CALCULO AVANZADO / MATEMATICA AVANZADA

CONCEPTOS BASICOS – PERIODICIDAD Y PARIDAD DE FUNCIONES

Antes de tratar las series de Fourier es conveniente que veamos las funciones periódicas, pares e impares.

FUNCIÓN PERIÓDICA.

Se dice que la función f(x) es periódica si existe un numero positivo T llamado: periodo, tal que se cumpla la siguiente condición:

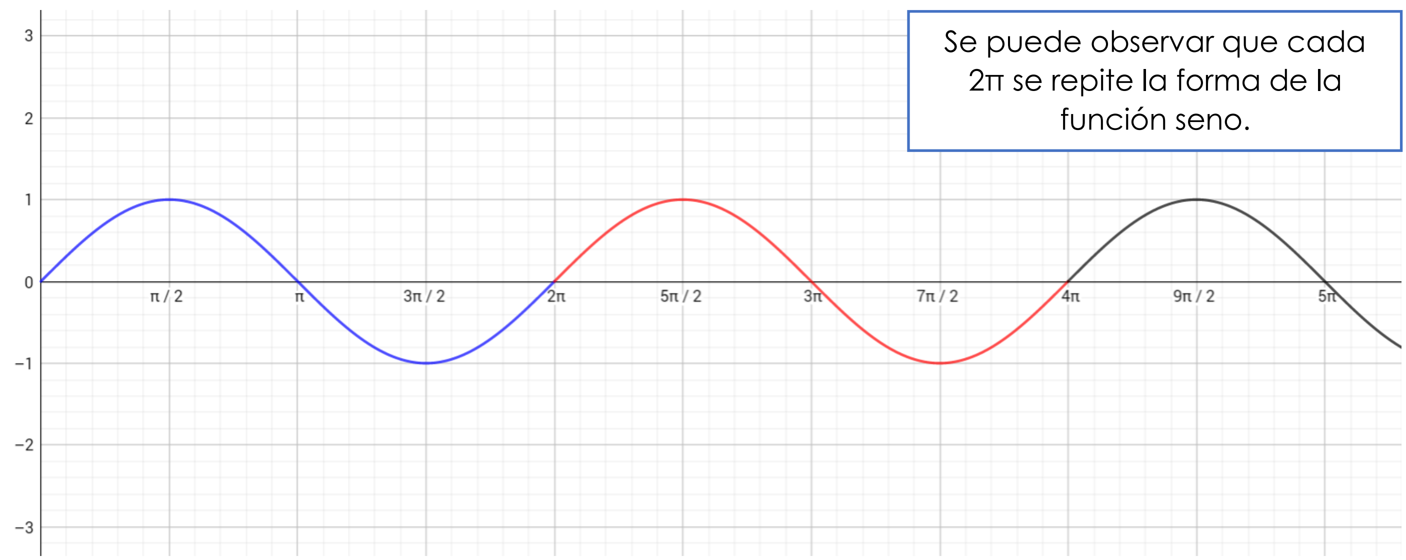
$$f(x+T) = f(x)$$

Ejemplo 1: Las funciones seno y coseno son funciones periódicas de periodo 2π; es decir:

$$sen(x+2\pi) = sen(x)$$

$$cos(x+2\pi) = cos(x)$$

Gráficamente se puede mostrar $f(x) = sen(x)$



Se puede observar que cada 2π se repite la forma de la función seno.

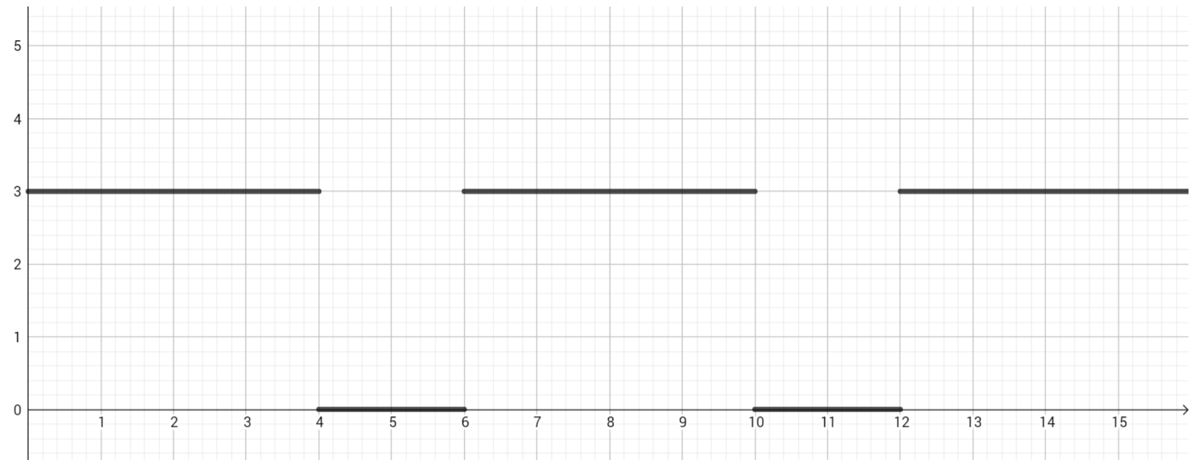
Ejemplo 2: Las siguientes funciones representadas gráficamente son funciones periódicas:

i) Descripción Analítica:

$$f(x) = \begin{cases} 3, 0 < x < 4 \\ 0, 4 < x < 6 \\ \\ \qquad \ldots \end{cases}$$

(los tres puntos indican que ese patrón se seguirá repitiendo infinitamente)

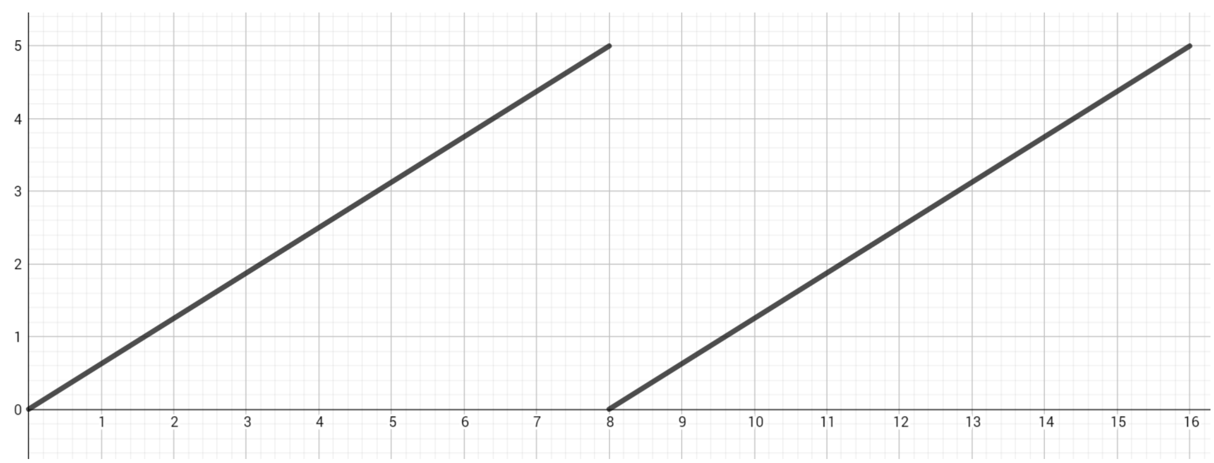
Gráficamente… $f(x+6)=f(x)$ ∴ el periodo es de 6 unidades.



ii) Descripción Analítica:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{8}x, 0<x<8 \\ \dots\end{cases}$$

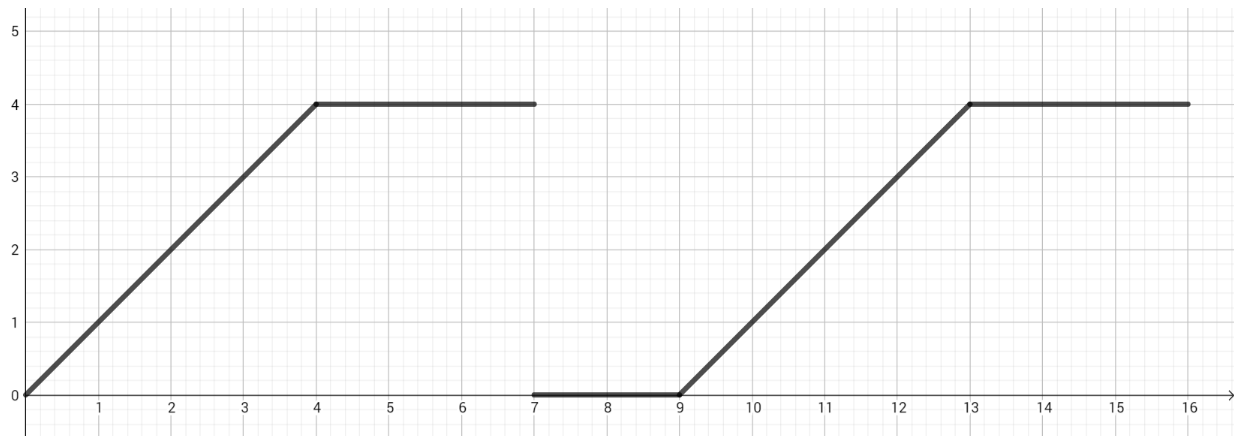
Gráficamente… $f(x+8)=f(x)$ ∴ el periodo es de 8 unidades.



iii) Descripción Analítica:

$$f(x)=\begin{cases}x, 0<x<4 \\ 4, 4\leq x<7 \\ 0, 7\leq x<9 \\ \dots\end{cases}$$

Gráficamente… $f(x+9) = f(x)$ $\therefore$ el periodo es de 9 unidades.



FUNCIONES PARES E IMPARES.

DEFINICIÓN 1: FUNCIÓN PAR.

Se dice que la función y=g(x) es par si y solo si se cumple la siguiente condición:

g(-x) = g(x)

Por ejemplo:

$$y = x^2 \rightarrow \boldsymbol{g(x) = x^2}$$

Al evaluar: $g(-x) = (-x)^2 = x^2$

Como volvemos al mismo valor original, es decir, comprobamos que g(-x) = g(x)

Y concluimos que $\boldsymbol{g(x) = x^2}$ es una función par.

DEFINICIÓN 2: FUNCIÓN IMPAR.

Se dice que la función y=h(x) es impar si y solo si se cumple la siguiente condición:

h(-x) = -h(x)

Por ejemplo:

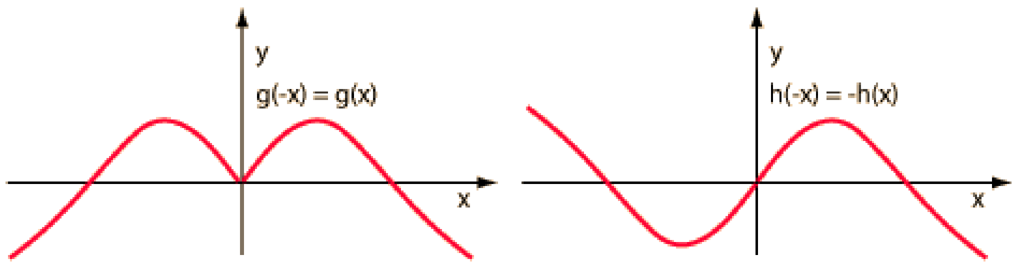
$$y = x^3 \rightarrow \boldsymbol{h(x) = x^3}$$

Al evaluar: $h(-x) = (-x)^3 = -x^3$

Como obtenemos el mismo valor original pero tiene el signo cambiado, comprobamos que h(-x) = -h(x)

Y concluimos que $\boldsymbol{h(x) = x^3}$ es una función impar.

Gráficamente, una función par se comporta de manera tal que el eje "y" actúa como espejo, es decir, es simetría respecto al eje "y". Mientras que una función impar es aquella que tiene dos espejos, uno en el eje "x" negativo" y otro en el eje "y", es decir, es simétrica respecto al origen.



Forma de la gráfica de una función par e impar, respectivamente.

IMPORTANTE: Grafique la función seno y coseno para comprobar que

$$cos(-x) = cos(x), lo\ que\ significa\ que\ y = cos(x)\ es\ par$$

$$sen(-x) = -sen(x), lo\ que\ significa\ que\ y = sen(x)\ es\ impar$$

EJERCICIOS PROPUESTOS: Determine si cada una de las siguientes funciones es par, impar o ninguna de ellas.

i) $k(x) = 1 - x^4$
ii) $l(x) = x^5 + x$
iii) $m(x) = 2x - x^2$

OBSERVACIONES SOBRE LAS FUNCIONES PERIODICAS.

a) $\boldsymbol{f(x + nT) = f(x)}$**, si n es un entero diferente de cero, esto indica que el múltiplo nT de T es también periódico, es decir:**

$$sen(x + 2\pi) = sen(x)$$
$$sen(x + 4\pi) = sen(x)$$
$$sen(x + 6\pi) = sen(x)$$

b) Si $\boldsymbol{f(x) \wedge g(x)}$ **son periódicas del mismo periodo T entonces su suma es también periódica y de periodo T.**

$$h(x) = af(x) + bg(x)$$

c) Si $\boldsymbol{f(x) = e}$**, donde e es una constante: es también de periodo T.**

$$sen(x) + cos(x) + 5$$

OBSERVACIONES SOBRE LAS FUNCIONES PARES E IMPARES.

a) **El producto de dos funciones pares es par.**
b) **El producto de dos funciones impares es par.**
c) **El producto de una función impar y una función par es impar.**
d) **Si $f(x)$ es una función par, entonces:**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

e) **Si $f(x)$ es una función impar, entonces:**

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$