MATEMATICA AVANZADA / CALCULO AVANZADO

GUIA DE EJERCICIOS 1

CONCEPTOS BASICOS DE MATEMATICA AVANZADA.

1. Bosqueje e identifique la ecuación rectangular de la curva definida por: $x = t^2 - 2t$, $y = t + 1$.

2. Eliminar el parámetro "m", identifique y bosqueje la gráfica con ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 3m - 1 \\ y = 2m + 1 \end{cases}$$

3. Para las siguientes ecuaciones paramétricas, determine su forma rectangular y grafique:
   a) $x = \sec(t)$, $y = \cos(t)$
   b) $x = 3 - 2\cos(\theta)$, $y = -5 + 3\sin(\theta)$
   c) $x = t^3$, $y = 3ln(t)$
   d) $x = \tan(t)$, $y = \sec^2(t) - 1$

4. Encuentre la curva paramétrica que se forma en la intersección entre las siguientes superficies: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \wedge x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ donde R es una constante positiva.

5. Encuentre $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ y $\frac{d^3y}{dx^3}$ sin eliminar el parámetro "t" de las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = t^2$ y $y = t^3$. Simplifique.

6. Determine y'' de las siguientes ecuaciones paramétricas: $x = 5\cos(t)$ y $y = 5\sin(t)$. Simplifique.

7. Determine la ecuación perteneciente a la recta tangente, dada las condiciones paramétricas mostradas: $x = 3t^2 - t$, $y = \sqrt{t}$ en $t = 4$

8. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva: $x = 3 + \sin(t)$ y $y = 2 - \cos(t)$ en $t = \pi/4$.

9. Para las ecuaciones paramétricas siguientes: $x = 4 - t^2$, $y = t^2 + 4t$

   Obtenga:

   a) Donde se encuentran las rectas tangentes horizontales y verticales.

b) Determine la concavidad de la función.
c) Bosqueje la gráfica mostrando lo anterior.

10. Encontrar el punto y la ecuación de la recta tangente vertical y horizontal de las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = \frac{3t}{1+t^3} \qquad y = \frac{3t^2}{1+t^3}$$

11. Encuentre la longitud de arco, si:

$$x = 3\cos(t) - \cos(3t)$$
$$y = 3\sin(t) - \sin(3t)$$
Dónde: $0 \leq t \leq \pi$

12. Determine cuál es la longitud de arco para la curva: $x = \ln(\sin(t))$ y $y = t$, en el intervalo: $\pi/4 \leq t \leq \pi/2$

13. Plantee la integral que representa la longitud de la curva: $x = t + e^{-t}, y = t - e^{-t}$ en el intervalo: $0 \leq t \leq 2$ simplificando hasta su mínima expresión.

14. Dada: $\vec{r}(t) =< tsen(t), t^2, tcos(2t) >$ Determine: $\vec{r}''(t)$

15. Sí $\vec{r}(t) = 3\tan(7t)\,\hat{\imath} + sen^2(t)\hat{\jmath} - 4\ln(t)\hat{k}$ y $\vec{u}(x,y) = \frac{sen(7t)}{7}\hat{\imath} + \cot(t)\,\hat{\jmath} + \frac{t^2}{2}\hat{k}$. Determinar:

$$i)\ \vec{r}\,'(t).\vec{u}\,'(t) \qquad ii) D_t[\vec{r}(t) \times \vec{u}(t)]$$

16. Si $\vec{u}(x,y) = e^{-xy^2}\hat{\imath} + x^4y^3\hat{\jmath}$ y $\vec{v}(x,y) = e^x\hat{\imath} + e^y\hat{\jmath}$. Determinar:

$$i)\ \frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x\partial y} \qquad ii) \frac{\partial\,(\vec{u}.\vec{v})}{\partial x}$$

17. Calcular:

$$\int_0^1 \vec{r}(t)\,dt \quad \text{Si} \quad \vec{r}(t) = sen(t)\hat{\imath} + 6\hat{\jmath} + 4t\,\hat{k}$$

18. Determine la antiderivada de la función vectorial dada, así:

$$\vec{r}(t) = \cos(2t)\,\hat{\imath} - sen(2t)\hat{\jmath} + \frac{1}{1+t^2}\hat{k}$$

que satisface la condición inicial $R(0) = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$

19. Determinar $\vec{R}(t)$ dadas las siguientes condiciones:

$$\vec{R}'(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t+\frac{1}{2}}\,\hat{\imath} + e^{-t}\hat{\jmath} + \frac{1}{1+t}\hat{k} \quad \text{y} \quad R(0) = \hat{k}$$

20. Bosqueje 6 vectores del campo vectorial: $\vec{F}(x,y,z) = z\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + y\hat{k}$ ubicando uno sobre cada eje coordenado (positivos y negativos)

21. Si $\vec{h}(x,y,z) = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Determine:
    a) $Grad(\|\vec{h}\|^2)$
    b) $Div\ (\vec{h})$
    c) $Rot\ (\vec{h})$
    d) Laplaciano$(\|\vec{h}\|^2)$

22. Determine $\nabla f(x,y)$ sí $f(x,y) = 3xe^{\frac{y}{x}}$ en (3,0)

23. Determine la curva de nivel de $f(x,y) = 2x - 8y^2$ que pasa por (-1,1). Además, grafique dicha curva de nivel y trace el gradiente en dicho punto.

24. Encontrar las ecuaciones simétricas y paramétricas de la recta normal a la superficie: $xyz = 12$ en el punto (2,-2,-3)

25. Calcule $Div\,\vec{F}\ y\ Curl\,\vec{F}$ para: $\vec{F}(x,y,z) = (3x + 2z^2)\hat{\imath} + \frac{x^3y^2}{2}\hat{\jmath} - (z - 7x)\hat{k}$

26. Una aplicación para la divergencia ocurre en física, cuando se trabaja con campos magnéticos. Un campo magnético es un campo vectorial que modela la influencia de las corrientes eléctricas y los materiales magnéticos. Los físicos usan la divergencia en la ley de Gauss para el magnetismo, que establece: si **B** es un campo magnético, entonces **∇·B** = 0, ¿Podría $\vec{F}(x,y) = < x^2y, y - xy^2 >$ modelar un campo magnético?

27. Determine si los siguientes campos vectoriales son conservativos, si lo son, encuentre la función potencial del campo vectorial:

$$i)\ \vec{F}(x,y,z) = 2xy\hat{\imath} + (x^2 + z^2)\hat{\jmath} + 2yz\hat{k}$$

$$ii)\ \vec{G}(x,y,z) = \left(4y^2 + \frac{3x^2y}{z^2}\right)\hat{\imath} + \left(8xy + \frac{x^3}{z^2}\right)\hat{\jmath} + \left(11 - \frac{2x^3y}{z^3}\right)\hat{k}$$

$$iii)\ \vec{H}(x,y,z) = (\tan(y) + 2xy\sec(z))\hat{\imath} + (x\sec^2(y) + x^2\sec(z))\hat{\jmath} + \sec(z)(x^2y\tan(z) - \sec(z))\hat{k}$$