

INTERPOLACJA. Metoda Newtona (różnice progresywne)

Metoda działa przy założeniu równoodległych węzłów (takich samych różnic pomiędzy argumentami x), czyli dla każdego $x_{i+1} - x_i = h$.

Wskazówka: wasze przykłady spełniają powyższy warunek

Następnie definiujemy pojęcie różnic progresywnych. W przypadku pierwszej różnicy progresywnej obliczamy różnicę wartości funkcji między następnym a poprzednim węzłem:

$$\Delta f_i = f(x_{i+1}) - f(x_i),$$

natomiast wzór ogólny można zapisać:

$$\Delta^n f_i = \Delta(\Delta^{n-1} f_i).$$

Przykładem różnicy drugiego rzędu nazywamy różnicę przy wykorzystaniu powyższego wzoru określoną:

$$\Delta^2 f_i = \Delta(\Delta f_i) = \Delta[f(x_{i+1}) - f(x_i)] = f(x_{i+2}) - f(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) + f(x_i) = f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)$$

Wielomian interpolacyjny Newtona z różnicami progresywnymi:

$$W(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{\Delta f_0}{1!h}}_{a_1}(x - x_0) + \underbrace{\frac{\Delta^2 f_0}{2!h^2}}_{a_2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \underbrace{\frac{\Delta^{n-1} f_0}{(n-1)!h^{n-1}}}_{a_{n-1}}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})$$

Ogólny wzór na współczynnik a_k można określić wzorem:

$$a_k = \frac{\Delta^k f_0}{k! h^k} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

PRZYKŁAD:

Dane:

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	7	8	15

Węzły w przykładzie są równoodległe: $2-1=1$, $3-2=1$, $4-3=1$, więc $h=1$.

Liczmy różnice progresywne kolejnych rzędów:

x_i	$f(x_i)$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
1	3	$7-3=4$	$1-4=-3$	$6-(-3)=9$
2	7	$8-7=1$	$7-1=6$	
3	8	$15-8=7$		
4	15			

Obliczamy wielomian:

$$W(x) = 3 + \frac{4}{1! \cdot 1^1}(x - 1) + \frac{-3}{2! \cdot 1^2}(x - 1)(x - 2) + \frac{9}{3! \cdot 1^3}(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 x_0 x_0 x_1 x_0 x_1 x_2

Rozwiązanie w punkcie 2.5:

$$W(2.5) = \frac{117}{16} = 7.3125$$

Wskazówka do programu: omawiana metoda w porównaniu do metody Newtona z ilorazami różnicowymi charakteryzuje się następującymi różnicami:

- 1. poprzednio wyznaczaliście ilorazy różnicowe (licznik stanowiły różnice funkcji/mianownik różnice argumentów) – tutaj mamy tylko różnice funkcji*
- 2. we wzorze ogólnym przy każdym członie sumy występowały kolejne ilorazy różnicowe – tutaj odpowiadające im różnice progresywne są dzielone przez $k! h^k$, gdzie h to stała różnica pomiędzy argumentami x , zaś $k=1,2,\dots,n-1$.*