Como no siempre es posible encontrar una fórmula para Sn entonces se recurre a otros métodos para determinar la convergencia o divergencia.

Las principales son:

1. **Prueba o criterio de comparación directa o comparación ordinaria.**
2. **Prueba o criterio de comparación en el límite.**
3. **Prueba de las series alternadas.**
4. **Prueba o criterio de cociente o de la razón.**
5. **Prueba de la integral.**

## 1) Prueba o criterio de comparación directa o comparación ordinaria.

Sea $a_n \leq b_n, \forall n$ luego tenemos dos casos:

**CASO 1.**

Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

**CASO 2.**

Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es divergente.

### EJEMPLO 1.

Determine la convergencia o divergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$

**SOLUCIÓN.**

Reescribiendo $a_n$

$$\frac{n}{2^n(n+1)} = \overbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{n}{n+1}} < \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\text{Se elige como } b_n}$$

Para elegir $b_n$ basta con buscar una expresión que tengan una forma similar a $a_n$ pero que sea más simplificada y que ya se sepa de antemano si converge o diverge por la teoría de series.

Para verificar que se cumpla: $a_n \leq b_n$ evaluemos en diferentes valores de n, por ejemplo:

$$n = 3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{3}{4} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\frac{3}{32} < \frac{1}{8}$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$

Y sabemos que esta serie es una serie geométrica ya se sabe que es convergente, por lo tanto, la serie dada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)}$ **es convergente.**

**EJEMPLO 2.**

¿Es convergente o divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2-4}$?

Se debe cumplir que $a_n \le b_n$, y en esta oportunidad elegiremos $a_n$ solamente quitándole el -4 al denominar, luego se simplifican las "n". Deben comprobar que se cumple la desigualdad.

**SOLUCIÓN.**

$$\underbrace{\frac{n}{5n^2-4}}_{b_n} > \underbrace{\frac{n}{5n^2}}_{\text{Reescribiendo } a_n} = \frac{1}{5n}$$

Como $\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente por ser una serie armónica, entonces la serie dada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5n^2-4}$ **es divergente.**

## 2) Prueba o criterio de comparación en el límite.

Sea $a_n > o \wedge b_n > o$, tal que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} =$ L donde "L" es positivo o infinito, o sea: $0 < L < \infty$

Luego se tiene dos casos:

**CASO 1:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son ambos convergentes.

**CASO 2:** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \wedge \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son ambos divergentes.

**EJEMPLO 1:** Determine la convergencia o divergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}$

**SOLUCIÓN.**

En esta prueba para elegir $b_n$ solo basta con obtener una forma simplificada de $a_n$, y cumplir la condición:

$$a_n > o \wedge b_n > o$$

Si la función es polinómica basta con escoger los términos de mayor grado para formar $b_n$

$$a_n = \frac{3n-2}{n^3-2n^2+11} \quad \wedge \quad b_n = \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2}$$

Luego: $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n^3-2n^2+11} \div \frac{3}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n-2}{n^3-2n^2+11}\cdot\frac{n^2}{3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^3-2n^2}{3n^3-6n^2+33} = 1 \text{ (Positivo y finito)}$$

Como $3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente porque es serie "P" con P = 2 > 0.

Por tanto, la serie dada es **convergente.**

**EJEMPLO 2:** ¿Es convergente o divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$?

**SOLUCIÓN.**

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}} \wedge b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$$

Luego: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+19n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^2}{n^2+19n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+19n}} = \sqrt{1} = 1 \text{ (Positivo y finito)}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+19n}}$ **es divergente.**

**EJEMPLO 3:** ¿Es convergente o divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3+n}}$?

**SOLUCIÓN.**

$$a_n = \frac{3}{\sqrt{n^3+n}} \to b_n = \frac{1}{\sqrt{n^3}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{n^3+n}} \cdot \frac{\sqrt{n^3}}{1} = 3\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n^3}{n^3+n}} = 3 \text{ (Finito y Positivo)}$$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ la cual es convergente, porque es una serie hiper-armónica con P = 3/2 > 1 $\therefore$ La serie dada **es convergente.**

### 3) Prueba o criterio de la serie alternada.

Una serie alternada de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ o bien $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ es convergente si cumple las condiciones siguientes:

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

b) $a_{n+1} \le a_n$

**EJEMPLO:** Determine la convergencia o divergencia de las siguientes series alternadas.

i) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$$

ii) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}n^2}{n^2+1}=-\frac{1}{2}+\frac{4}{5}-\frac{9}{10}+\frac{16}{17}-\ldots$$

iii) $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$ (Serie armónica alternada)

**SOLUCIÓN**

*i)* $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ ****Recordatorio: la serie es de la forma** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$**, por lo que no tomamos en cuenta el (-1) elevado a: n, n+1 o n-1. Solamente el termino** $a_n$**.***

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1}=0$ ✔ Cumple la condición

b) $2(n+1)-1$

$2n+2-1$

$2n+1$

Por lo tanto: $a_n=\dfrac{1}{2n-1}$ y $a_{n+1}=\dfrac{1}{2n+1}$

$\dfrac{1}{2n+1}<\dfrac{1}{2n-1}$ ✔ Cumple la condición

Comprobando la segunda condición para cualquier n, por ejemplo: n=4

$\dfrac{1}{9}<\dfrac{1}{7}$ $\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n-1}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots$ Es **convergente** porque cumple las dos condiciones con una que no cumpla es no es convergente.

ii) $a_n=\dfrac{n^2}{n^2+1}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1\neq 0$ No cumple la primera condición $\therefore$ la serie es **NO ES CONVERGENTE.**

iii) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ (Serie armónica alternada)

$a_n \frac{1}{n}$

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ ✔ Cumple la condición

b) $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ ✔ Cumple la condición

Por tanto, la serie armónica alternada es **convergente**.

### 4) Prueba o criterio del cociente o de la razón.

**PARTE A**: Sea $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ una serie de términos positivos tal que: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}= \Lambda$

Luego, tenemos los siguientes casos:

**CASO I:** Si $L<1$ entonces la serie es convergente.

**CASO II**: Si $L>1$ entonces la serie es divergente.

**CASO III**: Si $L=1$ no hay conclusión (falla la prueba).

**EJEMPLO 1:** Determine la convergencia o divergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$

**SOLUCIÓN.**

$$a_n=\frac{2^n}{n!} \qquad a_{n+1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}.2}{(n+1)\cancel{n!}}\cdot\frac{\cancel{n!}}{\cancel{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=2(0)=0<1$$

Para poder simplificar debemos recordar cómo funciona una función factorial: 4! = 4 x 3 x 2 x 1

Por lo que se puede descomponer como: 4 x 3!

Ya que 3! = 3 x 2 x 1

Por lo que: (n+1)! Se puede descomponer como (n+1) x n!

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ Es **convergente**.

**EJEMPLO 2:** ¿Es convergente o divergente $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{20}}$ ?

**SOLUCIÓN**

Debemos recordar que:

$x^{a+b} = x^a . x^b$

Por lo que:

$2^{n+1} = 2^n . 2^1 = 2^n\, 2$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^{20}} \cdot \frac{n^{20}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^n}2}{(n+1)^{20}} \cdot \frac{n^{20}}{\cancel{2^n}}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{20} = 2\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right]^{20} = 2(1)^{20} = 2$$

L$=2>1$ $\therefore$ La serie dada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^{20}}$ es **divergente.**

**EJEMPLO 3:** Compruebe la convergencia o divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

**SOLUCIÓN.**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{(n+1)^n \cancel{(n+1)}} \cdot \frac{n^n}{\cancel{n!}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$ dividiendo entre n la expresión del paréntesis se tiene:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n = \left[\frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] = \frac{1}{e} < 1$$ (por definición del número e)

*Se le recomienda al estudiante resolver el limite planteado.

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ es **convergente.**

*Antes de pasar a la parte B de la prueba sabemos que:*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente por ser serie "P" con P=1 (P$\leq$1), también sabemos que ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente por ser serie "P" con P=2, (P>1) a pesar que sus limites son igual a 1.

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

ii) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$$

**PARTE B:** Sea $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ una serie alternada tal que:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}a_{n+1}}{(-1)^n a_n}\right| = L$ Luego tenemos los casos siguientes.

i) Si L < 1, entonces la serie es absolutamente convergente.
ii) Si L > 1, entonces la serie es divergente.
iii) Si L =1, entonces no hay conclusión (Falla la prueba).

**EJEMPLO 1:** Determine la convergencia o divergencia de la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^3}{3^n}$

**SOLUCIÓN.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}a_n+1}{(-1)^n a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n^3}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3}{\cancel{3^n}.3}\cdot\frac{\cancel{3^n}}{n^3}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}\left[\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\right]^3$$

Se le recomienda al estudiante analizar por qué razón $\frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n}$ da como resultado un signo negativo, y si siempre obtendrá ese mismo signo dentro del valor absoluto

$=\frac{1}{3}(1)^3 = \frac{1}{3} < 1$ $\therefore$ La serie dada es absolutamente convergente.

**EJEMPLO 2:** ¿Es convergente o divergente $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+1}$?

**SOLUCIÓN.**

$$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(-1)^n\sqrt{n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{n+1}{n+2}\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right|$$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}} = (1)(1) = 1$ $\therefore$ Falla la prueba (No hay conclusión)

*En este ejercicio deben aplicar propiedades de los radicales.

## 5) Prueba o criterio de la integral.

Sea f una función continua positiva y no creciente en el intervalo [1, ∞] y sea $a_n = f(n)$ para todo "n" luego la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Es convergente si y solo si $\int_1^{\infty} f_{(x)}dx$ es convergente en caso contrario es divergente.

### EJEMPLO 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2}$$

Ya que las integrales tendrán un límite de integración en el infinito debe plantear un límite por cada indeterminación de la integral impropia que quede planteada.

**SOLUCIÓN.**

$$a_n = f_{(n)} \Rightarrow f_{(x)} = \frac{1}{4x^2}$$

Luego $\int_1^{\infty} f_{(x)}dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{4x^2}dx = \frac{1}{4}\int_1^{\infty} x^{-2}dx = \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^t = \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^t$

$$= \frac{1}{4}\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{t}+1\right] = \frac{1}{4}(0+1) = \frac{1}{4}$$

∴ La serie dada es **convergente.**

**EJEMPLO 2:** ¿Es convergente o divergente $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ell n(n)}$?

**SOLUCIÓN.**

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \int_2^{\infty} \frac{1}{x\ell n(x)}dx = \int_2^{\infty} \frac{du}{u} = \lim_{t\to\infty}\int_2^{t} \frac{du}{u} = \lim_{t\to\infty}[\ell n(u)]_2^t = \lim_{t\to\infty}[\ell n(\ell nx)]_2^t$$

$$u = \ln(x)$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{t\to\infty}[\ell n(\ell nt) - \ell n(\ell n2)] = [\infty - \ell n(\ell n2)] = \infty$$

∴ La serie dada $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ell n(n)}$ es **divergente.**

**EJEMPLO 3**: ¿Es convergente o divergente $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$?

**SOLUCIÓN.**

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^{t}\frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}(x)\right]_1^t = \lim_{t\to\infty}\left[\tan^{-1}(t)-\tan^{-1}(1)\right]$$

$$=\left[\tan^{-1}(\infty)-\tan^{-1}(1)\right]=\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{\pi}{4}$$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ es **convergente.**