

INTERPOLACJA. Metoda Newtona z ilorazami różnicowymi

Definiujemy pojęcie ilorazów różnicowych.

Iloraz różnicowy I rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Iloraz różnicowy II rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}) - f(x_i; x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}$$

Iloraz różnicowy k-tego rzędu:

$$f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \dots; x_{i+k}) - f(x_i; x_{i+1}; \dots; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}$$

Wielomian interpolacyjny Newtona z ilorazami różnicowymi:

$$W(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_0; x_1; \dots; x_k) \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j) = f(x_0) +$$

$$+ f(x_0; x_1)(x - x_0) + f(x_0; x_1; x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0; x_1; \dots; x_{n-1})(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-2})$$

x_i	$f(x_i)$	ilorazy różnicowe			
		I rzędu	II rzędu	III rzędu	IV rzędu
x_0	$f(x_0)$	$f(x_0; x_1)$	$f(x_0; x_1; x_2)$	$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$	$f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$
x_1	$f(x_1)$	$f(x_1; x_2)$	$f(x_1; x_2; x_3)$	$f(x_1; x_2; x_3; x_4)$	
x_2	$f(x_2)$	$f(x_2; x_3)$	$f(x_2; x_3; x_4)$		
x_3	$f(x_3)$	$f(x_3; x_4)$			
x_4	$f(x_4)$				

Wskazówka: Liczba rzędów jest zależna od liczby zadanych punktów.

PRZYKŁAD:

Dane:

x_i	0	2	3	4	6
$f(x_i)$	1	3	2	5	7

Liczymy ilorazy różnicowe kolejnych rzędów:

x_i	$f(x_i)$	I rzędu	II rzędu	III rzędu	IV rzędu
0	1	$(3-1)/(2-0)=1$	$(-1-1)/(3-0)=-2/3$	$(2-(-2/3))/(4-0)=2/3$	$((-2/3)-(2/3))/(6-0)=-2/9$
2	3	$(2-3)/(3-2)=-1$	$(3-(-1))/(4-2)=2$	$((-2/3)-2)/(6-2)=-2/3$	
3	2	$(5-2)/(4-3)=3$	$(1-3)/(6-3)=-2/3$		
4	5	$(7-5)/(6-4)=1$			
6	7				

Obliczamy wielomian:

$$W(x) = 1 + 1(x - 0) - \frac{2}{3}(x - 0)(x - 2) + \frac{2}{3}(x - 0)(x - 2)(x - 3) - \frac{2}{9}(x - 0)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$$

Rozwiązanie w punkcie $x = 1$:

$$W(1) = 5\frac{1}{3} \approx 5.3333$$