Note modèles fractaux anisotropes

Leo Davy

April 21, 2022

1 Modèles isotropes

1.1 Mouvement brownien

Définition 1.1. *On appelle mouvement brownien (en dimension d), tout processus mesurable $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ vérifiant :*

1. *$B_0 = 0$ p.s.*
2. *Le processus est à accroissements independants*[1]
3. *$\forall s \leq t$ les accroissements suivent une loi normale $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0,(t-s)I_d)$*[2]
4. *Le processus est à trajectoire p.s. continues*

Proposition 1.1. *Soit (B_t) un mouvement brownien*

1. *Pour tout $s > 0$, on a que $B^s_t = B_{s+t} - B_s$ est un mouvement brownien*[3]
2. *Pour tout $c > 0$, $\tilde{B}_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$ est un mouvement brownien*
3. *On peut construire une isométrie*[4] *entre les fonctions de carré intégrables classique $L^2(\mathbb{R}_+)$ (avec la mesure de Lebesgue), et $L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ un espace de Gaussiennes indépendantes qui vérifie $\mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0,t]}) = B_t$...*

Theoreme 1.1. *Une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est définie positive si et seulement si il existe une mesure de probabilité symétrique μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = f(0)\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle}\mu(d\xi). \tag{1}$$

C'est à dire qu'il existe un vecteur aléatoire symétrique Z sur $\mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = f(0)\mathbb{E}e^{i\langle x,Z\rangle}. \tag{2}$$

[1] Pour tout $t_1 \leq t_2 \leq t_3$, on a que $B_{t_2} - B_{t_1}$ est indépendant de $B_{t_3} - B_{t_2}$.

[2] Implique stationarité ($\mu = 0$) du brownien, et isotropie ($\Sigma = \sigma I_d$)

[3] Indépendant de $\mathcal{F}_s = \sigma(\{B_u : u \leq s\})$

[4] C'est à dire, que pour n'importe quel $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$, on a que $\mathcal{W}(f)$ est une gaussienne centrée de variance $||f||_{L^2}$ et on a aussi $\mathbb{E}[\mathcal{W}(f_i)\mathcal{W}(f_j)] = \langle f_i, f_j\rangle_{L^2}$

Conséquences du théorème (dans le cas où (X_t) est un champ gaussien stationnaire)

Proposition 1.2. *1. Si X est stationnaire et sa fonction d'autocovariance $K(t) = \mathbb{E}X_{s+t}X_s$ est continue, alors il existe une unique mesure finie μ sur $\mathbb{R}^d$ telle que*

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,\xi\rangle}\mu(d\xi) \tag{3}$$

appelée mesure spectrale du champ X.

2. Si K admet $\mu(d\xi) = f(\xi)d\xi$ comme densité spectrale, alors f est définie positive et le champ gaussien $(Y_t)_t$ défini par

$$Y_t = \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f(\xi)}e^{i\langle t,\xi\rangle}\hat{W}(d\xi) \tag{4}$$

est indistinguable de X et appelé représentation spectrale de X.

Dans le cas où le champ n'est pas nécessairement stationnaire mais a des accroissements stationnaires, on peut écrire la fonction de covariance par une mesure spectrale μ sous la forme

$$K(s,t) = \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\langle t,\xi\rangle} - 1\right)\left(e^{-i\langle s,\xi\rangle} - 1\right)\mu(d\xi) + t\Sigma s \tag{5}$$

pour une certaine matrice σ symétrique définie positive.
Et la représentation spectrale de X devient, avec $\mu(d\xi) = f(\xi)d\xi$

$$Y_t = \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{i\langle t,\xi\rangle} - 1\right)\sqrt{f(\xi)}\hat{W}(d\xi) + \langle t, N\rangle \tag{6}$$

où N est un vecteur gaussien centré de covariance Σ.

1.2 Mouvement brownien fractionnaire

Une première généralisation du mouvement brownien se fait par le mouvement brownien fractionnaire, en oubliant la condition d'avoir des accroissements indépendants.

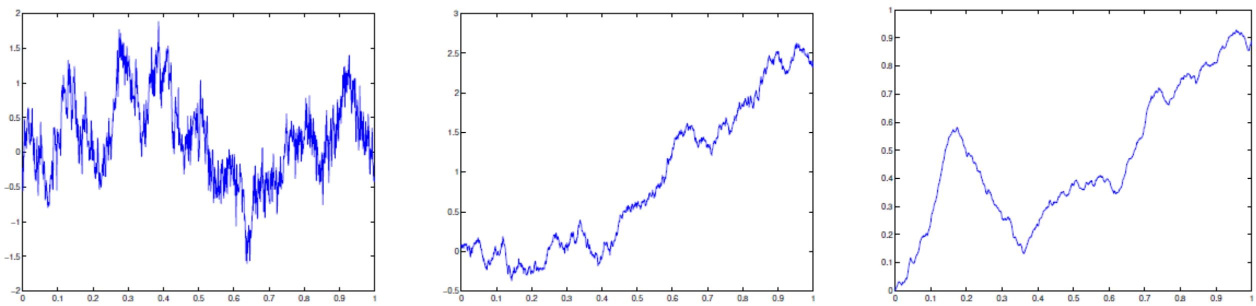
Définition 1.2. *Soit $0 < H < 1$. Il existe un unique processus gaussien qui est H-autosimilaire, à accroissements stationnaires et tel que $Var(B_H(1)) = 1$. Le mouvement brownien fractionnaire $(B^H(t))_t$ est un tel processus, dont la covariance est donnée par*

$$Cov(B^H(t), B^H(s)) = \frac{t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}}{2} \tag{7}$$

H est le coefficient de Hurst (que l'on considérera comme paramètre de régularité).

- Si $H = \frac{1}{2}$, la corrélation est nulle, donc (par gaussianité) les accroissements sont indépendants et on retrouve le mouvement brownien.

- Si $H > \frac{1}{2}$, la corrélation est positive, donc les accroissements tendent à avoir le même signe (le processus est dit persistant) et va donc avoir une forme de régularité.
- Si $H < \frac{1}{2}$, la corrélation est négative, les accroissements tendent à avoir des signes opposés et donc on aura beaucoup d'irrégularités.



(a) (b) (c)

FIGURE 1.10 – Réalisations du FBM pour différents paramètres de Hurst (a) $H = 0.2$, (b) $H = 0.5$ et (c) $H = 0.8$.

Deux représentations intégrales du mouvement brownien fractionnaire existent

Proposition 1.3. *1. Par moyenne mobile*

$$B^H(t) = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left((t-x)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) \tag{8}$$

2. Harmonisable

$$B^H(t) = \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H+\frac{1}{2}}} \hat{W}(\xi) \tag{9}$$

Référence : Thèse Kévin Polisano, Chapitre 1

2 Modèles anisotropes

2.1 Drap brownien fractionnaire

Le premier modèle anisotrope est celui du drap brownien fractionnaire (Fractional Brownian Sheet - FBS). Dans celui-ci, on impose deux régularités H_1 et H_2 suivant chacun des axes. Moralement, c'est un produit de mouvements browniens fractionnaires.

Définition 2.1. *Le FBS B^{H_1,H_2} est un champ gaussien centré, nul sur les axes, et de covariance*

$$\mathbb{E}\left[B^{H_1,H_2}(x_1,x_2)B^{H_1,H_2}(x_1',x_2')\right]$$
$$= \frac{C_1(H_1)^2}{2}\left(|x_1|^{2H_1} + |x_1'|^{2H_1} - |x_1 - x_1'|^{2H_1}\right) \frac{C_1(H_2)^2}{2}\left(|x_2|^{2H_2} + |x_2'|^{2H_2} - |x_2 - x_2'|^{2H_2}\right).$$

Proposition 2.1. *Le FBS peut s'écrire sous les formes intégrales suivantes :*

1. *par moyenne mobile*[5]

$$B^{H_1,H_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{C_1(H_1)C_1(H_2))}\int_{\mathbb{R}^2} f_{H_1}(x_1,u)f_{H_2}(x_2,v)dB(x_1,x_2) \tag{10}$$

où $f_H(x,w) = (x-w)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{2}}$

2. *harmonisable*

$$B^{H_1,H_2}(x_1,x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{ix_1\xi_1}-1)(e^{ix_2\xi_2}-1)}{|\xi_1|^{H_1+\frac{1}{2}}|\xi_2|^{H_2+\frac{1}{2}}}\hat{W}(\xi_1,\xi_2) \tag{11}$$

2.2 Modèle de Bonami et Estrade

Un champ gaussien à accroissements stationnaires est caractérisé par son semi-variogramme

$$v_X(y) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(X(y)-X(0))^2. \tag{12}$$

En l'exprimant à partir de la mesure spectrale $\mu(d\xi) = f(\xi)d\xi$ associée à X, on peut alors réexprimer le champ sous la forme harmonisable

$$X^f(x) = \int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{i\langle x,\xi\rangle}-1\right)f(\xi)^{\frac{1}{2}}\hat{W}(d\xi). \tag{13}$$

L'intérêt est qu'on peut alors caractériser les propriétés de symétrie de X à partir de f.

Theoreme 2.1. 1. *(Deux champs gaussiens stationnaires ont mêmes lois finies dimensionnelles si et seulement si ils ont le même variogramme)*

2. *X^f est autosimilaire si et seulement si f est homogène*

3. *X^f est isotrope si et seulement si f est radiale*

A partir de là, on peut construire des modèles avec des propriétés de régularité et d'autosimilarité en fixant f.

1. Fractional Brownian Field

$$\xi \mapsto \frac{1}{||\xi||^{2H+2}} \tag{14}$$

2. Extended Fractional Brownian Field

$$\xi \mapsto \frac{1}{||\xi||^{2h(\xi)+2}} \tag{15}$$

où $\xi \mapsto h(\xi)$ est constante sur chaque direction et contrôle la régularité directionnelle.

[5] Je crois que la variable d'intégration est u,v plutôt que x_1,x_2

3. Operator Scaling Gaussian Random Field (hyperbolic wavelet transform)

$$f_{\theta_0,\alpha_0}(\xi) = |\zeta_1|^{1/\alpha_0} + |\zeta_2|^{1/(2-\alpha_0)} \tag{16}$$

et on peut généraliser pour fixer au choix une propriété d'autosimilarité matricielle.

Un modèle plutôt général de champ brownien anisotrope est donné par les champs browniens fractionnaires anisotropes définis par

$$f(\xi) = c(arg\xi)||\xi||^{-2h(arg(\xi))-2} \tag{17}$$

où c et h sont des fonctions π-périodiques qui permettent de controler les propriétés d'autosimilarité et d'anisotropie (en choisissant le degré d'homogénéité de f via h et l'anisotropie via c).
On a donc un modèle assez général de textures anisotropes spatialement homogène[6], si maintenant on veut des modèles localement anisotropes , Polisano propose le modèle de champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé.

Définition 2.2. *Soient $h : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ et $C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant les hypothèses $\mathcal{H}$, on définit alors le champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé par*

$$X(x) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{i\langle x,\xi\rangle} - 1)\frac{C(x,\xi)}{||\xi||^{h(x)+1}}\hat{W}(d\xi) \tag{18}$$

Hypothèses ($\mathcal{H}$)

- h est β–höldérienne[1], telle que $a = \inf_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} h(\boldsymbol{x}) > 0$, $b = \sup_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2} h(\boldsymbol{x}) < 1$ et $b < \beta \leq 1$.
- $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \mapsto C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ est bornée, c.-à-d. $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}) \leqslant M$.
- $\boldsymbol{\xi} \mapsto C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ est paire et homogène de degré 0 : $\forall\rho > 0$, $C(\boldsymbol{x},\rho\boldsymbol{\xi}) = C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$.
- $\boldsymbol{x} \mapsto C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi})$ est continue et vérifie : il existe un réel η, avec $\beta \leq \eta \leq 1$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \sup_{\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{0},1)} \|\boldsymbol{z}\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} [C(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Theta}) - C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\Theta})]^2 \,\mathrm{d}\boldsymbol{\Theta} \leq A_{\boldsymbol{x}} < \infty\,. \tag{3.1}$$

De plus, $\boldsymbol{x} \mapsto A_{\boldsymbol{x}}$ est supposée bornée sur tout compact de $\mathbb{R}^2$.

[6]La variation du champ dépend de la direction dans laquelle on regarde la variation, mais pas de la position d'où l'on regarde

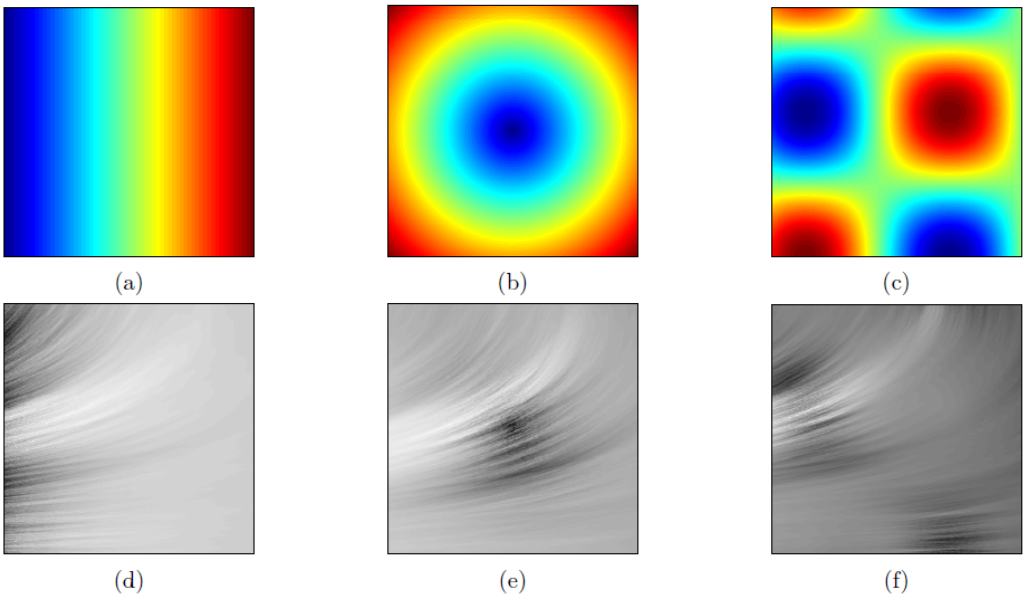


FIGURE 3.9 – Simulation d'un LAFBF de fonction d'orientation $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$ pour différentes fonctions de Hurst (a) linéaire, (b) radiale, (c) sinusoïdale, ainsi que leurs réalisations respectives (d), (e) et (f).

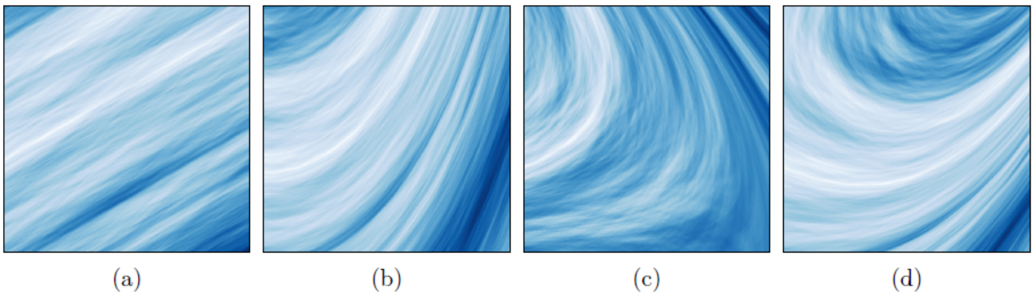


FIGURE 3.11 – Image de texture de taille 512×512 résultant de la simulation du champ $Z_{\Phi,X}(x) = X(\mathbf{R}_{-\alpha(x)}x)$ sur $[0,1]^2$, où X est un champ élémentaire de paramètres $H = 0.5$, $\alpha_0 = 0$ et $\delta = 0.3$. (a) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{3}$, (b) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$, (c) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$, (d) $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1^2 - x_2$.