Analiza Numerczna - zadanie 2.14

Wyprowadzanie i implementacja hiperoblicznej funkcji sklejanej

Prowadzący: Paweł Woźny* autor: Dawid Więcław

16 grudnia 2018

1 Wstęp

1.1 Co to jest hiperboliczna funkcja sklejana?

Hiperboliczna funkcja sklejana jest to funkcja określona na przedziałach (pomiędzy węzłami), gdzie interpoluje ona zadaną wcześniej funkcję, której wartości w punktach pośrednich są nieznane bądź trudne do wyliczenia. Hiperboliczną funkcję sklejaną interpolującą odróżnia, od klasycznych funkcji interpolujących, parametr τ, który pozwala na wygładzenie jej wykresu odpowiednio dostosowując ją do potrzeb osoby interpolującej.

1.2 Zastosowanie interpolującej, hiperbolicznej funkcji sklejanej

Funkcje omawiane w tym sprawozdaniu mają zastosowanie w przybliżaniu funkcji (jak każda interpolująca funkcja), jednakże poprzez możliwość zmiany "napięcia", czyli wygładzenia jej wykresu można odnaleźć zastosowanie tej funkcji w grafice komputerowej. Kolejnym przykładem zastosowania tych funkcji są rozważania na temat silników elektrycznych, a mianowicie jego parametrów - napięcia wzbudzenia w zależności od napięcia twornika i momentu obrotowego silnika elektrycznego obcowzbudnego. Właściwie w przypadku każdych dyskretnych danych, wiedząc jak powinna kształtować się zależność (jak bardzo funkcja powinna być wygładzona) użycie interpolującej hiperbolicznej funkcji sklejanej może mieć zastosowanie w celu określenia tej zależności.

1.3 Wzór

$S_\tau = \frac{M_k sinh(\tau x_{k+1} - \tau x)}{sinh(\tau h_k)} + \frac{M_{k+1} sinh(\tau x - \tau x_k)}{sinh(\tau h_k)} + \frac{(f(x_k) - M_k)(x_{k+1} - x)}{h_k} + \frac{f(x_{k+1} - M_{k+1})(x - x_k)}{h_k}$

Gdzie:

1. $h_k = x_{k+1} - x_k$
2. $M_k = \frac{S''_\tau(x_i)}{r^2}$

1.4 Na czym polega eksperyment?

Eksperyment polega na zaimplementowaniu algorytmu wyznaczania hiperbolicznej sklejanej funkcji interpolującej i przetestowanie jej do przybliżania różnych funkcji a także wyznaczenie kilku rysunków dla danych w postaci dyskretnej dla różnych τ.

* *E-mail*: Pawel.Wozny@ii.uni.wroc.pl

2 Uzyskiwanie hiperbolicznej funkcji skelejanej

2.1 Warunki które musi spełniać hiperboliczna funkcja interpolacyjna

1. $S_\tau \in C^2[a.b]$
2. $S_\tau(x_k) = f(x_k)$
3. dla $x \in (x_k, x_{k+1})$ $S_\tau^{(4)}(x) - \tau^2 S_\tau''(x) = 0$

2.2 Wyprowadzenie

2.2.1 Wzór na funkcję

Rozpocznijmy od równiania różniczkowego: $S_\tau^{(4)}(x) = \tau^2 S_\tau''(x)$, podstawiając $S_\tau(x) = e^{\lambda x}$ otrzymujemy wynik równania różniczkowego w postaci ogólnej: $S_\tau(x) = ae^{\tau x} + be^{-\tau x} + cx + d$. Wniskując z postaci ogólnej otrzymuje się: $S_\tau''(x) = a\tau^2 e^{\tau x} + b\tau^2 e^{-\tau x} = \tau^2(ae^{\tau x} + be^{-\tau x})$, dzięki możliwości skorzystania z wartości pomocniczej $M_k = \frac{S_\tau''(x_k)}{\tau^2}$ można przedstawić drugą pochodną funkcji S_τ na przedziale $[x_k,x_{k+1}]$ w postaci:
$S_\tau''(x) = M_k\tau^2 sinh^{-1}(\tau h_k) sinh(\tau(x_{k+1} - x)) + M_{k+1}\tau^2 sinh^{-1}(\tau h_k) sinh(\tau(x - x_k))$
Po podwojnym scałkowaniu tej funkcji otzymujemy postać:
$S_\tau(x) = M_k sinh^{-1}(\tau h_k) sinh(\tau(x_{k+1} - x)) + M_{k+1} sinh^{-1}(\tau h_k) sinh(\tau(x - x_k)) + Ax + B$
Jednakże znając wartość funkcji $S_\tau(x)$ w puntkach x_k i x_{k+1}, z układu równań wywnioskować ostateczną postać funkcji:
$S_\tau = \frac{M_k sinh(\tau x_{k+1} - \tau x)}{sinh(\tau h_k)} + \frac{M_{k+1} sinh(\tau x - \tau x_k)}{sinh(\tau h_k)} + \frac{(f(x_k) - M_k)(x_{k+1} - x)}{h_k} + \frac{(f(x_{k+1}) - M_{k+1})(x - x_k)}{h_k}$

2.2.2 Jak wyliczyć M_k?

Ciagłość funkcji $S_\tau(x)$ jest zagwarantowana co można łatwo uduwodnić z jej wzoru obliczając $S_\tau(x_k + 0)$ i $S_\tau(x_k - 0)$, ciągłość $S_\tau''(x)$ można udowodnić w ten sam sposób. Pozostaje jedynie pozostaje jedynie wyznaczyć M_k tak, aby zachować ciągłość $S_\tau'(x)$. Rozpatrując pierwszą pochodną rozważanej funkcji na przedziałach $[x_k, x_{k+1}]$ i $[x_{k-1}, x_k]$ otrzymuje się wzory:

1. $S_\tau(x) = -\tau M_k \frac{cosh(\tau x_{k+1} - \tau x)}{sinh(\tau h_k)} + \tau M_{k+1} \frac{cosh(\tau x - \tau x_k)}{sinh(\tau h_k)} - \frac{f(x_k) - M_k}{h_k} + \frac{f(x_{k+1}) - M_{k+1}}{h_k}$
2. $S_\tau(x) = -\tau M_{k-1} \frac{cosh(\tau x_k - \tau x)}{sinh(\tau h_{k-1})} + \tau M_k \frac{cosh(\tau x - \tau x_{k-1})}{sinh(\tau h_{k-1})} - \frac{f(x_{k-1}) - M_{k-1}}{h_{k-1}} + \frac{f(x_k) - M_k}{h_{k-1}}$

Odejmując je do siebie stronami otrzymuje się równanie:
$\alpha_{k-1}M_{k-1} + (\beta_{k-1} + \beta_k)M_k + \alpha_k M_{k+1} = \gamma_k - \gamma_{k-1}$
Gdzie z kolei:

1. $h_k = x_{k+1} - x_k$
2. $\alpha_k = \frac{1}{h_k} - \frac{\tau}{sinh(\tau h_k)}$
3. $\beta_k = \frac{\tau cosh(\tau h_k)}{sinh(\tau h_k)} - \frac{1}{h_k}$
4. $\gamma_k = \frac{f(x_{k+1} - f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}$

Rozważając to równanie dla $1 \leqslant k \leqslant n - 1$ oraz zakładając $M_0 = Mn = 0$ otrzymuje się układ równań pozwalający uzyskać wszystkie wartości M_k.

3 Implementacja

3.1 struktury pomocnicze

W programie zostały napisane pomocnicze funkcje i struktury danych:

1. $X[i]$ – tablica zwracająca i-ty argument (x_i)
2. $alpha(i)$, $beta(i)$, $gamma(i)$ zwracające odpowiednio α_i, β_i, γ_i.
3. $h(k)$ zwracająca wartość wyrażenia $x_{k+1} - x_k$
4. $sinh(x)$ i $cosh(x)$ zwracające odpowiednio wartości tych funkcji dla argumentu x
5. $y(i)$ zwracająca wartość $\gamma_i - \gamma_{i-1}$
6. $findXi(x)$ zwracająca k, takie że $x \in [x_k, x_{k+1}]$

3.2 Główna część algorytmu wyznaczającego parametry hiperbolicznej funkcji sklejanej

Parametry M_k są trzymane w tablicy $M[]$ i wyliczane są w następujących etapach

1. Uzupełnienie tablicy $Y[]$ przez przypisanie $Y[i] = y(i)$, funkcja $y(i)$ została zaś już zdefiniowana, a przypisanie odbywa się w metodzie $fillY()$.
2. Uzupełnienie tablicy pomocniczej $T[]$ wartościami odpowiednio $\beta_0 + \beta_1$, α_1, $\beta_1 + \beta_2$, ... , α_{n-2}, $\beta_{n-1} + \beta_n$. Wypełnienie tablicy T odbywa się w funkcji $fillT()$
3. Wykonanie zmodyfikowanej eleminacji Gaussa dla układu równań poprzez modyfikacje elementów tablic Y i T w celu ustalenia wartośći M_{n-1}
4. Ponowne wywołanie funkcji $fillY$ i $fillT$ w celu uzyskania wartości M_k dla $k = n-2, n-3, ..., 2, 1$.

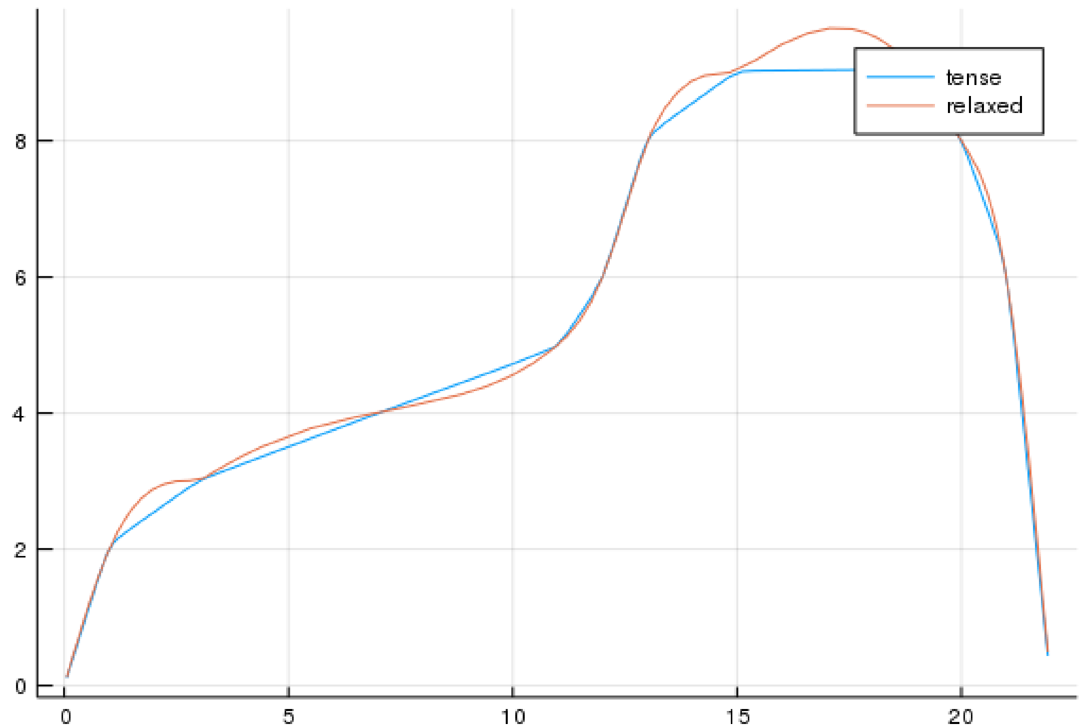
3.3 Implementacja hiperbolicznej funckcji sklejanej interpolacyjnej

Funkcja $Sr(x)$ jest reprezentacją $S_\tau(x)$, a jej działanie polega na wywołaniu metody $findXi(x)$ w celu znalezienia rozpatrywanego przedziału, następne obliczane są wartości $a = \frac{M_k sinh(\tau x_{k+1} - \tau x)}{sinh(\tau h_k)}$, $b = \frac{M_{k+1} sinh(\tau x - \tau x_k)}{sinh(\tau h_k)}$, $c = \frac{(f(x_k) - M_k)(x_{k+1} - x)}{h_k}$ oraz $d = \frac{(f(x_{k+1}) - M_{k+1})(x - x_k)}{h_k}$ reprezentujące składniki sumy zwracanej przez funkcję $S_\tau(x)$ (zostało to rozbite na aż 4 składniki aby funkcja była bardziej czytelna i łatwiejsze było znalezienie błędów). Następnie zwracana jest suma $a + b + c + d$.

4 Testy

4.1 Dla zbioru dyskretnego – próba odtworzenia rysunku 6.5 a i 6.5 b z książki D. Kincaid, W. Cheney, Analiza numeryczna, WNT, 2005

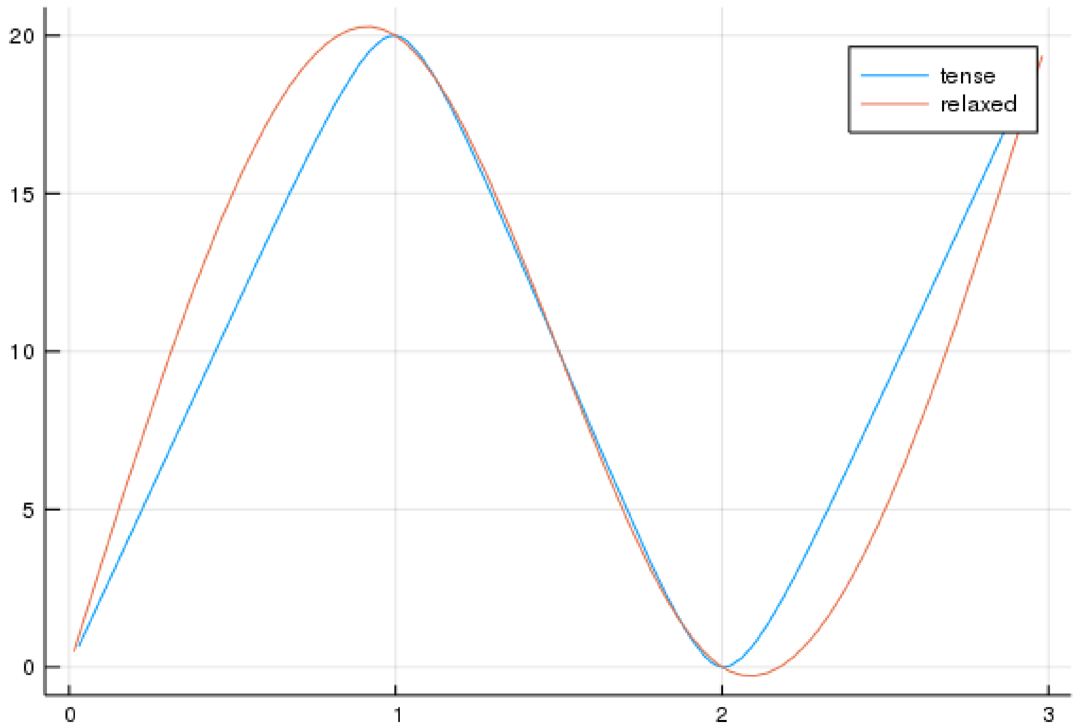
W tym przypadku interpolacja będzie przebiegała na funkcji która zwraca tylko wartości w punktach x_k, a w pozostałych nie jest ona zdefiniowana. W ten sposób dzięki hiperbolicznym funkcjom sklejanym interpolacyjnym można uzyskiwać różne rysunki (na przykład samochód).



Rysunek 1: Niebieski wykres został wykonany dla $\tau = 10$, pomarańczowy zaś dla $\tau = 0.1$. Dzięki temu udało ukazać się różnice wynikające ze zmiany stopnia napięcia wykresu

4.2 Prostszy test dla zbióru dyskretnego

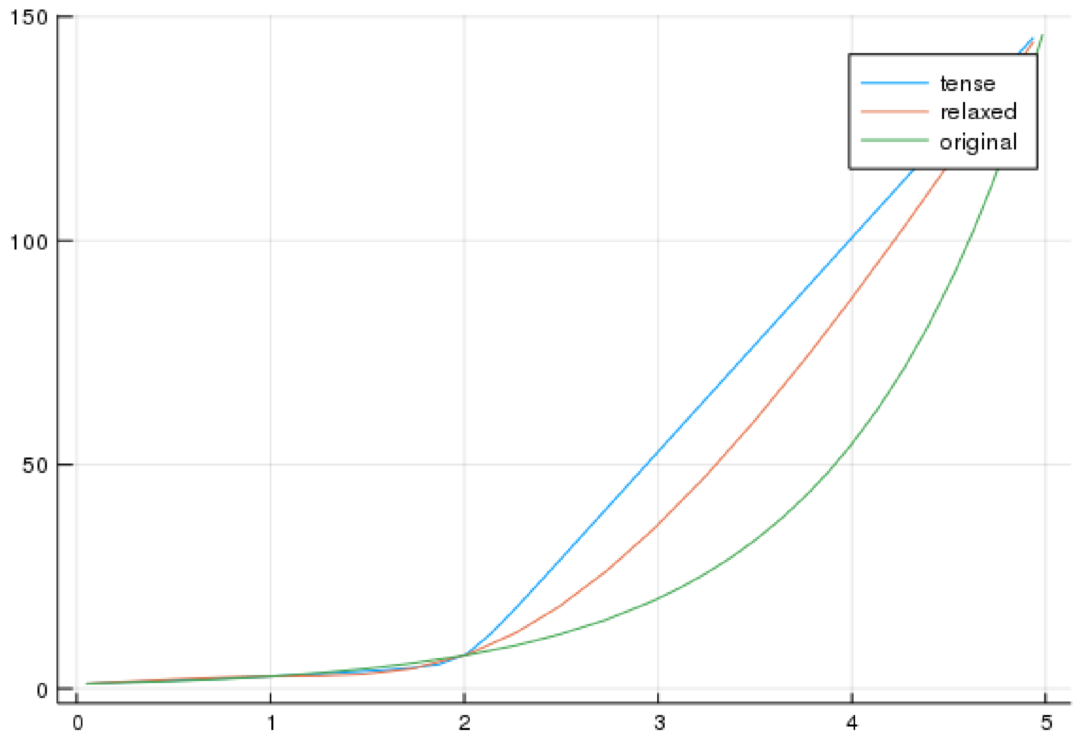
Jest to kolejny przypadek próby narysowania wykresu funkcji zdefiniowanej tylko w poszczególnych punktach, tym razem przykład jest uproszczony aby lepiej można było dostrzec różnice między poszczególnymi stopniami napięcia.



Rysunek 2: Niebieski wykres został wykonany dla $\tau = 10$, pomarańczowy zaś dla $\tau = 0.1$.

4.3 Pierwsza próba interpolacji funkcji

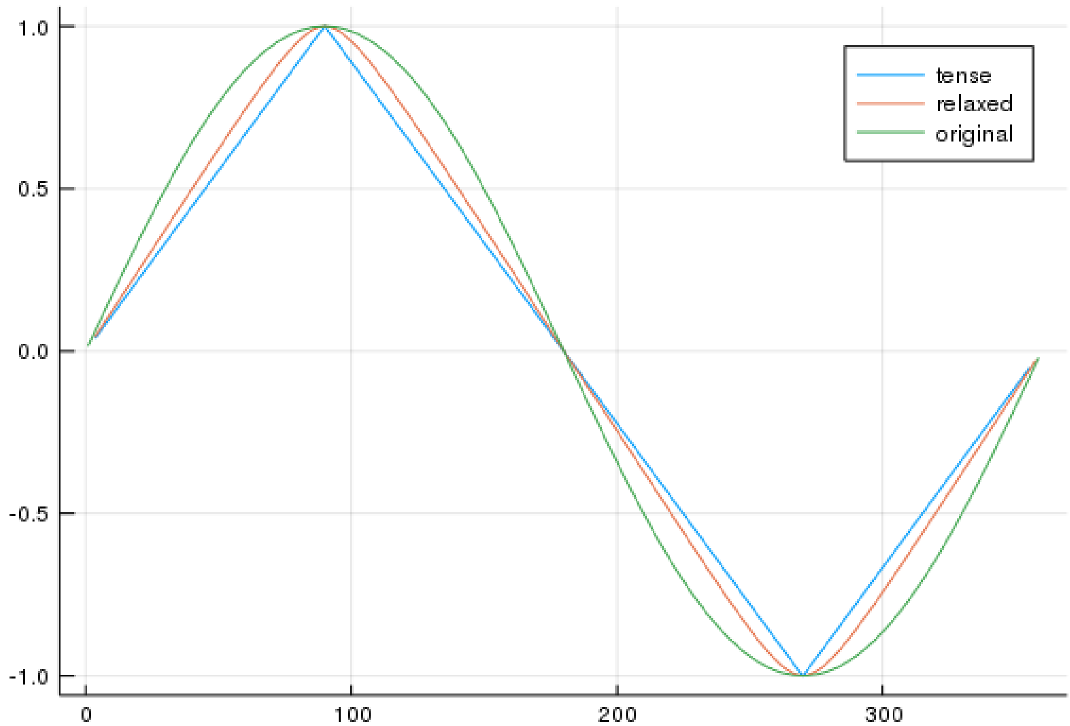
Hiperboliczne funkcje sklejane mają również zastosowanie w klasycznej interpolacji funkcji, dzięki współczynnikowi τ można uzyskać nawet lepsze przybliżenia dla wyników jakiegoś eksperymentu niż sama funkcja matematyczna, gdyż przy pomocy tension spline można uzyskać niemal dowolne przybliżenie funkcji oryginalnej, a jednocześnie pozwala ją dość swobodnie modyfikować.



Rysunek 3: Niebieski wykres został wykonany dla $\tau = 10$, pomarańczowy dla $\tau = 0.1$, a na zielono została narysowana oryginalna funkcja.

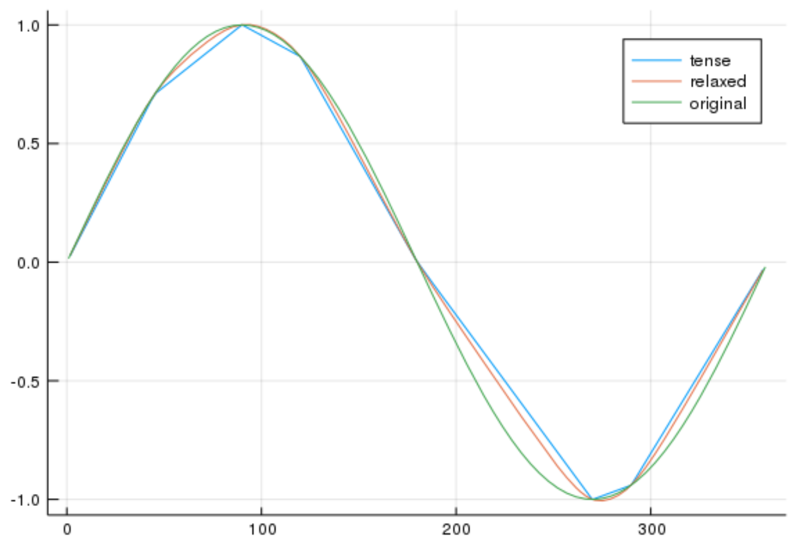
4.4 Druga próba interpolacji funkcji

Tym razem jako funkcję interpolowaną zastosowano $f(x) = sin(x)$.

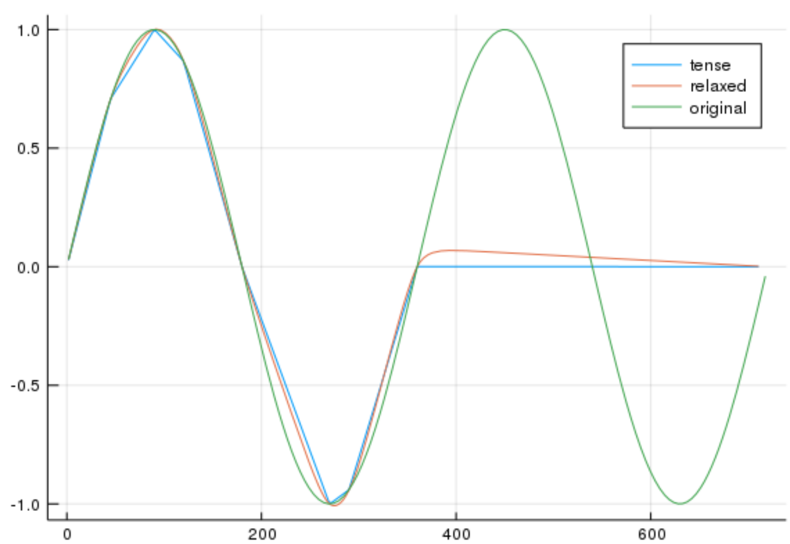


Rysunek 4: Niebieski wykres został wykonany dla $\tau = 10$, pomarańczowy dla $\tau = 0.1$, a na zielono zostałą naryoswana oryginalna funkcja.

5 Co się dzieje po zwiększeniu liczby punktów?



Rysunek 5: Interpolwoanie funkcji sin(x) w większej liczbie punktów



Rysunek 6: Poszerzenie rozpatrywanego przedziału

Zwiększenie liczby punktów w przypadku interpolacyjnych funkcji sklejanych zawsze poprawia przybliżenie danej funkcji z tego względu, że przybliżenia mogą być rozpatrywane na mniejszych przedziałach, a funkcja interpolacyjna osiąga wartości takie same jak wartości funkcji w węzłach. Dzięki zmniejszeniu przedziałów na których funkcja jest interpolowana, a dla każdego przedziału funkcję sklejaną dostosowuje się osobno jedynie zachowując konieczne założenia, interpolacja z każdym zwiększeniem liczby punktów jest dokładniejsza. To powoduje ,że odpowiednio zwiększając liczbę punktów można uzyskać dowolne przybliżenie interpolowanej funkcji (ograniczeniem jest jedynie pamięć komputera). Dodatkowym przyspieszeniem interpolacji jest modyfikacja τ co sprawia ,że wykres wygląda na jeszcze bardziej zbliżony do funkcji bazowej i "naturalny", czyli bez ostrych krawędzi i wygładzony.

6 Podsumowanie

Interpolacyjne funkcje sklejane hiperboliczne pozwalają na przybliżanie dowolnej funkcji zadanej w dowolny sposób (wystarczy znać jej wartości w punktach w których chcemy ją interpolować), a także dzięki czynnikowi τ można modyfikować jej kształt bez zmiany węzłów interpolacji. Te zmiany estetyczne pozwalają na lepsze dostosowanie zachowania funkcji do osiąganych wyników eksperymentu lub mogą mieć zastosowanie w grafice. Jednakże nie jest to sposób lepszy pod każdym wzgledem od klasycznej interpolacji, gdyż zapamiętanie wszystkich wartości M_k wymaga więcej pamięci niż zastosowanie wielomianu interpolacyjnego, a także znalezienie wartości funkcji sklejanej wymaga więcej czasu, ponieważ należy najpierw znaleźć przedział $[x_k, x_{k+1}]$, do którego należy dany argument.