1 Wstęp

Problem jaki został przed nami postawiony to poprowadzenie przez N punktów postaci (x_i, y_i), wielomianu interpolacyjnego stopnia N - 1, mającego taką własność, że $W(x_i) = y_i$.
Wielomian taki, można zapisać w postaci:
$W(x) = c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_1 x + c_0$
Wtedy współczynniki wielomianu są zadane N równaniami algebraicznymi o N niewiadomych.

$$\begin{cases} c_0 & +c_1 x_1 & +c_2 x_1^2 & + \dots & +c_{N-2} x_1^{N-2} + & c_{N-1} x_1^{N-1} & = y_1 \\ c_0 & +c_1 x_2 & +c_2 x_2^2 & + \dots & +c_{N-2} x_2^{N-2} + & c_{N-1} x_2^{N-1} & = y_2 \\ & & & \vdots & & & \\ c_0 & +c_1 x_N & +c_2 x_N^2 & + \dots & +c_{N-2} x_N^{N-2} + & c_{N-1} x_N^{N-1} & = y_N \end{cases},$$

Co można zapisać w formie macierzowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-2} & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-2} & x_2^{N-1} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-2} & x_N^{N-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}.$$

Czyli $A * x = b$
Tak postawiony problem, można rozwiązać za pomocą rozkładu LU. Metoda ta polega na zastąpieniu macierzy A, iloczynem macierzy L i U, gdzie macierz L jest macierzą trójkątną dolną, z jedynkami na diagonali, zaś U jest macierzą trójkątną górną. Tego rozkładu dokonuje metoda **ludcmp** (z biblioteki Numerical Recipes), po użyciu tej procedury mamy do rozwiązania dwa równania macierzowe, z macierzami trójkątnymi, mianowicie: $L * y = b$, oraz $U * x = y$, ten etap przeprowadzamy procedurą **lubksb** (także z Numerical Recipes), która przeprowadza postępowanie odwrotne.
11 punktów do których próbowaliśmy dopasować wielomian były w formacie:
$(x_i, 2 * sinx_i)$, gdzie $x_i \in \{-1, -0.8, -0.6, ..., 0.6, 0.8, 1\}$
Skoro w zestawie danych było 11 punktów, to zgodnie z wcześniejszym stwierdzeniem, wielomian interpolacyjny jest

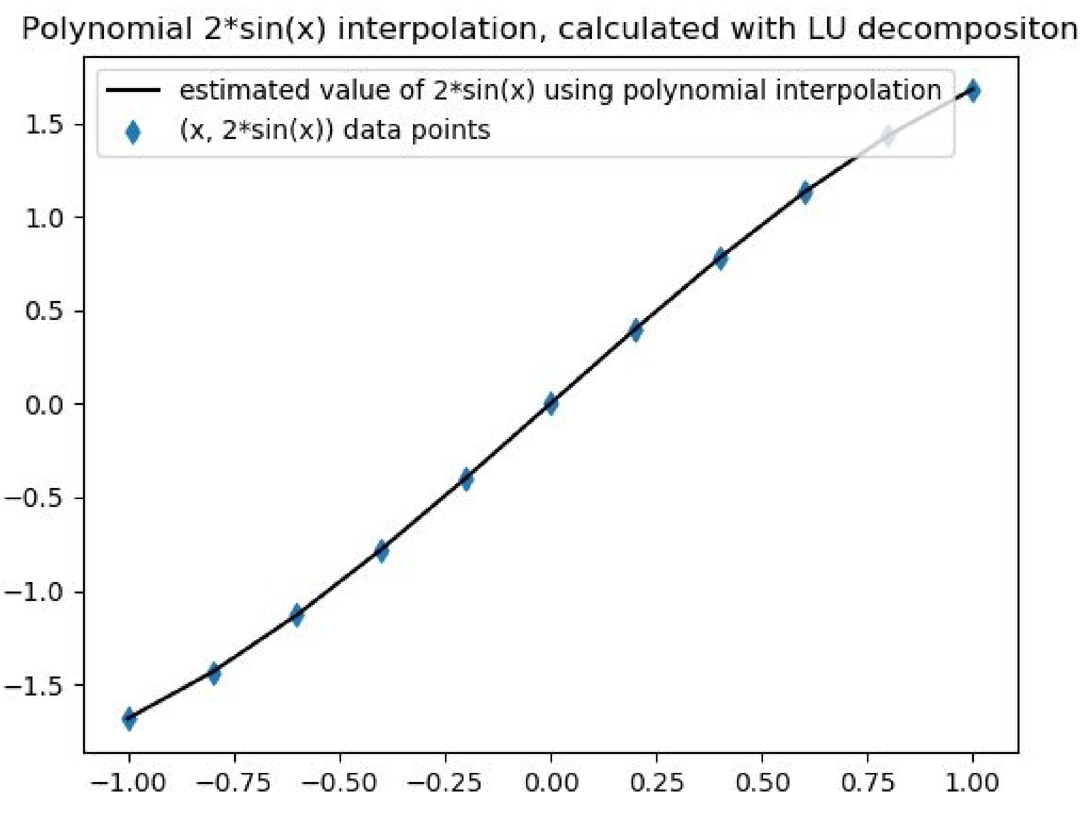
10 stopnia i posiada 11 współczynników do wyliczenia.

2 Wyniki

Wyestymowane współczynniki wielomianu interpolacyjnego prezentują się następująco:

$c_0 = 1.36366 * 10^{-7}$
$c_1 = 2$
$c_2 = -3.06655 * 10^{-6}$
$c_3 = -0.333338$
$c_4 = 3.85036 * 10^{-6}$
$c_5 = 0.0166888$
$c_6 = -0.000150838$
$c_7 = -0.000431355$
$c_8 = 0.000221828$
$c_9 = 2.24153 * 10^{-5}$
$c_{10} = -0.000106325$

Dzięki wyliczonym współczynnikom wielomianu, możemy narysować nasz wielomian w przedziale $<-1, 1>$



Rysunek 1. Zestawienie wykresu wyliczonego wielomianu w przedziale $< -1, 1 >$, oraz punktów z zestawu danych.

3 Wnioski

Wyniki są bardzo satysfakcjonujące, współczynniki wielomianu $W(x)$ są niemalże identyczne do analitycznego rozwinięcia funkcji $f(x) = 2 * sinx$, które według programu Wolfram Alfa wynosi $f(x) = 2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + O(x^7)$.

Ponadto na Rysunku 1 widzimy, że wykres naszego wyestymowanego wielomianu przechodzi przez wszystkie punkty z zestawu danych i przypomina funkcję $f(x) = 2 * sinx$ na przedziale $< -1, 1 >$.