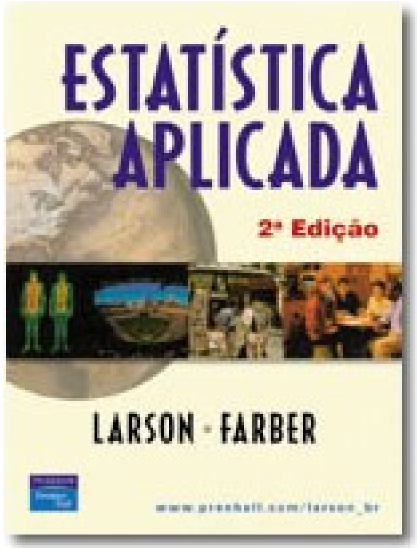
7 Teste de hipóteses

Estatística Aplicada

Larson Farber

Seção 7.1

Introdução ao
teste de hipóteses



Uma hipótese estatística é uma alegação sobre uma população.

A **hipótese nula** H_0 contém uma alternativa de igualdade, tal como $\geq$, = ou $\leq$.

A **hipótese alternativa** H_a contém uma afirmativa de desigualdade, tal como < , $\neq$ ou >.

Afirmativas complementares

Se eu sou falso, você é verdadeiro.

Se eu sou verdadeiro, você é falso.

Estabelecendo hipóteses

Estabeleça uma alegação sobre a população. Em seguida, estabeleça seu complemento. Cada hipótese, tanto a nula quanto a alternativa, pode representar a alegação.

Um hospital alega que o tempo de resposta de sua ambulância é inferior a dez minutos.

$H_0 : \mu \geq 10$ min

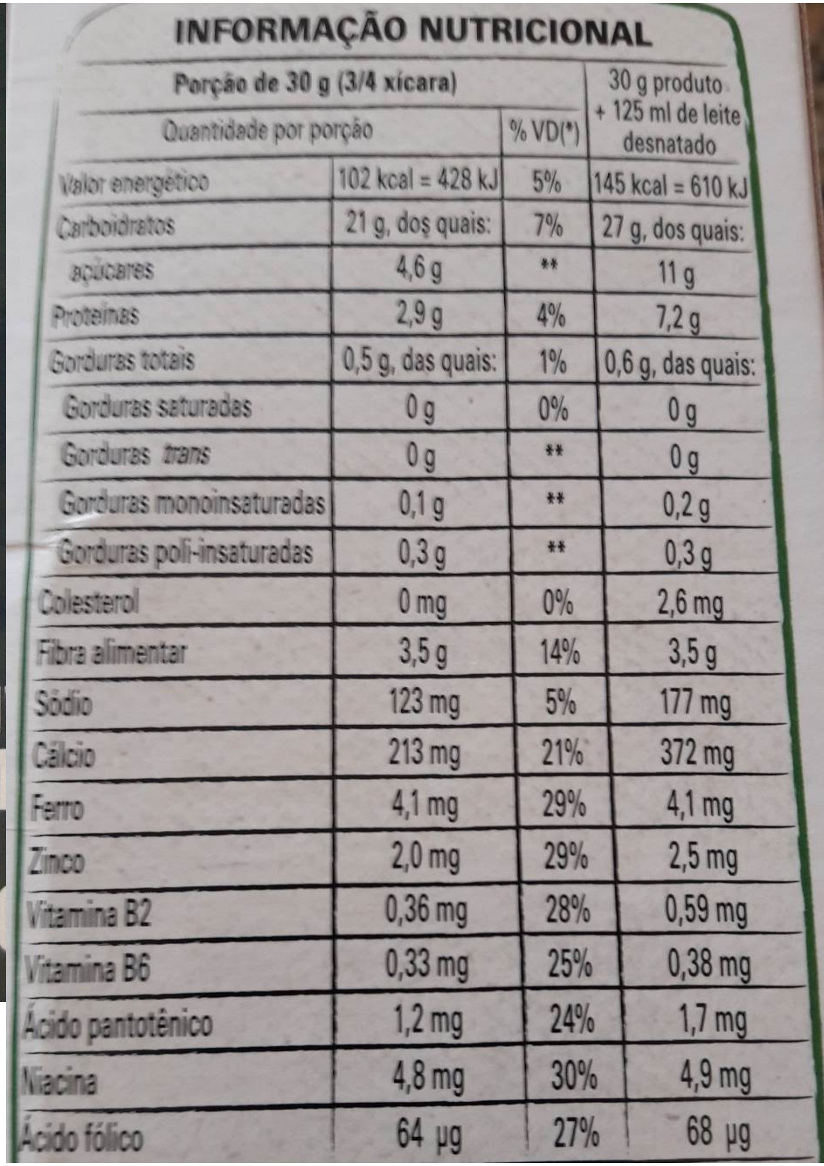
$H_a : \mu < 10$ min (alegação)

Uma revista de consumidores alega que a proporção das chamadas telefônicas via celular feitas durante as tardes e os fins de semana é de no máximo 60%.

$H_0 : p \leq 0{,}60$ (alegação)

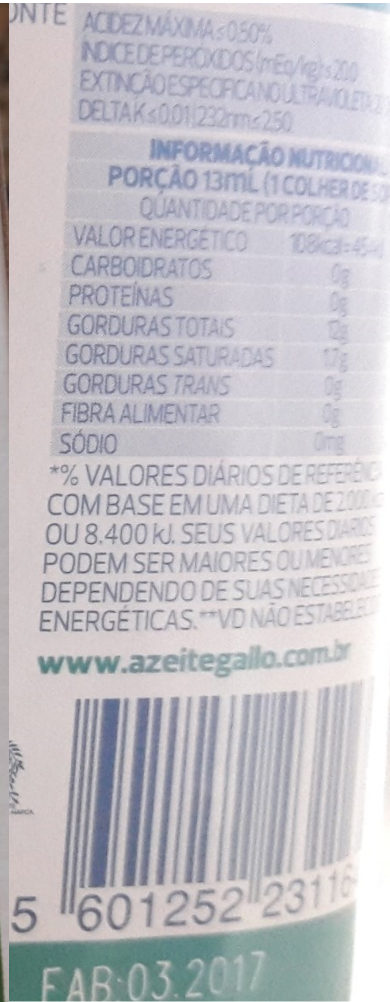
$H_a : p > 0{,}60$

Estratégia para o teste de hipóteses



INFORMAÇÃO NUTRICIONAL

Porção de 30 g (3/4 xícara)			30 g produto + 125 ml de leite desnatado
Quantidade por porção		% VD(*)	
Valor energético	102 kcal = 428 kJ	5%	145 kcal = 610 kJ
Carboidratos	21 g, dos quais:	7%	27 g, dos quais:
açúcares	4,6 g	**	11 g
Proteínas	2,9 g	4%	7,2 g
Gorduras totais	0,5 g, das quais:	1%	0,6 g, das quais:
Gorduras saturadas	0 g	0%	0 g
Gorduras *trans*	0 g	**	0 g
Gorduras monoinsaturadas	0,1 g	**	0,2 g
Gorduras poli-insaturadas	0,3 g	**	0,3 g
Colesterol	0 mg	0%	2,6 mg
Fibra alimentar	3,5 g	14%	3,5 g
Sódio	123 mg	5%	177 mg
Cálcio	213 mg	21%	372 mg
Ferro	4,1 mg	29%	4,1 mg
Zinco	2,0 mg	29%	2,5 mg
Vitamina B2	0,36 mg	28%	0,59 mg
Vitamina B6	0,33 mg	25%	0,38 mg
Ácido pantotênico	1,2 mg	24%	1,7 mg
Niacina	4,8 mg	30%	4,9 mg
Ácido fólico	64 µg	27%	68 µg



Estratégia para o teste de hipóteses

Antes de mais nada, admita que a condição de **igualdade** na **hipótese nula é verdadeira**. Não importa se a alegação está representada pela hipótese nula ou pela alternativa.

Colha os dados de uma **amostra aleatória**, retirada da população, e calcule as **estatísticas amostrais** cabíveis.

Se a estatística amostral tiver **baixa probabilidade** de ser extraída de uma população na qual a hipótese nula seja verdadeira, você **rejeitará H_0**. (Em conseqüência, você aceitará a hipótese alternativa.)
Se a probabilidade não for baixa o bastante, **você não poderá rejeitar H_0**.

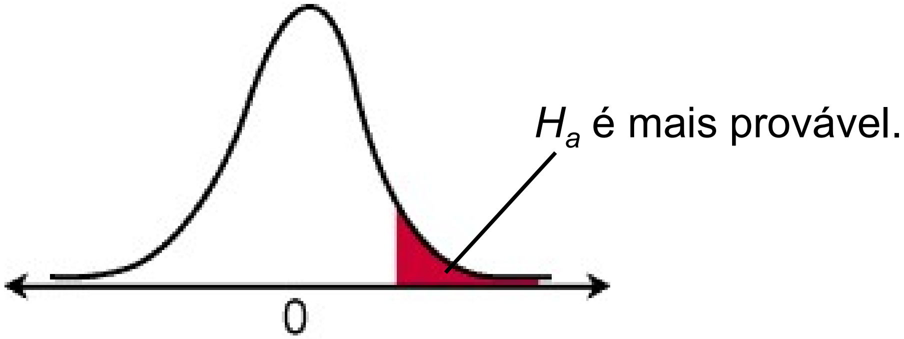
Erros e nível de significância

Decisão	Verdade real de $H0$	
	H_0 verdadeira	H_0 falsa
Não rejeitar H_0	Decisão correta	Erro do tipo II
Rejeitar H_0	Erro do tipo I	Decisão correta

Erro do tipo I: A hipótese nula é realmente verdadeira, mas optou-se por rejeitá-la.

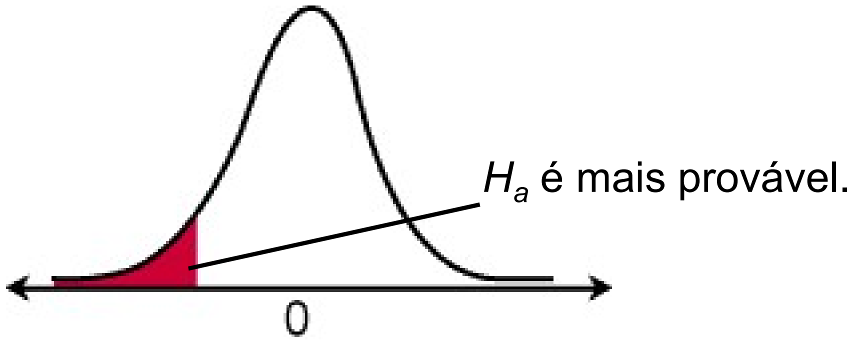
Nível de significância, α
Probabilidade máxima de se cometer um erro do tipo I.

Tipos de teste de hipóteses



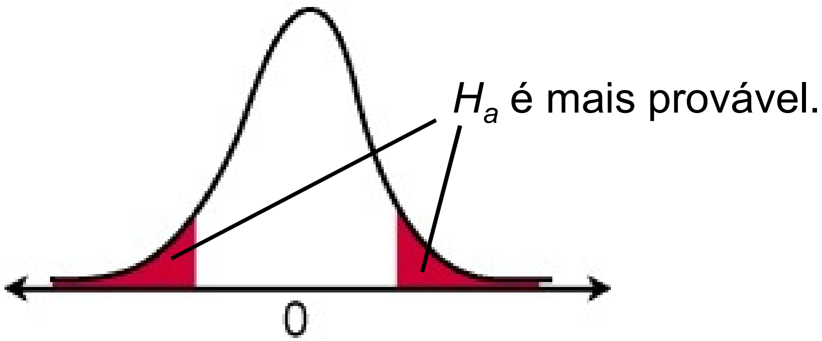
Teste monocaudal direito

$$H_a : \mu > \text{valor}$$



Teste monocaudal esquerdo

$$H_a : \mu < \text{valor}$$



Teste bicaudal

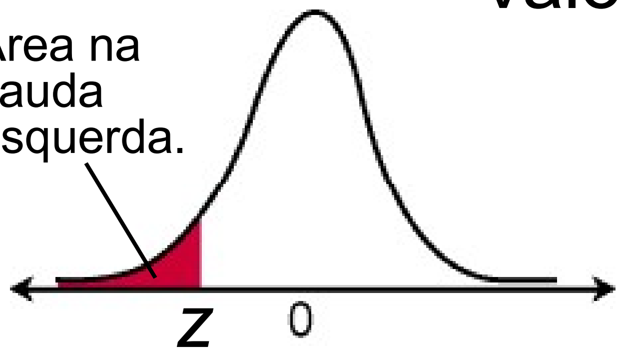
$$H_a : \mu \neq \text{valor}$$

Valores *P*

O **valor *P*** é a probabilidade de se obter uma estatística amostral com um valor tão ou mais extremo que o determinado pelos dados da amostra.

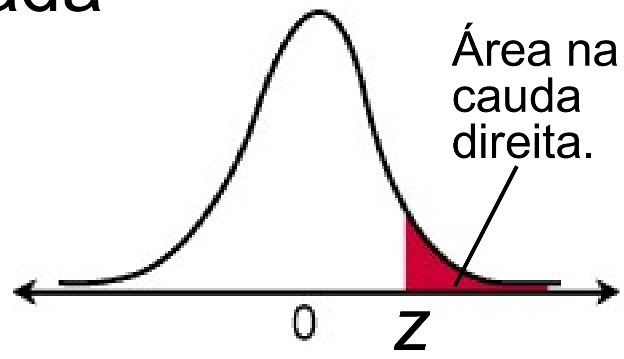
Valor *P* = área indicada

Área na cauda esquerda.



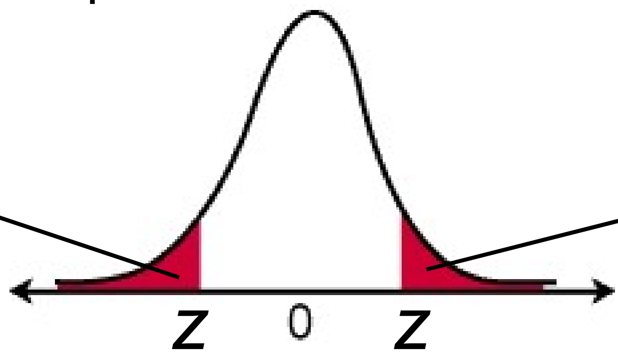
Em um teste monocaudal esquerdo.

Área na cauda direita.



Em um teste monocaudal direito.

Se *z* é negativo, *P* é o dobro da área da cauda esquerda.

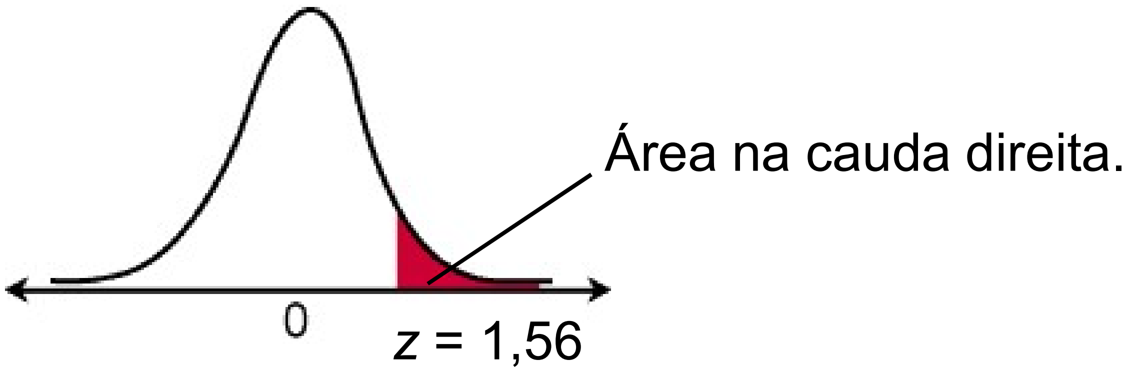


Se *z* é positivo, *P* é o dobro da área da cauda direita.

Em um teste bicaudal.

Determinando valores *P*: teste monocaudal

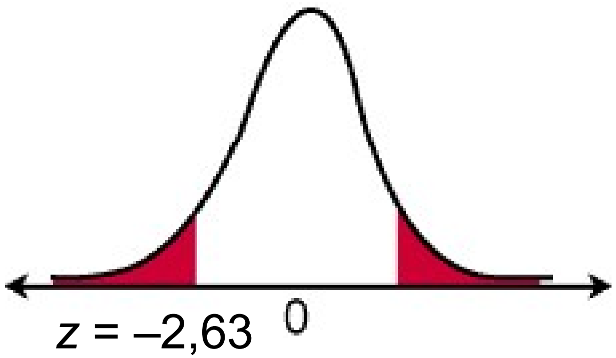
A estatística teste para um teste monocaudal direito é z = 1,56. Determine o valor *P*.



A área à direita de z = 1,56 é 1 – 0,9406 = 0,0594.
Logo, o valor *P* é 0,0594.

Determinando valores *P*: teste bicaudal

A estatística teste para um teste bicaudal é $z = –2,63$. Determine o correspondente valor *P*.



A área à esquerda de $z = –2,63$ é 0,0043.
O valor *P* é 2(0,0043) = 0,0086.

Decisões baseadas no valor *P*

Após comparar o valor *P* ao valor de α , o nível de significância do teste, podemos decidir se há evidência suficiente para rejeitar a hipótese nula.

Se $\boldsymbol{P} \leq \alpha$, rejeite a hipótese nula.

Se $\boldsymbol{P} > \alpha$, não rejeite a hipótese nula.

Usando os valores *P*

O valor *P* de um teste de hipóteses é 0,0749. Tome sua decisão a um nível de significância de 0,05.

Compare o valor *P* a α. Como 0,0749 > 0,05, não rejeite H_0.

Se *P* = 0,0246, qual será sua decisão se:

1) α = **0,05**   2) α = **0,01**

1) Como **0,0246** $\leq$ **0,05**, rejeite H_0.

2) Como **0,0246** > **0,01**, não rejeite H_0.

Interpretando a decisão

Decisão \ Alegação	A alegação é H_0	A alegação é H_a
Rejeite H_0	Há evidência suficiente para ***rejeitar*** a alegação.	Há evidência suficiente para ***aceitar*** a alegação.
Não rejeite H_0	Não há evidência suficiente para ***rejeitar*** a alegação.	Não há evidência suficiente para ***aceitar*** a alegação.

Etapas do teste de hipóteses

1. Estabeleça as hipóteses alternativa e nula.

Escreva H_0 e H_a como afirmativas matemáticas.
Lembre que H_0 sempre contém o símbolo =.

2. Estabeleça o nível de significância.

Ele representa a probabilidade máxima de se rejeitar a hipótese nula, caso ela seja a realmente verdadeira (ou seja, de se cometer um erro do tipo I).

3. Identifique a distribuição amostral.

A distribuição amostral é a distribuição da estatística teste, supondo-se que a condição de igualdade na H_0 seja verdadeira e que o experimento foi repetido infinitas vezes.

4. Determine a estatística teste e padronize-a.

Faça os cálculos para padronizar sua estatística amostral.

5. Calcule o valor *P* da estatística teste.

Ele representa a probabilidade de se obter a estatística teste (ou outro valor mais extremo) na distribuição amostral.

6. Tome sua decisão.

Se o valor *P* for menor que α (o nível de significância), rejeite H_0.
Se o valor *P* for maior que α, não rejeite H_0.

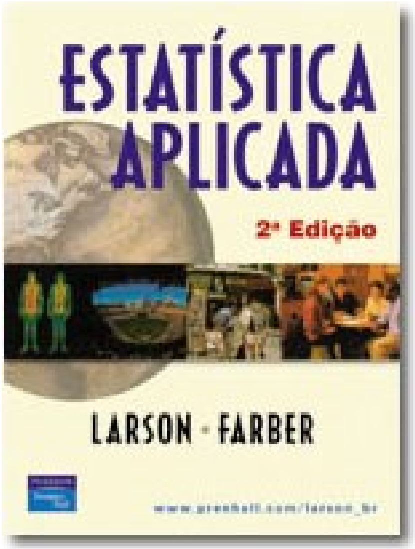
7. Interprete sua decisão.

Se a alegação for a hipótese nula, você poderá rejeitá-la ou determinar que não há evidência suficiente para isso.

Se a alegação for a hipótese alternativa, você poderá aceitá-la ou determinar que não há evidência suficiente para isso.

Seção 7.2

Teste de hipóteses
para determinar
a média (n > 30)



O teste *z* para determinar a média

O **teste *z*** é um teste estatístico capaz de determinar a média populacional. Ele pode ser usado:

(1) se a população é normal e σ é conhecido ou

(2) quando o tamanho da amostra, *n*, é de pelo menos 30.

A estatística teste é a média amostral $\bar{x}$ e a estatística teste padronizada é *z*.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}, \qquad \textbf{onde} \quad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Quando *n* > 30, use *s* no lugar de σ.

O teste z para determinar a média (valor *P*)

Um fabricante de cereais alega que a média de sódio em cada porção de seu produto não passa de 230 mg. Você trabalha para um serviço nacional de saúde e precisa testar essa alegação. Em uma amostra aleatória de 52 porções, você encontrou uma média de 232 mg de sódio, com um desvio padrão de 10 mg. Sendo α = 0,05, você tem evidência suficiente para rejeitar a alegação do fabricante?

1. Escreva as hipóteses nula e alternativa.

   $H_0 : \mu \leq 230$ **mg (alegação)** $\quad H_a : \mu > 230$ **mg**

2. Estabeleça o nível de significância. α = 0,05

3. Determine a distribuição amostral.

Como o tamanho da amostra é maior que 30, a distribuição amostral será normal.

4. Determine a estatística teste e padronize-a.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{52}} = \mathbf{1{,}387}$$

n = 52

$\bar{x} = 232$

$$z = \frac{232 - 230}{\mathbf{1{,}387}} = \mathbf{1{,}44}$$

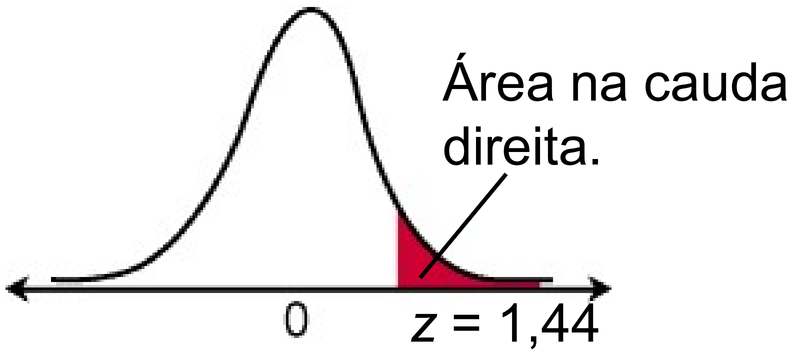
s = 10

Estatística teste

5. Calcule o valor *P* para a estatística teste.

Como se trata de um teste monocaudal direito, o valor *P* será a área encontrada à direita de z = 1,44 na distribuição normal. A partir da tabela, temos que *P* = 1 – 0,9251

P = 0,0749.



6. Tome sua decisão.

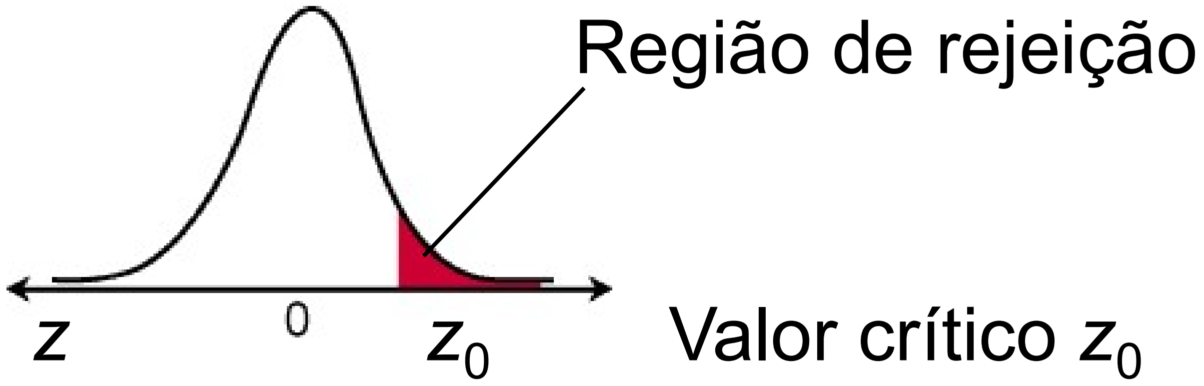
Compare o valor *P* a α.
Como 0,0749 > 0,05, não rejeite H_0.

7. Interprete sua decisão.

Não há evidência suficiente para rejeitar a alegação do fabricante de que a média de sódio em cada porção de cereal não passa de 230 mg.

Regiões de rejeição

Distribuição amostral de $\bar{x}$

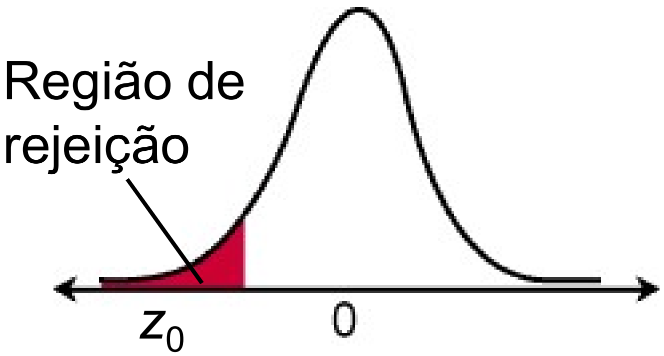


A **região de rejeição** é o intervalo de valores para os quais a *hipótese nula não é provável*. Ela fica sempre na direção da hipótese alternativa e sua área é igual a α.

Um **valor crítico** separa as regiões de rejeição e de não-rejeição.

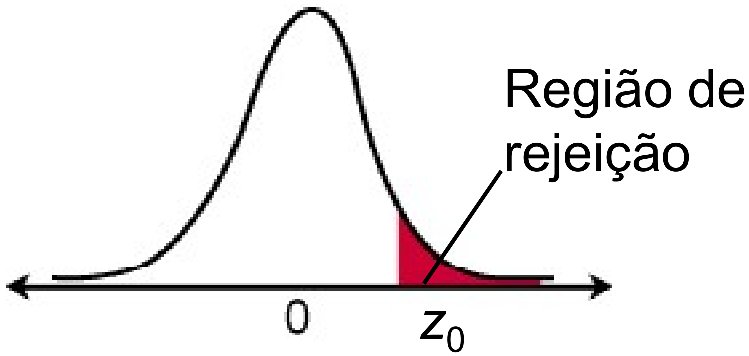
Valores críticos

Um valor crítico z_0 separa as regiões de rejeição e de não-rejeição. A área da região de rejeição é α.



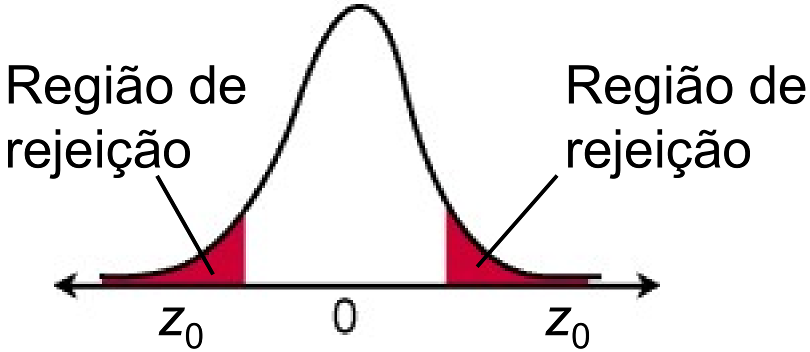
Determine z_0 para um teste monocaudal esquerdo com $\alpha = 0,01$.

$z_0 = -2,33$



Determine z_0 para um teste monocaudal direito com $\alpha = 0,05$.

$z_0 = 1,645$



$-z_0 = -2,575$
e $z_0 = 2,575$

Determine $-z_0$ e z_0 para um teste bicaudal com $\alpha = 0,01$.

Usando o valor crítico para tomar decisões

1. Estabeleça as hipóteses nula e alternativa.

Escreva H_0 e H_a como afirmativas matemáticas. Lembre-se de que H_0 sempre contém o símbolo =.

2. Estabeleça o nível de significância.

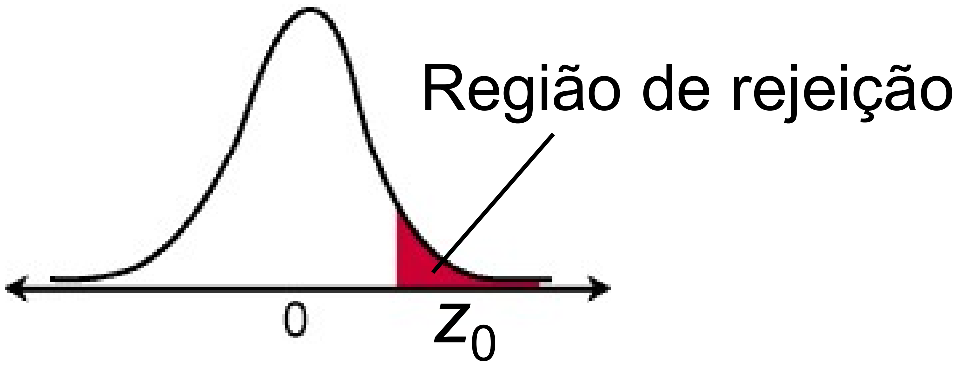
Ele representa a probabilidade máxima de se rejeitar a hipótese nula, caso ela seja a realmente verdadeira (ou seja, de se cometer um erro do tipo I).

3. Identifique a distribuição amostral.

A distribuição amostral é a distribuição da estatística teste, supondo-se que a condição de igualdade na H_0 é verdadeira e que o experimento foi repetido infinitas vezes.

4. Determine o valor crítico.

5. Determine a região de rejeição.



O valor crítico separa as regiões de rejeição e de não-rejeição. A área da região crítica é igual ao nível de significância do teste.

6. Determine a estatística teste.

Faça os cálculos para padronizar sua estatística amostral.

7. Tome sua decisão.

Se a estatística teste cair na região crítica, rejeite H_0. Caso contrário, não rejeite H_0.

8. Interprete sua decisão.

Se a alegação for a hipótese nula, você pode rejeitá-la ou determinar que não há evidência suficiente para isso.

Se a alegação for a hipótese alternativa, você pode aceitá-la ou determinar que não há evidência suficiente para isso.

Usando o teste z para determinar a média

Um fabricante de cereais alega que a média de sódio em cada porção de seu produto não passa de 230 mg. Você trabalha para um serviço nacional de saúde e precisa testar essa alegação. Em uma amostra aleatória de 52 porções, você encontrou uma média de 232 mg de sódio, com um desvio padrão de 10 mg.
Sendo α = 0,05, você tem evidência suficiente para rejeitar a alegação do fabricante?

1. Escreva as hipóteses nula e alternativa.

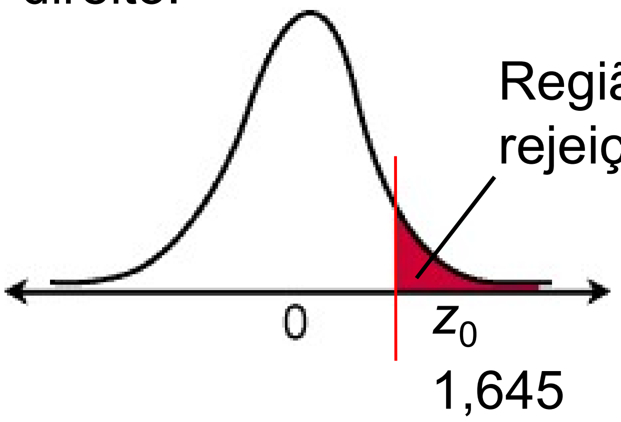
$$H_0: \mu \leq 230 \text{ mg} \;\; \text{(alegação)} \qquad H_a: \mu > 230 \text{ mg}$$

2. Estabeleça o nível de significância. α = 0,05

3. Determine a distribuição amostral.

Como o tamanho da amostra é maior que 30, a distribuição amostral será normal.

Como H_a contém o símbolo >, trata-se de um teste monocaudal direito.



4. Determine o valor crítico.

5. Determine a região de rejeição.

6. Determine a estatística teste e padronize-a.

$n = 52 \quad \bar{x} = 232 \quad s = 10$

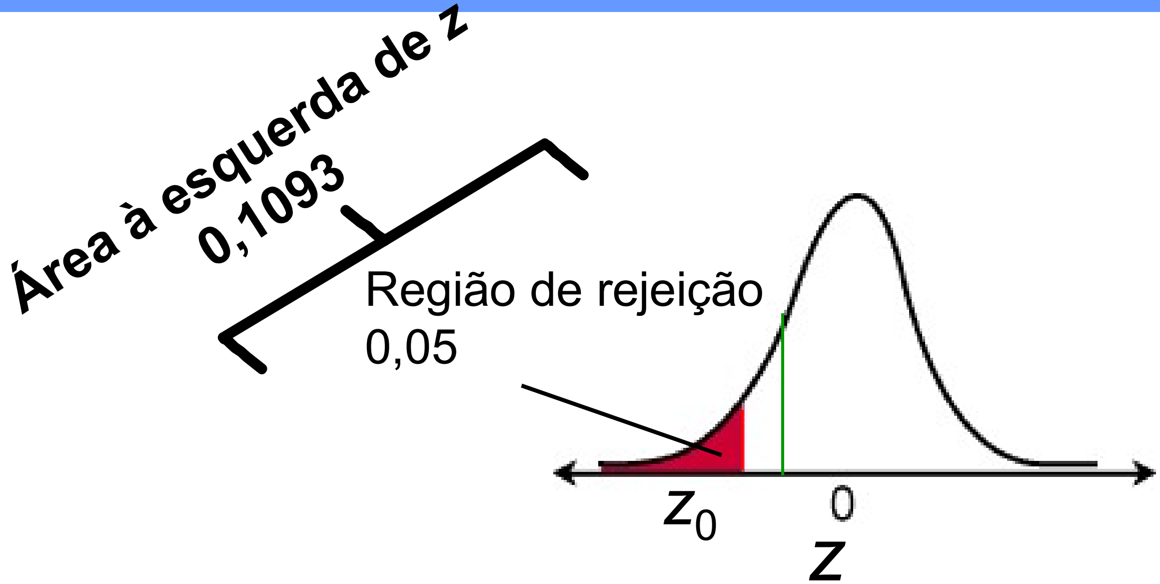
7. Tome sua decisão.

$z = 1{,}44$ não cai na região de rejeição, portanto não rejeite H_0.

8. Interprete sua decisão.

Não há evidência suficiente para rejeitar a alegação do fabricante de que a média de sódio em cada porção de cereal não passa de 230 mg.

Usando o valor *P* de um teste para comparar áreas



$\alpha = 0{,}05$
$z_0 = -1{,}645$

$z = -1{,}23$
$P = 0{,}1093$

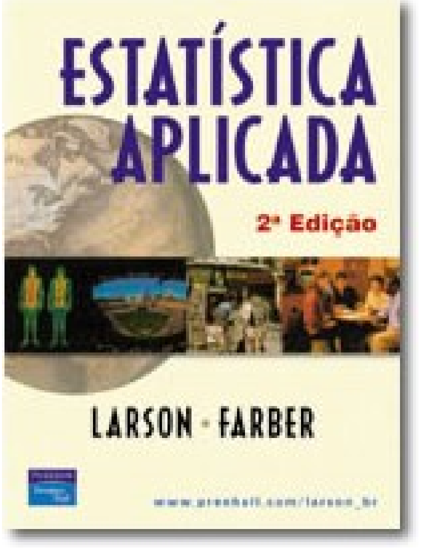
Para tomar uma decisão com base no valor *P*, compare as áreas.

Se $P \leq \alpha$, rejeite H_0. Se $P > \alpha$, não rejeite H_0.

Para tomar uma decisão com base no valor crítico, descubra se *z* está na região de rejeição.
Em caso positivo, rejeite H_0 e, em caso negativo, não rejeite H_0.

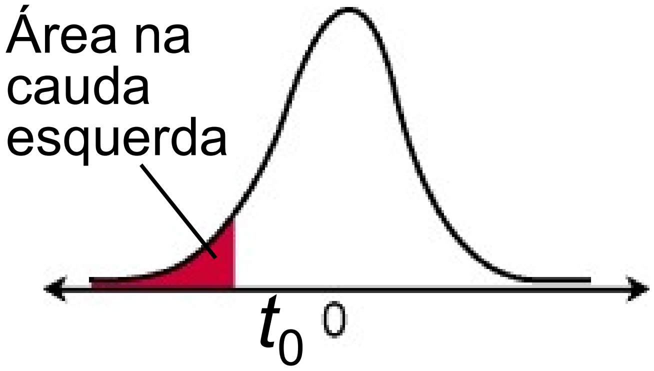
Seção 7.3

Teste de hipóteses para determinar a média ($n < 30$)



A distribuição amostral t

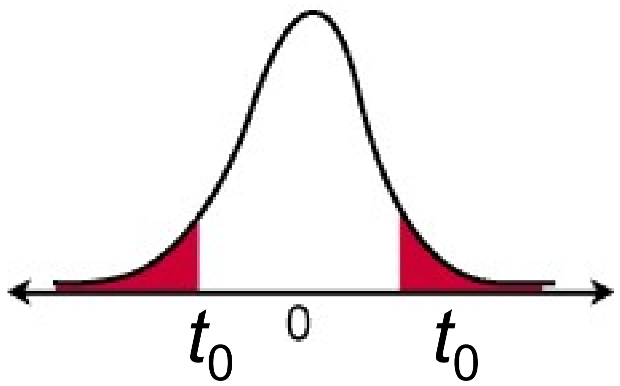
Determine o valor crítico t_0 para um teste monocaudal esquerdo, dados α = 0,01 e n = 18.



g.l. = 18 – 1 = 17

$t_0 = -2{,}567$

Determine os valores críticos $-t_0$ e t_0 para um teste bicaudal, dados α = 0,05 e n = 11.



$-t_0 = -2{,}228$ e $t_0 = 2{,}228$

g.l. = 11 – 1 = 10

Testando μ em uma amostra pequena

Uma universidade diz que o número médio de horas-aula por semana, nos cursos de período integral, é 11,0. Uma amostra aleatória do número de horas-aula por semana, nos cursos de período integral, está relacionada a seguir. Solicitam a você, que trabalha em uma organização estudantil, que teste essa alegação. Sendo α = 0,01, você tem evidência suficiente para rejeitar a alegação da universidade?

11,8 8,6 12,6 7,9 6,4 10,4 13,6 9,1

1. Estabeleça as hipóteses nula e alternativa.

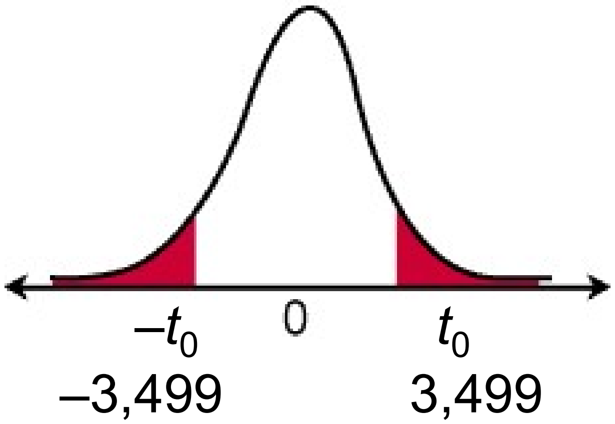
$H_0 : \mu = 11{,}0$ **(alegação)** $\qquad H_a : \mu \neq 11{,}0$

2. Estabeleça o nível de significância. $\alpha = 0{,}01$

3. Determine a distribuição amostral.

Como o tamanho da amostra é 8, a distribuição amostral é uma distribuição *t* com 8 – 1 = 7 g.l.

Como H_a contém o símbolo ≠, trata-se de um teste bicaudal.



4. Determine os valores críticos.

5. Determine a região de rejeição.

6. Determine a estatística teste e padronize-a.

$n = 8$ $\bar{x} = 10{,}050$ $s = 2{,}485$

$$t = \frac{10{,}050 - 11{,}0}{\frac{2{,}485}{\sqrt{8}}} = \frac{-0{,}95}{0{,}878} = -1{,}08$$

7. Tome sua decisão.

$t = -1{,}08$ não cai na região de rejeição, portanto não rejeite H_0 a $\alpha = 0{,}01$

8. Interprete sua decisão.

Não há evidência suficiente para rejeitar a alegação da universidade de que o curso tem uma média de 11 horas-aula semanais.

Exemplo: Uma máquina enche pacotes de café de uma marca X e deve completá-los, em média, com no mínimo de 500 g. Se coletássemos de uma amostra aleatória de tamanho 16, a fim de verificarmos se a máquina se encontra regulada, e obtivéssemos uma média igual a 495 g e desvio padrão de 5 g, seria plausível concluirmos que a média é menor do que 500 g, ou seja, a máquina se encontraria desregulada?

	Resultados
Tamanho da Amostra	16
Média da População	500.0000
Média Amostral	495.0000
Erro Padrão	1.2500
(t)=	-4.0000
Graus de liberdade	15
(p) unilateral =	0.0006
(p) bilateral =	0.0012
Poder (0.05)=	0.9907
Poder (0.01)=	0.9529
IC 95%(média amostral) =	492.3363 a 497.6638
IC 99%(média amostral) =	491.3163 a 498.6838

Exemplo: O crescimento da indústria da lagosta na Flórida nos últimos 20 anos tomou esse estado americano o mais lucrativo centro industrial de pesca. Espera-se que uma recente medida tomada pelo governo das Bahamas, que proibiu os pescadores norte americanos de jogarem suas redes na plataforma continental desse país, produza uma redução na quantidade de kg de lagosta que chega aos Estados Unidos. De acordo com índices passados, cada rede traz em média 14 kg de lagosta. Uma amostra de 20 barcos pesqueiros, recolhida após a vigência da nova lei, indicou os seguintes resultados, em kg:

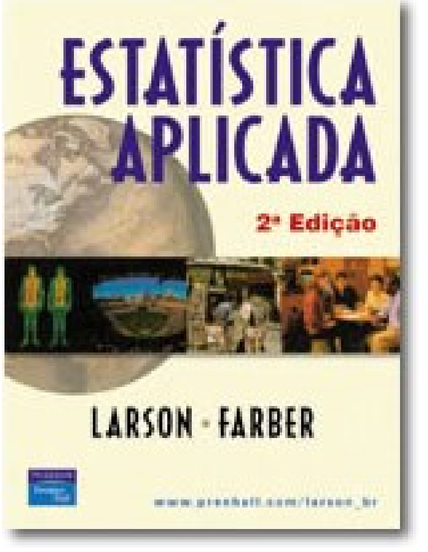
7,9	15,3	10,9	8,6	13,3	16,9	9,6	18,0	17,9	19,7
5,5	10,8	15,6	18,9	11,6	19,6	8,9	12,5	10,0	11,1

Estes dados mostram evidências suficientes de estar ocorrendo um decréscimo na quantidade média de lagostas pescadas por barco, que chega aos Estados Unidos, depois do decreto do governo das Bahamas? Teste considerando $\alpha = 5\%$ (unilateral).

Tamanho da Amostra	20
Média da População	14.0000
Média Amostral	13.1300
Erro Padrão	0.9643
(t)=	-0.9022
Graus de liberdade	19
(p) unilateral =	0.1891
(p) bilateral =	0.3782
Poder (0.05)	0.2286
Poder (0.01)	0.0716
IC 95% (média amostral)=	11.1117 a 15.1483
IC 99% (média amostral)=	10.3712 a 15.8888

Seção 7.4

Testes de hipóteses para determinar proporções



Teste para determinar proporções

p é a proporção populacional de sucessos. A estatística teste é $\hat{p} = \dfrac{x}{n}$.

(a proporção de sucessos na amostra)

Se $np \geq 5$ e $nq \geq 5$, a distribuição amostral de $\hat{p}$ é normal.

A estatística teste padronizada é:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$$

Teste para determinar proporções

Um porta-voz do setor de comunicações alega que mais de 40% dos norte-americanos têm celular próprio ou, pelo menos, têm alguém na família com celular. Em um levantamento aleatório de 1.036 norte-americanos, 456 disseram que eles ou alguém da família tinham um celular. Teste a alegação do porta-voz a $\alpha = 0{,}05$. O que você pode concluir?

1. Escreva as hipóteses nula e alternativa.

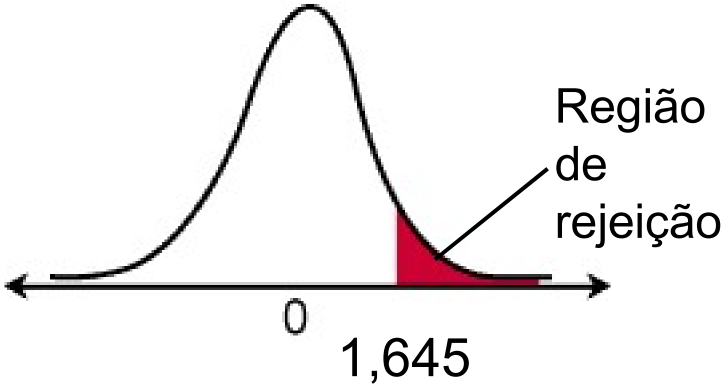
$H_0: p \leq 0{,}40$ $\quad\quad$ $H_a: p > 0{,}40$ **(alegação)**

2. Estabeleça o nível de significância.

$$\alpha = 0{,}05$$

3. Determine a distribuição amostral.

1.036(0,40) > 5 e 1.036(0,60) > 5. **A distribuição amostral é normal.**



4. Determine o valor crítico.

5. Determine a região de rejeição.

6. Determine a estatística teste e padronize-a.

$n = 1.036 \quad x = 456$

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{456}{\mathbf{1.036}} = \mathbf{0{,}44}$$

$$z = \frac{\mathbf{0{,}44} - \mathbf{0{,}40}}{\sqrt{\frac{(0{,}40)\,(0{,}60)}{\mathbf{1.036}}}} = \frac{\mathbf{0{,}04}}{\mathbf{0{,}01522}} = \mathbf{2{,}63}$$

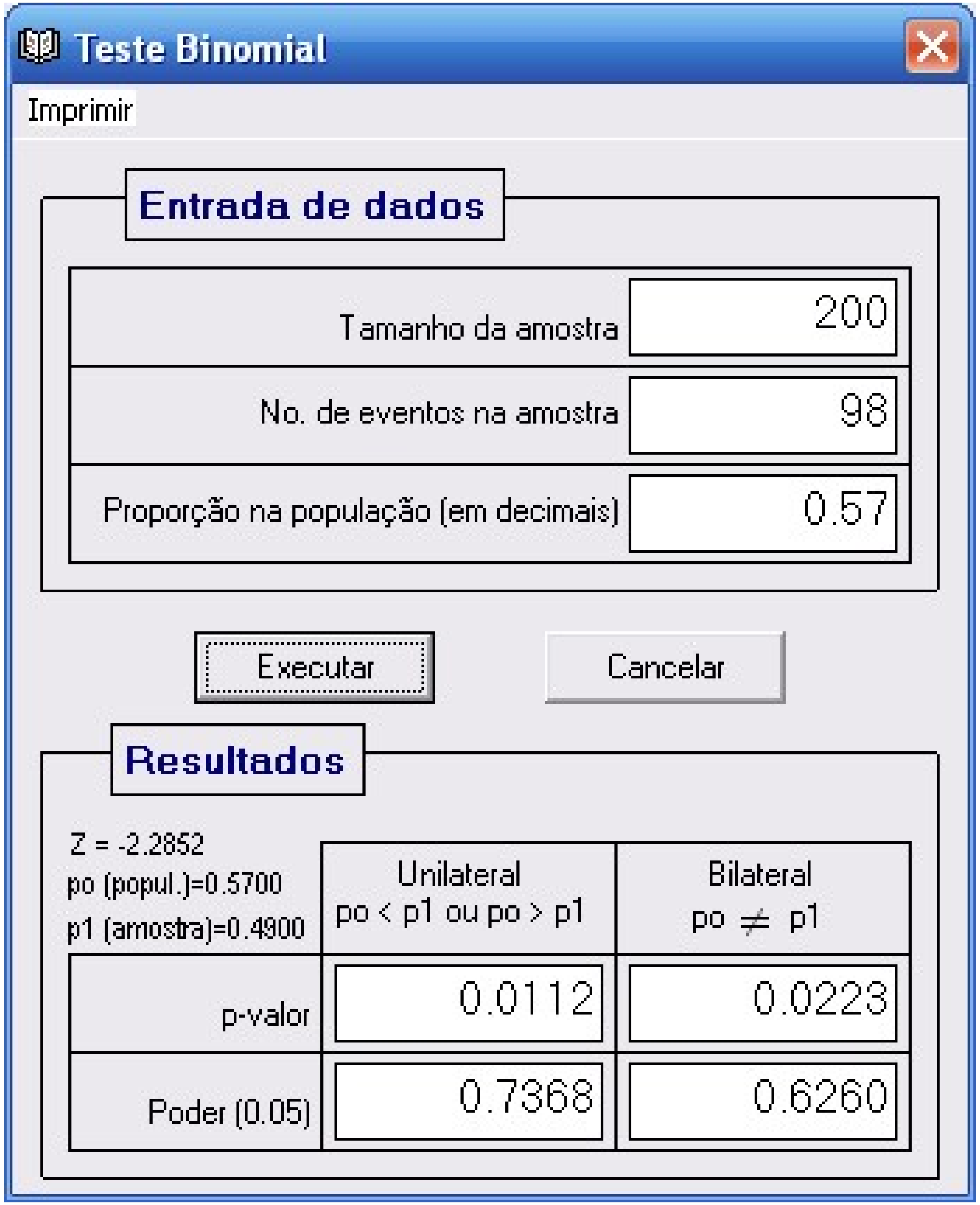
7. Tome sua decisão.

z = 2,63 cai na região de rejeição, portanto rejeite H_0.

8. Interprete sua decisão.

Há evidência suficiente para aceitar a alegação de que mais de 40% dos norte-americanos têm celular próprio ou, pelo menos, têm alguém na família com celular.

Exemplo: Um candidato A a Reitor de uma universidade afirma que 57% (p_o) dos professores irão votar nele na próxima eleição. O candidato B, desconfiado desse percentual, resolveu encomendar uma pesquisa de intenção de votos para verificar a autenticidade dessa afirmação. Após a coleta de uma amostra aleatória de 200 professores (n), constatou-se que 98 tinham a intenção de votar no candidato A. Segundo a pesquisa, qual a conclusão que deveríamos tomar, ao nível de 0,05 de probabilidade, em relação à afirmação do candidato A?



Teste Binomial
Imprimir
Entrada de dados
Tamanho da amostra
200
No. de eventos na amostra
98
Proporção na população (em decimais)
0.57
Executar
Cancelar
Resultados
Z = -2.2852
po (popul.)=0.5700
p1 (amostra)=0.4900
Unilateral
po < p1 ou po > p1
Bilateral
po ≠ p1
p-valor
0.0112
0.0223
Poder (0.05)
0.7368
0.6260

Exemplo: Uma pesquisa feita alega que 15% dos pessoas de uma determinada região sofrem de cegueira aos 70 anos. Numa amostra aleatória de 60 pessoas acima de 70 anos constatou-se que 12 pessoas eram cegas. Teste a alegação para α = 5% contra p > 15%.

Resultados

Z = 1.0847
po (popul.)=0.1500
p1 (amostra)=0.2000

	Unilateral po < p1 ou po > p1	Bilateral po $\neq$ p1
p-valor	0.1392	0.2783
Poder (0.05)	0.3079	0.2164