

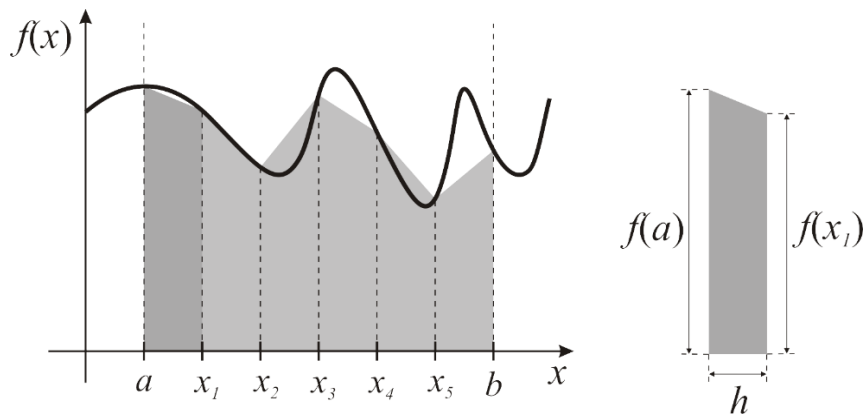
CAŁKOWANIE NUMERYCZNE

Zaczynamy kolejny dział: Całkowanie numeryczne. Dzisiaj poznają i zaimplementują Państwo dwie metody opisane poniżej. Za pomocą tych metod można wyznaczyć całkę oznaczoną:

$$\int_a^b f(x) dx$$

METODA TRAPЕZÓW

W tej metodzie zakłada się przybliżenie całki oznaczonej (pola powierzchni pod wykresem funkcji na przedziale całkowania $[a, b]$ za pomocą pola powierzchni trapezu jak przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat działania metody trapezów.

Kolejne etapy metody:

Dzielimy przedział $[a, b]$ na n równych części o długości:

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Kolejne punkty wyznaczamy ze wzoru:

$$x_i = a + \frac{i}{n}(b - a), \quad i = 1 \dots n-1$$

Wówczas zgodnie ze wzorem na pole trapezu: $\frac{(a+b)h}{2}$ (a i b – podstawy trapezu oraz h – wysokość), wyznaczamy sumę kolejnych pól trapezów:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{f(a) + f(x_1)}{2} \cdot h + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot h + \dots + \frac{f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})}{2} \cdot h + \frac{f(x_{n-1}) + f(b)}{2} \cdot h$$

Można zauważyć, że w każdym z ułamków występuje $h/2$, które można wynieść przed nawias, wtedy oznaczając: $a = x_0$ oraz $b = x_n$ ogólny wzór można zapisać:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_i) + f(x_{i+1})] \quad (1)$$

Rozbijając sumy w ułamkach na oddzielne ułamki można zauważyć, że poza $f(a)$ oraz $f(b)$ elementy $f(x_i)$ powtarzają się dwukrotnie, czyli sumę można również zapisać:

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \cdot \left(\frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right)$$

W ten sposób można wyznaczyć bardziej optymalny wzór ogólny w postaci:

$$\int_a^b f(x) dx \cong h \left(\frac{f(a)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(b)}{2} \right) \quad (2)$$

W implementacji zostawiamy Państwu dowolność. Można policzyć po prostu sumę trapezów lub zastosować wzór (1) lub (2).

Przykład

$$\int_1^4 x^2 dx \cong ?$$

Dane $a=1$, $b=4$. Przyjmujemy np. $n=3$, więc $h = \frac{4-1}{3} = 1$.

Korzystając ze wzoru wyznaczamy x_i , a także wartość funkcji podcałkowej dla następujących punktów:

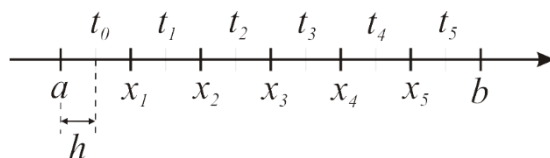
$$\begin{aligned} f(1) &= 1^2 = 1 \\ f(2) &= 2^2 = 4 \\ f(3) &= 3^2 = 9 \\ f(4) &= 4^2 = 16 \end{aligned}$$

I ostatecznie podstawiając do wzoru:

$$\int_1^4 x^2 dx \cong 1 \left(\frac{1}{2} + 4 + 9 + \frac{16}{2} \right) = 21.5$$

METODA SIMPSONA

W kolejnej metodzie, do zwiększenia dokładności przybliżenia pola, oblicza się sumy wycinków obszarów pod parabolą. Ponieważ wzór opisujący parabolę wymaga trzech zmiennych: $ax^2 + bx + c$, należało wyznaczyć dodatkowy punkt t_i pomiędzy wyznaczanymi w metodzie trapezów punktami x_i , jak przedstawiono na rys.2.



Rys. 2. Schemat działania metody Simpsona.

W związku z tym, wzory na wyznaczenie t_i oraz h są następujące:

$$t_i = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \quad h = \frac{x_{i+1} - x_i}{2}$$

Stosując bezpośrednio wzór na wycinek obszaru pod parabolą wzór ogólny można zapisać w postaci:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3} (f(x_i) + 4f(t_i) + f(x_{i+1}))$$

Podobnie jak w metodzie trapezów można wyznaczyć bardziej optymalny wzór ogólny w postaci:

$$\int_a^b f(x) dx \cong \frac{h}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Przykład

$$\int_1^4 x^2 dx \cong ?$$

Dane $a=1$, $b=4$. Przyjmujemy np. $n=3$. Punkty x_i wyznaczamy jak w poprzedniej metodzie, zaś punkty t_i znajdują się dokładnie po środku pomiędzy punktami x_i (patrz rys. 2). Nowe $h = \frac{4-1}{2} = 0.5$.

Wyznaczamy wartość funkcji podcałkowej dla następujących punktów x_i :

$$f(1) = 1^2 = 1$$

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(3) = 3^2 = 9$$

$$f(4) = 4^2 = 16$$

oraz punktów t_i

$$f(1.5) = 1.5^2 = 2.25$$

$$f(2.5) = 2.5^2 = 6.25$$

$$f(3.5) = 3.5^2 = 12.25$$

I ostatecznie podstawiając do wzoru:

$$\int_1^4 x^2 dx \cong \frac{0.5}{3} (1 + 4 * 2.25 + 2 * 4 + 4 * 6.25 + 2 * 9 + 4 * 12.25 + 16) = 21$$

INNY PRZYKŁAD do testowania w programie: W całkowaniu numerycznym w bardzo łatwy sposób można wyznaczyć sobie przykład do sprawdzenia metody licząc jakąkolwiek całkę oznaczoną. Przy wystarczająco dużym n powinna być bardzo zbliżona do wyznaczonego rozwiązania analitycznego. Poniżej przykład całki z bardziej złożonej funkcji do weryfikacji programu:

$$\int_0^2 \frac{x^2 \sqrt{1+x}}{1+x^2} dx \cong 1.3589$$

Wytyczne do programu

- implementujemy obie metody
- funkcja podcałkowa wprowadzona jest w kodzie programu
- definiujemy a i b (lub podaje je użytkownik)
- użytkownik podaje dowolne n
- program zwraca przybliżoną wartość całki