

APROKSYMACJA ŚREDNIOKWADRATOWA (CIĄGŁA)

Poszukujemy wielomianu uogólnionego W stopnia n , będącego najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym ciągłej funkcji f :

$$W(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x),$$

gdzie φ_i to znane funkcje bazowe.

W tym celu należy znaleźć współczynniki a_0, a_1, \dots, a_n . Aby je wyznaczyć, należy rozwiązać układ równań algebraicznych

$$\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0n} \\ A_{10} & A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n0} & A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

gdzie

$$A_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)p(x)dx, \quad i, j = 0, 1, \dots, n,$$
$$b_i = \int_a^b \varphi_i(x)f(x)p(x)dx, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

oraz φ_i to funkcje bazowe, p to waga, f to funkcja, dla której poszukujemy aproksymacji średniokwadratowej, a i b to krańce przedziału w jakim aproksymujemy funkcję, zaś n to stopień poszukiwanego wielomianu aproksymującego W .

W szczególności w charakterze funkcji bazowych można przyjąć ciąg jednomianów

$$\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x, \varphi_2(x) = x^2, \varphi_3(x) = x^3, \dots, \varphi_n(x) = x^n$$

z wagą $p(x) = 1$.

Przykład

Znaleźć aproksymację średniokwadratową dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w przedziale $[1,3]$. Przyjmujemy funkcje bazowe przedstawione powyżej oraz $p(x) = 1$.

Funkcję aproksymującą przyjmujemy w postaci wielomianu drugiego stopnia (na potrzeby prezentacji obliczeń; program musi dawać możliwość aproksymacji dowolnym wielomianem)

$$W(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

stąd $n = 2$.

Jak widzimy niewiadomymi są współczynniki a_0, a_1, a_2 . Aby je wyznaczyć musimy rozwiązać układ

$$\begin{bmatrix} \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_0(x)p(x)dx & \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_1(x)p(x)dx & \int_a^b \varphi_0(x)\varphi_2(x)p(x)dx \\ \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_0(x)p(x)dx & \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_1(x)p(x)dx & \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)p(x)dx \\ \int_a^b \varphi_2(x)\varphi_0(x)p(x)dx & \int_a^b \varphi_2(x)\varphi_1(x)p(x)dx & \int_a^b \varphi_2(x)\varphi_2(x)p(x)dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_a^b \varphi_0(x)f(x)p(x)dx \\ \int_a^b \varphi_1(x)f(x)p(x)dx \\ \int_a^b \varphi_2(x)f(x)p(x)dx \end{bmatrix}$$

Wskazówka. Dla $n = 3$ otrzymamy układ 4×4 , dla $n = 4$ układ 5×5 , itd. Wówczas do układu równań dodajemy całki o takiej samej postaci jak wyżej tylko z kolejnymi indeksami i oraz j .

Wskazówka. Pamiętajcie, że w waszym programie musi być możliwość wyboru stopnia wielomianu aproksymującego. Od niego zaś będzie zależała liczba niewiadomych oraz rozmiar układu równań.

Po podstawieniu funkcji bazowych φ_i , wagi p , funkcji f , dla której poszukujemy aproksymacji oraz założonego przedziału $a = 1, b = 3$ otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} \int_1^3 1 \cdot 1 \cdot 1dx & \int_1^3 1 \cdot x \cdot 1dx & \int_1^3 1 \cdot x^2 \cdot 1dx \\ \int_1^3 x \cdot 1 \cdot 1dx & \int_1^3 x \cdot x \cdot 1dx & \int_1^3 x \cdot x^2 \cdot 1dx \\ \int_1^3 x^2 \cdot 1 \cdot 1dx & \int_1^3 x^2 \cdot x \cdot 1dx & \int_1^3 x^2 \cdot x^2 \cdot 1dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_1^3 1 \cdot \sqrt{x} \cdot 1dx \\ \int_1^3 x \cdot \sqrt{x} \cdot 1dx \\ \int_1^3 x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot 1dx \end{bmatrix}$$

Po obliczeniu całek dostajemy

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8. (6) \\ 4 & 8. (6) & 20 \\ 8. (6) & 20 & 48.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7974 \\ 5.83538 \\ 13.0782 \end{bmatrix}$$

Wskazówka. Układ równań rozwiązujemy za pomocą eliminacji Gaussa. Całki wyznaczamy numerycznie za pomocą wybranej napisanej przez was metody całkowania (trapezy, Simpson, kwadratury Gaussa-Legendre'a). Podane powyżej wartości zostały policzone analitycznie, w związku z tym otrzymane przez Państwa rozwiązania mogą się nieznacznie różnić. Wielkość tej różnicy będzie oczywiście zależna od przyjętej dokładności całkowania numerycznego (wartości n).

Po rozwiązaniu układu otrzymano niewiadome współczynniki w następującej postaci:

$$a_0 = 0.50289, a_1 = 0.550899, a_2 = -0.047532.$$

Zatem funkcja aproksymująca przyjmuje postać:

$$W(x) = 0.50289 + 0.550899x - 0.047532x^2$$

Za pomocą wielomianu aproksymującego możemy wyznaczyć wartości w dowolnym punkcie z założonego przedziału $[1,3]$, np.

$$W(1) = 1.0062588$$

$$W(2) = 1.4145614$$

Założenia do programu:

- realizuje metodę aproksymacji średniokwadratowej ciągłej
- ma działać dla dowolnego stopnia wielomianu aproksymującego n (wpływ stopnia na wynik będzie podlegał analizie w sprawozdaniu) oraz dowolnej funkcji f
- dane wejściowe to f, a, b oraz x w którym poszukujemy rozwiązania
- funkcje bazowe φ_i oraz wagi p przyjmujemy takie jak podano w przykładzie powyżej
- program zwraca wartość wielomianu aproksymującego dla konkretnego, podanego przez użytkownika x (podobnie jak w interpolacji)
- wykorzystując do obliczeń całek wybraną metodę numeryczną przyjmijcie na stałe dosyć dużą liczbę przedziałów (n), aby wyniki całek były dokładne (np. $n=20$)