UNIDAD 1: CONCEPTOS BASICOS DE MATEMATICA AVANZADA

1.1 Ecuaciones parametricas.

Es un sistema de ecuaciones que permiten representar una curva en el plano o en el espacio mediante un parametro (Usualmente el parametro "t")
↳ "λ", "m", "θ"

Ecuaciones:

a) Rectangular: $y = x^2 + 1$

$y = f(x)$

b) Parametricas: $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$ $\quad x = g(t)$, $y = h(t)$

NOTA: Una ecuación parametrica usual es la de una circunferencia centrada en el origen y de radio "a"

a) Rectangular: $x^2 + y^2 = a^2$

b) Parametricas: $\begin{cases} x = a\cos\overset{\theta}{t} \\ y = a\,\text{sen}\,\underset{\theta}{t} \end{cases}$ fácil

$\begin{cases} x = t \\ y = \pm\sqrt{a^2 - t^2} \end{cases}$ dificil.

- Transformaciones.

1. De ecuaciones rectangulares a parametricas.

1.1 Cuando "y" esta despejada.

$$y = \ln\sqrt{x} + e^x \longrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = \ln\sqrt{t} + e^t \end{cases}$$

1.2 Cuando "x" esta despejada.

$$x = \text{sen}^2(y+1) - y^3 \longrightarrow \begin{cases} x = \text{sen}^2(t+1) - t^3 \\ y = t \end{cases}$$

2. De ecuaciones parametricas a rectangulares.

2.1. Utilizando propiedades: (logaritmo, exponenciales, identidades trigonometricas, etc..)

$$\underbrace{\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\,\text{sen}\,t \end{cases}}$$

$$\text{Sen}^2 x + \text{Cos}^2 x = 1$$

$$y^2 + x^2 = 1$$

$y = 4\,\text{sen}\,t$

Circunferencia. radio = 4.

$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{16} = 1$$

$\frac{x}{4} = \cos t \qquad \frac{y}{4} = \text{Sen}\,t \qquad\qquad \frac{1}{16}(y^2+x^2) = 1$

$\frac{x^2}{16} = \cos^2 t \qquad \frac{y^2}{16} = \text{Sen}^2 t \qquad\qquad y^2+x^2 = 16 \rightsquigarrow x^2+y^2 = 16 \leftarrow$ Circunf. $r=4$ $C(0,0)$

2.2. Simultanear ecuaciones (obj. Eliminar el parametro)

$x = \frac{1}{\sqrt{t+1}}$, $y = \frac{t}{1+t}$; $t > -1$

Restricción. Que afecta a la gráfica...

Despejar "t"

$x^2 = \frac{1}{t+1}$

$t+1 = \frac{1}{x^2}$

$t = \frac{1}{x^2} - 1$

Sustituir "t". (SIMPLIFICAR)

$$y = \frac{\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)}{\cancel{1} + \left(\frac{1}{x^2} \cancel{-1}\right)} = \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1-x^2}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{(1-x^2)\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}$$

$$y = 1 - x^2$$

NOTA: La curva de intersección entre dos superficies en el espacio, tambien se pueden parametrizar.-

Parametrizar la intersección de: $\underbrace{y = x^2}_{\text{sup. c.}} \wedge \underbrace{z = x}_{\text{plano}}$.

CVV - M3 $\quad x = x$ ó $y = y$ ó $z^2 = z^2$ ó $x^2+y^2 = x^2+y^2$

(1) $y = x^2$; (2) $z = x$ $\leftarrow$ Ec. en 3D.

$z^2 = x^2$

$x^2 = x^2$

$y = z^2 \leftarrow$ Ec. en 2D.

$y = x^2$

$t^2 = x^2$

$\pm t = \pm x$

$t = x$

despejada "y" $\rightarrow z = t$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t \end{cases}$$

$\leftarrow$ voy a ocupar

▫ Grafica de ecuaciones parametricas.

EJEMPLO: Bosqueje la curva: $x = 2t$, $y = 2$ … $t \neq 0$. Ademas encuentre la ecuación

- Gráfica de ecuaciones paramétricas.

EJEMPLO: Bosqueje la curva: $x = 2t$, $y = \frac{2}{t}$; $t \neq 0$. Además, encuentre la ecuación en rectangulares.

Restricción

$t \neq 0$ (no evaluar en 0)

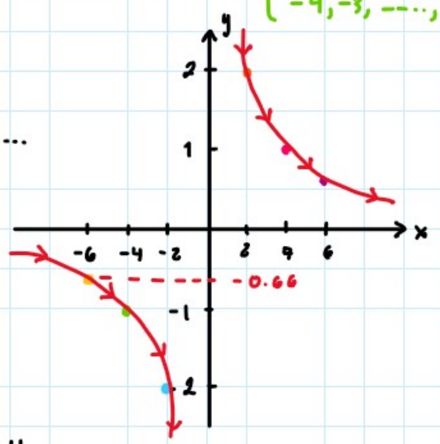
$t > 1$ (evaluar mayores a 1)

No hay restricción...

$\begin{cases} -\infty \; \dots \; +\infty \\ -4, -3, \dots, 3, 4 \end{cases}$

t	$x = 2t$	$y = 2/t$	
-3	$2(-3) = -6$	$2/-3 = -2/3$	$(-6, -2/3)$
-2	$2(-2) = -4$	$2/-2 = -1$	$(-4, -1)$
-1	$2(-1) = -2$	$2/-1 = -2$	$(-2, -2)$
0	—	—	Asíntota...
1	$2(1) = 2$	$2/1 = 2$	$(2, 2)$
2	$2(2) = 4$	$2/2 = 1$	$(4, 1)$
3	$2(3) = 6$	$2/3 = 2/3$	$(6, 2/3)$

ascendente.



En Rectangulares $(\dots) \rightarrow$ $y = \frac{4}{x}$ ó $xy = 4$.

ASIGNACIONES:

1. Grafique la curva: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$; $\underbrace{0 \leq t \leq 2\pi}_{\text{Restricción...}}$

Luego, analizar: 1. ¿Qué pasa si: $0 \leq t \leq \pi/2$?

2. ¿En qué afecta que la curva sea: $x = 2\cos t + 1$, $y = 2\sin t - 1$?

3. ¿Qué sucede si cambia: $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$?

2. Bosqueje e identifique en rectangulares: $\begin{cases} x = at \\ y = -a^2t^2 + a \end{cases}$

Donde "a" es una constante positiva.

R// $y = -x^2 + a$

1.2 Aplicación en cálculo diferencial.

Ec. rectangulares. Ec. paramétricas. $y \rightarrow x$ $\quad x \rightarrow t$, $y \rightarrow t$

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$

Regla de la cadena...

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx}}$$ ← Formula de la primera derivada

← y'

segunda derivada.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (\dots)$$

$$\boxed{\frac{\frac{d(y')}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{d^2y}{dx^2}}$$ ← Formula de la segunda derivada.

← y''

EJEMPLO: Dadas las ecuaciones parametricas: $x = t^2 - 6$, $y = 4t^2 - t$. Sin eliminar el parametro "t", calcule:

i) $\frac{dy}{dx}$ ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$

i) $$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{8t-1}{2t} = \cancel{\frac{8t}{2t}}^{4} - \frac{1}{2t} = 4 - \frac{1}{2t} \text{ ó } 4 - \frac{1}{2}t^{-1}$$

$\frac{dx}{dt} = 2t$ $\frac{dy}{dt} = 8t - 1$

$(x = t^2 - 6)$ $(y = 4t^2 - t)$

$$\boxed{y' = 4 - \frac{1}{2}t^{-1}}$$

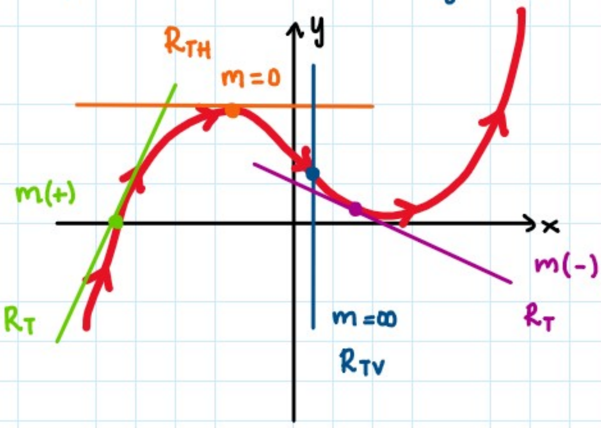
↓

$$\frac{dy'}{dt} = 0 \cancel{-} \frac{1}{2}(\cancel{-}1)t^{-2} = \frac{1}{2}t^{-2} \text{ ó } \frac{1}{2t^2}$$

ii) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(y')}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2t^2}}{\frac{2t}{1}} = \frac{1}{2t(2t^2)} = \frac{1}{4t^3}$$

$$\boxed{y'' = \frac{1}{4t^3}}$$

aplicaciones. (Rectas tangentes)

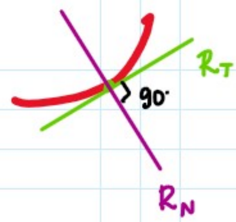


$$R_T \rightarrow m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Bigg|_{t=?}$$

$$R_{TH} \rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$$

$$R_{TV} \rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$$

(Rectas normales.)

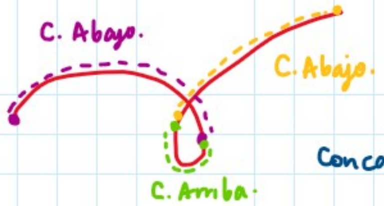


$R_N \rightarrow m_{RN} = \frac{-1}{m_{RT}}$

$m = 8 \rightarrow m_{RT} = 8$ ✓

$m_{RN} = \frac{-1}{8}$ ✓

(Concavidad)



Concavidad $\leftarrow \frac{d^2y}{dx^2}$

EJEMPLO 1: Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva: $x = t^3 + 1$, $y = t^2$ cuando $t=1$.

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 \qquad \frac{dy}{dt} = 2t$$

$$m = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \Bigg|_{t=1} = \frac{2\cancel{t}}{3t^{\cancel{2}}} = \frac{2}{3t}\Bigg|_{t=1} = \frac{2}{3} ✓$$

¿(x_0, y_0)?

$x_0 = t^3 + 1$ $\qquad y_0 = t^2$; $t = 1$

$x_0 = 1^3 + 1 = 2$ $\qquad y_0 = 1^2 = 1$

$P(2,1)$

$R_T \rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$

$y = \frac{2}{3}(x-2) + 1$

NOTA: $\begin{cases} x = t \\ y = \frac{2}{3}(t-2) + 1. \text{ ó } \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \end{cases}$

EJEMPLO 2: Dada: $x = t^2$, $y = t^3 - 3t$:

a) Encuentre la recta tangente en el punto $\underset{(x,y)}{(3,0)} \rightarrow t = ?$

b) ¿Dónde la recta tangente es vertical u horizontal?

c) Intervalos de concavidad.

• d) Grafique la curva y las rectas de a) y b).

ASIGNACIÓN.

$$\frac{dx}{dt} = 2t \qquad \frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$$

(3,0)

$x = t^2$	$y = t^3 - 3t$
$3 = t^2$	$0 = t^3 - 3t$
2 Soluciones	3 Soluciones
$\pm\sqrt{3} = t$	$0 = t(t^2 - 3)$
$t_1 = \sqrt{3}$	$\underbrace{t = 0}$ $\quad t^2 - 3 = 0$
$t_2 = -\sqrt{3}$	$t^2 = 3$
	$\underbrace{t = \pm\sqrt{3}}$

a) $m = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 3}{2t}\Bigg|_{t=?}$

$\overline{dt}$

$t_2 = -\sqrt{3}$

$t^2 = 3$

$\underbrace{t = \pm\sqrt{3}}$

$t_1 = 0$ ✕ =’(

$t_2 = \sqrt{3}$

$t_3 = -\sqrt{3}$

$$m_{RT1} = \left.\frac{3t^2 - 3}{2t}\right|_{t=\sqrt{3}} \qquad m_{RT2} = \left.\frac{3t^2 - 3}{2t}\right|_{t=-\sqrt{3}}$$

$$m_{RT1} = \sqrt{3} \qquad m_{RT2} = -\sqrt{3}$$

$R_T \rightarrow y - \cancelto{0}{y_0} = m(x - \cancelto{3}{x_0})$ $P(3,0) \rightarrow x_0 = 3 \quad y_0 = 0$

$R_{T_1} \Rightarrow y = \sqrt{3}\,(x-3)$ $R_{T2} \Rightarrow y = -\sqrt{3}\,(x-3)$

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = \sqrt{3}\,(t_1 - 3) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t_2 \\ y = -\sqrt{3}\,(t_2 - 3) \end{cases}$$

b) $R_{TH} \rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$

$3t^2 - 3 = 0$

$\cancel{3}t^2 = \cancel{3}$

$t^2 = 1$

$t = \pm 1$

Evaluar en las ec. originales.

$x = t^2 \quad , \quad y = t^3 - 3t$

- $t = 1$

$x = 1^2 = 1$

$y = 1^3 - 3(1) = \underbrace{-2}$

$(1, -2)$

Graficar $y = -2$

- $t = -1$

$x = (-1)^2 = 1$

$y = (-1)^3 - 3(-1) = \underbrace{2}$

$(1, 2)$

Graficar $y = 2$.

$R_{TV} \rightarrow \frac{dx}{dt} = 0$

$2t = 0$

$t = 0$

- $t = 0$

Sugerencia. R_{TV}

$x = 0^2 = 0$

$y = 0^3 - 3(0) = 0$

$(0,0)$

Graficar $x = 0$

c) $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(y')}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3(t^2+1)}{2t^2}}{\frac{2t}{1}}$$

$$y' = \frac{3t^2 - 3}{2t}$$

$$\frac{d}{dt}(y') = \frac{6t(2t) - (3t^2 - 3)2}{4t^2}$$

$$= \frac{12t^2 - 6t^2 + 6}{4t^2}$$

$$= \frac{6t^2 + 6}{4t^2} = \frac{\cancelto{3}{6}(t^2+1)}{\cancelto{2}{4}t^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3(t^2+1)}{4t^3}}$$

Evaluar en 2da. der. $\oplus \rightarrow$ C. Arriba.

$\ominus \rightarrow$ C. Abajo.

$3(t^2+1)$

⊖ → C. Abajo.

$$= \frac{3(t^2+1)}{2t^2}$$

¿Cómo saber que valor de "t"?

$t=0 \leftarrow R_{TV}$

2^{da} derivada. $\dfrac{3(t^2+1)=0}{4t^3=0}$

Paso 1. 2^{da} derivada $=0$.

$3(t^2+1)=0$ | $4t^3=0$
$t^2+1=0$ | $t^3=0$
$t^2=-1$ | $t=\sqrt[3]{0}$
$t=\pm\sqrt{-1}$ ✗ | $t=0$ ✓

Paso 2. Encontrar valores de t.

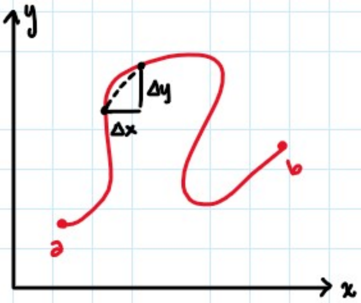
Paso 3.
Comprobar que los valores del Paso 2 concuerda con R_{TV}.

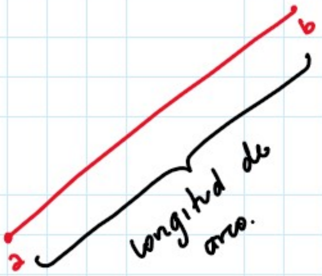
$-\infty \longleftrightarrow t=0 \longleftrightarrow +\infty$

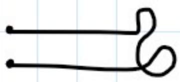
Valor de prueba	-1	$+1$
Evaluar en $\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{3((-1)^2+1)}{4(-1)^3}$	$\frac{3(1^2+1)}{4(1)^3}$
	$-3/2$	$+3/2$
	C. Abajo.	C. Arriba.

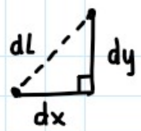
- C. Abajo: $]-\infty, 0[$
- C. Arriba: $]0, +\infty[$

1.2. Longitud de arco.









$$dL = \sqrt{\frac{dx^2}{dt^2}+\frac{dy^2}{dt^2}}\cdot dt$$

En rectangulares: $L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot dx$

En paramétricas: $L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt$ (en el plano)

$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\cdot dt$ (en el espacio.)

EJEMPLO: Plantee la integral que representa la longitud de la curva:

$x = t+e^{-t}$, $y = t-e^{-t}$; $\underset{a}{0} \leq t \leq \underset{b}{2}$.

$$\frac{dx}{dt} = 1-e^{-t} \longrightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = (1-e^{-t})^2 = 1-\cancel{2e^{-t}}+e^{-2t}$$

$+$ $\quad$ $+$

$$\frac{dy}{dt} = 1+e^{-t} \longrightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1+e^{-t})^2 = 1+\cancel{2e^{-t}}+e^{-2t}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 + e^{-t} \longrightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (1+e^{-t})^2 = 1 + \cancel{2e^{-t}} + e^{-2t}$$

$$2 + 2e^{-2t} = 2 + 2e^{-2t} = 2(1+e^{-2t})$$

$$L = \int_0^2 \sqrt{2(1+e^{-2t})}\, dt = \sqrt{2}\int_0^2 \sqrt{1+e^{-2t}}\, dt.$$

EJEMPLO 2: Calcular la longitud de la curva dada por: $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = \sqrt{1-a^2}\, t$; $0 \le t \le \pi$.

$$\frac{dx}{dt} = -a\sin t \longrightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = a^2\sin^2 t$$

$$\frac{dy}{dt} = a\cos t \longrightarrow \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = a^2\cos^2 t$$

$$\frac{dz}{dt} = \sqrt{1-a^2} \longrightarrow \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 1-a^2$$

$$\underbrace{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}\, + 1 - a^2$$

$$a^2(\cancel{\sin^2 t + \cos^2 t})^{1} + 1 - a^2$$

$$\cancel{a^2} + 1 - \cancel{a^2} = 1.$$

$$L = \int_0^\pi \cancel{\sqrt{1}}^{\,1}\, dt = \int_0^\pi dt = t\Big|_0^\pi = \pi - 0 = \pi$$

$$L = \pi \text{ u.l.}$$

EJERCICIO: Encuentre la longitud de la curva teniendo:

$x = \arcsin(t)$, $y = \ln(\sqrt{1-t^2})$; $0 \le t \le 1/2$

*Consejo: $\ln(\sqrt{1-t^2})$ difícil. aplicar ppd. de log. $\ln(1-t^2)^{1/2}$

$\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$ fácil.

R// $\ln|\sqrt{3}|$ u.l.