SUCESIONES MONOTONAS.

Una clase muy especial de sucesiones son las llamadas sucesiones monótonas que se definen así:

a) **Creciente:** $\boldsymbol{a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots\ a_{n-1} < a_n}$
b) **Decreciente:** $\boldsymbol{a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \cdots a_{n-1} > a_n}$
c) **No decreciente:** $\boldsymbol{a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq \cdots a_{n-1} \leq a_n}$
d) **No creciente:** $\boldsymbol{a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq \cdots a_{n-1} \geq a_n}$

Ejemplo: Determine qué tipo de sucesión monótona se presenta en cada caso:

i) $4, 6, 8, 10, \ldots$ (Monótona creciente)
ii) $5, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 3, \ldots$ (Monótona no creciente)
iii) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ (Monótona decreciente)
iv) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots$ (No es monótona)

SUCESIONES ACOTADAS.

Definición 1: Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ esta acotada superiormente si existe un numero M tal que $a_n \leq M\ \forall\ n$

Definición 2: Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ esta acotada inferiormente si existe un numero m tal que $a_n \geq m\ \forall\ n$

Definición 3: Se dice que la sucesión $\{a_n\}$ esta acotada, si lo es superior e inferiormente. En otras palabras, la sucesión $\{a_n\}$ esta acotada si existe un numero B tal que: $|\,a_n\,| \leq \mathrm{B}$ o bien que $-B \leq a_n \leq B\ \forall\ n$

*Nota: $\forall\ \boldsymbol{n}$ se interpreta como "para todo valor de *n*"

Ejemplos:

1. **¿Será la sucesión $\{n\}$ acotada?**

Al desarrollar la sucesión se obtiene que: $\{n\} = 1, 2, 3, 4, \ldots$

Eso significa que los valores de la sucesión comienzan en 1 y terminaran en infinito.

Por lo tanto, se concluye que esta acotada inferiormente en 1 (valor mas pequeño que tomara toda la sucesión) pero no hay "limite" superior.

$1 \leq n < \infty$ o también podemos escribirlo como: $0 < n < \infty$

2. **Determine donde esta acotada la sucesión $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$**

Al desarrollar la sucesión se obtiene que: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

Este desarrollo solamente nos indica que comienza en ½ pero ira aumentando poco a poco, por lo que debemos analizar si tendrá un límite superior en algún momento, con ello podemos determinar en qué valor converge.

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$$

Por lo que los términos de la sucesión estarán entre ½ y 1, así que se concluye que esta acotada inferiormente en ½ y superiormente en 1.

$1/2 \leq \frac{n}{n+1} < 1$ o también podemos escribirlo como: $0 < \frac{n}{n+1} < 1$

SUCESIONES PARTICULARES.

Como su nombre lo dice son sucesiones que tienen peculiaridades en comparación con las sucesiones vistas con anterioridad. Entre ellas se encuentran:

1. La sucesión de Fibonacci debe cumplir:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \; \forall \, n \geq 3$$

Y está definida por: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

***Se recomienda que el estudiante elabore un cuadro donde puede evaluar y verificar que la sucesión iterada da como resultado la sucesión anterior.**

2. La sucesión $\{r^n\}$ es convergente cuando $-1 < r \leq 1$

Ya que: $\lim_{n \to \infty} r^n = \begin{cases} 0, & para -1 < r < 1 \\ 1, & para\ r = 1 \end{cases}$

3. Sí $\lim_{n \to \infty} |a_n| = 0$, entonces Sí $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$
4. Por la definición del número e *la sucesión* $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ *converge, ya que* $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$

***Se recomienda que el estudiante realice los límites de los numerales 2 y 4 para comprobar dichas particularidades.**