

离散数学阶段测试（抽象代数）

2021.12.29

说明：闭卷；可携带本人设计的笔记（A4 纸大小, 1 页）；需要写出详细求解步骤，尽量展示你的工作；独立完成，不可讨论。

1. 设 h 是代数结构 $V_1 = \langle S; \circ \rangle$ 到 $V_2 = \langle S'; \circ' \rangle$ 的同态映射， h 的同态像为 $h(S) \subseteq S'$ ，证明：

如果 V_1 关于运算 \circ 有单位元 e ，则同态像 $h(S)$ 中有关于 \circ' 的单位元 $h(e)$ 。

2. 证明：素数阶群是循环群且无非平凡子群。

3. 某通讯编码由 4 个数据位 x_1, x_2, x_3, x_4 和 3 位校验位 x_5, x_6, x_7 构成，其中，

$$x_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, \quad x_6 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4, \quad x_7 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4,$$

\oplus 为异或运算。若 S 为满足上述关系的码字的集合，且当 $x, y \in S$ 时有 $x \oplus y = x_1 \oplus y_1, \dots, x_7 \oplus y_7$ ，

则 $\langle S; \oplus \rangle$ 是群，试证明之。