MATEMATICA AVANZADA / CALCULO AVANZADO

GUIA DE EJERCICIOS 3

SUCESIONES Y SERIES

1. Escriba los primeros cinco términos de la sucesión cuyo término general se indica a continuación:
   i. $a_n = \frac{n}{5n+1}$
   ii. $a_n = \frac{n!}{(n+1)!}$
   iii. $a_n = sen(\frac{n\pi}{4})$
   iv. $a_n = \sqrt{\frac{2}{5n+1}}$
   v. $a_n = 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$
2. Encontrar el término general de las siguientes sucesiones.
   i. $\{a_n\} =$ 0, ln4, -ln7, ln10, -ln 13, …
   ii. $\{b_n\} =$ 0, 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, …
   iii. $\{c_n\} =$ 2, 6, 18, 54, 162, 486, …

   Además, encontrar el décimo término de la sucesión $\{c_n\}$
3. Determine si las siguientes sucesiones son convergentes o divergentes, utilizando límites.
   i. $a_n = \frac{3n^2}{5n^2+1}$
   ii. $a_n = \frac{10n}{n(1-n)}$
   iii. $a_n = \frac{\ln(n)}{e^n}$
   iv. $a_n = \frac{2^n}{7n}$
   v. $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$

vi. $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$

vii. $a_n = (-1)^{n-1} \frac{3n^2}{3\mathrm{n}-2}$

viii. $a_n = \operatorname{atan}(2n)$

ix. $a_n = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}+2)!}$

x. $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$

4. En cada uno de los ejercicios siguientes, determine sus primeras cinco sumas parciales.
   i. 1+ 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + …
   ii. 3 – 9/2 + 27/4 – 81/8 + 243/16 - …

5. Para cada una de las series dadas, determine si la serie converge o diverge. Si es convergente, entonces encuentre su suma.
   i. 2 + 3/2 + 9/8 + 27/32 + 81/128 + … **R/ Conv.**
   ii. 3 – 9/2 + 27/4 – 81/8 + 243/16 - … **R/ Div.**

6. Aplique series geométricas para expresar el decimal periódico dado a continuación:
   i. 0.222222…
   ii. 0.0130130130…
   iii. 3.4151515…
   iv. 5.215215215…
   v. 1.254254254…
   vi. 2.105105105…
   vii. 17.3252525…

7. En los siguientes ejercicios utilice la prueba seleccionada para decidir si la serie converge o diverge.

- **Comparación directa:**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{7^n+1}$$

- **Comparación en el límite:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-2n+3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)2^{n-1}}$$

- **Pruebas de la serie alternada:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{3n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\frac{3}{2})^n}{n^2}$$

- **Criterio del cociente o la razón:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\frac{1}{3})^n$$

también realizar los ejercicios de la serie alternada utilizando el criterio del cociente o la razón para reafirmar este concepto, mostrado en la parte B del documento.

- **Prueba de la integral:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+n^2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$

8. Encontrar el intervalo y radio de convergencia de las siguientes series de potencia:

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x+3)^n}{\sqrt{n}}$$

9. Encuentre el intervalo de convergencia de cada una de las series de potencia:

$$i)\ \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{2})^n$$

$$ii)\ 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\cdots$$

$$iii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)(n+2)}$$

$$iv)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{nc^n}(x-c)^n$$

10. Usando una serie geométrica o junto con derivación, integración u otra operación halle una serie de potencia para la función f dada:

$$i)\ f(x)=\frac{x}{1+x}$$

$$ii)\ f(x)=\frac{1}{2-3x}$$

$$iii)\ \int_0^x \operatorname{atan}(t)\,dt$$

$$iv)\ \int_0^1 \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}\,dt \qquad si\text{: } \sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

$$v)\ \int_0^2 \frac{e^{-t^2}}{2t}\,dt$$

11. Encuentre los primeros tres términos de la serie de Maclaurin correspondientes a f(x)

$$i)\ f(x) = \tan(x)$$

$$ii)\ f(x) = \sec(x)$$

$$iii)\ f(x) = \operatorname{sen}(2x)$$

$$iv)\ f(x) = \frac{1}{1+x}\ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$v)\ f(x) = e^{x}\operatorname{sen}(x)$$

12. Encuentre los primeros cuatro términos la serie de Taylor para cada función.

$$i)\ f(x) = \tan(x), \qquad C = \pi/4$$

$$ii)\ f(x) = \ln(x), \qquad C = 1$$

$$iii)\ f(x) = e^{x}, \qquad C = 1$$

$$iv)\ f(x) = 2 - \mathrm{x} + 3x^2 - x^3, \qquad C = -1$$

13. En cada uno de los ejercicios siguientes encuentre la Serie de Fourier de la función f de periodo 2π

$$i)\ f(x) = \begin{cases} 0, & para\ -\pi < x < 0 \\ x, & para\ 0 \le x < \pi \end{cases}$$

$$ii)\ f(x) = \begin{cases} 3, & para\ -\pi < x < 0 \\ -3, & para\ 0 \le x < \pi \end{cases}$$

$$iii)\ f(x) = \begin{cases} \pi + x, & para\ -\pi < x < 0 \\ \pi - x, & para\ 0 \le x < \pi \end{cases}$$

$$iv)\ f(x) = |x|, \quad -\pi \le x \le \pi$$

14. En cada uno de los ejercicios siguientes, encuentre la Serie de Fourier de la función f en el intervalo dado:

$$i)\ f(x) = \begin{cases} 1, & para\ -1 < x < 0 \\ x, & para\ 0 \le x < 1 \end{cases}$$

$$ii)\ f(x) = \begin{cases} -2, & para\ -3 < x < 0 \\ 2, & para\ 0 \le x < 3 \end{cases}$$

$$iii)\ f(x) = x^2, \quad -1 \le x \le 1$$