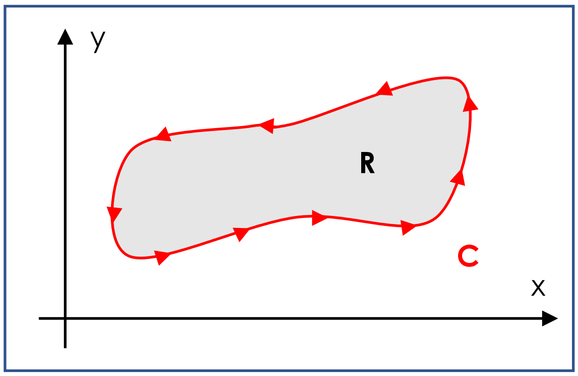
Este teorema establece la relación entre una integral de línea alrededor de una curva simple cerrada C y una integral doble sobre la región plana R acotada por C.

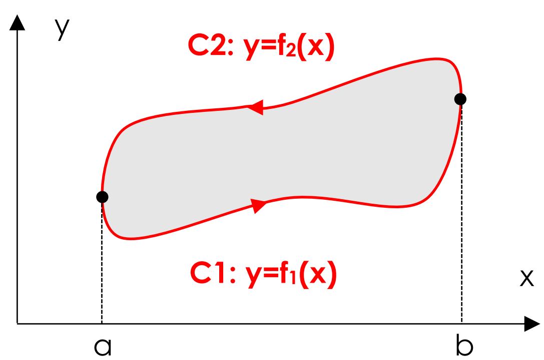


Teorema de Green: Sea C una curva simple, cerrada, suave por tramos con orientación positiva en el plano, y sea R la región delimitada por C. Sí M y N tienen derivadas parciales continuas en una región abierta que contiene R entonces:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

Demostración.

CURVA TIPO I



Se analizará la primera parte del integrando, y la curva C se dividirá en dos curvas C1 y C2, recordando que la función M está en términos de "x" y "y". Por lo que:

$$\oint_C M\,dx = \int_{C1} M(x,y)\,dx + \int_{C2} M(x,y)\,dx$$

Sustituyendo la coordenada "y" por la función que le corresponde, se tiene que:

$$\oint_C M\,dx = \int_a^b M(x, f_1(x))\,dx + \int_b^a M(x, f_2(x))\,dx$$

Los limites de integración son diferentes, pero por propiedad de integrales, se pueden colocar los mismos limites pero se debe colocar un signo menos en la integral planteada…

$$\boxed{\oint_C M\,dx = \int_a^b M(x, f_1(x)) - M(x, f_2(x))\,dx}$$

Por otro lado:

$$\boxed{\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\cancel{\partial y}} \cancel{dy}\,dx = \int_a^b M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))\,dx}$$

Por lo tanto, al comparar los dos resultados enmarcados, se tiene que:

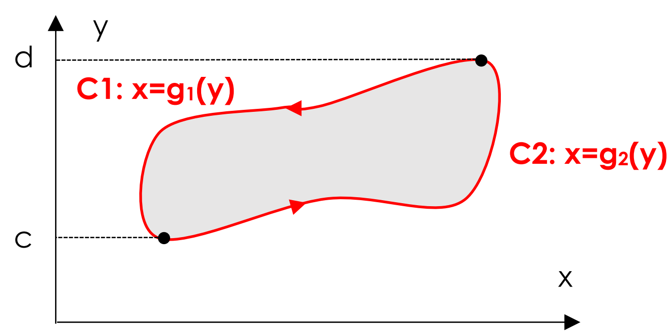
$$\oint_C M\,dx = -\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

De manera similar se puede demostrar que:

$$\oint_C N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) dA$$

Utilizando la curva de tipo II, así:

CURVA TIPO II



En consecuencia, el teorema de Green se puede utilizar de las siguientes tres formas:

$$\oint_C M\,dx = -\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

$$\oint_C N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) dA$$

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

CALCULO DE AREA DE UNA REGION

(CONSECUENCIA DEL TEOREMA DE GREEN)

Sabemos que el área A de una región R del plano se puede calcular por medio de la integral doble:

$$A(R) = \iint_R dA$$

Esta misma área se puede calcula mediante una integral de línea, lo cual se da en forma de teorema, así:

Sí C es una curva suave por partes simple y cerrada que limita a una región R del plano, entonces A® es igual a la integral de línea:

$$A(R) = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Demostración.

Tomando en cuenta la ecuación del área se puede expresar de la siguiente manera:

$$A(R) = \oint_C \underbrace{\frac{1}{2}x}_{N}\,dy - \underbrace{\frac{1}{2}y}_{M}\,dx$$

Aplicando el teorema de Green:

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_R \left(\frac{\partial(\frac{1}{2}x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{1}{2}y)}{\partial y}\right) dA$$

$$= \iint_R \left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) dA = \iint_R dA = A(R)$$

$$\boxed{\therefore\ A(R) = \iint_R dA = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx}$$