Teorema de la Divergencia de Gauss.

Sea D una región solida limitada por una superficie S, y sea $\vec{F}(x,y,z) = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{\kappa}$ un campo vectorial en donde $M, N\ y\ P$ son funciones que tienen primeras derivadas parciales continuas en D.

Si $\hat{\eta}$ es un vector normal unitario hacia el extremo de S, entonces:

$$\iint_S \vec{F}.\hat{\eta}\ ds = \iiint_D Div\ \vec{F}\ dV$$

O bien:

$$\iint_S [M\hat{\imath}.\hat{\eta}\ + N\hat{\jmath}\ .\hat{\eta}\ + P\hat{\kappa}\ .\hat{\eta}]\, ds = \iiint_D (\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z})\, dV$$

Se pueden demostrar las tres igualdades siguientes así:

i. $$\iint_S M\hat{\imath}.\hat{\eta}\quad ds = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x}\ dV$$

ii. $$\iint_S N\hat{\jmath}\ .\hat{\eta}\quad ds = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y}\ dV$$

iii. $$\iint_S P\hat{\kappa}\ .\hat{\eta}\quad ds = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\ dV$$

Nota: *observe que el teorema de la divergencia de Gauss relaciona una integral de superficie con una integral triple.*

Demostración.

Prueba para demostrar que iii se cumple.

iii. $$\iint_S P\hat{\kappa}\ .\hat{\eta}\quad ds = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\ dV$$

Supongamos que la región solida D está limitada por tres superficies así como se muestra en la figura 1: una superficie inferior S_1 representada por la función $z = g_1(x,y)$, en donde el vector normal unitario $\hat{\eta}$ es hacia abajo, una superficie superior S_2 representada por $z = g_2(x,y)$ en donde $\hat{\eta}$ es hacia arriba, una superficie lateral S_3 en donde $\hat{\eta}$ es horizontal y a la vez perpendicular al eje z de manera que $P\hat{k}.\hat{\eta} = 0$ y entonces no contribuye.

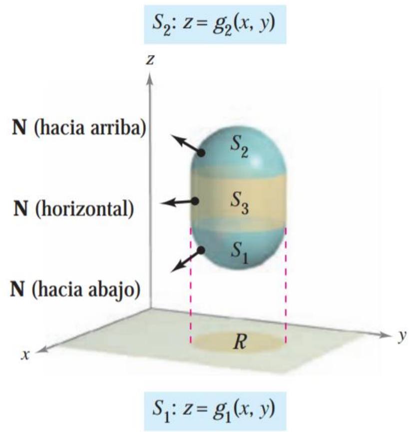

Figura 1.

Ante el previo análisis se tiene que:

$$\iint_S P\hat{k}\,.\hat{\eta}\;ds = \iint_{S_1} P\hat{k}\,.\hat{\eta}\;ds_1 + \iint_{S_2} P\hat{k}\,.\hat{\eta}\;ds_2$$

Ahora se resuelven las dos integrales de superficie de la siguiente manera:

$$\iint_{S_1} P\hat{k}\,.\hat{\eta}\;ds_1 = \iint_R \Big(P\big(x,y,g_1(x,y)\big)\Big)\,\hat{k}\cdot(hx\hat{\imath} + hy\hat{\jmath} - \hat{k})\;dA$$

Vector normal unitario hacia abajo

$$\iint_{S_2} P\hat{k}\,.\hat{\eta}\;ds_2 = \iint_R \Big(P\big(x,y,g_2(x,y)\big)\Big)\,\hat{k}\cdot\;(-hx\hat{\imath} - hy\hat{\jmath} + \hat{k})\;dA$$

Vector normal unitario hacia arriba

De manera que, al desarrollar el producto punto, se tiene:

$$\iint_{S_1} P\hat{k}\,.\hat{\eta}\;ds_1 = \iint_R -\Big(P\big(x,y,g_1(x,y)\big)\Big)\;dA$$

$$\iint_{S_2} P\hat{k}\,.\hat{\eta}\;ds_2 = \iint_R \Big(P\big(x,y,g_2(x,y)\big)\Big)\;dA$$

Por lo tanto, tenemos que:

$$\iint_S P\hat{\kappa}\,.\hat{\eta}\ ds = \iint_R \left(P\left(x,y,g_2(x,y)\right)\right)\, dA - \iint_R \left(P\left(x,y,g_1(x,y)\right)\right)\ dA$$

$$\iint_S P\hat{\kappa}\,.\hat{\eta}\ ds = \iint_R \left(P\left(x,y,g_2(x,y)\right) - P\left(x,y,g_1(x,y)\right)\right)\, dA$$

Dicha integral es el teorema fundamental de una integral en términos de z de la función P, por lo que:

$$\iint_S P\hat{\kappa}\,.\hat{\eta}\ ds = \iint_R [\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\,]\ dA = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\, dz\, dA = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\, dV$$

Nota: un diferencial de área por su componente restante es un diferencial de volumen.

Ejercicios propuestos:

1. **Evalué $\iint_S \vec{F}.\hat{\eta}\ ds$ utilizando el teorema de la divergencia de Gauss sabiendo que $\vec{F}(x,\ y,\ z) = xy\hat{\imath} + (y^2 + xe^{xz})\hat{\jmath} + arctan(xy)\hat{k}$ es el campo vectorial mientras la superficie S es la región limitada por $z = 1 - x^2$ y los planos $y\ = 0, z = 0, y + z = 2$**

   Respuesta: 184/35

2. **Use el teorema de la divergencia de Gauss para calcular $\iint_S \vec{F}.\hat{\eta}\ ds$. Si:**

   a) $\vec{F}(x,\ y,\ z) = 4x\hat{\imath} - 3y\hat{\jmath} + 7z\,\hat{k}$ donde S es el cubo limitado por los planos: x=1, y=1, z=1 en el primer octante.

   b) $\vec{F}(x,\ y,\ z) = 2x\hat{\imath} - y\hat{\jmath} + z^2\,\hat{k}$ donde S es el cilindro $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le h$

   Respuestas: a) 8 b) π(h+h²)