

# Note modèles fractaux anisotropes

Leo Davy

April 23, 2022

## 1 Modèles isotropes

### 1.1 Mouvement brownien

**Définition 1.1.** On appelle mouvement brownien (en dimension  $d$ ), tout processus mesurable  $(B_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  vérifiant :

1.  $B_0 = 0$  p.s.
2. Le processus est à accroissements indépendants<sup>1</sup>
3.  $\forall s \leq t$  les accroissements suivent une loi normale  $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, (t - s)I_d)^2$
4. Le processus est à trajectoire p.s. continues

**Proposition 1.1.** Soit  $(B_t)$  un mouvement brownien

1. Pour tout  $s > 0$ , on a que  $B_t^s = B_{s+t} - B_s$  est un mouvement brownien<sup>3</sup>
2. Pour tout  $c > 0$ ,  $\tilde{B}_t = cB_{\frac{t}{c^2}}$  est un mouvement brownien
3. On peut construire une isométrie<sup>4</sup> entre les fonctions de carré intégrables classique  $L^2(\mathbb{R}_+)$  (avec la mesure de Lebesgue), et  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de Gaussiennes indépendantes qui vérifie  $\mathcal{W}(\mathbb{1}_{[0,t]}) = B_t \dots$

**Theoreme 1.1.** Une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  est définie positive si et seulement si il existe une mesure de probabilité symétrique  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = f(0) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle x, \xi \rangle} \mu(d\xi). \quad (1)$$

C'est à dire qu'il existe un vecteur aléatoire symétrique  $Z$  sur  $\mathbb{R}^d$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = f(0) \mathbb{E} e^{i\langle x, Z \rangle}. \quad (2)$$

---

<sup>1</sup>Pour tout  $t_1 \leq t_2 \leq t_3$ , on a que  $B_{t_2} - B_{t_1}$  est indépendant de  $B_{t_3} - B_{t_2}$ .

<sup>2</sup>Implique stationarité ( $\mu = 0$ ) du brownien, et isotropie ( $\Sigma = \sigma I_d$ )

<sup>3</sup>Indépendant de  $\mathcal{F}_s = \sigma(\{B_u : u \leq s\})$

<sup>4</sup>C'est à dire, que pour n'importe quel  $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ , on a que  $\mathcal{W}(f)$  est une gaussienne centrée de variance  $\|f\|_{L^2}^2$  et on a aussi  $\mathbb{E}[\mathcal{W}(f_i)\mathcal{W}(f_j)] = \langle f_i, f_j \rangle_{L^2}$

Conséquences du théorème (dans le cas où  $(X_t)$  est un champ gaussien stationnaire)

**Proposition 1.2.** 1. Si  $X$  est stationnaire et sa fonction d'autocovariance  $K(t) = \mathbb{E}X_{s+t}X_s$  est continue, alors il existe une unique mesure finie  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^d$  telle que

$$K(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, \xi \rangle} \mu(d\xi) \quad (3)$$

appelée mesure spectrale du champ  $X$ .

2. Si  $K$  admet  $\mu(d\xi) = f(\xi)d\xi$  comme densité spectrale, alors  $f$  est définie positive et le champ gaussien  $(Y_t)_t$  défini par

$$Y_t = \int_{\mathbb{R}^d} \sqrt{f(\xi)} e^{i\langle t, \xi \rangle} \hat{W}(d\xi) \quad (4)$$

est indistinguable de  $X$  et appelé représentation spectrale de  $X$ .

Dans le cas où le champ n'est pas nécessairement stationnaire mais a des accroissements stationnaires, on peut écrire la fonction de covariance par une mesure spectrale  $\mu$  sous la forme

$$K(s, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1 \right) \left( e^{-i\langle s, \xi \rangle} - 1 \right) \mu(d\xi) + t\Sigma s \quad (5)$$

pour une certaine matrice  $\sigma$  symétrique définie positive.

Et la représentation spectrale de  $X$  devient, avec  $\mu(d\xi) = f(\xi)d\xi$

$$Y_t = \int_{\mathbb{R}^d} \left( e^{i\langle t, \xi \rangle} - 1 \right) \sqrt{f(\xi)} \hat{W}(d\xi) + \langle t, N \rangle \quad (6)$$

où  $N$  est un vecteur gaussien centré de covariance  $\Sigma$ .

## 1.2 Mouvement brownien fractionnaire

Une première généralisation du mouvement brownien se fait par le mouvement brownien fractionnaire, en oubliant la condition d'avoir des accroissements indépendants.

**Définition 1.2.** Soit  $0 < H < 1$ . Il existe un unique processus gaussien qui est  $H$ -autosimilaire, à accroissements stationnaires et tel que  $\text{Var}(B_H(1)) = 1$ . Le mouvement brownien fractionnaire  $(B^H(t))_t$  est un tel processus, dont la covariance est donnée par

$$\text{Cov}(B^H(t), B^H(s)) = \frac{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}}{2} \quad (7)$$

$H$  est le coefficient de Hurst (que l'on considérera comme paramètre de régularité).

- Si  $H = \frac{1}{2}$ , la corrélation est nulle, donc (par gaussianité) les accroissements sont indépendants et on retrouve le mouvement brownien.

- Si  $H > \frac{1}{2}$ , la corrélation est positive, donc les accroissements tendent à avoir le même signe (le processus est dit persistant) et va donc avoir une forme de régularité.
- Si  $H < \frac{1}{2}$ , la corrélation est négative, les accroissements tendent à avoir des signes opposés et donc on aura beaucoup d'irrégularités.

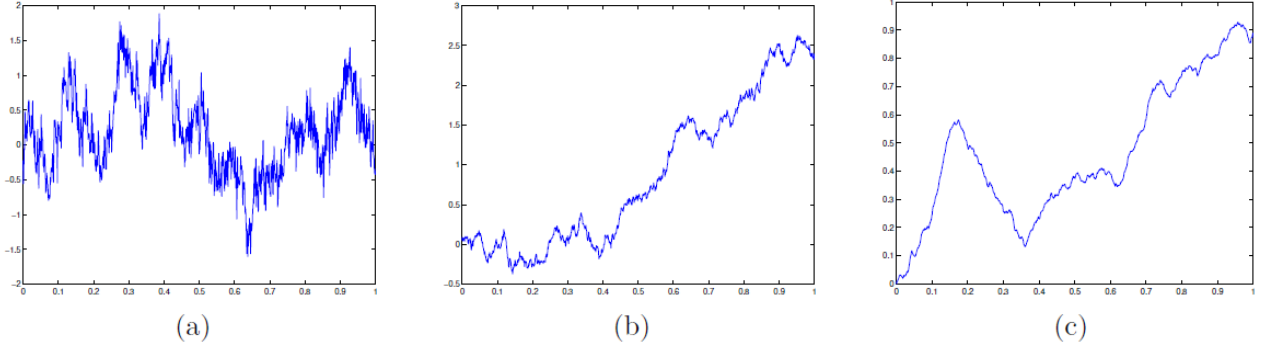


FIGURE 1.10 – Réalisations du FBM pour différents paramètres de Hurst (a)  $H = 0.2$ , (b)  $H = 0.5$  et (c)  $H = 0.8$ .

Deux représentations intégrales du mouvement brownien fractionnaire existent

**Proposition 1.3.** 1. *Par moyenne mobile*

$$B^H(t) = \frac{1}{C_1(H)} \int_{\mathbb{R}} \left( (t-x)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dW(x) \quad (8)$$

2. *Harmonisable*

$$B^H(t) = \frac{1}{C_2(H)} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H+\frac{1}{2}}} \hat{W}(\xi) d\xi \quad (9)$$

Référence : Thèse Kévin Polissano, Chapitre 1

## 2 Modèles anisotropes

### 2.1 Drap brownien fractionnaire

Le premier modèle anisotrope est celui du drap brownien fractionnaire (Fractional Brownian Sheet - FBS). Dans celui-ci, on impose deux régularités  $H_1$  et  $H_2$  suivant chacun des axes. Moralement, c'est un produit de mouvements browniens fractionnaires.

**Définition 2.1.** *Le FBS  $B^{H_1, H_2}$  est un champ gaussien centré, nul sur les axes, et de covariance*

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [B^{H_1, H_2}(x_1, x_2) B^{H_1, H_2}(x'_1, x'_2)] \\ = \frac{C_1(H_1)^2}{2} (|x_1|^{2H_1} + |x'_1|^{2H_1} - |x_1 - x'_1|^{2H_1}) \frac{C_1(H_2)^2}{2} (|x_2|^{2H_2} + |x'_2|^{2H_2} - |x_2 - x'_2|^{2H_2}). \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.** *Le FBS peut s'écrire sous les formes intégrales suivantes :*

1. *par moyenne mobile*<sup>5</sup>

$$B^{H_1, H_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{C_1(H_1)C_1(H_2)} \int_{\mathbb{R}^2} f_{H_1}(x_1, u) f_{H_2}(x_2, v) dB(x_1, x_2) \quad (10)$$

où  $f_H(x, w) = (x - w)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-x)_+^{H-\frac{1}{2}}$

2. *harmonisable*

$$B^{H_1, H_2}(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{ix_1\xi_1} - 1)(e^{ix_2\xi_2} - 1)}{|\xi_1|^{H_1+\frac{1}{2}}|\xi_2|^{H_2+\frac{1}{2}}} \hat{W}(\xi_1, \xi_2) \quad (11)$$

## 2.2 Modèle de Bonami et Estrade

Un champ gaussien à accroissements stationnaires est caractérisé par son semi-variogramme

$$v_X(y) = \frac{1}{2} \mathbb{E}(X(y) - X(0))^2. \quad (12)$$

En l'exprimant à partir de la mesure spectrale  $\mu(d\xi) = f(\xi)d\xi$  associée à  $X$ , on peut alors réexprimer le champ sous la forme harmonisable

$$X^f(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \left( e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1 \right) f(\xi)^{\frac{1}{2}} \hat{W}(d\xi). \quad (13)$$

L'intérêt est qu'on peut alors caractériser les propriétés de symétrie de  $X$  à partir de  $f$ .

**Theoreme 2.1.** 1. *(Deux champs gaussiens stationnaires ont mêmes lois finies dimensionnelles si et seulement si ils ont le même variogramme)*

2.  *$X^f$  est autosimilaire si et seulement si  $f$  est homogène*

3.  *$X^f$  est isotrope si et seulement si  $f$  est radiale*

A partir de là, on peut construire des modèles avec des propriétés de régularité et d'autosimilarité en fixant  $f$ .

1. Fractional Brownian Field

$$\xi \mapsto \frac{1}{||\xi||^{2H+2}} \quad (14)$$

2. Extended Fractional Brownian Field

$$\xi \mapsto \frac{1}{||\xi||^{2h(\xi)+2}} \quad (15)$$

où  $\xi \mapsto h(\xi)$  est constante sur chaque direction et contrôle la régularité directionnelle.

---

<sup>5</sup>Je crois que la variable d'intégration est  $u, v$  plutôt que  $x_1, x_2$

### 3. Operator Scaling Gaussian Random Field (hyperbolic wavelet transform)

$$f_{\theta_0, \alpha_0}(\xi) = |\zeta_1|^{1/\alpha_0} + |\zeta_2|^{1/(2-\alpha_0)} \quad (16)$$

et on peut généraliser pour fixer au choix une propriété d'autosimilarité matricielle.

Un modèle plutôt général de champ brownien anisotrope est donné par les champs browniens fractionnaires anisotropes définis par

$$f(\xi) = c(\arg \xi) \|\xi\|^{-2h(\arg(\xi)) - 2} \quad (17)$$

où  $c$  et  $h$  sont des fonctions  $\pi$ -périodiques qui permettent de contrôler les propriétés d'autosimilarité et d'anisotropie (en choisissant le degré d'homogénéité de  $f$  via  $h$  et l'anisotropie via  $c$ ).

On a donc un modèle assez général de textures anisotropes spatialement homogène<sup>6</sup>, si maintenant on veut des modèles localement anisotropes, Polissano propose le modèle de champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé.

**Définition 2.2.** Soient  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  et  $C : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfaisant les hypothèses  $\mathcal{H}$ , on définit alors le champ brownien fractionnaire anisotrope généralisé par

$$X(x) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1) \frac{C(x, \xi)}{\|\xi\|^{h(x)+1}} \hat{W}(d\xi) \quad (18)$$

#### Hypothèses ( $\mathcal{H}$ )

- $h$  est  $\beta$ -höldérienne<sup>1</sup>, telle que  $a = \inf_{x \in \mathbb{R}^2} h(x) > 0$ ,  $b = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} h(x) < 1$  et  $b < \beta \leq 1$ .
- $(x, \xi) \mapsto C(x, \xi)$  est bornée, c.-à-d.  $\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ,  $C(x, \xi) \leq M$ .
- $\xi \mapsto C(x, \xi)$  est paire et homogène de degré 0 :  $\forall \rho > 0$ ,  $C(x, \rho\xi) = C(x, \xi)$ .
- $x \mapsto C(x, \xi)$  est continue et vérifie : il existe un réel  $\eta$ , avec  $\beta \leq \eta \leq 1$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \sup_{z \in B(0,1)} \|z\|^{-2\eta} \int_{\mathbb{S}^1} [C(x+z, \Theta) - C(x, \Theta)]^2 d\Theta \leq A_x < \infty. \quad (3.1)$$

De plus,  $x \mapsto A_x$  est supposée bornée sur tout compact de  $\mathbb{R}^2$ .

<sup>6</sup>La variation du champ dépend de la direction dans laquelle on regarde la variation, mais pas de la position d'où l'on regarde

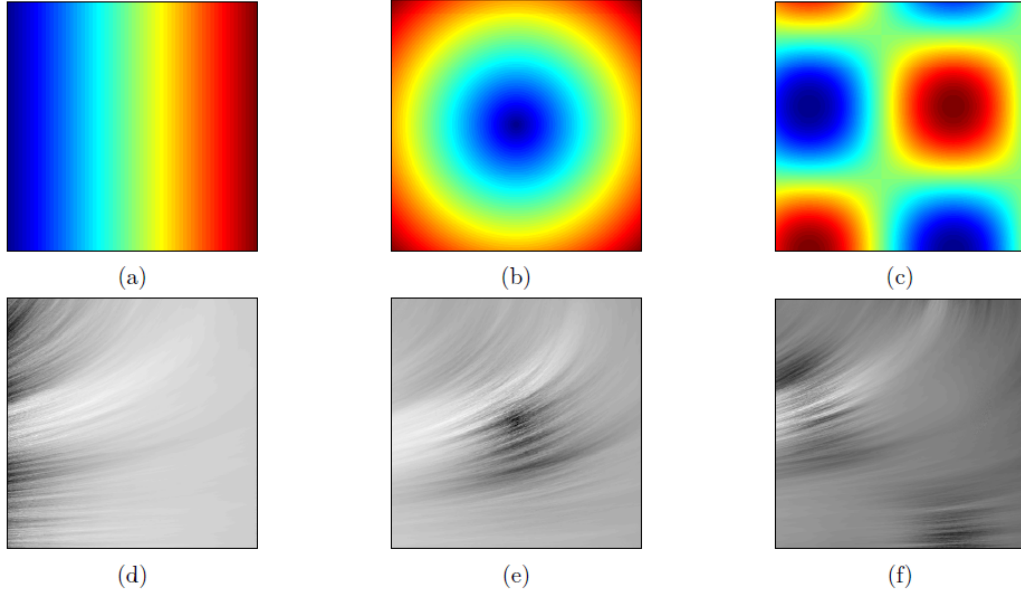


FIGURE 3.9 – Simulation d'un LAFBF de fonction d'orientation  $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$  pour différentes fonctions de Hurst (a) linéaire, (b) radiale, (c) sinusoïdale, ainsi que leurs réalisations respectives (d), (e) et (f).

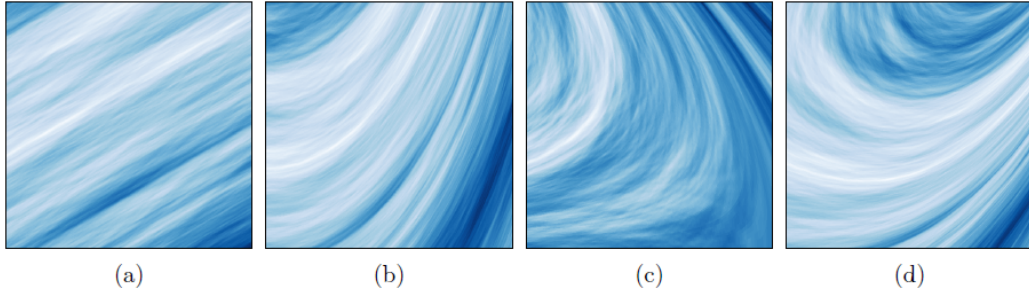


FIGURE 3.11 – Image de texture de taille  $512 \times 512$  résultant de la simulation du champ  $Z_{\Phi, X}(x) = X(\mathbf{R}_{-\alpha(x)}x)$  sur  $[0, 1]^2$ , où  $X$  est un champ élémentaire de paramètres  $H = 0.5$ ,  $\alpha_0 = 0$  et  $\delta = 0.3$ . (a)  $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{3}$ , (b)  $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1$ , (c)  $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_2$ , (d)  $\alpha(x_1, x_2) = -\frac{\pi}{2} + x_1^2 - x_2$ .