MATEMATICA AVANZADA / CALCULO AVANZADO

GUIA DE EJERCICIOS 2

INTEGRALES DE LINEA E INTEGRALES DE SUPERFICIE

1. Determine ecuaciones paramétricas que modelen las siguientes funciones:
   a) La curva de intersección entre x-y-z=0 y x-2y+3z-1=0.
   b) De los siguientes tres segmentos rectilíneos, graficando cada uno de ellos:
      i) De (0,0,0) hasta (0,2,0)
      ii) De (0,2,0) hasta (1,2,0)
      iii) De (1,2,0) hasta (1,2,1)
2. Evalué: $\int_c \; xy\,dx + \; x^2\,dy$, donde C es la curva $y = x^3 \; para -1 \leq x \leq 2$
3. Encuentre $\int_c \; xe^{yz}\,ds$, sí C es el segmento rectilíneo entre (0,0,0) y (1,2,3)
4. Calcule $\int_c \; ysen(z)\,ds$, sí C es la hélice circular con ecuaciones paramétricas dadas por: $x = \cos(t)\,, y = sen(t), z = t \; para \; 0 \leq t \leq 2\pi$
5. Determine $\int_c \; y^2\,dx + \; x\,dy$, donde:
   a) C=C1 es un segmento de recta que une de (-5,-3) hasta (0,2)
   b) C=C2 es el arco parabólico x=4-y^2 desde (-5,-3) hasta (0,2)

   ¿Depende el resultado de la integral de línea de la trayectoria tomada?, ¿Siempre será así?

6. Determinar: $\int_c \; x^2y\,dx + \; 2y\,dy + x\,dz$ para la curva C, formada por:

$$C1 = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = 0 \\ y \geq 0, \quad z \geq 0 \end{cases} \qquad C2 = \begin{cases} 2x + z = 1 \\ y = 0 \\ x \geq 0, \quad z \geq 0 \end{cases} \qquad C3 = \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \\ x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{cases}$$

7. Sea $\vec{F}(x,y) = y\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath}$, evaluar: $\int_c \; \vec{F}\,d\vec{r}$ bajo las siguientes curvas:
   a) $\vec{r}_1(t) = (4-t)\hat{\imath} + (4t - t^2)\hat{\jmath} \qquad 0 \leq t \leq 3$
   b) $\vec{r}_2(t) = t\hat{\imath} + (4t - t^2)\hat{\jmath} \qquad 1 \leq t \leq 4$

8. Si $\vec{F}(x,y) = x^3y\,\hat{\imath} + (x-y)\hat{\jmath}$ se encarga de mover una partícula desde (-2,4) hasta (1,1) a lo largo de $y = x^2$. ¿Cuál es el trabajo desarrollado para dicho movimiento?
9. Para el campo de fuerzas dado por: $\vec{F}(x,y,z) = e^x\cos(y)\,\hat{\imath} - e^x\,\mathrm{sen}(y)\,\hat{\jmath} + 2\hat{k}$. Mostrar que $\int_c \vec{F}\,.\,d\vec{r}$ es independiente de la trayectoria y calcule el trabajo realizada por $\vec{F}$ sobre un objeto que se mueve a lo largo de la curva C desde (0, π/2, 1) hasta (1, π, 3)
10. Utilice el Teorema de Green para calcular:
    a) $\int_c x^2y\,dx + xy^2\,dy$, donde C esta descrito por: $0 \le x \le 1,\;\; 0 \le y \le x$
    b) $\int_c x^2y\,dx - x^2\,dy$, donde C es la mitad izquierda de una circunferencia centrada en el origen de radio 5.
11. Utilizando integrales de línea encuentre el área de la región limitada por la curva dada por la función vectorial: $\vec{r}(t) = \cos^3(t)\,\hat{\imath} + sen^3(t)\hat{\jmath}$ en $0 \le t \le 2\pi$
12. Utilizando integrales de línea calcule el área de la región limitada por la intersección entre $y = 2x + 1 \;\wedge y = 4 - x^2$
13. El campo de velocidades de un fluido esta definido por: $\vec{F}(x,y) = (5x - y)\hat{\imath} + (x^2 - 3y)\,\hat{\jmath}$. Calcule la intensidad de fluencia del fluido cuando sale de una región limitada por una curva C cerrada, simple y suave cuya área es de 150 u^2
14. Utilice la primera forma vectorial del T.G. para obtener $\oint_c \vec{F}\,.\,d\vec{r}$ si $\vec{F}(x,y) = < xy^2, y + x >$ y C es la curva limitada en el primer cuadrante por $y = x^2 \wedge y = x$. Además, compruébelo mediante integrales de línea.
15. Evalué la integral de superficie $\iint_s G(x,y,z)\,dS$ bajo las siguientes condiciones:

a) $G(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y S: es la porción del cono: $x^2 + y^2 = z^2$ entre el plano "xy" y el plano z=2.

b) $G(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y donde S: es la lámina dada por: $z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y $0 \le z \le 4$.

16. Determinar $\iint_s (x + 2y - z)\,dS$, donde S es la porción del plano x+y+z=2 en el primer octante.

a) Utilizando la proyección de S sobre el plano xy.

b) Utilizando la proyección de S sobre el plano xz.

17. Evalué la integral de superficie $\iint_S x^2z^2\,dS$ en donde S es la porción del cono $x^2+y^2=z^2$ entre los planos z=1 y z=2.

18. Calcule el flujo si el campo vectorial *F* y la superficie *S* están dados por:

a) $\vec{F}(x,y,z)=x\,\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+z\,\hat{k}$ $\qquad S: z=9-x^2-y^2,\ z\geq 0$

b) $\vec{F}(x,y,z)=x\,\hat{\imath}+y\,\hat{\jmath}+z\,\hat{k}$ $\qquad S: x^2+y^2+z^2=36,\ en\ el\ primer\ octante$

19. Calcule: $\iint_S \vec{F}.\vec{n}\,dS$ dado por: $\vec{F}(x,y,z)=4xy\,\hat{\imath}+z^2\,\hat{\jmath}+yz\,\hat{k}$ y donde S es un cubo unitario acotado por: x=0, x=1, y=0, y=1, z=0 y z=1.

20. La Ley de Gauss establece que la carga Q encerrada en la superficie S viene dada por:

$$Q=\epsilon_0\iint_S \vec{E}\cdot\hat{n}\,dS$$

Donde $\vec{E}$ es el campo eléctrico, ϵ_0 es una constante de permeabilidad del espacio libre y $\hat{n}$ es un vector saliendo de la superficie. Determine utilizando integrales de superficie la carga contenida en un cubo con vértices $(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$ y el campo eléctrico viene dado por: $\vec{E}(x,y,z)=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}$.

21. Encontrar el área de:

a) La porción del paraboloide: $z=x^2+y^2$ comprendido entre los planos z=0 y z=1.

b) La porción del plano $2x+3y+4z=12$ en el primer octante.

22. Verifique el Teorema de Stokes si $\vec{F}$ y S está definido por:

$$\vec{F}(x,y,z)=\langle z,x,y\rangle$$

Donde S es la porción del plano $2x+y+2z=6$ en el primer octante.

23. Verifique el Teorema de la divergencia de Gauss si $\vec{F}(x,y,z)=xy\hat{\imath}+z\hat{\jmath}+(x+y)\hat{k}$ y donde S es la superficie limitada por: $y=4, z=4-x$ y los planos coordenados.

Respuestas a algunos ejercicios:

2) 132/5

3) $\sqrt{14}/12\ (e^6-1)$

4) $\sqrt{2}\ \pi$

8) 3 u.W.

9) 4-e u.W.

10.a) -1/6

13) 300 u^2 / tiempo

14) 1/12

15.a) $32\pi/3$ ***15.b) $16\sqrt{5}\ \pi/3$***

16.a) y 16.b) debe dar el mismo resultado

17)$21\sqrt{2}\pi/2$

18.a)$243\pi/2\ u^3$ ***18.b)$108\pi\ u^3$***

19) 5/2

20) $24\epsilon_0$

21.a) $\pi/6\ (5\sqrt{5}-1)\ u^2$ ***21.b)$3\sqrt{29}\ u^2$***

22) 45/2

23) 64