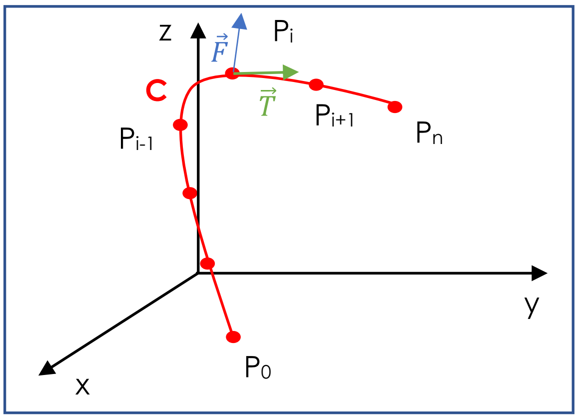
El trabajo realizado por una fuerza variable $f(x)$ que mueve a una partícula desde un punto "a" hasta un punto "b" a lo largo de eje "x" es $W = \int_a^b f(x)\,dx$

El trabajo que efectúa una fuerza en el espacio es: $W = \vec{F} \cdot \vec{D}$, donde $\vec{D}$ es un vector desplazamiento y $\vec{F} = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{k}$ representa un campo de fuerzas en R^3.



Al dividir la curva C en subarcos $P_{i-1}P_i$ de longitud Δs en el intervalo [a,b] y sabiendo que Δs se hará muy pequeño, la partícula se mueve aproximadamente en la dirección de $\vec{T}$ el cual es un **vector unitario tangente** a P_i.

En el espacio tridimensional mostrado en la figura se tiene un campo de fuerzas $\vec{F}(x, y, z) = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{k}$

Por lo tanto, el trabajo queda definido por:

$$\Delta W = \vec{F}(x, y, z) \cdot \left[\Delta s\, \vec{T}(t)\right] = \left[\vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(t)\right] \Delta s$$

Al cumplir con toda la trayectoria y hacer la sumatoria de todos los subarcos, se tiene que:

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[\vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(t)\right] \Delta s \to W = \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot \vec{T}(t)\, ds = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

DEFINICIÓN: El Trabajo es la integral de línea respecto a la longitud de arco de la componente tangencial de la fuerza.

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds$$

Si la curva C esta dada por la ecuación vectorial: $\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath} + \mathrm{h}(t)\hat{k}$, entonces:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|} \qquad y \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt = \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_a^b \underbrace{\boxed{\vec{F}(\vec{r}(t))}}_{\vec{F}} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}\,'(t)\|}}}_{\vec{T}} \underbrace{\boxed{\|\vec{r}\,'(t)\|\, dt}}_{dS}$$

Simplificando la expresión anterior:

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{\vec{r}'(t)}{\cancel{\|\vec{r}'(t)\|}} \cancel{\|\vec{r}'(t)\|}\, dt$$

Entonces el trabajo queda definido por:

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

Esta ultima integral se abrevia a menudo como:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Nota: Es importante recordar que $\vec{r}(t) = \underbrace{f(t)}_{x}\hat{\imath} + \underbrace{g(t)}_{y}\hat{\jmath} + \underbrace{\mathrm{h}(t)}_{z}\hat{k}$ hace referencia a una función de posición por lo que:

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(\vec{r}(t))$$

Y que: x=f(t), y=g(t) y z=h(t) en su relación a la curva C en ecuaciones paramétricas.

En conclusión, el trabajo queda definido por:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\, dt}$$

INTEGRAL DE LINEA EN FORMA DIFERENCIAL.

La integral de línea de campo vectorial tiene una forma diferencial, donde $\vec{F} = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{k}$, por lo que:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C M\, dx + N\, dy + P\, dz$$