1. Wstęp

Podczas czwartych zajęć laboratoryjnych zajęliśmy się tematyką rozwiązywania układów równań liniowych za pomocą metod iteracyjnych. Celem postawionego przed nami zadania było rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego dla kilku pierwszych okresów drgań, danego równaniem różniczkowym:

$$\frac{\partial^2 x(t)}{\partial t^2} = -\omega^2 x(t)$$

Aby skorzystać z iteracyjnych metod rozwiązywania równań liniowych musieliśmy najpierw przekształcić zadane równanie różniczkowe w liniowe, w tym celu przybliżamy lewą stronę równania ilorazem różnicowym:

$$\frac{\partial^2 x(t_i)}{\partial t^2} = \frac{x(t_i+\Delta t) - 2x(t_i) + x(t_i - \Delta t)}{(\Delta t)^2}$$

Oznaczamy $\Delta t = h,\ x_i = x\,(t_i)$, wtedy otrzymujemy postać równania:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} = 0$$

Następnie, możemy przyjąć warunki początkowe $x_0 = A,\ x_1 = \frac{x_1 - x_0}{h}$, wtedy nasze równanie możemy zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (\omega^2 h^2 - 2) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ v_0 h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Możemy zapisać to jako $A * x = b$

Do rozwiązania tego równania wybraliśmy metodę Jacobiego, stąd musimy rozłożyć macierz A na macierze D, U, L gdzie kolejno oznaczają macierz diagonalną, macierz trójkątną górną i macierz trójkątną dolną, takie, że $A = D + U + L$.

W naszym przypadku na macierzy $D = 1, U = 0$ natomiast macierz L na pierwszej poddiagonali ma prawie wszędzie $\omega^2 h^2 - 2$, a na drugiej poddiagonali same jedynki.

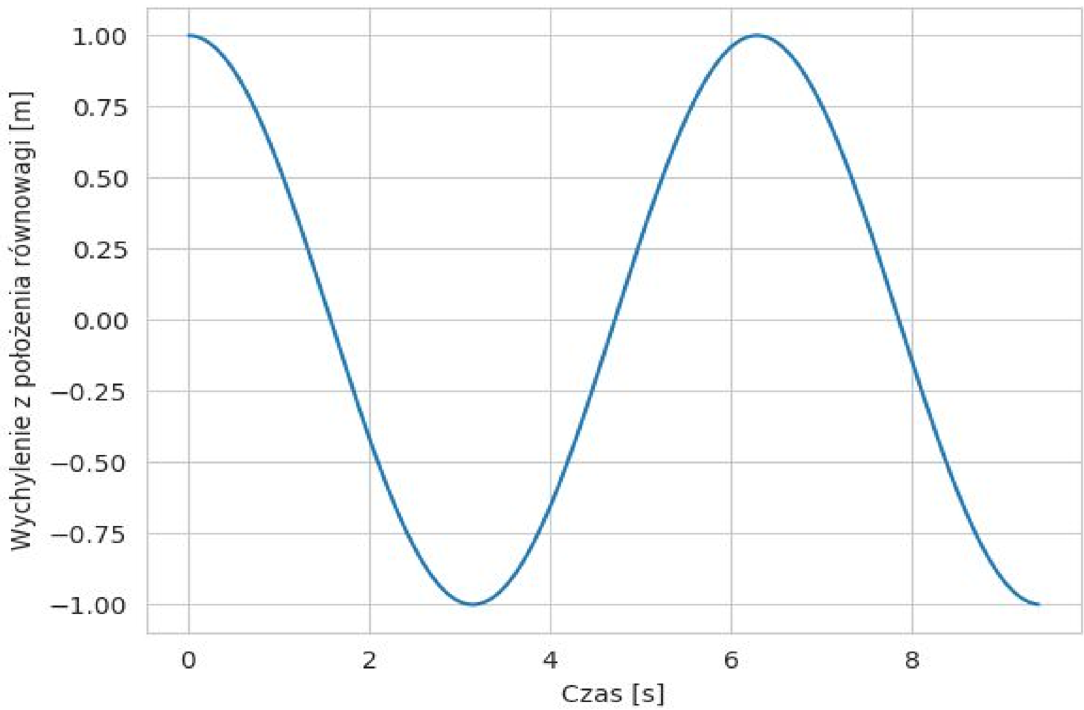
Iteracyjny przepis na metodę Jacobiego $x^{(n+1)} = (1 - D^{-1}A)x^{(n)} + D^{-1}b$ w naszym przypadku sprowadza się do
$x^{(n+1)} = (1 - A)x^{(n)} + b$, a wzór roboczy przyjmuje postać

$$x_i^{(n+1)} = b_i - \sum_{i \neq j} a_{ij} x_j^{(n)} \quad .$$

W celu uproszczenia obliczeń przyjęliśmy:
$A = 1,\ v_0 = 0,\ t_{max} = 4\pi,\ h = \frac{t_{max}}{1001},\ \omega = 1,\ t_{max}$ to suma wszystkich okresów, które chcemy przedstawić.

2. Wyniki

Nasz program wykonuje 1000 iteracji, każda iteracja znajduję kolejne przybliżenia rozwiązania równania.



Rysunek 1. Wykres przedstawiający znalezione rozwiązania

3. Wyniki

Za pomocą metody Jacobiego, rozwiązaliśmy równanie oscylatora harmonicznego. Wykres który otrzymaliśmy to wykres przesuniętej funkcji sinus, świadczy to o poprawnym wykonaniu ćwiczenia, ponieważ rozwiązaniem równania oscylatora harmonicznego jest właśnie funkcja sinus.

Metoda Jacobiego może służyć do dokładnych obliczeń rozwiązań równań liniowych, jednak wiele równań znacząco zwiększa czas wykonywania obliczeń.