1. PRIMERA FORMA VECTORIAL.

Consideremos el campo vectorial en el plano: $\vec{F} = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath}$, con su correspondiente integral de línea.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \oint_C M\, dx + N\, dy$$

Tenemos que:

$$Rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & 0 \end{vmatrix} = \left(0 - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\imath}} - \left(0 - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$Rot\vec{F} = -\frac{\partial N}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial M}{\partial z}\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Ahora, al realizar el producto punto: $Rot\vec{F} \cdot \hat{k}$, tenemos:

$$Rot\vec{F} \cdot \hat{k} = \left[-\frac{\partial N}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\partial M}{\partial z}\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\hat{k}\right] \cdot \left[0\hat{\boldsymbol{\imath}} + 0\hat{\jmath} + \hat{k}\right] = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

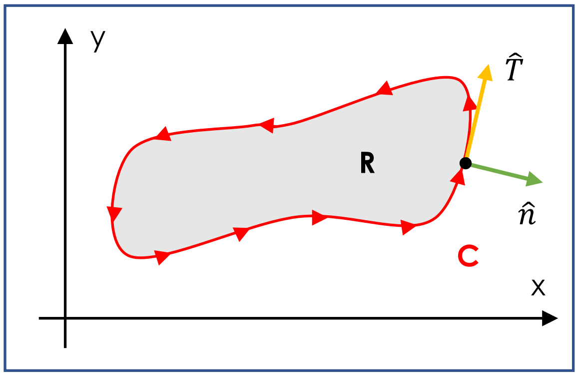
Cuyo resultado es el integrando del Teorema de Green, de manera que se establece la primera forma vectorial del teorema de Green:

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{T}\, ds = \oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA = \iint_R Rot\vec{F} \cdot \hat{k}\, dA}$$

La extensión de esta forma vectorial a superficies en el espacio da lugar al Teorema de Stokes.

2. SEGUNDA FORMA VECTORIAL.

Esta segunda forma involucra un vector normal unitario, así:



Consideremos el campo vectorial $\vec{F} = M\hat{\imath} + N\hat{\jmath}$ además la curva C se puede representar por $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath}$ en el intervalo: $a \leq t \leq b$.

Definimos el vector tangente como:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{\imath} + y'(t)\hat{\jmath}$$

Ahora, el vector unitario tangente debe ser:

$$\hat{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} = \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{\imath} + \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{\jmath}$$

Por lo tanto, el vector normal unitario se obtiene al intercambiar las componentes "x" y "y" y mediante un cambio de signo por lo que queda definido de la siguiente manera:

$$\hat{n} = \frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{\imath} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{\jmath}$$

Para verificar que el vector normal unitario esta definido correctamente se deja a discreción del estudiante realizar: $\hat{T} \cdot \hat{n}$ y recordar que si este resultado da cero es por que el vector tangente y normal son perpendiculares, lo cual es correcto ya que deben cumplir esa condición.

Luego, tenemos que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \int_a^b [M\hat{\imath} + N\hat{\jmath}] \cdot \left[\frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{\imath} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{\jmath}\right] \|\vec{r}'(t)\|\, dt$$

Simplificando tenemos:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \int_a^b [M\hat{\imath} + N\hat{\jmath}] \cdot \left[\frac{y'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{\imath} - \frac{x'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}\hat{\jmath}\right] \|\vec{r}'(t)\|\, dt = \int_a^b M\frac{dy}{dt} - N\frac{dx}{dt}\, dt$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \oint_c M dy - N dx$$

Aplicando el teorema de Green tenemos que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\, ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) dA$$

Si analizamos detenidamente el integrando, podemos ver que estamos en presencia de la $Div\vec{F}$, por lo tanto:

$$\boxed{\oint_C \vec{F}\cdot\hat{n}\,ds = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)dA = \iint_R Div\vec{F}\,dA}$$

*La extensión de esta forma vectorial en tres dimensiones se llama Teorema de la divergencia de Gauss (indica el flujo de **F** a través de **C**)*