



Politechnika
Śląska

Sprawozdanie z przedmiotu
Metody Optymalizacji

Projekt: Strojenie układu regulacji

Data wykonania sprawozdania: 21.05.2023

Sprawozdanie przygotowali:

Dawid Kania

Oliwier Cieślik

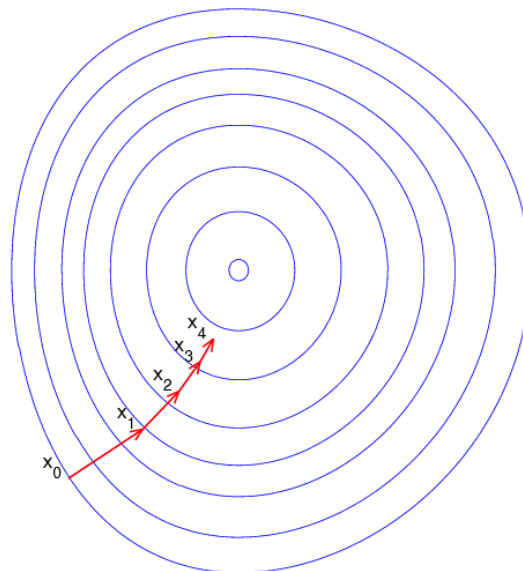
AiR S2-I/Rob

Cel projektu

Celem projektu jest znalezienie optymalnych nastaw regulatora PID (parametry T_i , T_d , k_r), korzystając z poznanych na wykładach metod optymalizacji. Metody te nie mogą być arytmetyczne. Wartościami określającymi jakość uzyskanych nastaw są wskaźniki ISE, ISC, błąd oraz średni błąd.

Metoda optymalizacji

Do rozwiązania problemu wybrano metodę gradientu prostego. Również przetestowano gradient sprzężony, jednak za jego pomocą nie uzyskano lepszego wyniku. Metoda ta wykorzystywana jest do znajdowania minimum lokalnego poprzez wyznaczanie wektorów, które wskazują kierunek najmniejszej wartości wskaźników co widać na rysunku [X]. Plusem gradientu jest prostota implementacji oraz dokładny wynik, natomiast wadą jest łatwość ugrzęźnięcia w minimum lokalnym.



Rysunek 1. Przedstawienie zasady działania metody gradientu prostego

Algorytm metody gradientowej polega na iteracyjnym wyszukiwaniu minimum zadanej funkcji celu $f(x)$ dla $x \in \mathbb{R}^N$. Minimalizowana funkcja musi być ciągła i różniczkowalna.

Przed rozpoczęciem należy określić punkt początkowy x_0 , oraz określić wartości parametrów:

α – długość kolejnych kroków,

Δ – przesunięcie służące do numerycznego obliczenia gradientu w danym punkcie,

ε – określa minimalną wartość normy gradientu dla której spełniony jest warunek stopu,

N – maksymalna liczba iteracji.

W pierwszym kroku należy wyznaczyć gradient $\nabla f(x_i)$, gdzie:

x_i – wyznaczony poprawiony punkt w danej iteracji

i – numer iteracji.

Następnie należy wyznaczyć kierunek gradientu d_i oraz obliczyć punkt x_{i+1} :

$$d_i = -\nabla f(x_i) \quad (1)$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha d_i \quad (2)$$

Ostatnim krokiem jest sprawdzenie warunków stopu:

$$i = N \quad (3)$$

$$\|\nabla f(x_i)\| < \varepsilon \quad (4)$$

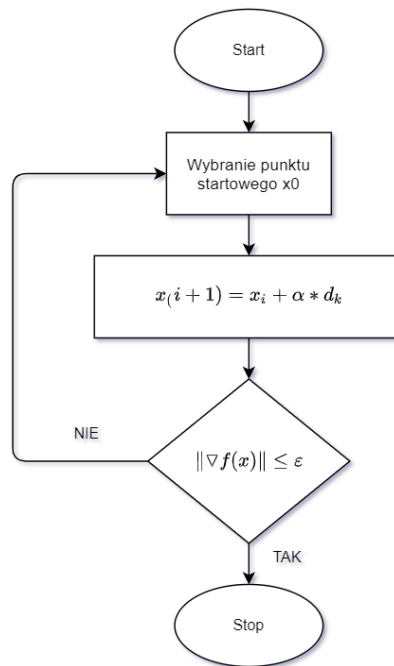
Jeśli przynajmniej jeden z tych warunków jest spełniony wtedy należy przerwać dalsze obliczenia. Spełnienie warunku (4) oznacza, że algorytm znalazł minimum $f_{\min} = f(x)$ w punkcie x_i . Natomiast spełnienie warunku (3) oznacza, że algorytm nie zdołał znaleźć minimum w sensownej ilości iteracji. Jeśli oba warunki nie zostały spełnione należy wrócić do punktu pierwszego oraz powiększyć numer iteracji o $(i + 1)$.

Zmodyfikowana metoda gradientowa różni się wzorem na kierunek d :

$$d_i = -\frac{\nabla f(x_i)}{\|\nabla f(x_i)\|}$$

Do zmodyfikowanej metody gradientowej został wprowadzony dodatkowy warunek zapewniający zmniejszanie współczynnika α jeśli wskaźnik jakości się zwiększy pomiędzy iteracjami. Jeśli spełniony jest warunek $(x_{i-1} > x_i)$ dla $i \geq 1$ to $\alpha_i = \frac{\alpha_{i-1}}{2}$.

W celu lepszej wizualizacji kroków algorytmu na rysunku [1] znajduje się schemat blokowy przedstawiający w uproszczeniu iteracje metody gradientowej.



Rysunek 2. Algorytm minimalizacji metodą gradientu prostego

Wskaźniki jakości

W procesie optymalizacji wykorzystano następujące wskaźniki jakości:

Wskaźnik ISE:

$$ISE = \int_0^{100} (e(t))^2 dt \quad (5)$$

Wskaźnik ISC:

$$ISC = \int_0^{100} (u(\infty) - u(t))^2 dt \quad (6)$$

„Średni błąd” w przedziale czasu od 20 do 100 sekund:

$$ME = \int_{20}^{100} |e(t)| dt \quad (7)$$

Metoda numerycznego obliczania gradientu

Formalnie gradient jest zdefiniowany jako wektor pochodnych cząstkowych po wartościach wektora wejściowego x :

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f(x)}{\partial x_K} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$x = [x_1 \quad \dots \quad x_K]$$

Natomiast pochodna cząstkowa to:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x + \hat{\Delta})}{\Delta} \quad (9)$$

Gdzie $\hat{\Delta}$ jest wektorem, którego wartość $\hat{\Delta}_i$ jest równa Δ , a pozostałe wartości tego wektora są równe 0. Przekształcając równanie (9) uzyskano wzór na wyznaczenie pochodnej cząstkowej metodą numeryczną:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x_i} = \frac{f(x) - f(x + \hat{\Delta})}{\Delta} \quad (10)$$

$$\Delta \cong 0$$

Po podstawieniu równania (10) do równania (8) uzyskujemy ostateczną postać wzoru na wartość gradientu w punkcie x_i , wyznaczany metodą numeryczną:

$$\nabla f(x_i) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_{i1}} & \dots & \frac{\Delta f(x_i)}{\Delta x_{iK}} \end{bmatrix}$$

```
function [grad, y] = Gradient(f, x, delta)
    % wartosc funkcji f(x) w punkcie X
    y = f(x);
    % wartosci funkcji f(x) dla punktow X przesunietych w roznych
    % kierunkach o wartosc delta
    y_i = zeros(size(x));
    for i = 1:numel(x)
        x_plus_delta_i = x;
        x_plus_delta_i(i) = x_plus_delta_i(i) + delta;
        y_i(i) = f(x_plus_delta_i);
    end
    % liczenie gradientu
    grad = (y_i - y * ones(size(x))) / delta;
end
```

Rysunek 3, Implementacja algorytmu wyznaczania gradientu funkcji $f(x)$ w punkcie x_i w środowisku Matlab

Wyniki optymalizacji

Jako, że gradient jest podatny na ugrzęźnięcie w minimum lokalnym, x_0 (T_i, T_d, k_r) wyznaczono za pomocą metody dwóch punktów wykorzystywanej do wyliczania nastaw regulatorów. Pozwoliło to na zawężenie obszaru poszukiwań i zmniejszenie szansy wpadnięcia w minimum lokalne. Uzyskane parametry to:

$$T_i = 1.74$$

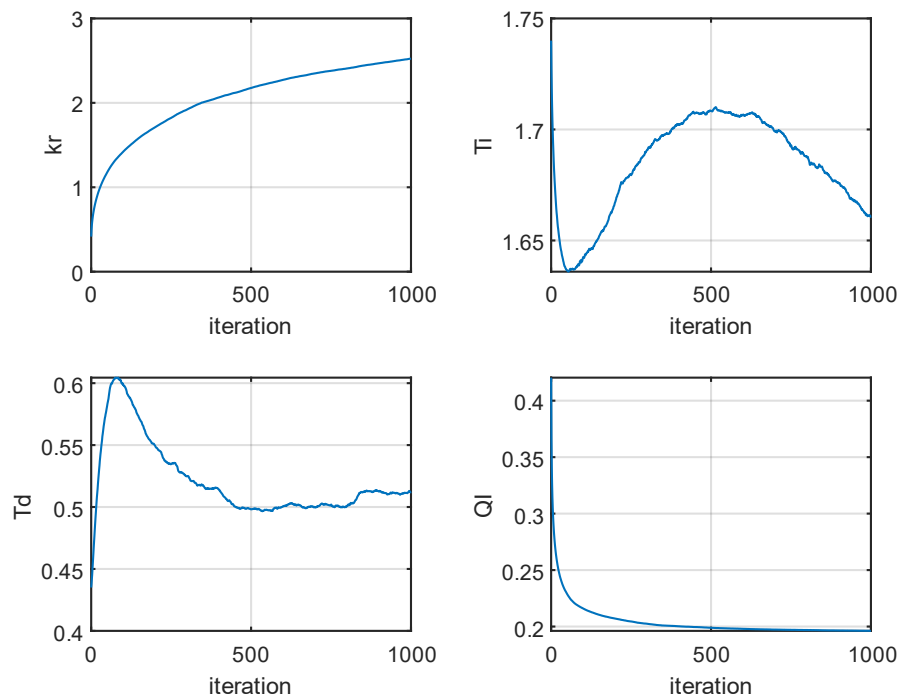
$$T_D = 0.435$$

$$k_r = 0.41568$$

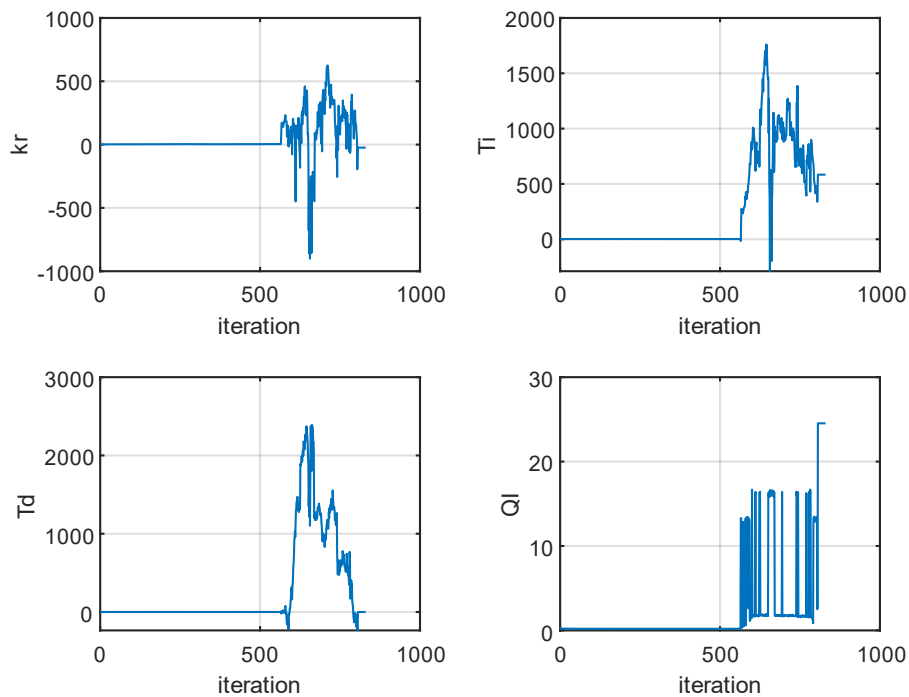
Minimalizację wskaźników przetestowano dla różnych wartości początkowych alfy oraz delty, aby sprawdzić wpływ zmiennej algorytmu na wyniki.

Optymalizacja wskaźnika ISE dla $t = <0, 100>$

Na rysunkach [4] i [5] widać uzyskane przebiegi. Minimalizowany wskaźnik to ISE dla czasu symulacji od sekundy 0 do 100.

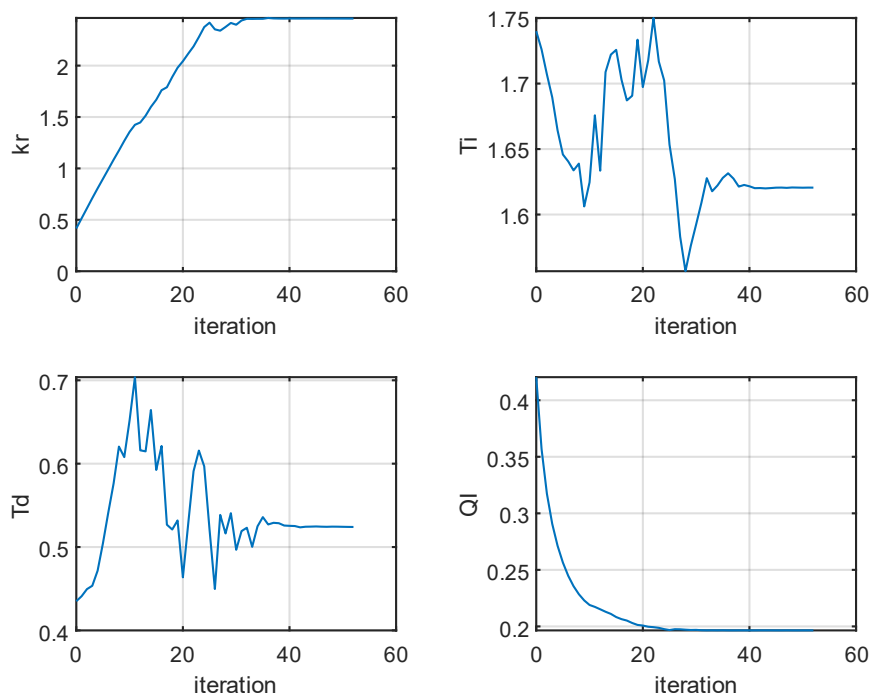


Rysunek 4. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu prostego dla $\delta = 0.01$ i $\alpha = 0.1$



Rysunek 5. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu prostego dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 1$

Z powyższych rysunków widać minimalizację wskaźnika jakości tylko dla małej alfy ale parametry regulatora nie stabilizują się. Przebiegi dla $\alpha = 1$ są poszarpane i pogarszają się z czasem, regulator jest całkowicie niezdolny do sterowania. W celu poprawy przebiegu zmodyfikowano algorytm gradientu prostego aby nie wpadał w fałszywe minima. Jeżeli nowy wskaźnik jakości jest większy od poprzedniego to zmniejsza się parametr alfa algorytmu. Rysunki [6] przedstawiają przebiegi zmodyfikowanego gradientu.

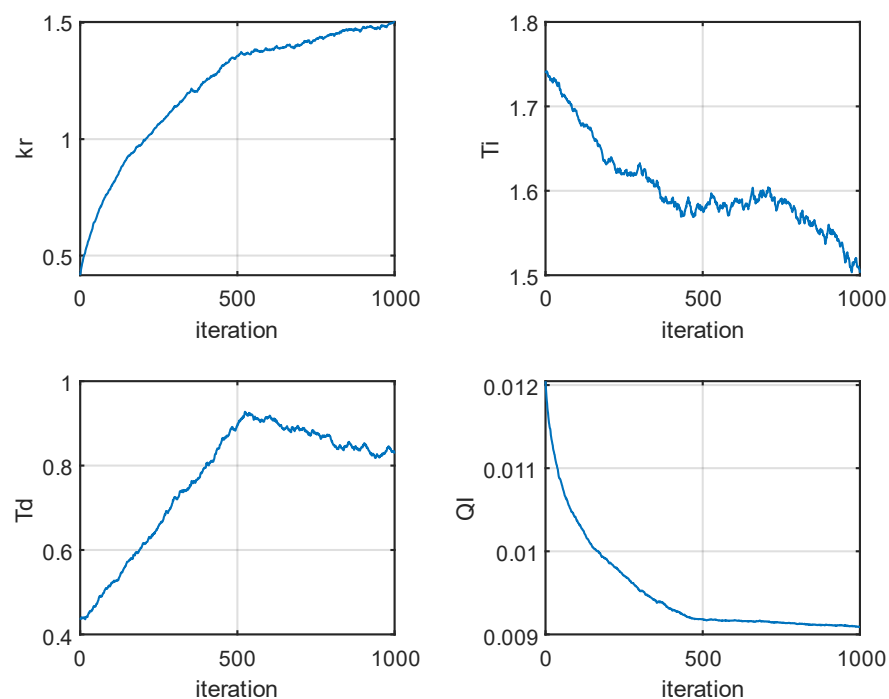


Rysunek 6. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu zmodyfikowanego dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 0.1$

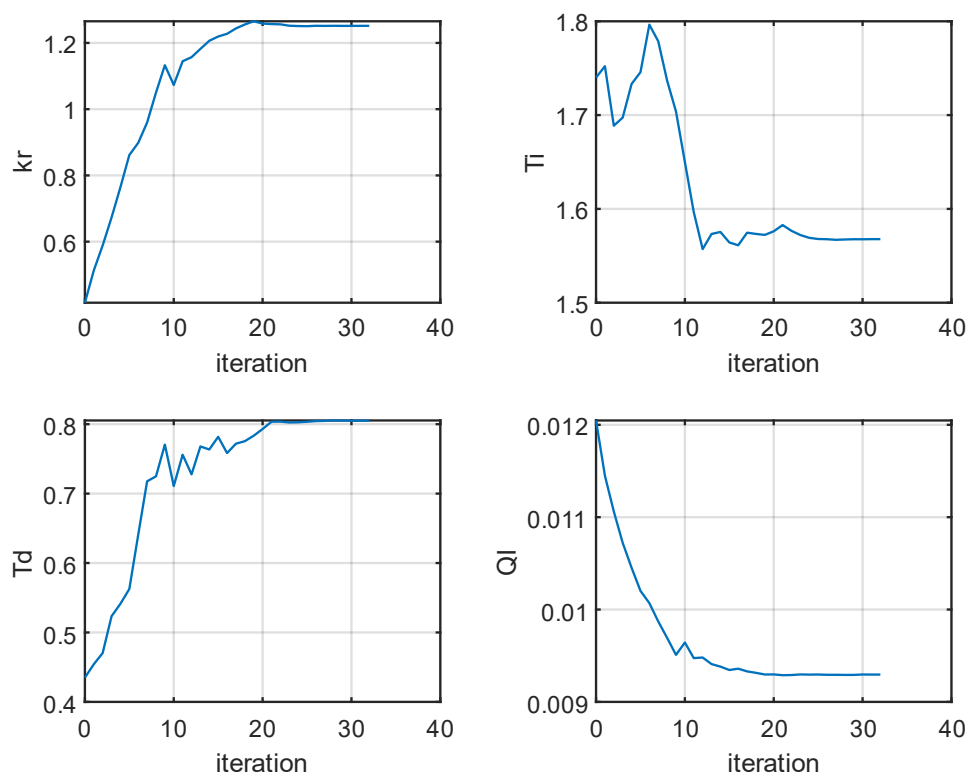
Na powyższym przebiegu widać, że algorytm szybciej znajduje minimum wskaźnika oraz parametry regulatora PID ustalają się na pewnej wartości. Można powiedzieć, że znaleziono nastawy regulatora PID. Dodatkowo proces znalezienia nastaw zajął 60 iteracji zamiast 1000.

Optymalizacja średniego błędu

Kolejno minimalizowano średni błąd dla okresu od 20 do 100 sekundy gradientem prostym oryginalnym oraz zmodyfikowanym.



Rysunek 7. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu prostego dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 1$

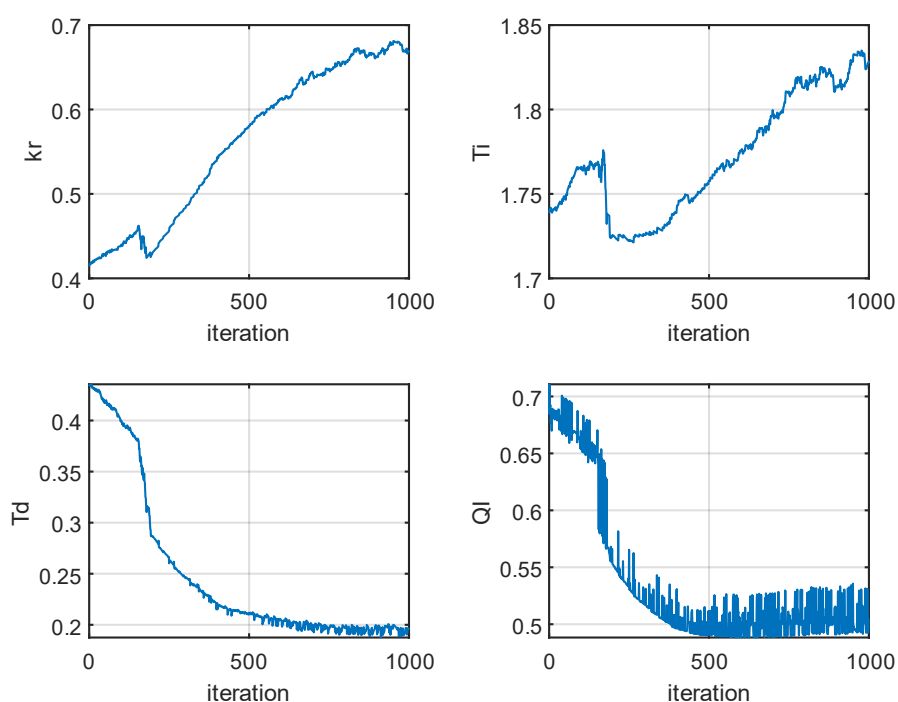


Rysunek 8. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu zmodyfikowanego dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 1$

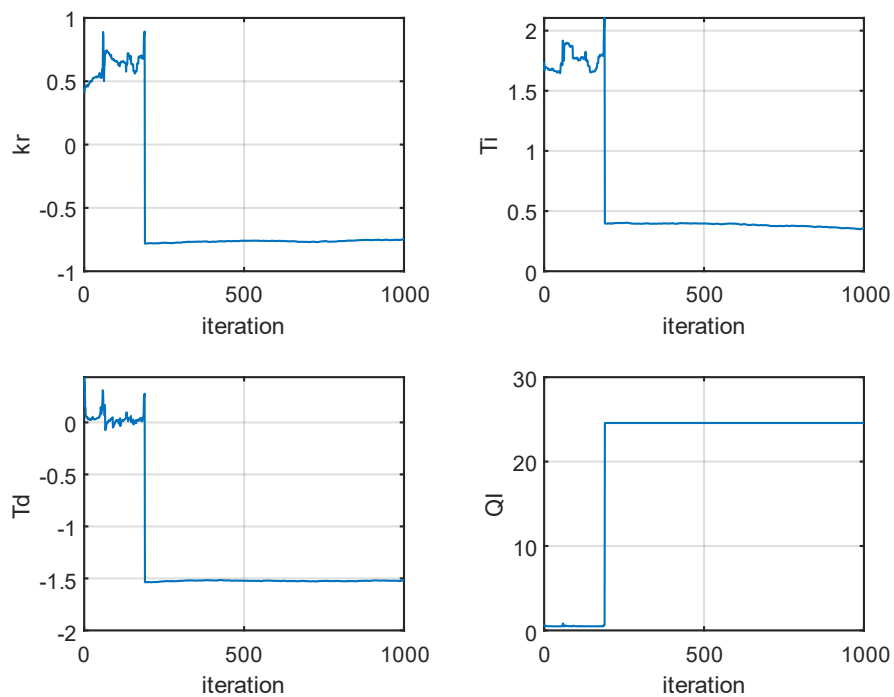
Przy minimalizacji średniego błędu dla okresu od 20 do 100 sekundy zauważono znaczną poprawę wyników, co widać na rysunkach [7] i [8]. Otrzymanie wyniku dla gradientu prostego (rysunek [7]) oryginalnego wymagało 1000 iteracji, a wciąż nie otrzymano stabilnych parametrów regulatora PID (wciąż dążą do pewnej wartości). Natomiast dla gradientu zmodyfikowanego (rysunek [8]) wykonano tylko 40 iteracji, a parametry regulatora ustabilizowały się przy pewnych wartościach. Wyniki wskaźników dla obu metod są takie same.

Optymalizacja wskaźnika ISE+ISC dla $t = \langle 0, 100 \rangle$

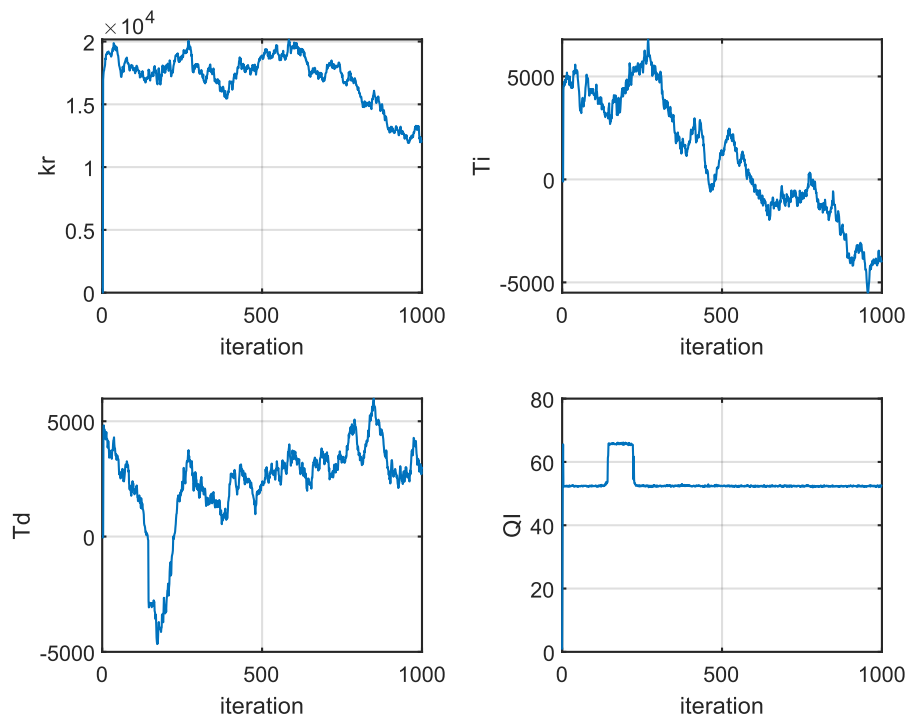
Przetestowano strojenie regulatora dla minimalizacji wskaźnika będącego sumą ocen ISE i ISC. Przebiegi widać na rysunkach [9], [10] i [11].



Rysunek 9. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu prostego dla $\delta = 0.01$ i $\alpha = 0.001$

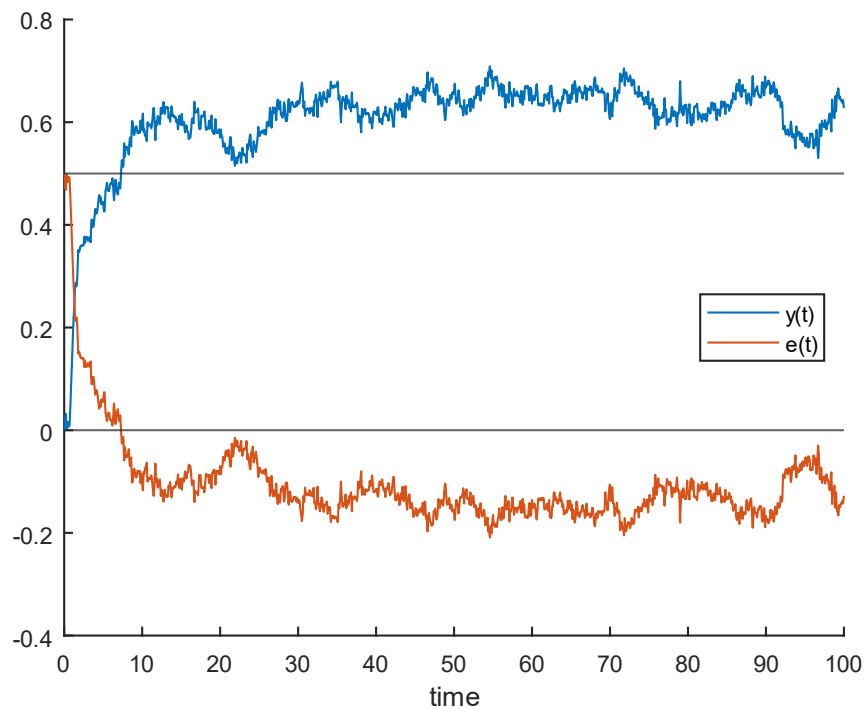


Rysunek 10. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu prostego dla $\delta=0.001$ i $\alpha=0.01$



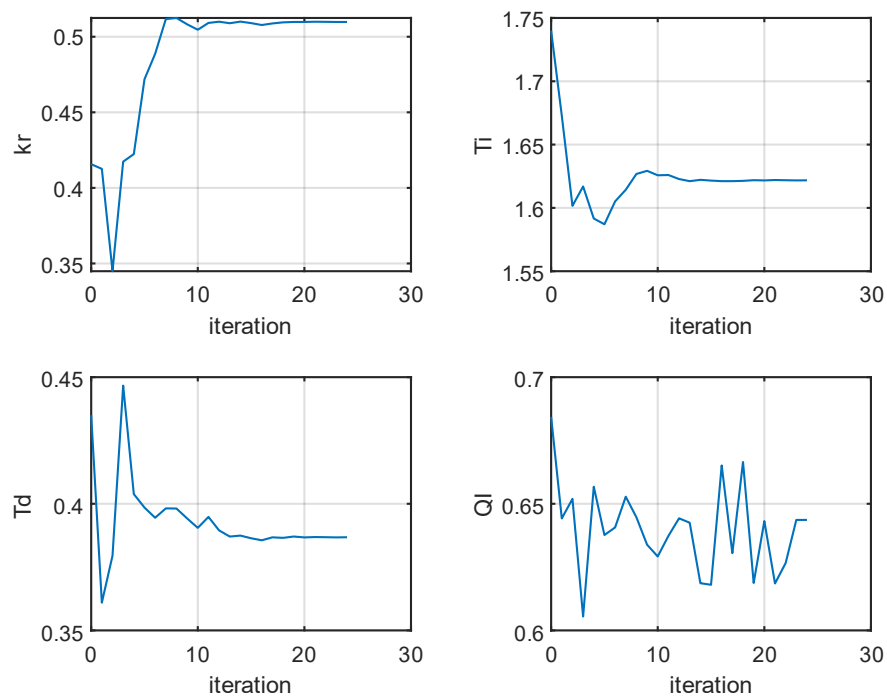
Rysunek 11. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu prostego dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 1$

Powyższe przebiegi uzyskano z oryginalnego gradientu prostego. Dla każdego eksperymentu zmieniano początkowe wartości alfy i delty. Najmniejszy wskaźnik uzyskano dla $\alpha = 0.001$ i $\delta = 0.01$, jednak otrzymywane wartości są poszarpane a parametry regulatora nie stabilizują się z czasem (wciąż dążą do pewnej wartości). Dla przebiegów z $\delta = 0.001$ oraz $\alpha = 0.1$ i 1 , tylko wskaźnik jakości stabilizuje się ale jego wartość jest za duża. Dodatkowo do osiągnięcia wyników potrzeba przeprowadzić 1000 iteracji. Nastawy są nie zdadne do sterowania co widać na poniższym rysunku.



Rysunek 12. Przebieg wyjścia modelu i uchybu dla uzyskanych nastaw z gradientu prostego dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 1$

Eksperyment strojenia dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 0.1$ przeprowadzono ponownie. Tym razem algorytmem optymalizującym jest gradient zmodyfikowany. Przebiegi znajdują się na poniższym rysunku.

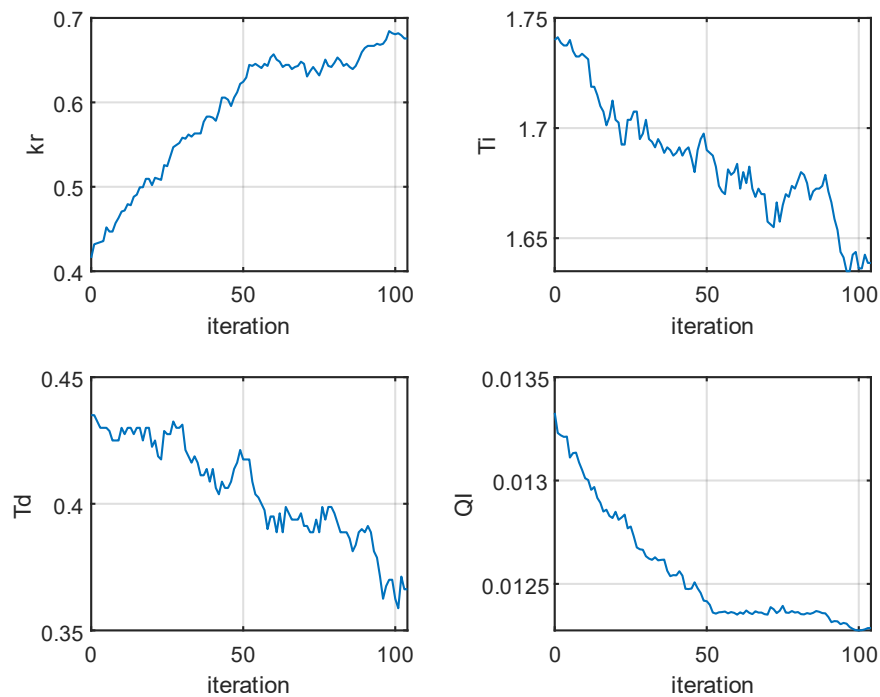


Rysunek 13. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu zmodyfikowanego dla $\delta=0.001$ i $\alpha=0.1$

Układ dla 60 iteracji jest w stanie znaleźć pewne akceptowalne minimum wskaźnika jakości oraz stabilizują się parametry regulatora.

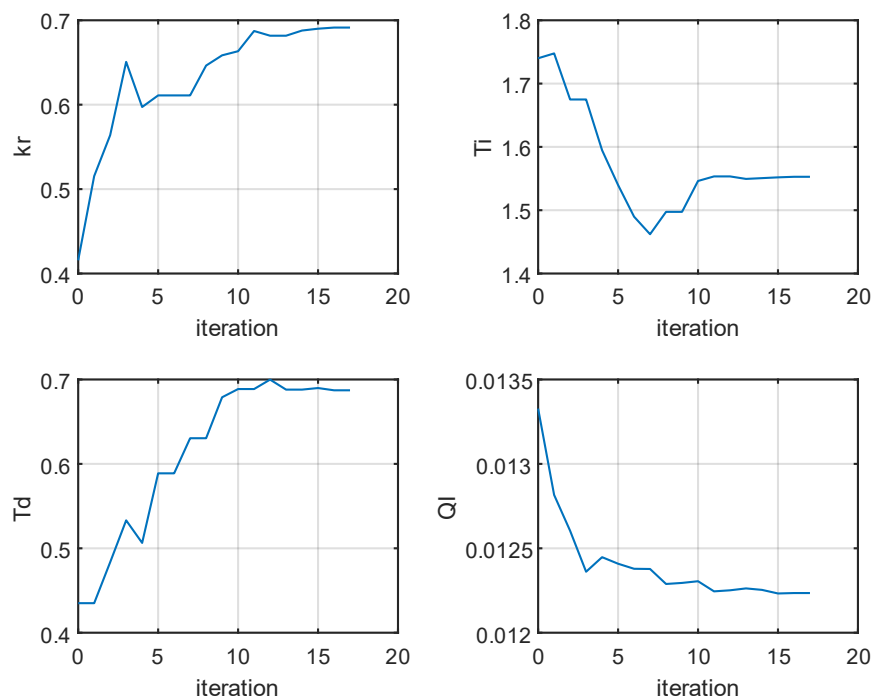
Optymalizacja średniego błędu dla układu dyskretnego

Na sam koniec sprawdzono jak gradient prosty minimalizuje błąd średni dla okresu od 20 do 100 sekundy. Test przetestowano dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 1$. Otrzymane przebiegi znajdują się na rysunku [14].



Rysunek 14. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu prostego dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 1$

Gradient prosty zminimalizował wskaźnik jakości ale tak samo jak dla poprzednich eksperymentów nie jest w stanie ustabilizować parametrów regulatora. Eksperyment powtórzono dla gradientu zmodyfikowanego co widać na rysunku [15].



Rysunek 15. Zmiany parametrów regulatora PID w kolejnych iteracjach gradientu zmodyfikowanego dla $\delta = 0.001$ i $\alpha = 0.1$

Z rysunku [15] widać brak poprawy wskaźnika jakości w porównaniu do gradientu bez modyfikacji ale parametry regulatora stabilizują się przy pewnej wartości. Dodatkowo do uzyskania wyników wystarczyło wykonać 20 iteracji.

Wnioski

Przeprowadzono próby uzyskania optymalnych nastaw regulatora PID za pomocą gradientu prostego tak aby zminimalizować podane wskaźniki jakości. Otrzymane wyniki są niezadowolające, nastawy wciąż dążą do pewnej wartości a w zależności od alfy i delty algorytm może doprowadzić do pogorszenia sterowania. Wywnioskowano, że gradient prosty widzi minimum, jednak gdy alfa jest zbyt duża to minimum zostaje przeskakiwane i algorytm wpada w położenie, które pogarsza jakość wskaźnika. Rozwiązaniem problemu jest modyfikacja gradientu prostego tak aby alfa zmniejszała się jeżeli nowy wskaźnik jakości jest większy od poprzedniego. Powoduje to szybkie dojście do minimum dużym krokiem, po czym zmniejszenie kroku tak aby nie wyskoczyć poza określony obszar. Wyniki dla gradientu zmodyfikowanego nie wiadomo czy są optymalne lecz na pewno są dopuszczalne. Uzyskano zmniejszenie wskaźnika jakości oraz ustalenie się nastaw regulatora przy pewnych wartościach.