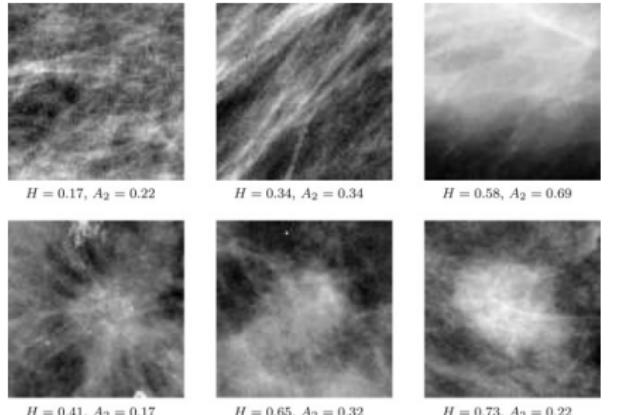
- Etat-de-l'art (isotrope) : mesure de régularité (h_k, σ_k)

- Comment modéliser l'anisotropie ?

$$X_t^f = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1 \right) \sqrt{f(\xi)} \hat{W}(d\xi)$$

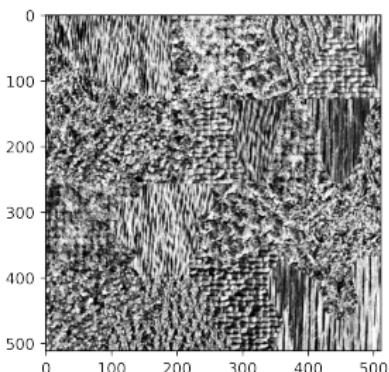
- Comment estimer l'anisotropie ?

$$\log |c^{(d)}(j, k)| \sim v_k^{(d)} + j h_k^{(d)}$$

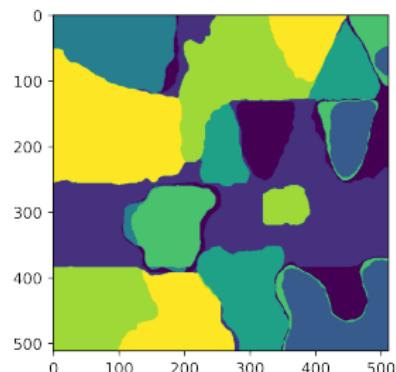


- Richard F.J.P., Analysis of Anisotropic Brownian Textures and Application to Lesion Detection in Mammograms, Procedia Environmental Sciences, Spatial Statistics Conference, 2015

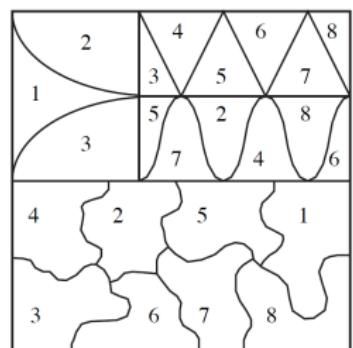
Exemple de segmentation



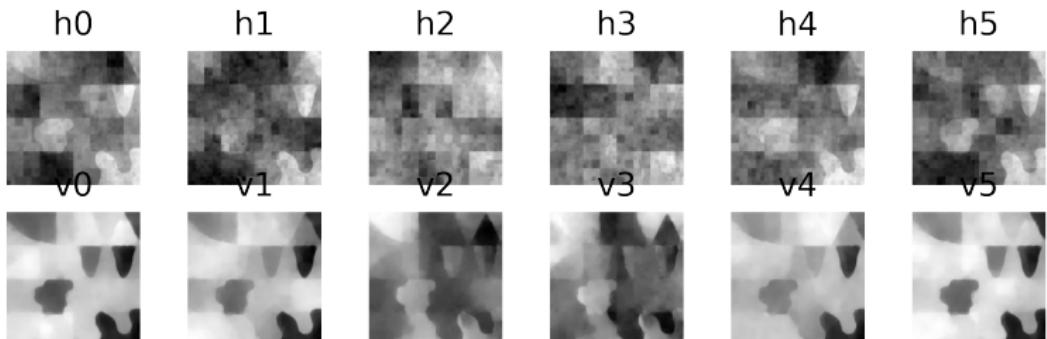
(a) Texture



(b) Segmentation



(c) Masque

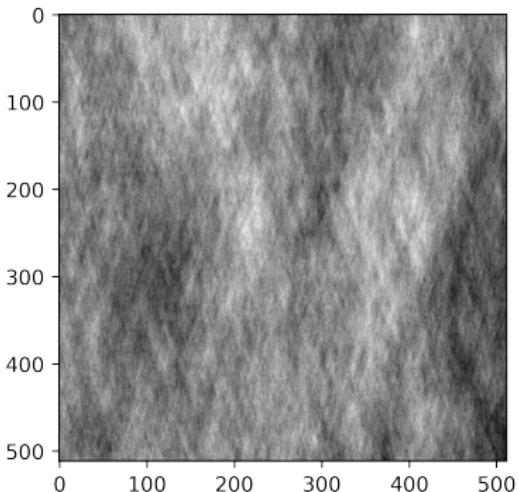
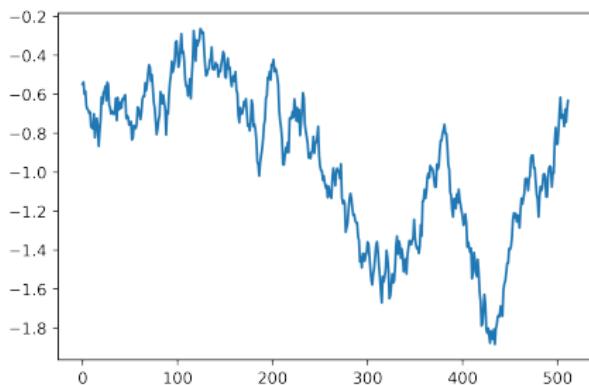


II. Textures homogènes irrégulières

Objectif : Définir des champs irréguliers anisotropes par

$$X_t^f = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1 \right) \sqrt{\tau(\xi)} ||\xi||^{-h(\xi)-1} \hat{W}(d\xi)$$

et en déduire des modèles pour les analyser.

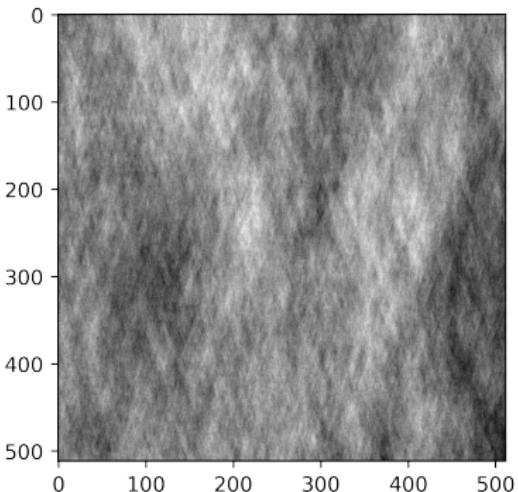
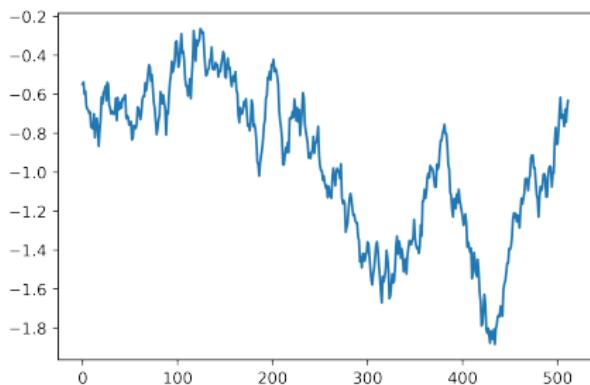


II. Textures homogènes irrégulières

Objectif : Définir des champs irréguliers anisotropes par

$$X_t^f = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i\langle \xi, t \rangle} - 1 \right) \sqrt{\tau(\xi)} ||\xi||^{-h(\xi)-1} \hat{W}(d\xi)$$

et en déduire des modèles pour les analyser.



Déf : Une isométrie $L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow_W L^2(\Omega)$ est un bruit blanc gaussien

Déf : $B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ est un mouvement pré-brownien

Contrôler la régularité des réalisations

Déf : Une isométrie $L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow_W L^2(\Omega)$ est un bruit blanc gaussien

- $W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n$ est un bruit blanc gaussien.
- $W(f) = \int f(s) dW(s)$ avec $dW(s) = \sum Z_n \psi_n(s)$.

Contrôler la régularité des réalisations

Déf : Une isométrie $L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow_w L^2(\Omega)$ est un bruit blanc gaussien

- $W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n$ est un bruit blanc gaussien.
- $W(f) = \int f(s) dW(s)$ avec $dW(s) = \sum Z_n \psi_n(s)$.

Kolmogorov-Chentsov :

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^q] \leq C|t - s|^{1+\varepsilon} \implies B \text{ est } h\text{-Hölder, } \forall h \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[.$$

Contrôler la régularité des réalisations

Déf : Une isométrie $L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow_w L^2(\Omega)$ est un bruit blanc gaussien

- $W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n$ est un bruit blanc gaussien.
- $W(f) = \int f(s) dW(s)$ avec $dW(s) = \sum Z_n \psi_n(s)$.

Kolmogorov-Chentsov :

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^q] \leq C|t - s|^{1+\varepsilon} \implies B \text{ est } h\text{-Hölder, } \forall h \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[.$$

Déf : $B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ est un mouvement pré-brownien

- $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$ d'où $\mathbb{E}[|B_t - B_s|^q] = C_q(t - s)^{q/2}$
- Le mouvement brownien est $\frac{1}{2}$ -Hölder régulier

Contrôler la régularité des réalisations

Déf : Une isométrie $L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow_w L^2(\Omega)$ est un bruit blanc gaussien

- $W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n$ est un bruit blanc gaussien.
- $W(f) = \int f(s) dW(s)$ avec $dW(s) = \sum Z_n \psi_n(s)$.

Kolmogorov-Chentsov :

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^q] \leq C|t - s|^{1+\varepsilon} \implies B \text{ est } h\text{-Hölder}, \forall h \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[.$$

Déf : $B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ est un mouvement pré-brownien

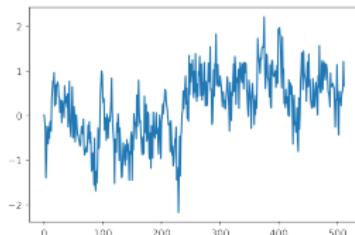
- $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, |t - s|)$ d'où $\mathbb{E}[|B_t - B_s|^q] = C_q(t - s)^{q/2}$
- Le mouvement brownien est $\frac{1}{2}$ -Hölder régulier

Déf : $B_t^h = W(s \mapsto |t - s|^{h-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[0,t]})$ est un mouvement pré-brownien h -fractionnaire, $h \in]0, 1[$

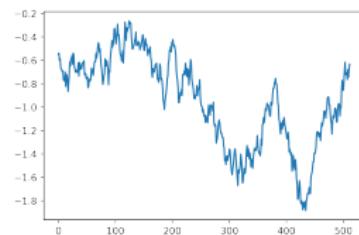
- $B_t^h - B_s^h \sim \mathcal{N}(0, |t - s|^{2h})$ d'où $\mathbb{E}[|B_t^h - B_s^h|^q] = C_q(t - s)^{qh}$
- **Le mouvement brownien h -fractionnaire B^h est h -Hölder régulier.**

Choisir la régularité : Brownien h -fractionnaire, $h \in]0, 1[$

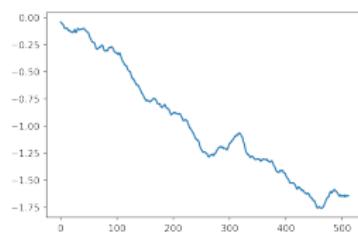
Pour le Brownien h -Fractionnaire, $\|B_\delta^h - B_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 = |\delta|^{2h}$.



(a) $h < 0.5$



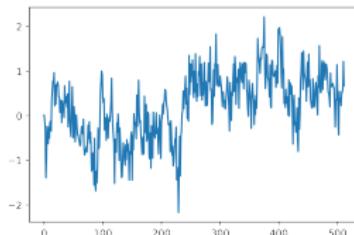
(b) Brownien



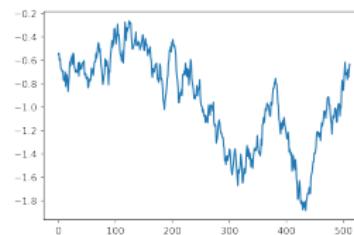
(c) $h > 0.5$

Choisir la régularité : Brownien h -fractionnaire, $h \in]0, 1[$

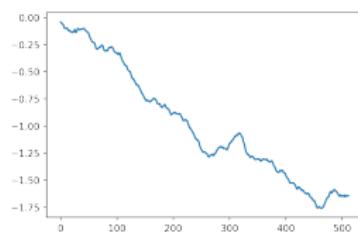
Pour le Brownien h -Fractionnaire, $\|B_\delta^h - B_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 = |\delta|^{2h}$.



(a) $h < 0.5$

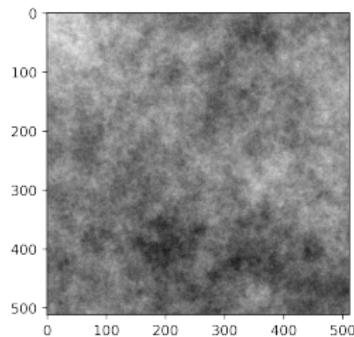


(b) Brownien

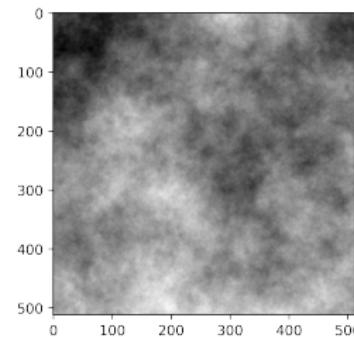


(c) $h > 0.5$

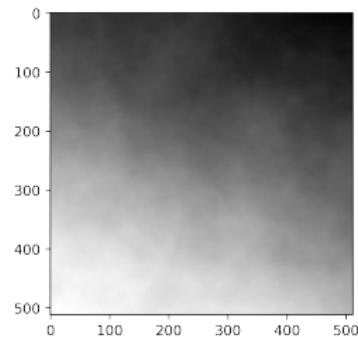
Pour le Champ Brownien h -Fractionnaire, $\|B_\delta^h - B_0^h\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|h\|_2^{2h}$.



(a) $h < 0.5$



(b) Lévy-Chentsov



(c) $h > 0.5$

Représentation spatiale et spectrale

Idée : Champ $X \leftrightarrow$ Covariance $K \leftrightarrow$ Mesure spectrale μ

Représentation spatiale et spectrale

Idée : Champ $X \leftrightarrow$ Covariance $K \leftrightarrow$ Mesure spectrale μ

Theorem (Bochner stationnaire)

Une fonction $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive si et seulement si $K(0) \geq 0$ et il existe une mesure (dite spectrale) de probabilité symétrique μ sur \mathbb{R}^d telle que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^d, K(\delta) = K(0) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \delta, \xi \rangle} \mu(d\xi).$$

Représentation spatiale et spectrale

Idée : Champ $X \leftrightarrow$ Covariance $K \leftrightarrow$ Mesure spectrale μ

Theorem (Bochner stationnaire)

Une fonction $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est définie positive si et seulement si $K(0) \geq 0$ et il existe une mesure (dite spectrale) de probabilité symétrique μ sur \mathbb{R}^d telle que

$$\forall \delta \in \mathbb{R}^d, K(\delta) = K(0) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle \delta, \xi \rangle} \mu(d\xi).$$

Proposition

Soit K et μ sa mesure spectrale à densité, c'est à dire vérifiant $K(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \xi \rangle} f(\xi) d\xi$. Alors le champ gaussien défini par

$$Y_t = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \xi \rangle} \sqrt{f(\xi)} \hat{W}(d\xi)$$

a pour fonction de covariance K .

Représentation spatiale et spectrale

Theorem (Bochner à accroissements stationnaire)

Soit X un champ gaussien à **accroissements stationnaires** avec $X_0 = 0$ p.s. et la fonction de covariance $R : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, alors il existe une mesure finie (dite spectrale) vérifiant

$\int_{\mathbb{R}^d} \min(1, ||\xi||^2) \mu(d\xi) < +\infty$ et la fonction de covariance s'écrit

$$R(s, t) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1) (e^{i\langle s, \xi \rangle} - 1) \mu(d\xi) + t \Sigma s$$

pour une matrice de covariance Σ .

De plus, pour une mesure spectrale μ a densité f le champ gaussien défini par

$$X_t^f = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1) \sqrt{f(\xi)} \hat{W}(d\xi) + \langle t, N \rangle$$

où $N \sim \mathcal{N}(0_{\mathbb{R}^d}, \Sigma)$ est indistinguable de X .

Le théorème de Bonami-Estrade

Caractérisation *spectrale* des propriétés des réalisations :

Theorem (Bonami-Estrade)

Soit f une densité vérifiant $\int_{\mathbb{R}^d} \min(1, ||\xi||^2) f(\xi) d\xi < +\infty$ et X^f un champ donné par

$$X^f(t) := \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1 \right) \sqrt{f(\xi)} \hat{W}(d\xi). \quad (1)$$

Alors le champ a une modification continue, et de plus,

- X^f est isotrope si et seulement si f est radiale

i.e. $R_\theta \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^d)$, $X^f(\cdot) \stackrel{f.d.d}{=} X^f(R_\theta \cdot) \iff f(\cdot) = f(||\cdot||)$

- X^f est autosimilaire si et seulement si f est homogène

i.e.

$\exists h_X, \forall \lambda > 0 : X^f(\lambda \cdot) \stackrel{f.d.d}{=} \lambda^{h_X} X^f(\cdot) \iff \exists h_f, \forall \lambda > 0, f(\lambda \cdot) = \lambda^{h_f} f(\cdot)$

De plus, X^f est h_0 -Hölder, si $\exists A, B > 0$ tels que

$$f(\xi) \leq B ||\xi||^{-(2h_0+2)} \quad \text{pour presque tout } ||\xi|| \geq A.$$

Conséquences du théorème de Bonami-Estrade

$$f(\xi) := \tau \left(\frac{\xi}{\|\xi\|_2} \right) \|\xi\|^{-2h(\frac{\xi}{\|\xi\|_2})}_{homog.} \|\xi\|_2^{-2}_{int.}$$

Definition (Anisotropic Fractional Brownian Field - AFBF)

On appelle AFBF tout champ

$$X^f(t) := \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1 \right) \sqrt{f(\xi)} \hat{W}(d\xi)$$

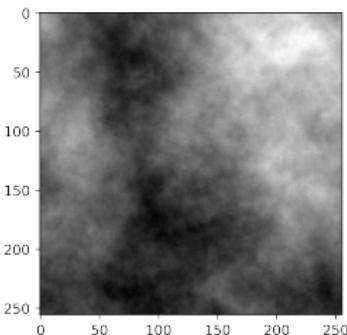
avec f comme ci-dessus avec • $\tau : \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}^+$ et • $h : \mathbb{S}_1 \rightarrow]0, 1[$.

Corollary

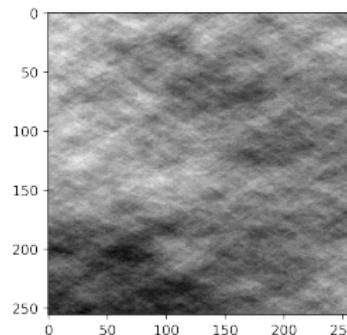
Les AFBF sont des champs gaussiens à accroissements stationnaires et :

- τ non const. $\implies f$ non rad. $\implies X^f$ aniso.
- h non const. $\implies f$ non homog. $\implies X^f$ non auto-similaire.
- X^f est $h_0 = \text{ess inf}_{\text{supp } \tau} h(\xi)$ -Hölder régulier.

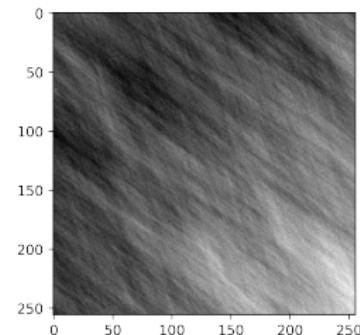
Exemples d'AFBF



(a) Champ autosimilaire
isotope
 τ, h const.



(b) Champ autosimilaire
anisotope
 h const.



(c) Champ
non-autosimilaire
anisotope
 τ, h non const.

$$X^f(t) := \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1 \right) \sqrt{\tau(\xi)} ||\xi||_2^{-(h(\xi)+1)} \hat{W}(d\xi)$$

- Analyser localement un AFBF ?

$$V_{X, x_0}(\delta) \sim |X_{x_0 + \delta} - X_{x_0}|^2 \quad T_X(j, k) \sim |\langle X, \psi_{j,k} \rangle|^2 \quad T_X(j, k) \sim |\langle f, \widehat{\psi_{j,k}} \rangle|^2$$

$$X^f(t) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1 \right) \sqrt{f(\xi)} \hat{W}(d\xi)$$

Quels filtres choisir pour analyser des champs anisotropes ?

- Analyse multi-échelles **locales** → ondelettes à **support compact**
- Analyse **anisotrope** → ondelettes directionnelles $(\psi^{(d)})_{d=1}^D$
- Analyse spectrale → ondelettes **localisées spectralement**

En bonus :

- Coefficients stables → transformée de Hilbert
- Insensible aux tendances polynomiales → moments nuls
- Calcul rapide → banque de filtres

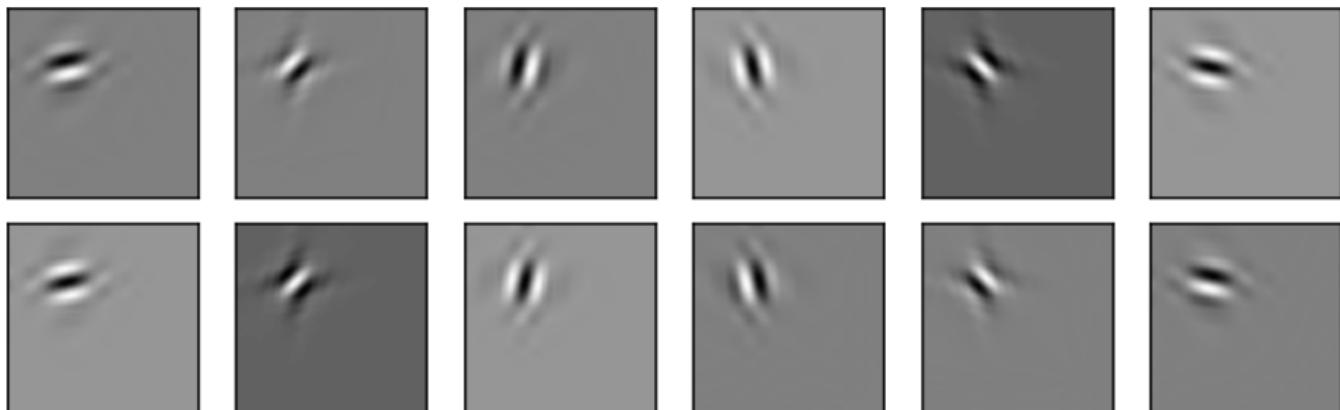
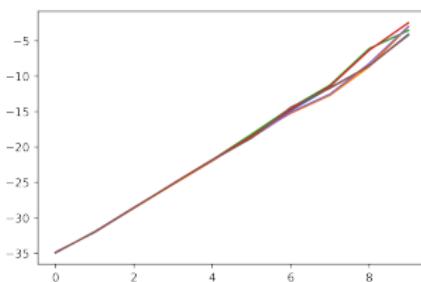


Figure – Dual Tree Complex Wavelet Transform (N. Kingsbury)

Analyse de textures homogènes

Densité spectrale $f(\xi) = \tau(\xi) ||\xi||^{-(2h(\xi)+2)}$

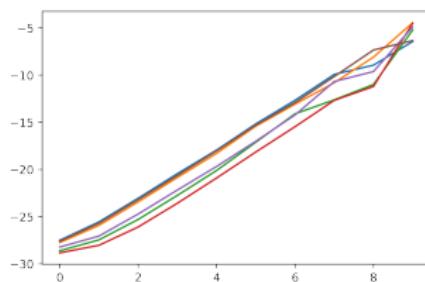
coefficients directionnels $T_X^{(d)}(j, k) = |\langle X, \psi_{j,k}^{(d)} \rangle|^2$ et $I_{j,k}^{(d)} = \log T_X^{(d)}(j, k)$



(a) Brownien h -frac.
 τ, h constantes

$$I_{j,k}^{(d)} \sim jh_k + v_k$$

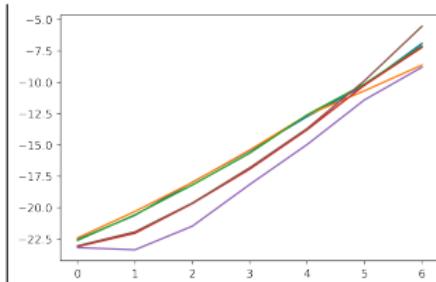
$$\sum_{j,d} ||I_j^{(d)} - jh - v||_F^2$$



(b) AFBF autosimilaire
 h constante

$$I_{j,k}^{(d)} \sim jh_k + v_k^{(d)}$$

$$\sum_{j,d} ||I_j^{(d)} - jh - v^{(d)}||_F^2$$



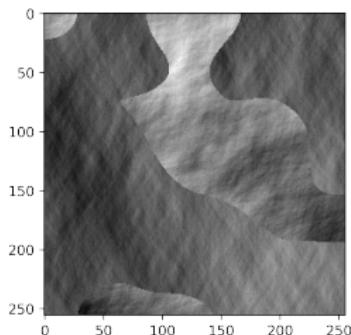
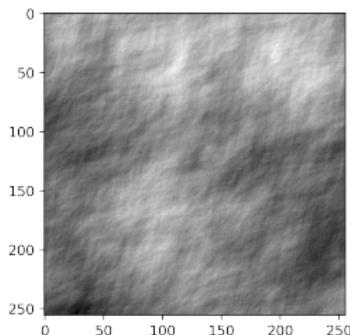
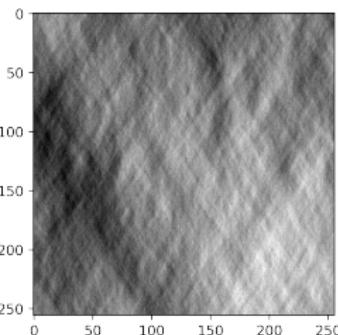
(c) AFBF
 τ, h non constantes

$$I_{j,k}^{(d)} \sim jh_k^{(d)} + v_k^{(d)}$$

$$\sum_{j,d} ||I_j^{(d)} - jh^{(d)} - v^{(d)}||_F^2$$

Pour A une matrice adaptée au modèle et $C > 0$, les problèmes d'optimisation se réécrivent tous $C + ||A(v - v_{LR}, h - h_{LR})||_2^2$

Est-ce que le modèle linéaire fonctionne localement ?



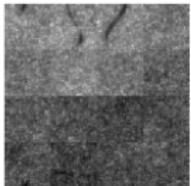
h_0



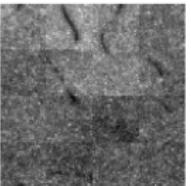
h_1



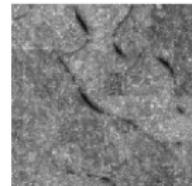
h_2



h_3



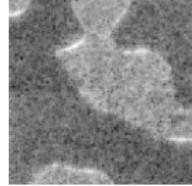
h_4



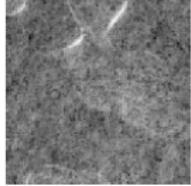
h_5



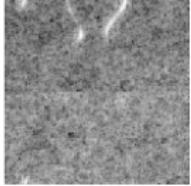
v_0



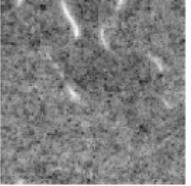
v_1



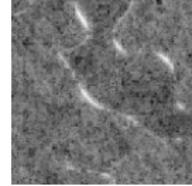
v_2



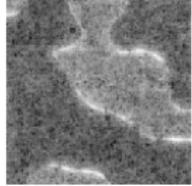
v_3



v_4



v_5



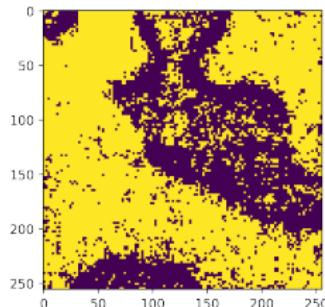
Régularisation des solutions

Il faut régulariser les solutions :

$$(\hat{v}, \hat{h}) = \arg \min_{v, h} \underbrace{\|A(v - v_{LR}, h - h_{LR})\|_F^2}_{F(h)} + \underbrace{\lambda \text{TV}_\alpha(v, h)}_{G(h)}$$

avec

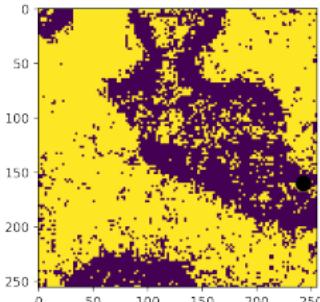
$$\text{TV}_\alpha(v, h) = \sum_k \sqrt{\|(\nabla v)_k\|_2^2 + \alpha \|(\nabla h)_k\|_2^2} = \|\nabla(v, \alpha h)\|_{2,1}.$$



Régularisation des solutions

Il faut régulariser les solutions :

$$(\hat{v}, \hat{h}) = \arg \min_{v, h} \underbrace{\|A(v - v_{LR}, h - h_{LR})\|_F^2}_{F(h)} + \underbrace{\lambda \text{TV}_\alpha(v, h)}_{G(h)}$$



avec

$$\text{TV}_\alpha(v, h) = \sum_k \sqrt{\|(\nabla v)_k\|_2^2 + \alpha \|(\nabla h)_k\|_2^2} = \|\nabla(v, \alpha h)\|_{2,1}.$$

Minimisation non-lisse \rightarrow Algorithmes proximaux :

$$\arg \min_h \underbrace{\frac{1}{2} \|h^* - h\|_2^2 + G(h)}_{P(h)} =: \text{prox}_G(h^*)$$

Si G différentiable :

$$\begin{aligned} h^{k+1} &= h^k - \tau \nabla P(h^k) \\ &= h^k - \tau (\nabla G(h^k) + h^k - h^*). \end{aligned}$$

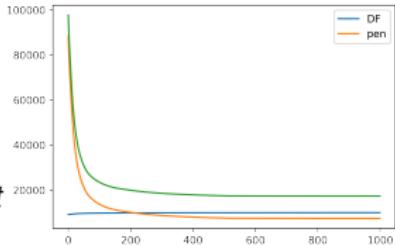
Sinon :

$$h^{k+1} = \underbrace{\text{prox}_{\tau G}(h^k - \tau(h^k - h^*))}_{\rho_k \Phi_k}$$

Un exemple d'algorithme Chambolle-Pock avec forte convexité

En notant $z_t := (v_t, h_t)$

$$\begin{cases} z_{t+1} = \text{prox}_{\sigma_t F}(z_t - \sigma_t \lambda \nabla_\alpha^* \tilde{u}_t) \\ u_{t+1} = \text{prox}_{\tau_t \|\cdot\|_{2,1}^*}(u_t + \tau_t \lambda \nabla z_{t+1}) \\ \theta_t = \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma\sigma_t}}, \quad \tau_{t+1} = \tau_t \theta_t, \quad \sigma_{t+1} = \sigma_t / \theta_t \\ \tilde{u}_{t+1} = u_{t+1} + \theta(u_{t+1} - u_t). \end{cases}$$



Lemma

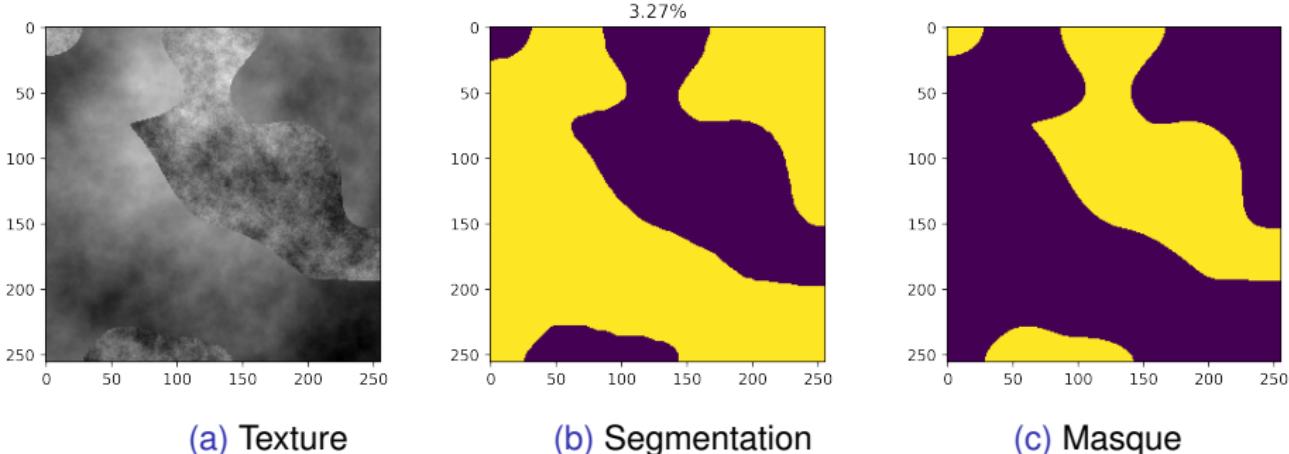
Soit $F(v, h) = \|A(v - v_{LR}, h - h_{LR})\|_F^2$ et $\eta > 0$, alors

$$\text{prox}_{\eta F}(v, h) = (I + \eta A^* A)^{-1}(\eta A^* A(v_{LR}, h_{LR}) + (v, h)).$$

Theorem

Si $\sigma_0 \tau_0 \lambda^2 (1 + \alpha^2) < \frac{1}{2}$ et $\gamma < \lambda_{\min}(A^* A)$, alors $z_t \rightarrow_{t \rightarrow \infty} z^*$ où $z^* = (v^*, h^*)$ minimise $F(v, h) + \lambda \|\nabla(v, h)\|_{2,1}$. De plus, $\|z_t - z^*\| = \mathcal{O}(1/t^2)$.

Segmentation sur autosimilaire isotrope

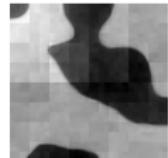


(a) Texture

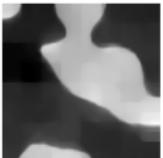
(b) Segmentation

(c) Masque

h0



v0



v1



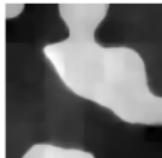
v2



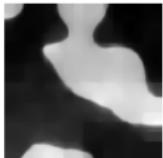
v3



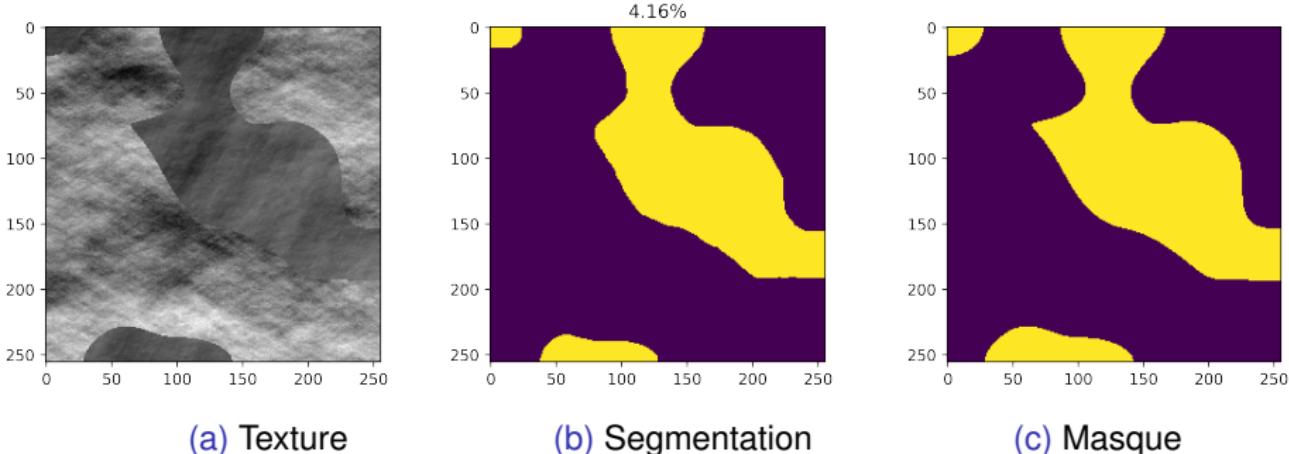
v4



v5



Segmentation sur autosimilaire anisotrope



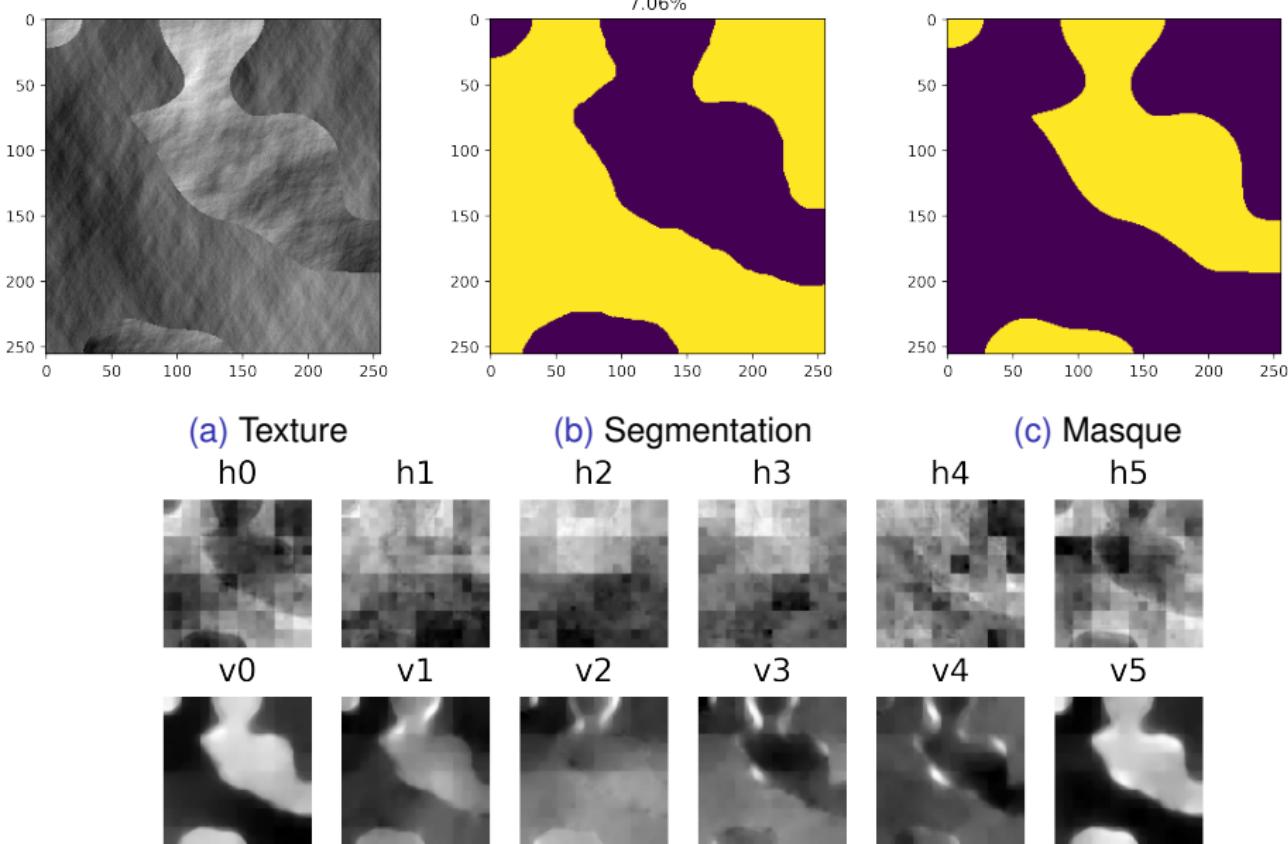
(a) Texture

(b) Segmentation

(c) Masque



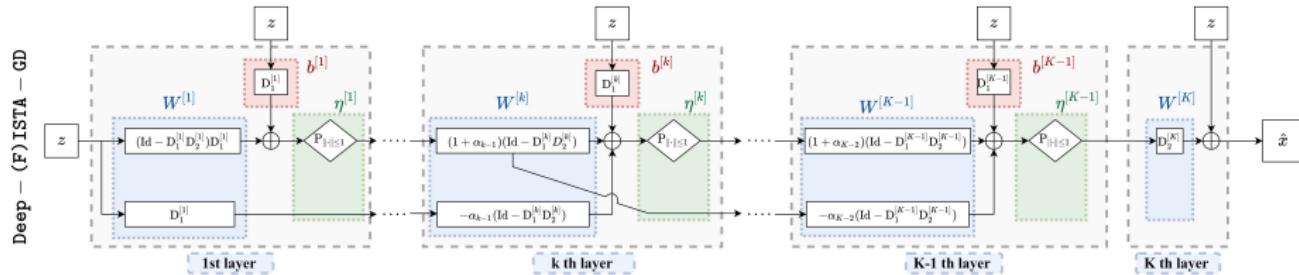
Segmentation sur AFBF



Conclusion - Objectifs de la thèse

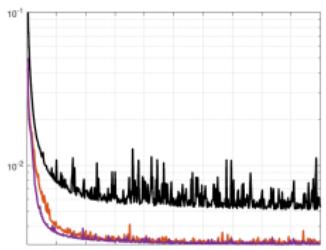
Contributions :

- Modèles d'estimation de régularité et anisotropie via densité spectrale
- Algorithmes classiques et accélérés de segmentation
- Bibliothèque de segmentation anisotrope Python



A venir :

- Algorithmes proximaux déroulés
- Sélection d'hyperparamètres
- Meilleure synthèse de textures hétérogènes
- Nouveaux descripteurs (autosimilarité, tenseur de structure, multifractalité, ...)



Des opérateurs proximaux aux algorithmes déroulés

$$\arg \min_h \|h^* - h\|_2^2 + G(h)$$

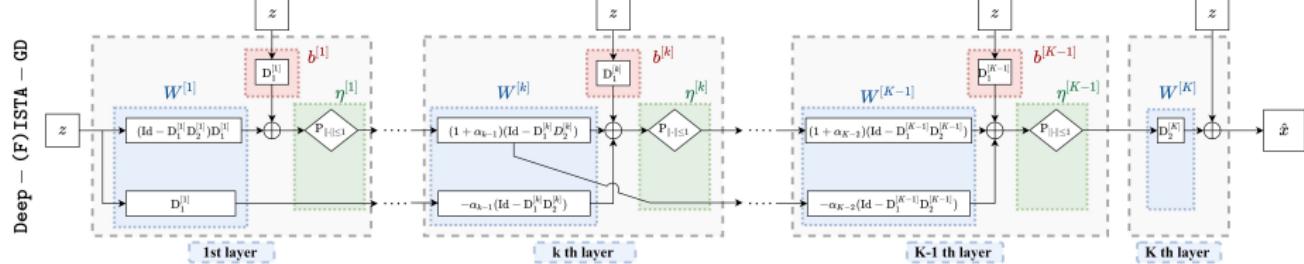
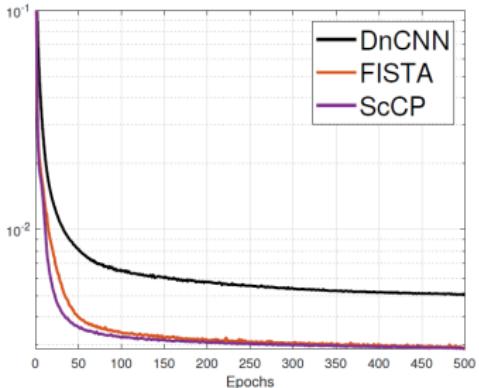
Même si G non-différentiable,

$$h^k = D_\theta(h^0) = \underbrace{\rho_k(\Phi_k(\dots(\rho_0(\Phi_0(h^0)))\dots))}_{k \text{ fois}}$$

tend vers une solution, avec :

- Φ_k linéaires \longrightarrow Poids
- ρ_k non-linéaires \longrightarrow Fonctions d'activation

Apprentissage supervisé :
 $L(\theta) = \mathbb{E}_{(X, Y)} \ell(D_\theta(X), Y)$



Mouvement brownien par le bruit blanc

Soit $\{\psi_n\}_{\mathbb{N}}$ une b.o.n. de $L^2([0, 1])$, et $\{Z_n\}_{\mathbb{N}} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n$ est une isométrie $L^2([0, 1]) \rightarrow L^2(\Omega)$

et on peut écrire le mouvement pré-brownien

$$B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_{[0,t]} dW(s) \quad \text{avec } dW(s) = \sum Z_n \psi_n(s).$$

Mouvement brownien par le bruit blanc

Soit $\{\psi_n\}_{\mathbb{N}}$ une b.o.n. de $L^2([0, 1])$, et $\{Z_n\}_{\mathbb{N}} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n \quad \text{est une isométrie} \quad L^2([0, 1]) \rightarrow L^2(\Omega)$$

et on peut écrire le mouvement pré-brownien

$$B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_{[0,t]} dW(s) \quad \text{avec } dW(s) = \sum Z_n \psi_n(s).$$

$$\|B_t - B_s\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|W(\mathbb{1}_{[0,t]}) - W(\mathbb{1}_{[0,s]})\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathbb{1}_{[s,t]}\|_{L^2([0,1])}^2 = |t - s|$$

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^q] = (t - s)^{q/2} \mathbb{E}[|Z|^q] = C_{2q} (t - s)^{q/2}$$

Mouvement brownien par le bruit blanc

Soit $\{\psi_n\}_{\mathbb{N}}$ une b.o.n. de $L^2([0, 1])$, et $\{Z_n\}_{\mathbb{N}} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n \text{ est une isométrie } L^2([0, 1]) \rightarrow L^2(\Omega)$$

et on peut écrire le mouvement pré-brownien

$$B_t = W(\mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_{[0,t]} dW(s) \text{ avec } dW(s) = \sum Z_n \psi_n(s).$$

$$\|B_t - B_s\|_{L^2(\Omega)}^2 = \|W(\mathbb{1}_{[0,t]}) - W(\mathbb{1}_{[0,s]})\|_{L^2(\Omega)} = \|\mathbb{1}_{[s,t]}\|_{L^2([0,1])}^2 = |t - s|$$

$$\mathbb{E}[|B_t - B_s|^q] = (t - s)^{q/2} \mathbb{E}[|Z|^q] = C_{2q} (t - s)^{q/2}$$

Kolmogorov-Chentsov :

$$\mathbb{E}[|B_s - B_t|^q] \leq C |t - s|^{1+\varepsilon} \implies B_t \text{ est } h\text{-Hölder, } \forall h \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[.$$

N'importe quel $h' \in]0, \frac{q/2-1}{q}[$ donne que $(\tilde{B}_t)_t$ est h' -Hölder ($h_{crit} = \frac{1}{2}$).

Mouvement brownien fractionnaire par le bruit blanc

Soit $\{\psi_n\}_{\mathbb{N}}$ une b.o.n. de $L^2([0, 1])$, et $\{Z_n\}_{\mathbb{N}} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n \text{ est une isométrie } L^2([0, 1]) \rightarrow L^2(\Omega)$$

et on peut écrire le mouvement pré-brownien fractionnaire

$$B_t^h = W(x \mapsto |t - x|^{h-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_{[0,t]} |t - x|^{h-\frac{1}{2}} dW(x)$$

Kolmogorov-Chentsov :

$$\mathbb{E}[|B_s - B_t|^q] \leq C|t - s|^{1+\varepsilon} \implies B_t \text{ est } h\text{-Hölder}, \forall h' \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[.$$

N'importe quel $h' \in]0, \frac{qh-1}{q}[$ donne que $(\tilde{B}_t)_t$ est h' -Hölder ($h_{crit} = h$).

Mouvement brownien fractionnaire par le bruit blanc

Soit $\{\psi_n\}_{\mathbb{N}}$ une b.o.n. de $L^2([0, 1])$, et $\{Z_n\}_{\mathbb{N}} \sim^{i.i.d} \mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$W : f \mapsto \sum \langle f, \psi_n \rangle Z_n \text{ est une isométrie } L^2([0, 1]) \rightarrow L^2(\Omega)$$

et on peut écrire le mouvement pré-brownien fractionnaire

$$B_t^h = W(x \mapsto |t - x|^{h-\frac{1}{2}} \mathbb{1}_{[0,t]}) = \int_{[0,t]} |t - x|^{h-\frac{1}{2}} dW(x)$$

$$\|B_t^h - B_s^h\|_{L^2(\Omega)}^2 = |t - s|^{2h}.$$

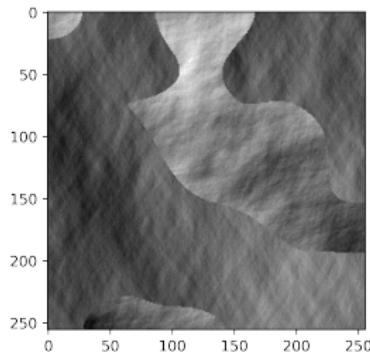
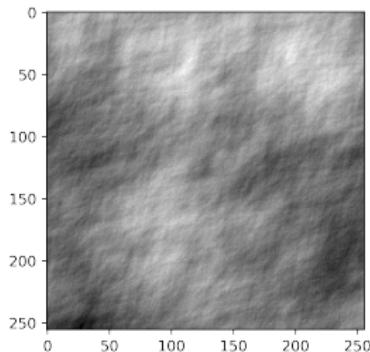
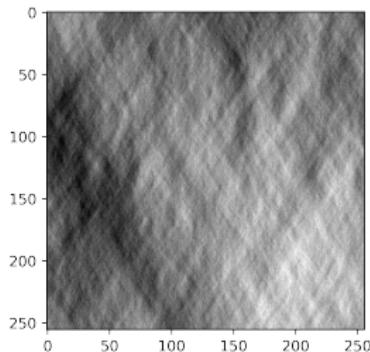
$$\mathbb{E}[|B_t^h - B_s^h|^q] = (t - s)^{qh} \mathbb{E}[|Z|^q] = C_q (t - s)^{qh}$$

Kolmogorov-Chentsov :

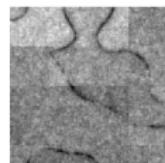
$$\mathbb{E}[|B_s - B_t|^q] \leq C |t - s|^{1+\varepsilon} \implies B_t \text{ est } h\text{-Hölder}, \forall h' \in]0, \frac{\varepsilon}{q}[.$$

N'importe quel $h' \in]0, \frac{qh-1}{q}[$ donne que $(\tilde{B}_t)_t$ est h' -Hölder ($h_{crit} = h$).

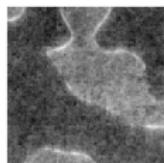
Est-ce que le modèle linéaire fonctionne ? (h -lié)



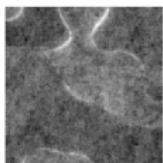
h



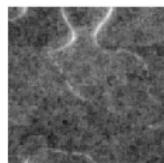
v_0



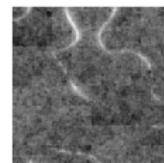
v_1



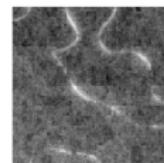
v_2



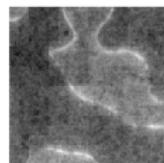
v_3



v_4



v_5



Influence de λ

Passer de JND coefs. à 2ND

Lemma

Soit $Y \in \mathbb{R}^J$ et $(v, h) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|Y - A(v, h)^T\|_2^2 = C + \|A(v - v_{LR}, h - h_{LR})^T\|_2^2$$

où $(v_{LR}, h_{LR}) = (A^*A)^{-1}A^*Y$ et $C = \|Y - A(v_{LR}, h_{LR})\|_2^2$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}\|Y - A(v, h)^T\|_2^2 &= \langle Y - A(v, h)^T + A(z - z), Y - A(v, h)^T + A(z - z) \rangle \\ &= \|Y - Az\|_2^2 - 2\langle Y - Az, A(v, h)^T - Az \rangle + \|A(v, h)^T - Az\|_2^2.\end{aligned}$$

De plus, $\langle Y - Az, A(v, h)^T - Az \rangle = \langle A^*Y - A^*Az, (v, h)^T - z \rangle = 0$
pour $z = (v_{LR}, h_{LR})$. □

Passer de JND coefs. à $2ND$

Lemma

Soit $Y \in \mathbb{R}^J$ et $(v, h) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\|Y - A(v, h)^T\|_2^2 = C + \|A(v - v_{LR}, h - h_{LR})^T\|_2^2$$

où $(v_{LR}, h_{LR}) = (A^*A)^{-1}A^*Y$ et $C = \|Y - A(v_{LR}, h_{LR})\|_2^2$.

En bref, l'erreur d'approximation ne dépend que de l'erreur face au 'meilleur' modèle linéaire, et augmenter le nombre d'échelles disponibles n'augmente pas la complexité du calcul.

Et même, le calcul se comporte de mieux en mieux :

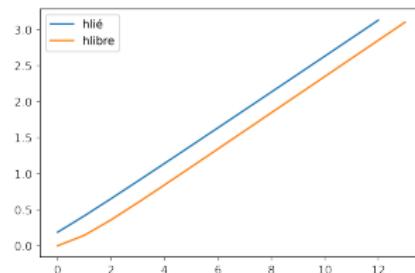


Figure – $\lambda_{\min}(A^*A)$ augmente quand J augmente