Całkowanie numeryczne. Kwadratury Gaussa–Legendre'a

Kwadraturę dla przedziału [−1, 1] nazywamy kwadraturą Gaussa– Legendre'a

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \cong \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(t_i)$$

węzły

wagi

gdzie t_i to pierwiastki i-tego wielomianu Legendre'a.

Rozpatrując całkę w dowolnym przedziale [a,b] należy posługiwać się następującym wzorem:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx \cong \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(\frac{b-a}{2} t_i + \frac{b+a}{2})$$

Węzły t_i i wagi ω_i są to odgórnie zdefiniowane wartości liczbowe dla różnych stopni n dostępne są m.in. pod następującymi adresami:

1. https://pomax.github.io/bezierinfo/legendre-gauss.html

(gdzie wagi ω oznaczone są symbolem w, zaś węzły t symbolem x)

2. http://www.efunda.com/math/num_integration/findgausslegendre.cfm

(gdzie wagi ω oznaczone są symbolem $w(\xi)$, zaś węzły t symbolem ξ)

Przykład

Całka do obliczenia

$$\int_{2}^{3} \frac{x-1}{x^2+x} dx \cong ?$$

Kwadratura Gaussa-Legendre'a z n=2.

$$\int_{2}^{3} \frac{x-1}{x^2+x} dx \cong \frac{3-2}{2}\left(1 * f\left(\frac{3-2}{2} * (-0.57735) + \frac{3+2}{2}\right) + 1 * f\left(\frac{3-2}{2} * 0.57735 + \frac{3+2}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\big(f(2.211325) + f(2.788675)\big) \cong \frac{1}{2}(0.17057832 + 0.16929579) = 0.16993706$$

Wytyczne do programu

– funkcja podcałkowa wprowadzona jest w kodzie programu
– definiujemy a i b (lub podaje je użytkownik)
– użytkownik podaje n – do programu należy wprowadzić wartości wag i węzłów, one zaś zależą od podanego n, stąd ustalamy, że Państwo ograniczacie się tylko do 6 różnych $n = 2, 4, 6, 8, 10, 16$
– program zwraca przybliżoną wartość całki