**Teorema de Stokes.**

Sabemos que el teorema de Stokes es una extensión al espacio tridimensional de la primera forma vectorial del teorema de Green, es decir:

$$\oint_c \vec{F}\,dr = \oint_c \vec{F} \cdot T\,ds = \oint M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(Rot\,\vec{F} \cdot \hat{\kappa}\right) dA$$

En otras palabras, el teorema de Stokes se generaliza a partir de una curva suave por partes, simple y cerrada en el plano a una en espacio (deja de ser en 2D para ser en 3D).

Supongamos que $\boldsymbol{C}$ es la curva en el espacio la cual es la frontera de la superficie $\boldsymbol{S}$, entonces a $\boldsymbol{C}$ se proyecta en el plano $XY$ como $C_{xy}$.

Esta curva $C_{xy}$ define la orientación de la curva $C$, también debe indicarse que existe un <u>vector normal unitario $\hat{\eta}$ hacia afuera de la superficie $S$</u>. Además, un vector tangente unitario $T$ a la curva C. todo lo anterior se indica en la figura 1.

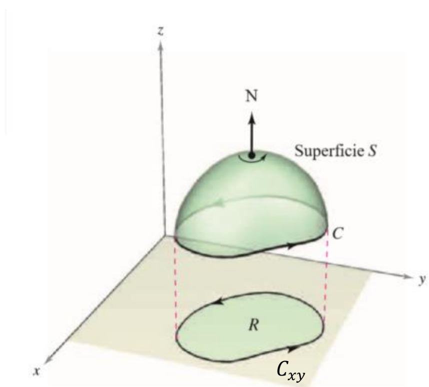


Figura 1.

Donde $S$ es una superficie orientada por el vector unitario $\hat{\eta}$ la cual es por partes, simple y cerrada.

Si $\vec{F}(x,y,z) = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath} + P\hat{\kappa}$ es un campo vectorial sin funciones continuas en una región del espacio que contiene a la superficie $S$ y la curva $C$, entonces

$$\oint_c \vec{F}\,dr = \oint_c \vec{F} \cdot T\,ds = \oint M\,dx + N\,dy + Pdz = \iint_S (Rot\,\vec{F}) \cdot \hat{\eta}\,ds$$

**Es importante recalcar que:**

$$\oint_c \vec{F}\, d\boldsymbol{r} = \iint_S (Rot\ \vec{F}) \cdot \hat{\eta}\ ds$$

El teorema de Stokes relaciona una integral de línea con una integral de superficie, esta integral de superficie la cual es la conclusión del teorema de Stokes se evalúa con una integral doble así:

$$\iint_S (Rot\ \vec{F}) \cdot \hat{\eta}\ ds = \iint_R Rot\ \vec{F} \cdot \left( \frac{-fx\hat{\imath} - fy\hat{\jmath} + \hat{\kappa}}{\sqrt{1 + fx^2 + fy^2}} \right) \sqrt{1 + fx^2 + fy^2}\ dA$$

Eliminando $\sqrt{1 + fx^2 + fy^2}$, se tiene que:

$$\oint_c \vec{F}\, d\boldsymbol{r} = \iint_R Rot\ \vec{F} \cdot (-fx\hat{\imath} - fy\hat{\jmath} + \hat{\kappa})\ dA$$

---

**Ejercicios propuestos:**

1. **Verifique el teorema de Stokes sabiendo que $\vec{F}(x,\ y,\ z) = xy\hat{\imath} + yz\hat{\jmath} + xz\hat{k}$ es el campo vectorial mientras la superficie $S$ es la parte del cilindro $z = 1 - x^2$ para $0 \le x \le 1$, $-2 \le y \le 2$**

   Respuesta: -2 (Por ambos métodos: integrales de línea y de superficie)

2. **Use el teorema de Stokes para evaluar: $\iint_S (Rot\ \vec{F}) \cdot \hat{\eta}\ ds$ donde el campo vectorial está definido por $\vec{F}(x,\ y,\ z) = z^2\hat{\imath} - 3xy\hat{\jmath} + x^3y^3\hat{k}$ donde $S$ es la parte de $z = 5 - x^2 - y^2$ sobre el plano z=1.**

   Respuesta: 0