Ćwiczenie 11

SIECI NEURONOWE II - SIECI REKURENCYJNE

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z ideą rekurencyjnych sieci neuronowych, czyli takich, w których występują sprzężenia zwrotne. Podczas ćwiczenia badany jest szczególny przypadek sieci rekurencyjnych - sieci Hopfielda. W szczególności testowana jest możliwość wykorzystania sieci Hopfielda jako pamięci skojarzeniowej.

Od studentów przystępujących do ćwiczenia wymagana jest znajomość niniejszej instrukcji oraz dwóch pierwszych rozdziałów instrukcji pt. "Sieci Neuronowe II - Sieci Jednokierunkowe".

I. WSTĘP

Rekurencyjne sieci neuronowe stanowią ważną klasę sieci neuronowych. Ich struktura charakteryzuje się istnieniem sprzężeń zwrotnych, tzn. takich połączeń, za pośrednictwem których sygnały wyjściowe sieci (warstwy) są podawane z powrotem na wejście sieci (warstwy). Istnienie takich sprzężeń powoduje, że odpowiedź sieci nie ustala się natychmiast po podaniu sygnałów wejściowych (tak jak miało to miejsce w przypadku sieci jednokierunkowych) ale jest sygnałem zmiennym w czasie. Z tego powodu rekurencyjne sieci neuronowe mogą być traktowane jako nieliniowe układy dynamiczne, w przeciwieństwie do sieci jednokierunkowych, będących w istocie nieliniowymi układami statycznymi. Ta cecha neuronowych sieci rekurencyjnych sprawia, iż są one często stosowane jako (neuronowe) modele nieliniowych układów dynamicznych.

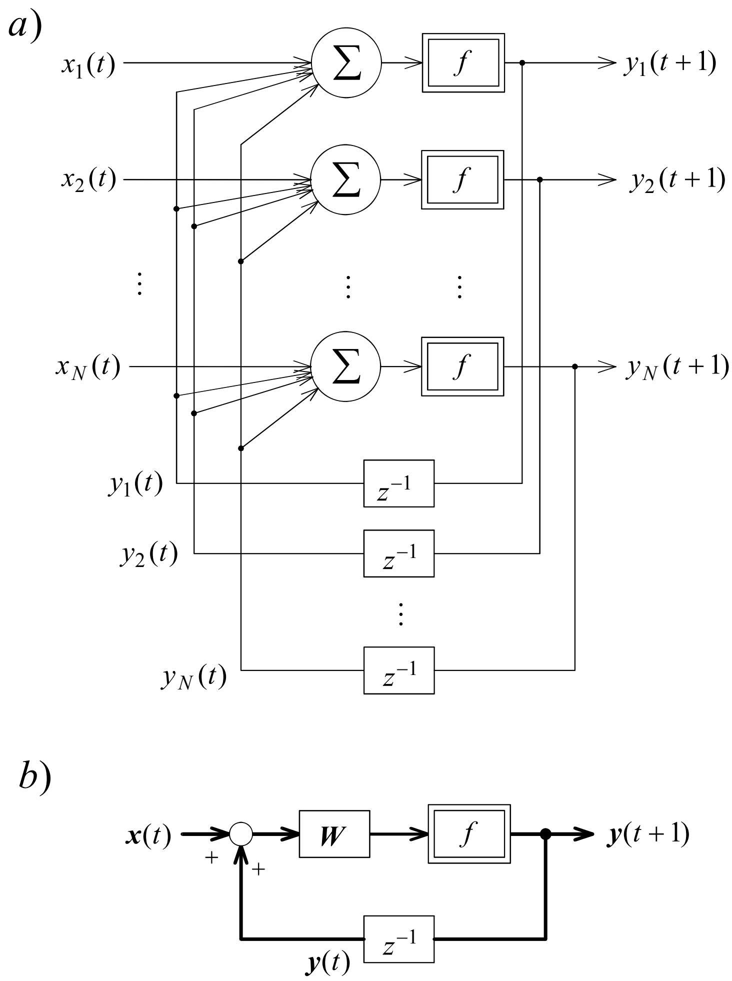
Oprócz tego ważnego zastosowania omawiane sieci mogą pełnić rolę tzw. pamięci skojarzeniowej. Pojęcie to zostanie wyjaśnione w dalszej części instrukcji. Przykładem rekurencyjnej sieci neuronowej wykorzystywanej jako pamięć skojarzeniowa jest sieć Hopfielda.

II. SIEĆ HOPFIELDA

1. Struktura sieci

Sieć Hopfielda została przedstawiona na rysunku 1. Struktura sieci Hopfielda posiada następujące cechy:

a) składa się z jednej warstwy w skład której wchodzi N neuronów,
b) sygnałami wejściowymi każdego neuronu w $k+1$-szej (kolejnej) chwili są wszystkie sygnały wyjściowe neuronów z chwili k-tej (poprzedniej) oraz jeden zewnętrzny sygnał wejściowy sieci,
c) zakłada się zerowe wyjścia sieci w chwili zerowej,
d) zewnętrzne sygnały wejściowe oddziałują na sieć jedynie w chwili zerowej przyjmując wartości 1 lub –1,
e) funkcje aktywacji mają postać funkcji signum (rys. 2b z instrukcji nr 10).



Rys.1. Sieć Hopfielda

Wyjście i-tego neuronu "ewoluuje" zgodnie ze wzorem:

$$y_i(k+1) = \mathrm{sgn}\left[\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j(k) + x_i(k)\right], \qquad i = 1,2,\ldots,N, \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

gdzie:

$y_i(k)$	- sygnał wyjściowy i-tego neuronu w k-tej chwili,
w_{ij}	- waga połączenia wejścia i-tego neuronu z wyjściem j-tego neuronu,
x_i	- i-ty sygnał wejściowy.

Aby uprościć wzór (1) możemy potraktować zewnętrzne sygnały wejściowe jako warunki początkowe dla wyjść neuronów, podstawiając $y_j(0) = x_j$ dla $j = 1,2,\ldots,N$ otrzymamy:

$$y_i(k+1) = \mathrm{sgn}\left[\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j(k)\right], \qquad i = 1,2,\ldots,N, k = 0,1,2,\ldots . \tag{2}$$

Na rysunku 1a blok z^{-1} oznacza operator opóźnienia sygnału wejściowego o jedną chwilę.

Przy wykorzystaniu zapisu macierzowego:

$$\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_N(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(k) = \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_N(k) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{W} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} & \cdots & w_{NN} \end{bmatrix}$$

uzyskamy zwięzły zapis zależności (2):

$$\boldsymbol{y}(k+1) = \mathrm{sgn}\left[\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}(k)\right], \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{3}$$

Została ona graficznie przedstawiona na rys.1b.

W praktyce przyjmuje się, że neurony nie są połączone same ze sobą: $w_{ii} = 0$ dla $i = 1,2,\ldots,N$, oraz że połączenia są symetryczne tj. $w_{ij} = w_{ji}$ dla $i,j = 1,2,\ldots,N$.

Warto nadmienić w tym momencie, że przedstawiona tutaj struktura jest jedną z wielu możliwych struktur sieci Hopfielda. Ewentualne zmiany mogą dotyczyć:

– postaci funkcji aktywacji neuronów,
– trybu pracy - zamiast pracy synchronicznej tzn. takiej, w której wartości sygnałów wyjściowych wszystkich neuronów uaktualniane są jednocześnie,

można zastosować tryb pracy asynchronicznej, w której jednorazowo uaktualniane jest wyjście tylko jednego neuronu,
- czasu pracy – uaktualnianie może następować ciągle, a nie w dyskretnych chwilach czasu.

2. Sieć Hopfielda jako pamięć skojarzeniowa

Zadaniem sieci Hopfielda pracującej jako pamięć skojarzeniowa jest "zapamiętanie" P wzorców $\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2, \ldots, \boldsymbol{d}^P$ tak aby po podaniu na wejście sieci sygnału $\boldsymbol{x}$ na jej wyjściu ustalił się wektorowy sygnał $\boldsymbol{y}_{ust}$ odpowiadający jednemu z wzorców $\boldsymbol{y}_{ust} = \boldsymbol{d}^i$. Odtworzony wzorzec powinien być ponadto "najbliższy" wektorowi $\boldsymbol{x}$. Jako miarę odległości pomiędzy wektorami $\boldsymbol{x}$ i $\boldsymbol{y}_{ust}$ przyjmuje się miarę Hamminga definiowaną następująco:

$$\left\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}_{ust} \right\| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \left| x_i - y_{ust\,i} \right| \tag{4}$$

gdzie indeks i oznacza i-tą składową wektora. Łatwo zauważyć, że zgodnie z tą miarą odległość pomiędzy dwoma wektorami jest po prostu równa liczbie składowych obu wektorów różnych od siebie.

Sieć Hopfielda wykorzystywana jako pamięć skojarzeniowa powinna więc na podstawie danych wejściowych (najczęściej zakłóconych) "odtwarzać" najbliższy zapamiętany wzorzec. Tego typu zachowanie sieci powinno być zapewnione poprzez dobór odpowiednich wag $\boldsymbol{W}$ na etapie uczenia.

3. Uczenie sieci Hopfielda

Po podaniu na wejście sieci wektora $\boldsymbol{x}$ wektor wyjść neuronów zmienia się w kolejnych chwilach czasu zgodnie z zależnością (3) generując ciąg $\boldsymbol{y}(0)$, $\boldsymbol{y}(1)$, $\boldsymbol{y}(2)$,... . Jeżeli począwszy od pewnego k wyjścia sieci nie zmieniają się dalej: $\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{y}(k+1) = \ldots = \boldsymbol{y}_{ust}$, mówimy, że sieć Hopfielda znalazła się w stanie równowagi. Warunkiem na to aby pewien stan $\boldsymbol{y}_r$ był stanem równowagi jest spełnienie następującej równości:

$$\boldsymbol{y}_r = \operatorname{sgn}\left[\boldsymbol{W} \boldsymbol{y}_r \right] \tag{5}$$

Uczenie sieci Hopfielda będzie polegało zatem na takim doborze wag sieci aby wzorce $\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2, \ldots, \boldsymbol{d}^P$ stały się właśnie takimi punktami równowagi. Omówione tutaj zostały dwie reguły uczenia sieci neuronowej Hopfielda: reguła Hebba i reguła pseudoinwersji.

Reguła Hebba

W przypadku jednego wzorca $\boldsymbol{d}$ wagi sieci neuronowej dobieramy zgodnie z poniższą zależnością:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} d_i d_j; \qquad i, j = 1,2,\ldots,N, \tag{6}$$

lub w zapisie macierzowym

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{N} \boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T. \tag{7}$$

Aby sprawdzić czy przy takim sposobie doboru wag wzorzec $\boldsymbol{d}$ stanie się punktem równowagi wystarczy sprawdzić prawdziwość (5). Istotnie, prawa strona tej równości wynosi:

$$\operatorname{sgn}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{d}) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{N}\boldsymbol{d}\boldsymbol{d}^T\boldsymbol{d}\right) = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{N}\boldsymbol{d}\,N\right) = \operatorname{sgn}(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}$$

a zatem wzorzec $\boldsymbol{d}$ jest punktem równowagi sieci.

W przypadku większej liczby wzorców $\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2, \ldots, \boldsymbol{d}^P$ wagi sieci Hopfielda dobierane są wg uogólnionej reguły Hebba:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{P} d_i^n d_j^n; \qquad i, j = 1,2,\ldots,N. \tag{8}$$

Jeśli utworzymy z wzorców macierz $\boldsymbol{D} = \left[\boldsymbol{d}^1, \boldsymbol{d}^2, \ldots, \boldsymbol{d}^N\right]$ to otrzymamy macierzową postać wzoru (8):

$$\boldsymbol{W} = \frac{1}{N} \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^T. \tag{9}$$

Niestety, nie zawsze w przypadku wielu wzorców podana reguła powoduje, że wszystkie wzorce stają się punktami równowagi. W przypadku gdy wzorców jest "za dużo" w stosunku do liczby neuronów sieci, następuje "lawinowe zapominanie" wzorców. Ze zjawiskiem tym związane jest pojęcie pojemności sieci to znaczy maksymalnej liczby wzorców które są prawidłowo zapamiętywane. Można wykazać [4], [5], że pojemność sieci uczonej przy użyciu uogólnionej reguły Hebba dana jest wzorem

$$P_{max} = 0{,}138\, N. \tag{10}$$

Stosunkowo mała pojemność sieci uczonej przy użyciu uogólnionej reguły Hebba jest istotną wadą tej reguły. Większą pojemność uzyskuje się przy zastosowaniu reguły pseudoinwersji.

Reguła pseudoinwersji

Zgodnie z tą regułą wagi sieci dobieramy posługując się wzorem

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{P})^{-1} \boldsymbol{P}^T. \tag{11}$$

Jak już wcześniej wspomniano zaletą tej reguły w stosunku do uogólnionej reguły Hebba jest większa pojemność sieci, która w tym przypadku wynosi [4]:

$$P_{max} = N - 1. \tag{12}$$

Istnieje rekurencyjna wersja reguły pseudoinwersji nie wymagająca odwracania macierzy $\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{P}$.

Łatwo zauważyć, że dla jednego wzorca reguła Hebba i reguła pseudoinwersji dają taki sam wynik.

4. Funkcja energetyczna i stabilność sieci Hopfielda

Wykazaliśmy poprzednio, że przedstawione reguły uczenia sieci Hopfielda wytwarzają odpowiednie stany równowagi. Wokół stanów równowagi wytworzone są obszary stabilności asymptotycznej tzn. takie podzbiory przestrzeni stanów sieci, że sieć startując z nich dochodzi do tych stanów równowagi. W celu wykazania tego faktu wprowadźmy funkcję energetyczną, będącą w istocie funkcją Lapunowa, znaną z drugiej (bezpośredniej) metody badania stabilności układów dynamicznych:

$$E(k) = -\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T(k)\boldsymbol{W}\boldsymbol{y}(k) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i(k) y_j(k) \tag{13}$$

W przypadku sieci neuronowej uczonej jednego wzorca ***d*** funkcja energetyczna osiąga minimum (globalne) gdy wyjście sieci jest równe temu wzorcowi. Podstawiając (6) do (13) dostajemy bowiem minimalną jej wartość:

$$E = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{N}d_i d_j\right)d_i d_j = -\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}d_i^{\,2} d_j^{\,2} = -\frac{N}{2}. \tag{14}$$

Podobnie, w przypadku wielu wzorców, podczas nauki tworzonych jest wiele minimów lokalnych odpowiadających tym wzorcom.

Aby wykazać, że sygnały wyjściowe neuronów sieci zdążają do tych minimów udowodnimy teraz, że funkcja energetyczna jest nierosnącą funkcją dyskretnego czasu *k*. Spełnione jest to gdy sieć pracuje w trybie asynchronicznym, tzn. takim, w którym jednorazowo w *k*-tym kroku uaktualniane jest wyjście tylko jednego *i*-tego neuronu. Wyjście *i*-tego neuronu zmienia się wtedy z $y_i(k)$ na $y_i(k+1)$. Ponieważ wyjścia pozostałych neuronów nie zmieniają się, przyrost funkcji energetycznej równa się

$$\begin{aligned} \Delta E &= E(k+1) - E(k) = \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i(k+1) y_j(k) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_i(k) y_j(k) = \\ &= -\frac{1}{2}\left[y_i(k+1) - y_i(k)\right] \sum_{j=1}^{N} w_{ij} y_j(k) \end{aligned} \tag{15}$$

Zauważmy, że suma w ostatnim wyrażeniu (15) jest pobudzeniem *i*-tego neuronu w *k*-tej chwili $v_i(k)$, od którego zależy $y_i(k+1)$. Mamy więc:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left\{\mathrm{sgn}\left[v_i(k)\right] - y_i(k)\right\} v_i(k). \tag{16}$$

Podczas uaktualniania y_i może: nie zmienić się, zmienić się z –1 na 1 lub zmienić się z 1 na –1. Łatwo sprawdzić, że w żadnym z tych trzech przypadków ΔE nie jest dodatnie. Ostatecznie więc:

$$\Delta E \le 0. \tag{17}$$

Zatem, funkcja energetyczna (13) jest nierosnącą funkcją dyskretnego czasu *k*, co powoduje, że sieć Hopfielda zmienia podczas swej pracy sygnały wyjściowe w taki sposób by osiągnąć stan odpowiadający minimum funkcji energetycznej czyli odtworzyć któryś z zapamiętanych wzorców.

Oprócz minimów odpowiadających zapamiętanym wzorcom mogą powstać również minima nie odpowiadające żadnemu z wzorców - tzw. minima fałszywe. Fakt ten może spowodować, że w procesie rozpoznawania żaden z wzorców nie zostanie odtworzony pomimo, że wszystkie wzorce zostały prawidłowo zapamiętane (wokół nich powstały odpowiadające im minima).

III. PRZEBIEG ĆWICZENIA

1. Napisać program modelujący sieć Hopfielda wraz ze wskazaną regułą uczenia.
2. Zastosować napisany program do rozpoznawania podanych przez prowadzącego ćwiczenie przykładowych wzorców.
3. Zbadać wpływ
   a) liczby neuronów,
   b) liczby wzorców,
   c) zakłóceń

   na

   a) poprawność odtwarzania wzorca,
   b) powstawanie fałszywych minimów.

IV. SPRAWOZDANIE

Sprawozdanie powinno zawierać pełną dokumentację z przeprowadzenia ćwiczenia zgodnie z zadanym jego przebiegiem oraz omówienie uzyskanych rezultatów.

LITERATURA

1. J. Hertz, A. Krogh, R.G. Palmer, *Wstęp do teorii obliczeń neuronowych*, WNT, Warszawa 1993,
2. R. Tadeusiewicz, *Sieci neuronowe*, Akademicka Oficyna wydawnicza, Warszawa 1993,
3. J. Korbicz, A. Obuchowicz, D. Uciński, *Sztuczne sieci neuronowe - podstawy i zastosowania*, Akademicka Oficyna Wydawnicza, Warszawa 1994,
4. S. Osowski, *Sieci neuronowe*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1996,
5. S. Osowski, *Sieci neuronowe w ujęciu algorytmicznym*, WNT, Warszawa 1996.