

Note décomposition en ondelettes complexes

Leo Davy

April 23, 2022

1 Modèle standard

On se donne une base d'ondelettes $(\psi_{j,k})$ et on considère les coefficients d'ondelettes

$$d_j(x) = \langle X, \psi_{j,k_x} \rangle = X \star \psi_j(x) \quad (1)$$

d'un signal $x \mapsto X(x)$. Afin de gagner en invariance par translation (locale) (?) on s'intéresse plutôt aux (log-)leaders en prenant au lieu de $d_j(x)$ le supremum des valeurs absolues des coefficients de tous les coefficients dans le voisinage de k_x à toutes les échelles les plus fines. Pour alléger les notations, je confonds les notations pour les coefficients d'ondelettes et les leaders. On a ainsi

$$d_j(x) \sim v(x) 2^{jh(x)} \xi_x =_{\mathbb{E}} v(x) 2^{jh(x)} \quad (2)$$

avec ξ_x un bruit multiplicatif, centré en 1, log-normal si on veut un bruit gaussien sur les logs-leaders, qu'on ignore par la suite et on considère les égalités en espérance. En passant au log on est ramené à une régression linéaire. Par contre, l'analyse est isotrope parce que au début de l'analyse en dimension d , on a $2^d - 1$ ondelettes ψ , vu que par hypothèse le signal est isotrope, et localement homogène, afin de diminuer l'impact du bruit ξ , on considère chaque coefficient d'ondelette de façon uniforme (par rapport aux directions). On n'a donc pas d'espoir de récupérer des informations spécifiques aux directions.

2 Modèle complexe

A la place d'une ondelette réelle, on peut considérer une ondelette complexe pour faire l'analyse, de la forme :

$$\psi = \text{Re}(\psi) + i \text{Im}(\psi) = \psi_r + i \psi_c \quad (3)$$

où ψ_r et ψ_c sont des ondelettes réelles. En particulier, elles peuvent vérifier

$$d_j^{r,c}(x) = v_{r,c}(x) 2^{jh_{r,c}(x)} \quad (4)$$

où l'équation est à considérer soit pour r , soit pour c (par exemple, h_r désigne la régularité au sens de la quantité de multirésolution associée à l'analyse par l'ondelette réelle ψ_r). On se retrouve donc avec des coefficients complexes d'ondelette

$$d_j(x) = d_j^r(x) + id_j^c(x) = v_r(x)2^{jh_r(x)} + iv_c(x)2^{jh_c(x)}. \quad (5)$$

On peut alors réécrire l'expression précédente, en ignorant la dépendance en x , sous la forme

$$d_j = \sqrt{v_r^2 2^{2jh_r} + v_c^2 2^{2jh_c}} e^{i \arctan\left(\frac{v_c 2^{jh_c}}{v_r 2^{jh_r}}\right)} = \rho_j e^{i\omega_j} \quad (6)$$

avec

$$\rho_j(x) := \sqrt{v_r(x)^2 2^{2jh_r(x)} + v_c(x)^2 2^{2jh_c(x)}} \quad (7)$$

et

$$\omega_j(x) = \arctan\left(\frac{v_c(x)}{v_r(x)} 2^{j(h_c(x) - h_r(x))}\right). \quad (8)$$

Que l'on peut aussi réécrire sous la forme

$$d_j(x) = \rho_j(x) \cos(\omega_j(x)) + i\rho_j(x) \sin(\omega_j(x)). \quad (9)$$

En particulier, on peut remarquer

1. que le module (ρ_j) et la phase (ω_j) de d_j sont indépendants (l'expression de l'une des deux quantités ne fait pas intervenir l'autre).
2. $\log(\tan(\omega_j)) = \log(d_j^c/d_j^r)$ permet une régression linéaire de $\log \frac{v_c}{v_r}$ et $h_c - h_r$.
3. Comme d_j provient d'une analyse en ondelettes, on peut être aussi supposer que $\rho_j \sim v 2^{jh}$ et estimer $\log(v)$ et h aussi par régression linéaire de $\log(\rho_j)$
4. Aussi, il y a sûrement un lien entre les deux quantités précédentes qui pourrait permettre de coupler les estimations.

On peut donner une intuition au fait que ω mesure bien un angle dans la texture de la manière suivante. On suppose v_c/v_r constant et donc ω_j ne dépend que de $2^{j(h_c - h_r)}$. Dans un premier temps on suppose $h_c \gg h_r$, c'est à dire que la quantité multirésolution associée à l'ondelette ψ_c décroît plus vite que celle associée à ψ_r ; ou bien, plus simplement, X est plus régulier suivant l'ondelette c que l'ondelette r .

Donc quand on considère les échelles les plus fines ($j \rightarrow -\infty$) on a $\omega_j \rightarrow \arctan(0)$, d'où, aux échelles les plus fines, la phase disparaît et toute l'information est capturée par l'ondelette ψ_r . Cela correspond probablement à ce qu'on attend, car $h_c > h_r$ signifie qu'il y a plus d'information locale suivant ψ_r que ψ_c .

En considérant $h_c \ll h_r$ on peut appliquer le même raisonnement et obtenir que l'information est capturée seulement par l'ondelette h_c .

Il reste donc à s'assurer que ψ_r et ψ_c capturent bien de l'information dans des directions distinctes. Pour cela, la stratégie semble être de choisir des ondelettes ψ_r et ψ_c

qui sont obtenues par transformée de Fourier d'ondelettes ϕ_r et ϕ_c . C'est à dire, par exemple,

$$\psi_r(t) = \hat{\phi}_r(t). \quad (10)$$

Et ainsi, un signal anisotrope $X(t)$ qui a une densité spectrale de la forme $|\hat{X}(\zeta)| \leq \frac{1}{\|\zeta\|^{h(\zeta)}}$, où $\zeta \mapsto h(\zeta)$ est une fonction qui ne dépend que de l'angle, qui donne la régularité directionnelle (pour des directions spectrales).

Donc, si, par exemple si Ω est le support de ϕ_r , on a

$$d_{j=0}^r = \langle X, \psi_r \rangle = \langle X, \hat{\phi}_r \rangle = \langle \hat{X}, \phi_r \rangle \quad (11)$$

et donc d_0^r ne dépend que des directions (en Fourier) de X supportées dans Ω . Il reste à voir quelles propriétés on souhaite avoir entre ψ_r et ψ_c . On pourra par exemple chercher à avoir que ρ_j soit une quantité anisotrope, au sens où si X^θ est une rotation par θ d'un signal X , alors leur coefficients complexes d'ondelettes ont même module. Cela forcerait l'information sur l'anisotropie à être contenue dans ω_j (peut-être que c'est trop restrictif et que l'on perdrait toute l'information sur l'anisotropie).