1 Wstęp

Celem drugich zajęć laboratoryjnych było rozwiązanie czterech układów równań liniowych za pomocą metody Gaussa-Jordana, oraz obliczenie współczynnika uwarunkowania macierzy współczynników.

Za pomocą dwóch macierzy współczynników i dwóch wektorów wyrazów wolnych, zostały zadane cztery układy równań:

1) $A * x = b$
2) $A * x = b'$
3) $A' * x = b'$
4) $A' * x = b$

$$\mathbf{b}' = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.89 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Do rozwiązania układów, użyłem procedury ***gaussj*** z biblioteki Numerical Recipes. Funkcja ta implementuje metodę Gaussa-Jordana wraz z metodą pełnego wyboru elementów głównych. Metoda Gaussa-Jordana, polega na tym, że pierwszy rząd jest dzielony przez element a_{11} (zostaje 1), a następnie od reszty wierszy odejmowany jest wiersz pierwszy pomnożony przez odpowiedni czynnik, tak aby elementy a_{i1} zostały wyzerowane. Następnie dzieje się to samo dla drugiego wiersza i drugiego elementu na diagonali, czyli a_{22},tak kolejno dla następnych wierszy i kolejnych elementów diagonalnych.

Może nastać sytuacja, że na diagonali będzie 0, algorytm nie może podzielić danego wiersza przez 0, wtedy następuje proces wyboru elementów głównych, okazuje się, że dobrze wybrany element główny to ten największy z możliwych, a można wybrać spośród elementów znajdujących się w prawych kolumnach od aktualnego elementu i w wierszach pod aktualnym elementem, tak aby nie zepsuć do tej pory otrzymanej macierzy. Kiedy algorytm znajdzie odpowiednią liczbę, w macierzy zamieniamy wiersze, lub/i kolumny, tak aby ten element znalazł się na diagonali w miejscu zera, wtedy można podzielić wiersz przez tę liczbę. Wszystkie działania, które wykonuje się na macierzy współczynników dokonuje się także na korespondującym wektorze wyrazów wolnych, oraz macierzy jednostkowej, która po skończeniu eliminacji, na skutek działań na rzędach i kolumnach zostanie macierzą odwrotną do oryginalnej macierzy współczynników. Po otrzymaniu jednostkowej diagonali, algorytm robi analogiczne operacje dla elementów nad diagonalą, tak aby powstała macierz jednostkowa. Algorytm dzięki wprowadzeniu metody wyboru głównych elementów jest numerycznie stabilny (eliminacja Gaussa-Jordana nie jest numerycznie stabilna).

Współczynnik uwarunkowania macierzy zdefiniowany jest jako:
$cond(A) = \|A\| * \|A^{-1}\|$
Gdzie $\|A\| = N * max(|a_{ij}|),\ dla\ 1 \le i,j \le N$
Współczynnik ten, mówi nam, w jakim stopniu błąd reprezentacji numerycznej danych wejściowych danego problemu wpływa na błąd wyniku.

2 Wyniki

Otrzymałem rozwiązania:
dla układu 1): $X = [1.00002,\ 0.999968,\ 1.00001,\ 0.999996]$
dla układu 2): $X = [9.20001,\ -12.6,\ 4.5,\ -1.1]$
dla układu 3): $X = [-34.6472,\ 60.0524,\ -14.5007,\ 10.5085]$
dla układu 4): $X = [14.5996,\ -21.8012,\ 7.1966,\ -2.73331]$
$cond(A) = 10880$

3 Wnioski

Macierz A ma duży współczynnik uwarunkowania. Widzimy, że mała zmiana w danych wejściowych prowadzi do bardzo dużej rozbieżności wyników, nawet rozbieżności rzędu 0.2 (największe jakie zostały wprowadzone) całkowicie odkształcają wynik.