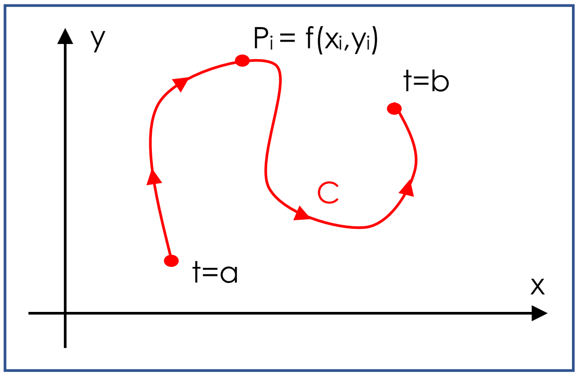
La integral de línea tiene la peculiaridad que en lugar de integrar sobre un intervalo [a,b], integramos a lo largo de una curva C. Sus aplicaciones sobresalen en el flujo de fluidos, fuerzas, electricidad y magnetismo.




Se tiene una curva C definida por ecuaciones paramétricas:

$$x = f(t), \;\; y = g(t) \qquad a \leq t \leq b$$

O su equivalente función vectorial:

$$\vec{r}(t) = f(t)\hat{\imath} + g(t)\hat{\jmath}$$

Al analizar el esquema, se tiene que la suma de Riemann: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$

Si f se define sobre la curva C, entonces analizando la totalidad de la curva se obtiene:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i \to \int_C f(x,y)\, ds\,; \quad Donde\ ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

En el espacio tridimensional:

$$\int_C f(x,y,z)\, ds\,; \quad Donde\ ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Además, se tienen los siguientes casos especiales:

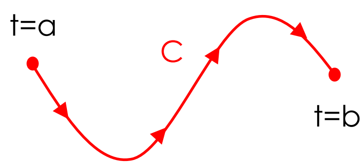
$$\text{i)} \int_C G(x,y)\, dx = \int_C G(f(t), g(t))\, f'(t)dt$$

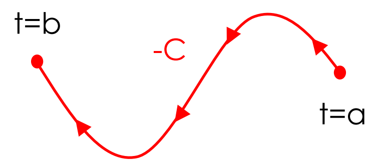
$$\text{ii)} \int_C G(x,y)\, dy = \int_C G(f(t), g(t))\, g'(t)dt$$

$$\text{iii)} \int_C G(x,y,z)\, dz = \int_C G(f(t), g(t), h(t))\, h'(t)dt$$

*Recordando que: x=f(t), y=g(t) y z=h(t) en su relación a la curva C en ecuaciones paramétricas.*

En general, para una parametrización dada: $x = f(t),\ \ y = g(t);\ a \leq t \leq b$ determina la orientación de C. Si -C denota la curva que contiene los mismos puntos de C, pero en orientación opuesta se tiene:




$$\text{i)} \int_{-C} f(x,y)\,dx = -\int_{C} f(x,y)\,dx$$

$$\text{ii)} \int_{-C} f(x,y)\,dy = -\int_{C} f(x,y)\,dy$$

$$\text{iii)} \int_{-C} f(x,y)\,ds = \int_{C} f(x,y)\,ds$$

---

## INTEGRAL DE LINEA COMO SUMA

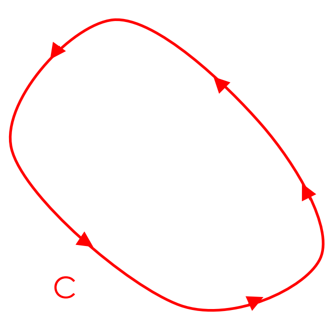
Una integral de línea se puede mostrar como una suma concatenada de integrales, como sigue:

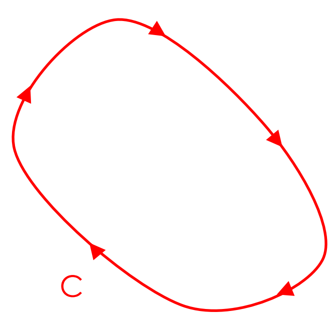
$$\int_{C} M(x,y)\,dx + \int_{C} N(x,y)\,dy = \int_{C} M(x,y)\,dx + N(x,y)dy$$

## NTEGRAL DE LINEA EN UNA CURVA CERRADA

**Integral de línea a lo largo de una curva suave (continua) por partes, simple y cerrada.**

Para curva C cerrada, se utiliza la siguiente convención:




Sentido anti horario (orientación positivo)

$$\oint_{c} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

Sentido horario (orientación negativo)

$$\oint_{c} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$