

ANALIZA MATEMATYCZNA

LISTA ZADAŃ 2

16.10.2017

- (1) Znajdź potęgi naturalne liczby \mathbf{i} , czyli wyznacz liczby zespolone postaci \mathbf{i}^n dla wszystkich liczb naturalnych n .
- (2) Kiedy kwadrat liczby $a + b\mathbf{i}$ jest liczbą: a) rzeczywistą, b) ujemną, c) urojoną?
- (3) Jakie muszą być argumenty liczb zespolonych z, w , różnych od zera, aby a) iloczyn zw , b) iloraz z/w były rzeczywiste?
- (4) Udowodnij następujące własności sprzężenia liczb zespolonych:
 - (a) $\overline{\overline{z}} = z$,
 - (b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
 - (c) $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$,
 - (d) $\Re(z) = (z + \overline{z})/2$, $\Im(z) = (z - \overline{z})/2\mathbf{i}$.
- (5) Znajdź moduły liczb zespolonych $z = -2 - 3\mathbf{i}$ oraz $z = 1 - \mathbf{i}$.
- (6) Udowodnij, że dla dowolnych liczb $z, w \in \mathbf{C}$ mamy następujące własności:
 - (a) $|z| \geq 0$ i $|z| = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $z = 0$,
 - (b) $|zw| = |z||w|$,
 - (c) $|z + w| \leq |z| + |w|$,
 - (d) $|z - w| \geq ||z| - |w||$.
- (7) Naskicuj na płaszczyźnie zbiory liczb $z \in \mathbf{C}$ spełniających nierówności:
 - (a) $|z| < 2$,
 - (b) $|z + 3\mathbf{i}| < 1$,
 - (c) $|z + 4 - 2\mathbf{i}| \leq 3$.
- (8) Wyznacz postać trygonometryczną następujących liczb zespolonych:
 - (a) $-6 + 6\mathbf{i}$,
 - (b) $2\mathbf{i}$,
 - (c) $1 + \mathbf{i}$,
 - (d) $2\sqrt{2} + \mathbf{i}$.
- (9) Oblicz:
 - (a) $\frac{1 + \mathbf{i}}{1 - \mathbf{i}}$,
 - (b) $\frac{2\mathbf{i}}{1 + \mathbf{i}}$,
 - (c) $\frac{4 - 3\mathbf{i}}{4 + 3\mathbf{i}}$,
 - (d) $\sqrt{-3 - 4\mathbf{i}}$,
 - (e) $(2 + \mathbf{i}\sqrt{12})^5$,
 - (f) $(1 + \cos \frac{1}{3}\pi + \mathbf{i} \sin \frac{1}{3}\pi)^6$,
 - (g) $(1 + \mathbf{i})^{10}$,
 - (h) $\left(\frac{1 + \mathbf{i}}{\sqrt{2}}\right)^{26}$,
 - (i) $\frac{(1 + \mathbf{i})^n}{(1 - \mathbf{i})^{n-2}}$, $n \in \mathbf{N}$.
- (10) Znajdź wszystkie wartości pierwiastków:
 - (a) $\sqrt[4]{1}$,
 - (b) $\sqrt[3]{-1}$,
 - (c) $\sqrt[4]{1 + \mathbf{i}}$,
 - (d) $\sqrt[3]{2 - 2\mathbf{i}}$,
 - (e) $\sqrt[6]{-27}$,
 - (f) $\sqrt{3 + 4\mathbf{i}}$,
 - (g) $\sqrt[3]{1}$,
 - (h) $\sqrt[3]{\mathbf{i}}$.
 Pokaż ich położenie na płaszczyźnie.
- (11) Znajdź wszystkie pierwiastki równań:
 - (a) $x^5 - 1024 = 0$,
 - (b) $x^4 - \mathbf{i} = 0$,
 - (c) $x^4 + 4 = 0$.
- (12) Udowodnij równość $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$.
- (13) Niech $a, b, c \in \mathbf{C}$ będą dowolne, $a \neq 0$ i niech $d \in \mathbf{C}$ będzie jednym z pierwiastków $\sqrt{b^2 - 4ac}$. Udowodnij, że pierwiastki równania $az^2 + bz + c = 0$ są postaci

$$z = \frac{-b \pm d}{2a}.$$