GRADIENTE

Si f es una función escalar de dos o mas variables, su grafiente: $\nabla f \ o \ Gradf$, se define como:

- En el plano.

$$\nabla f = f_x(x,y)\hat{\imath} + f_y(x,y)\hat{\jmath} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath}$$

- En el espacio.

$$\nabla f = f_x(x,y,z)\hat{\imath} + f_y(x,y,z)\hat{\jmath} + f_z(x,y,z)\hat{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

Donde f_x, f_y y f_z representan las derivadas parciales de f respecto a cada una de las variables.

> *Es importante recalcar que se tiene un campo escalar de entrada (f) pero se obtiene un campo vectorial de salida (∇f)*

Interpretación física: Indica la dirección en la que una partícula o cuerpo debe moverse para que el parámetro de análisis aumente o crezca.

Interpretación geométrica del gradiente: Sea z=f(x,y) una función diferenciable con curvas de nivel $f(x_0,y_0)=C$, que puede ser representadas por: x=f(t) y y=g(t) tenemos que:

1. Al aplicar la regla de la cadena para derivar:

$$f(x_0, y_0) = C \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$$

2. Ahora, sabemos que:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} \quad y \quad \vec{r}'(t) = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath}$$

Donde $\vec{r}'(t)$ representa el vector tangente.

3. Entonces al realizar el producto punto:

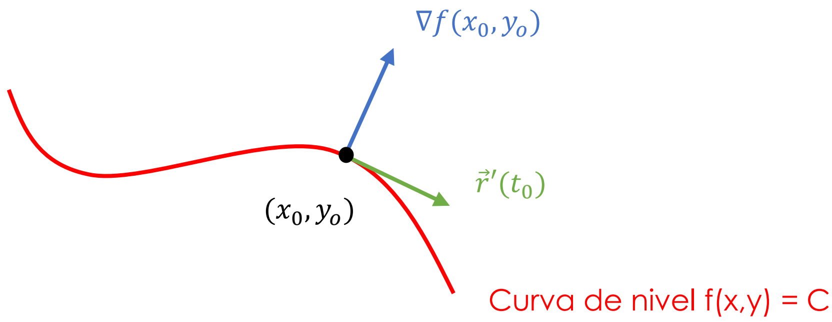
$$\nabla f \cdot \vec{r}'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Debido al numeral 1, podemos concluir que la operación del numeral 3 es cero, es decir:

$$\nabla f \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

Esto indica que el vector gradiente es perpendicular al vector tangente en el punto (x_0,y_0)

Representación gráfica de la interpretación geométrica del gradiente:



DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

Teniendo un campo vectorial general de la forma: $\vec{F}(x,\ y,\ z) = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{k}$ se tienen dos asociaciones:

i) Divergencia $(Div\vec{F})$
ii) Rotacional $(Rot\vec{F}\ o\ Curl\vec{F})$

Definiciones:

i) $$Div\vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\hat{\imath}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \cdot (M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{k})$$

$$\boxed{Div\vec{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}}$$

ii) $$Rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{\hat{\imath}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right) \times \left(M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{k}\right)$$

$$\boxed{Rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{\hat{\imath}} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}}$$

Precaución con el signo menos, proviene de resolver el producto cruz

Interpretaciones físicas:

i) **Divergencia:** la respuesta es una función escalar que mide si los vectores salen (+) o entran (-), lo cual es conocido como velocidad de salida.

ii) **Rotacional:** la respuesta es una función vectorial que mide si el campo gira alrededor del punto de análisis y de qué forma (horario o antihorario).

Es importante recalcar que la divergencia tiene como entrada una función vectorial y a la salida genera una función escalar. Mientras que el rotacional tanto a la entrada como a la salida posee funciones vectoriales.

FORMULAS QUE INVOLUCRAN CAMPOS.

1) $\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (se le llama laplaciano)

2) $\nabla \times \nabla f = 0$ (el rotacional del gradiente de una función es cero)

3) $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$ (la divergencia del rotacional de una función es cero)