Si $\{u_n\}$ es una sucesión, entonces $s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_n$ se llama serie, en otras palabras, una serie es la suma indicada de los términos de una sucesión.

Así como las sucesiones, las series pueden ser finitas o infinitas, trataremos particularmente las series infinitas. Una serie infinita es de la forma:

$$s_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_3 \cdots + u_n + \cdots$$

Si en la serie infinita anterior hacemos:

$$s_1 = u_1$$
$$s_2 = u_1 + u_2 = s_1 + u_2$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3 = s_2 + u_3$$
$$s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = s_3 + u_4$$

En general:

$$s_k = \sum_{i=1}^{\kappa} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots u_\kappa$$

La cual se llama la K-ésima suma parcial de una serie, luego que una serie es una sucesión de sumas parciales, entonces puede denotarse por: $\{S_n\}$.

EJEMPLO 1: Dada la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$ entonces encuentre los cuatro primeros términos de la sucesión de sumas parciales de la serie dada.

$$s_1 = u_1 = 2$$
$$s_2 = u_1 + u_2 = s_1 + u_2 = 2 + 4 = 6$$
$$s_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 6 + 8 = 14$$
$$s_4 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = s_3 + u_4 = 14 + 16 = 30$$

EJEMPLO 2: Dada la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots\frac{1}{n(n+1)}$ encuentre los tres primeros términos de sucesión de sumas parciales, además encuentre una fórmula para s_n (término general).

Encontrando los primeros tres términos:

$$s_1=u_1=\frac{1}{2}$$

$$s_2=u_1+u_2=s_1+u_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$s_3=u_1+u_2+s_3=s_2+u_3=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$$

$$s_4=u_1+u_2+u_3=s_3+u_3$$

Para encontrar s_n

$$u_k=\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\ \textbf{(Por fracciones parciales)}$$

***El alumno debe realizar la operación utilizando fracciones parciales para llegar a esa igualdad.**

Luego, desarrollando los términos se tiene: (sustituyendo en k = 1, 2, 3, 4, 5, …, n)

$$u_1=1-\frac{1}{2}$$

$$u_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$u_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$u_4=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$$

$$u_5=\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

.

.

.

$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Como $s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$ entonces tenemos:

$$s_n = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{5}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5}} - \cancel{\frac{1}{6}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Luego de eliminar los términos tachados se tiene:

$$s_n = 1 - \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

Realizando la suma de fracciones se obtiene que:

$$s_n = \frac{n}{n+1}$$ **(Fórmula de s_n)**

NOTA: la sucesión de sumas parciales es $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} + \ldots$

Ahora la suma S queda definida por: $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$