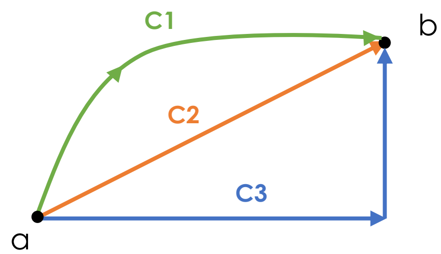
Se sabe que el valor de la integral de línea depende de la función integrando y la curva C. Sin embargo, hay excepciones, en las cuales la integral de línea posee el mismo valor para todo tipo de curva entre el punto "a" y "b", entonces se dice que es ese tipo de integrales son **independientes de la trayectoria.**



$$\int_{C1} = \int_{C2} = \int_{C3} \quad \text{Si es independiente de la trayectoria}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL PARA INTEGRAL DE LINEA.

Se sabe que el teorema fundamental del cálculo se puede mostrar de la forma:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a), \quad \text{Donde } F'(x) \text{ es continua en } [\mathrm{a,b}]$$

De forma análoga en integrales de línea tenemos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f\big(r(b)\big) - f\big(r(a)\big), \text{ Donde } \nabla f \text{ es continua sobre C}$$

La función C normalmente esta definida por una función vectorial $\vec{r}(t)$ en $a \leq t \leq b$.

Por lo que:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)$$

Demostración.

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\,dt$$

El integrando hace referencia a la regla de la cadena, por lo que:

$$\int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = \int_a^b Dt\big[f\big(\vec{r}(t)\big)\big]dt = f(r(b)) - f(r(a))$$

Expansión al espacio tridimensional.

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f\big(r(b)\big) - f\big(r(a)\big) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

Para ello, ∇f cumple una función importante ya que debe ser continuo, y esta relacionado a la solución de integrales de línea independientes de la trayectoria.

DEFINICIÓN: Las integrales de línea de **campos vectoriales conservativos**, son siempre, independientes de la trayectoria. Y con ese tipo de funciones, se cumple:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla f \cdot d\vec{r} = f\big(r(b)\big) - f\big(r(a)\big) = f(x_2, y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$$

CONDICIONES EQUIVALENTES.

Si $\vec{F}$ es un campo conservativo y se tiene una curva cerrada C. Entonces:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$