APROKSYMACJA

ZA POMOCĄ WIELOMIANÓW ORTOGONALNYCH

WZORY:

Funkcję $f(x)$ aproksymujemy funkcją $g(x)$:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{i=n} C_i \varphi_i(x)$$

$$g(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_n\varphi_n(x)$$

gdzie $\boldsymbol{C}_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ są to stałe współczynniki, które należy wyznaczyć, natomiast $\varphi_i(x)$ są tzw. funkcjami bazowymi.

$$C_i = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b p(x)\varphi_i(x)f(x)dx\,,$$

$$\lambda_i = \int_a^b p(x)\varphi_i^2(x)dx$$

Jako funkcje bazowe $\varphi_i(x)$ zastosujemy wielomiany Legendre'a, przedział $[a, b] = [-1, 1]$, z wagą $p(x) = 1$, wielomiany niższych stopni są przedstawiane w sposób następujący:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x, \qquad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

Ogólnie wielomian n-tego stopnia wyznaczamy ze wzoru:

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}(2n+1)xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Wskazówka. Wielomiany Legendre'a do 11 stopnia można też naleźć np. na Wikipedii (https://pl.wikipedia.org/wiki/Wielomiany_Legendre%E2%80%99a)

PRZYKŁAD:

Znaleźć aproksymację dla funkcji $f(x) = e^x$ w przedziale $[-1, 1]$. Funkcję aproksymującą przyjąć w postaci wielomianu Legendre'a drugiego stopnia $n = 2$ (z wagą $p(x) = 1$).

$$g(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$$

Przyjmujemy funkcje bazowe będące wielomianami Legendre'a do drugiego stopnia, czyli:

$$\varphi_0(x) = 1, \qquad \varphi_1(x) = x, \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

po podstawieniu ich do $g(x)$ otrzymamy:

$$g(x) = C_0 + C_1 x + C_2 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

Wskazówka. Pamiętajcie, że w waszym programie musi być możliwość wyboru stopnia wielomianu aproksymującego. Od niego zaś będzie zależała liczba niewiadomych Ci . Na potrzeby obliczeń przyjęto n = 2, wówczas mamy 3 niewiadome, dla n = 3, będą 4 niewiadome, itd.

Korzystając ze wzorów:

$$C_i = \frac{1}{\lambda_i}\int_a^b p(x)\varphi_i(x)f(x)dx\ , \qquad \lambda_i = \int_a^b p(x)\varphi_i^2(x)dx$$

wyznaczamy wartości kolejnych niewiadomych C_i obliczając następujące całki:

$$\lambda_0 = \int_{-1}^{+1} \varphi_0^2(x)dx = \int_{-1}^{+1} 1^2\,dx = 2$$

$$\lambda_1 = \int_{-1}^{+1} \varphi_1^2(x)dx = \int_{-1}^{+1} x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\lambda_2 = \int_{-1}^{+1} \varphi_2^2(x)dx = \int_{-1}^{+1} \left[\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right]^2 dx = \left(\frac{9}{20}x^5 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x\right)\Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{5} - \left(-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{5}$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} e^x dx = 1.175$$

$$C_1 = \frac{3}{2}\int_{-1}^{+1} xe^x dx = 1.104$$

$$C_2 = \frac{5}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{1}{2}(3x^2 - 1)e^x dx = 0.357$$

Po podstawieniu wyznaczonych współczynników C_i do $g(x)$ wraz z funkcjami bazowymi, otrzymana funkcja aproksymująca wygląda w sposób następujący:

$$g(x) = 1.175 + 1.104x + 0.357\left(\frac{1}{2}(3x^2 - 1)\right)$$

a po uproszczeniach

$$g(x) = 0.996 + 1.104x + 0.536x^2$$

Przykładowo $g(1) = 2.63 \quad \cong \quad f(1) = e^1 \cong 2.71828$

Wskazówka: Całki wyznaczamy numerycznie za pomocą wybranej napisanej przez was metody całkowania (trapezy, Simpson, kwadratury Gaussa-Legendre'a). Podane powyżej wartości zostały policzone analitycznie, w związku z tym otrzymane przez Państwa rozwiązania mogą się nieznacznie różnić. Wielkość tej różnicy będzie oczywiście zależna od przyjętej dokładności całkowania numerycznego (wartości n). Zwróćcie też uwagę, że przedział całkowania to zawsze [-1,1], bez względu na przykład.

Założenia do programu:

- realizuje metodę aproksymacji za pomocą wielomianów ortogonalnych,
- ma działać dla dowolnego stopnia wielomianu aproksymującego n (wpływ stopnia na wynik będzie podlegał analizie w sprawozdaniu) oraz dowolnej funkcji $f(x)$,
- dane wejściowe to $f(x)$, a, b oraz x w którym poszukujemy rozwiązania,
- jako funkcje bazowe przyjmujemy wielomian Legendre'a, waga $p(x)$=1,
- program zwraca wartość wielomianu aproksymującego dla konkretnego, podanego przez użytkownika x (podobnie jak w interpolacji),
- wykorzystując do obliczeń całek wybraną metodę numeryczną przyjmijcie na stałe dosyć dużą liczbę przedziałów (n), aby wyniki całek były dokładne (np. n=100)