

# ANALIZA MATEMATYCZNA

## LISTA ZADAŃ 13

15.01.18

- (1) Oblicz pole figury ograniczonej krzywymi:
  - (a)  $y = x^2$  i  $y = 2x + 5$ ,
  - (b)  $y = e^x$  i prostą przechodzącą przez punkty  $(0, 1)$  i  $(1, e)$ ,
  - (c)  $y = \sin(x)$  i  $y = \frac{2x}{\pi}$ ,
  - (d)  $y = x^4$  i  $y = x^3$ ,
  - (e)  $y = \frac{1}{x}$  i  $y = \frac{5}{2} - x$ ,
  - (f)  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = \frac{1}{x^3}$  i  $x = 2$ .
- (2) Oblicz długość łuku krzywej  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  dla podanych  $f(x)$  i  $[a, b]$ :
  - (a)  $x$ ,  $[1, 2]$ ,
  - (b)  $2x - 3$ ,  $[-7, 12]$ ,
  - (c)  $e^x$ ,  $[1, 2]$ ,
  - (d)  $\sqrt{x^3}$ ,  $[6, 10]$ ,
  - (e)  $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $[0, 1]$ .
- (3) Dla danych  $f(x)$  i  $[a, b]$  oblicz pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót krzywej  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  wokół osi  $OX$ :
  - (a)  $x^3$ ,  $[0, 5]$ ,
  - (b)  $e^{-x}$ ,  $[0, 10]$ ,
  - (c)  $\sqrt{x}$ ,  $[0, 4]$ ,
  - (d)  $\sin(x)$ ,  $[0, \pi]$ ,
  - (e)  $\cos(7x)$ ,  $[0, 2\pi]$ .
- (4) Dla danych  $f(x)$  i  $[a, b]$  oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru  $0 \leq y \leq f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$  wokół osi  $OX$ :
  - (a)  $\sqrt{x}$ ,  $[0, 1]$ ,
  - (b)  $x$ ,  $[1, 5]$ ,
  - (c)  $x^7$ ,  $[0, 10]$ ,
  - (d)  $e^x$ ,  $[-3, 0]$ ,
  - (e)  $\sin(x)$ ,  $[0, \frac{3\pi}{2}]$ .
- (5) Oblicz długość łuku krzywej  $y = \sqrt{(x+5)^3}$ ,  $0 \leq x \leq 8$ .
- (6) Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru  $0 \leq y \leq xe^x$ ,  $0 \leq x \leq 1$  wokół osi  $OX$ .
- (7) Oblicz długość łuku krzywej  $y = \log(x)$ ,  $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ .
- (8) Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót obszaru  $\arctan(x) \leq y \leq \sqrt{\arctan^2(x) + 1 + \sin(x)}$ ,  $0 \leq x \leq 2\pi$  wokół osi  $OX$ .
- (9) Od pomarańczy o grubej skórce odcięto końce, tak, że ukazał się miąższ. Pomarańczę następnie pokrojono w równe plastry. Pokaż, że każdy plaster zawiera tyle samo skórki.
- (10) Zbadaj zbieżność całek niewłaściwych i oblicz te, które są zbieżne:
  - (a)  $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 1}$ ,
  - (b)  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ,
  - (c)  $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ,
  - (d)  $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{x^2-1} dx$ ,
  - (e)  $\int_2^\infty \frac{dx}{x \log(x)}$ ,
  - (f)  $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}}$ ,
  - (g)  $\int_0^\infty \cos(x) dx$ ,
  - (h)  $\int_1^\infty x^{\frac{1}{x}} dx$ ,
  - (i)  $\int_{-\infty}^\infty e^x dx$ ,
  - (j)  $\int_0^1 e^{\frac{1}{x}} dx$ ,
  - (k)  $\int_1^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^3} dx$ ,
  - (l)  $\int_2^\infty \frac{dx}{x \log^2(x)}$ ,
  - (m)  $\int_0^\infty x^3 \sin(x^4) dx$ .