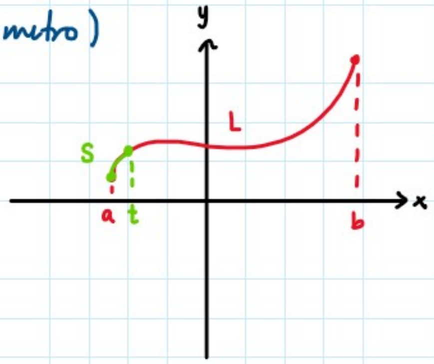
Diferencial de arco (longitud de arco como parametro)



"s" puede usarse en lugar de "t" como parametro en ecuaciones parametricas y la expresión queda como:

$$s = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt^*}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt^*}\right)^2} \cdot dt^*$$

al aplicar el teorema fundamental del cálculo.

$$ds = \cancel{d\int_a^t} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt^*}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt^*}\right)^2} \cdot dt^* \longrightarrow \boxed{ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt}$$

Utilizar en U2.

EJEMPLO: Usando el parametro "s", exprese las ecuaciones parametricas de la recta: $x = 2t+1$, $y = 3t-2$. Sabiendo que s tiene como punto de referencia $t=0$.

$$s = \int_{\boxed{a}}^{\boxed{t}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt^*}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt^*}\right)^2} \cdot dt^*$$

$t \rightarrow$ siempre.

$a \rightarrow$ referencia.

$$\frac{dx}{dt} = 2 \quad \downarrow \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4$$

$$\frac{dy}{dt} = 3 \quad \downarrow \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 9$$

$$4+9=13$$

$$s = \int_0^t \sqrt{13}\, dt^* = \sqrt{13} \cdot t^* \Big|_0^t = \sqrt{13}\, t$$

$$s = \sqrt{13}\, t \longrightarrow \frac{s}{\sqrt{13}} = t$$

$$x = 2t+1 \longrightarrow \quad x = \frac{2s}{\sqrt{13}} + 1$$

$$y = 3t-2 \longrightarrow \quad y = \frac{3s}{\sqrt{13}} - 2$$

1.3 Funciones vectoriales.

Una función vectorial tiene la forma: $\vec{r}(t) = \underline{f(t)}\,\hat{\imath} + \underline{g(t)}\,\hat{\jmath}$ (plano) ó

$\vec{r}(t) = \underline{f(t)}\,\hat{\imath} + \underline{g(t)}\,\hat{\jmath} + \underline{h(t)}\,\hat{k}$ (espacio)

funciones componente.

Funciones escalares VS Funciones vectoriales.

$$y = x^2 \qquad \qquad \vec{r}(t) = t^2\,\hat{\imath} + \sqrt{t}\,\hat{\jmath}$$

Evaluar: $x=2 \rightarrow y = 2^2 = 4$

Evaluar: $t=2 \rightarrow \vec{r}(2) = 2^2\,\hat{\imath} + \sqrt{2}\,\hat{\jmath} = 4\hat{\imath} + \sqrt{2}\,\hat{\jmath}$

Evaluar: $x = 2 \rightarrow y = 2^2 = 4$

Dom: $\mathbb{R}$ escalar — Rango: $\mathbb{R}$ escalar

Evaluar: $t = 2 \rightarrow \vec{r}(2) = 2^2\,\hat{\imath} + \sqrt{2}\,\hat{\jmath} = \underbrace{4\hat{\imath} + \sqrt{2}\,\hat{\jmath}}_{\text{Rango: VECTOR.}}$

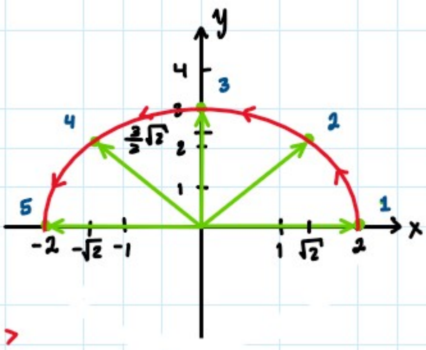
Dom: $\mathbb{R}$ escalar

Graficas de funciones vectoriales.

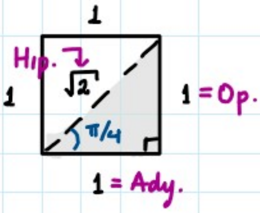
EJEMPLO: Bosqueje la curva plana representada por la función vectorial:

$\vec{r}(t) = \underbrace{2\cos t}_{x}\,\hat{\imath} + \underbrace{3\sin t}_{y}\,\hat{\jmath}$ en $0 \le t \le \pi$

t	$x = 2\cos t$	$y = 3\sin t$	
0	2	0	1 $\langle 2, 0\rangle$
$\pi/4$	$\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	2 $\langle \sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\rangle$
$\pi/2$	0	3	3 $\langle 0, 3\rangle$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	4 $\langle -\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\rangle$
π	-2	0	5 $\langle -2, 0\rangle$



S O/H C A/H T O/A



$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

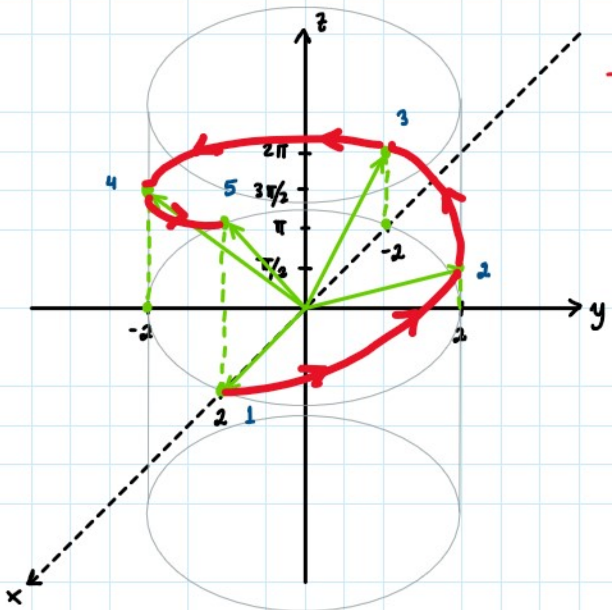
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

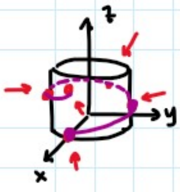
$$2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cancel{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\right) = \sqrt{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$3\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

EJEMPLO: Bosqueje la curva en el espacio de: $\vec{r}(t) = \underbrace{2\cos t}_{x}\,\hat{\imath} + \underbrace{2\sin t}_{y}\,\hat{\jmath} + \underbrace{t}_{z}\,\hat{k}$ en $0 \le t \le 2\pi$





$\left.\begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{array}\right]$ $\underbrace{x^2 + y^2 = 4}_{\text{sup. cilindrica.}}$ $C(0,0)$ $r = 2$

$z = t$

	t	$x = 2\cos t$	$y = 2\sin t$	$z = t$	
$0° \rightarrow$	0	2	0	0	1 $\langle 2, 0, 0\rangle$
$90°$	$\pi/2$	0	2	$\pi/2$	2 $\langle 0, 2, \pi/2\rangle$
$180°$	π	-2	0	π	3 $\langle -2, 0, \pi\rangle$
$270°$	$3\pi/2$	0	-2	$3\pi/2$	4 $\langle 0, -2, 3\pi/2\rangle$
$360°$	2π	2	0	2π	5 $\langle 2, 0, 2\pi\rangle$

ASIGNACIÓN: Bosqueje la curva del espacio representada por:

$$\vec{r}(t) = t\,\hat{i} + t^2\,\hat{j} + 2t\,\hat{k} \quad \text{en} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Los únicos dos temas que no se evaluaron son: diferencial de arco y límites de funciones vectoriales.

1.4 Derivación e integración de funciones vectoriales. le pertenece...

EJEMPLO: Dada la función vectorial: $\vec{r}(t) = \underbrace{t^2-5}\,\hat{i} \underbrace{-\,2e^{-t}}\,\hat{j} + \underbrace{2\cos(2t)}\,\hat{k}$, entonces determine:

a) $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$

$$\vec{r}\,'(t) = \underbrace{2t}\,\hat{i} + \underbrace{2e^{-t}}\,\hat{j} \underbrace{-\,4\,\text{sen}(2t)}\,\hat{k}$$

b) $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\Big|_{t=0}$

$$\vec{r}\,''(t) = 2\,\hat{i} - 2e^{-t}\,\hat{j} - 8\cos(2t)\,\hat{k}\,\Big|_{t=0}$$

$$\vec{r}\,''(0) = 2\,\hat{i} - 2\,\cancelto{1}{e^{-0}}\,\hat{j} - 8\,\cancelto{1}{\cos(0)}\,\hat{k} = 2\,\hat{i} - 2\,\hat{j} - 8\,\hat{k}$$

ó $\langle 2, -2, -8 \rangle$

ASIGNACIÓN: Repasar como desarrollar producto punto y producto cruz.

EJEMPLO: Sí: $\vec{r}(t) = \underbrace{(t^2+t)}\,\hat{i} + \underbrace{e^t}\,\hat{j}$, entonces determine:

a) $\vec{r}\,'(t)$ b) $\vec{r}\,''(t)$ c) El ángulo entre $\vec{r}\,'(0) \wedge \vec{r}\,''(0)$

a) $\vec{r}\,'(t) = (2t+1)\,\hat{i} + e^t\,\hat{j} \longrightarrow \vec{r}\,'(0) = (\cancelto{0}{2(0)}+1)\,\hat{i} + \cancelto{1}{e^0}\,\hat{j} = 1\,\hat{i} + 1\,\hat{j} = \hat{i} + \hat{j}$ ó $\langle 1, 1 \rangle$ $\vec{a}$

b) $\vec{r}\,''(t) = 2\,\hat{i} + e^t\,\hat{j} \longrightarrow \vec{r}\,''(0) = 2\,\hat{i} + \cancelto{1}{e^0}\,\hat{j} = 2\,\hat{i} + \hat{j}$ ó $\langle 2, 1 \rangle$ $\vec{b}$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \underbrace{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|}\cos\theta$; $\theta \leftarrow$ ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overset{?}{\vec{a}\cdot\vec{b}}}{\underset{?}{\|\vec{a}\|}\,\underset{?}{\|\vec{b}\|}}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \langle 1, 1 \rangle \cdot \langle 2, 1 \rangle = 2 + 1 = 3$$

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \|\vec{b}\| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

- Interpretación geométrica de $\vec{r}(t)$

EJEMPLO: Teniendo la función: $\vec{r}(t) = \sqrt{t}\,\hat{i} + (2-t)\,\hat{j}$. Determine:

a) $\vec{r}\,'(t)$

b) Grafique la función en $0 \leq t \leq 2$.

c) Grafique el vector posición $\vec{r}(1)$ y el vector tangente $\vec{r}\,'(1)$

a) $\vec{r}'(t)$

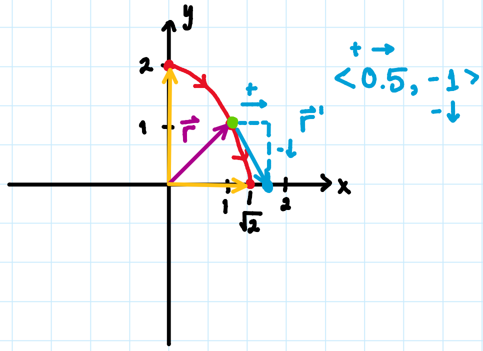
b) Grafique la función en $0 \le t \le 2$.

c) Grafique el vector posición $\vec{r}(1)$ y el vector tangente $\vec{r}'(1)$

a) $\vec{r}'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\,\hat{\imath} - \hat{\jmath}$

$\vec{r}(1) = \sqrt{1}\,\hat{\imath} + (2-1)\,\hat{\jmath} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$ ó $\langle 1,1 \rangle$ (posición)

b)



$\vec{r}'(1) = \dfrac{1}{2\sqrt{1}}\,\hat{\imath} - \hat{\jmath} = \frac{1}{2}\hat{\imath} - \hat{\jmath}$ ó $\langle 0.5, -1 \rangle$ (tangente) a la curva...

peculiaridad: iniciar apartir del vector posición...

Derivada respecto a "t".

$$\vec{r}(t)\cdot\vec{u}(t) \neq D_t[\vec{r}(t)\cdot\vec{u}(t)] = \vec{r}'(t)\cdot\vec{u}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{u}'(t)$$

- Reglas de derivación.

EJEMPLO: Si $\vec{r}(t) = \frac{1}{t}\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \ln(t)\,\hat{k}$ $\wedge$ $\vec{u}(t) = t^2\hat{\imath} - 2t\,\hat{\jmath} + \hat{k}$. Determine:

a) $D_t[\vec{r}(t)\cdot\vec{u}(t)] = \underbrace{\vec{r}'(t)\cdot\vec{u}(t)} + \underbrace{\vec{r}(t)\cdot\vec{u}'(t)}$ ← Respuesta es ESCALAR.

$\vec{r}(t) = \frac{1}{t}\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \ln(t)\,\hat{k}$ $\qquad$ $\vec{u}(t) = t^2\hat{\imath} - 2t\,\hat{\jmath} + \hat{k}$.

$\vec{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \frac{1}{t}\hat{k}$ $\qquad$ $\vec{u}'(t) = 2t\,\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$

$\frac{1}{t} = t^{-1} = -1t^{-2} = \frac{-1}{t^2}$

$\vec{r}'(t)\cdot\vec{u}(t) = \left(-\frac{1}{\cancel{t^2}}\right)\cancel{t^2} + \cancel{0(-2t)}^{\,0} + \left(\frac{1}{t}\right)1 = -1 + \frac{1}{t}$

$\vec{r}(t)\cdot\vec{u}'(t) = \left(\frac{1}{\cancel{t}}\right)2\cancel{t} + (\cancel{-}2)(\cancel{-}1) + \cancel{0(\ln(t))}^{\,0} = 2 + 2 = 4$

$D_t[\vec{r}(t)\cdot\vec{u}(t)] = -1 + \frac{1}{t} + 4$

$= 3 + \frac{1}{t}$

b) $D_t[\vec{r}(t)\times\vec{u}(t)] = \underbrace{\vec{r}'(t)\times\vec{u}(t)} + \underbrace{\vec{r}(t)\times\vec{u}'(t)}$ ← Respuesta es VECTOR.

- $\vec{r}(t) = \frac{1}{t}\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \ln(t)\,\hat{k}$ $\qquad$ - $\vec{u}(t) = t^2\hat{\imath} - 2t\,\hat{\jmath} + \hat{k}$.
- $\vec{r}'(t) = -\frac{1}{t^2}\hat{\imath} + 0\hat{\jmath} + \frac{1}{t}\hat{k}$ $\qquad$ - $\vec{u}'(t) = 2t\,\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 0\hat{k}$

$$\begin{array}{c} \\ \vec{r}' \to \\ \vec{u} \to \end{array}\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\frac{1}{t^2} & 0 & \frac{1}{t} \\ t^2 & -2t & 1 \end{vmatrix} = \left(\cancel{0(1)}^{\,0} \cancel{-}\left(\tfrac{1}{\cancel{t}}\right)(\cancel{-}2\cancel{t})\right)\hat{\imath} - \left(\cancel{-\tfrac{1}{t^2}(1)} - \cancel{t^2}\left(\tfrac{1}{\cancel{t}}\right)\right)\hat{\jmath} + \left(\cancel{-}\tfrac{1}{\cancel{t^2}}(\cancel{-}2\cancel{t}) - \cancel{t^2(0)}^{\,0}\right)\hat{k}$$

$\left(-\frac{1}{t^2} - t\right)$ $\qquad$ $\frac{2}{t}$

$= 2\hat{\imath} + \left(\frac{1}{t^2} + t\right)\hat{\jmath} + \frac{2}{t}\hat{k}$

$\vec{r}\times\vec{u}' = 2\ln(t)\,\hat{\imath} + 2t\ln(t)\,\hat{\jmath} + \left(2t - \frac{2}{t}\right)\hat{k}$

$$D_t[\vec{r}(t)\times\vec{u}(t)] = (2+2\ln(t))\,\hat{i} + \left(\frac{1}{t^2}+t+2t\ln(t)\right)\hat{j} + \left(\cancel{\frac{2}{t}}+2t-\cancel{\frac{2}{t}}\right)\hat{k}$$

$$= 2(1+\ln(t))\,\hat{i} + \left(\frac{1}{t^2}+t+2t\ln(t)\right)\hat{j} + 2t\,\hat{k}.$$

- ASIGNACIÓN...

c) $D_t[\underbrace{\vec{u}(t)}\times\underbrace{\vec{u}'(t)}] = \underbrace{\cancel{\vec{u}'(t)\times\vec{u}'(t)}}_{0} + \underbrace{\vec{u}(t)\times\vec{u}''(t)}$ R// $2\hat{j}+4t\hat{k}$ ó $<0,2,4t>$

d) $\|D_t[\vec{u}(t)\times\vec{u}'(t)]\|$ ← mág. al c) R// $\sqrt{4+16t^2} = 2\sqrt{1+4t^2}$

EJERCICIO: Sí $\vec{r}(t) = t^2\,\hat{i} + (t-1)\,\hat{j}$ ∧ $\vec{u}(t) = \sin t\,\hat{i} + \cos t\,\hat{j}$. Encuentre: $D_t[\vec{r}(t)\cdot\vec{u}(t)]$ aplicando la regla de derivación. ⟶ R// $(t^2+1)\cos t + (t+1)\sin t$

▫ Derivadas parciales de funciones vectoriales.

EJEMPLO: Sí $\phi(x,y,z) = \underbrace{xy^2z}_{\text{escalar}}$ y $\vec{A}(x,y,z) = \underbrace{xz\,\hat{i} - xy^2\,\hat{j} + yz^2\,\hat{k}}_{\text{vector.}}$, entonces encuentre:

$\dfrac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z}$ en el punto $(2,-1,1)$ ← x y z

$3<1,2,-1> = <3,6,-3>$

$$\phi\vec{A} = x^2y^2z^2\,\hat{i} - x^2y^4z\,\hat{j} + xy^3z^3\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial(\phi\vec{A})}{\partial z} = 2x^2y^2z\,\hat{i} - x^2y^4\,\hat{j} + 3xy^3z^2\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial^2(\phi\vec{A})}{\partial x\partial z} = 4xy^2z\,\hat{i} - 2xy^4\,\hat{j} + 3y^3z^2\,\hat{k}$$

$$\frac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z} = 4y^2z\,\hat{i} - 2y^4\,\hat{j} + 0\,\hat{k}\;\Big|_{x=2,\;y=-1,\;z=1}$$

$$\frac{\partial^3(\phi\vec{A})}{\partial x^2\partial z} = 4\overset{+1}{\cancel{(-1)}^2}(1)\,\hat{i} - 2\overset{+1}{\cancel{(-1)}^4}\,\hat{j} + 0\,\hat{k}$$

$$= 4\hat{i} - 2\hat{j} \quad ó \quad <4,-2,0>$$

y^2

EJERCICIO: Sí $\vec{u}(x,y) = e^{-xy^2}\,\hat{i} + y^3x^4\,\hat{j}$ ∧ $\vec{h}(x,y) = e^x\,\hat{i} + e^y\,\hat{j}$. Determine:

a) $\dfrac{\partial^2\vec{u}}{\partial x\partial y}$

R// $2y\,e^{-xy^2}(xy^2-1)\,\hat{i} + 12y^2x^3\,\hat{j}$

b) $\dfrac{\partial(\vec{u}\cdot\vec{h})}{\partial x}$

R// $(1-y^3)\,e^{-xy^2+x} + 4x^3y^3e^y$

▫ Integración de funciones vectoriales.

▫ Integración de funciones vectoriales.

EJEMPLO: Sí $\vec{F}(t) = \underbrace{\tan(t)}\,\hat{\imath} - \underbrace{\frac{1}{t}}\,\hat{\jmath} + \underbrace{2\cos t}\,\hat{k}$, determine $\vec{R}(t)$

$$\vec{R}(t) = \int \tan(t)\,dt\ \hat{\imath} - \int \frac{1}{t}\,dt\ \hat{\jmath} + 2\int \cos t\,dt\ \hat{k}.$$

$$= \left(\ln|\sec(t)| + C_1\right)\hat{\imath} + \left(-\ln(t) + C_2\right)\hat{\jmath} + \left(2\sin t + C_3\right)\hat{k}$$

algunas referencias: $= \ln|\sec(t)|\,\hat{\imath} - \ln(t)\,\hat{\jmath} + 2\sin t\,\hat{k} + \vec{C}$; $\vec{C} = C_1\hat{\imath} + C_2\hat{\jmath} + C_3\hat{k}$.

EJEMPLO: Encontrar la antiderivada de la función vectorial dada, así:

$\cos(2t)\,\hat{\imath} - 2\sin t\,\hat{\jmath} + \frac{1}{1+t^2}\,\hat{k}$ que satisface la condición inicial: $\underbrace{\vec{R}(0)} = 3\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + \hat{k}$.

↳ debemos encontrar: $C_1, C_2 \wedge C_3$

$$\vec{R}(t) = \int \cos(2t)\,dt\ \hat{\imath} - 2\int \sin(t)\,dt\ \hat{\jmath} + \int \frac{dt}{1+t^2}\,\hat{k}$$

$$\vec{R}(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{2} + C_1\right)\hat{\imath} + \left(2\cos(t) + C_2\right)\hat{\jmath} + \left(\arctan(t) + C_3\right)\hat{k}$$

$$\vec{R}(0) = \left(\cancel{\frac{\sin 0}{2}}^{\,0} + C_1\right)\hat{\imath} + \left(2\cancel{\cos 0}^{\,(1)} + C_2\right)\hat{\jmath} + \left(\cancel{\arctan(0)}^{\,0} + C_3\right)\hat{k}$$

$$\vec{R}(0) = C_1\,\hat{\imath} + (2 + C_2)\,\hat{\jmath} + C_3\,\hat{k} = 3\,\hat{\imath} - 2\,\hat{\jmath} + \hat{k}$$

$\arctan(0) = h$

$\cancel{\tan}(\cancel{\arctan}(0)) = \tan(h)$

$0 = \tan(h)$

$0 = \frac{\sin(h)}{\cos(h)}$

$0 = \sin(h)$

$h = 0$

$C_1 = 3$ ✓

$2 + C_2 = -2$
$C_2 = -2 - 2$
$C_2 = -4$ ✓

$C_3 = 1$ ✓

$\arcsin(0) = 0$ $\quad \sin(0) = 0$

$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$$\vec{R}(t) = \left(\frac{\sin(2t)}{2} + 3\right)\hat{\imath} + \left(2\cos(t) - 4\right)\hat{\jmath} + \left(\arctan(t) + 1\right)\hat{k}$$

EJERCICIO: Determine la integral primitiva de:

$\vec{F}(t) = \sec(t)\,\hat{\imath} + \sec^2(t)\,\hat{\jmath} + \sec^3(t)\,\hat{k}$.

$$\int \cos(x)\cos(8x) + \sin(x)\sin(8x)$$

→ $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$