书面作业3.2 参考解答或提示

第1部分 基础

无

第2部分 理论

无

第3部分 综合应用（T2 可选做）

T1. 形式化并证明下列自然语言推理是有效的. 个体域均为全总域.

（1）所有的玫瑰和蔷薇都是芳香带刺的，因此，所有的玫瑰都是带刺的.

（2） 三角函数都是周期函数；一些三角函数是连续函数；所以，一些周期函数是连续函数.

（3）每个科学工作者都是勤奋的, 每个既勤奋又聪明的人在他的事业中都将获得成功, 王大志是科学工作者并且是聪明的, 所以, 王大志在他的事业中将获得成功.

（4）如果一个人长期吸烟或酗酒, 那么他身体绝不会健康; 如果一个人身体不健康，那么他就不能参加体育比赛;有人参加了体育比赛. 所以，有人不长期酗酒.

（5）小王是一年级生理科生; 每个非文科的一年级生都有辅导员; 凡小王的辅导员都是理科生; 所有的理科生都不是文科生. 所以，至少有一个不是文科生的辅导员.

（1）设S(x):x是三角函数; T(x):x是周期函数; P(x):x是连续函数, 则推理可以形式化为:

$\forall x(S(x)\rightarrow T(x)), \exists x(S(x)\wedge P(x)) \Rightarrow \exists x(T(x)\wedge P(x))$.

证明:

(1) $\exists x(S(x)\wedge P(x))$	P
(2) $S(c)\wedge P(c))$	ES(1)
(3) $\forall x\ (S(x)\rightarrow T(x))$	P
(4) $S(c)\rightarrow T(c)$	US(3)
(5) $S(c)$	T,I(2)
(6) $T(c)$	T,I(4)(5)
(7) $P(c)$	T,I(2)
(8) $T(c)\wedge P(c)$	T,I(6)(7)
(9) $\exists x(T(x)\wedge P(x))$	EG(8)

(2) 设P(x):x是玫瑰; Q(x):x是蔷薇; R (x):x是芳香的; S(x):x是带刺的, 则推理可以形式化为:

$\forall x((P(x)\vee Q(x))\rightarrow(R(x)\wedge S(x))) \Rightarrow \forall x(P(x)\rightarrow S(x))$

证明：可以直接证明，也可以用CP规则，以及反证法.

直接法

(1) $\forall x((P(x)\vee Q(x))\rightarrow(R(x)\wedge S(x)))$ P

(2) $P(x)\vee Q(x)\rightarrow R(x)\wedge S(x)$ US(1)

(3) $(\neg P(x)\wedge\neg Q(x))\vee(R(x)\wedge S(x))$ T,I(2)

(4) $(\neg P(x)\vee S(x))\wedge(\neg P(x)\vee R(x))\wedge(\neg Q(x)\vee S(x))\wedge(\neg Q(x)\vee S(x))$ T,I(3)

(5) $\neg P(x)\vee S(x)$ T,I(4)

(6) $P(x)\rightarrow S(x)$ T,I(5)

$\forall x(P(x)\rightarrow S(x))$ UG,5

CP规则

(1) $\forall x((P(x)\vee Q(x))\rightarrow(R(x)\wedge S(x)))$ P

(2) $P(x)\vee Q(x)\rightarrow R(x)\wedge S(x)$ US(1)

(3) $P(x)$ P(附加，for: $P(x)\rightarrow S(x)$ ）

(4) $P(x)\vee Q(x)$ T,I(3)

(5) $R(x)\wedge S(x)$ T,I(2)(4)

(6) $S(x)$ T,I(5)

(7) $P(x)\rightarrow S(x)$ CP(3)(6)

(8) $\forall x(P(x)\rightarrow S(x))$ UG(7)

反证法(略).

（3）令M(x)：x是人；K(x)：x是科学工作者；Q(x)：x勤奋；T(x)：x聪明；S(x)：x将获得成功；a：王大志，则推理可以形式化为：

$\forall x((M(x)\wedge K(x))\rightarrow Q(x)), \forall x((M(x)\wedge Q(x)\wedge T(x))\rightarrow S(x)), M(a)\wedge K(a)\wedge T(a)\Rightarrow S(a)$

证明：

1） $M(a)\wedge K(a)\wedge T(a)$ P

2） $\forall x((M(x)\wedge K(x))\rightarrow Q(x))$ P

3） $(M(a)\wedge K(a))\rightarrow Q(a)$ US,(2)

4） $M(a)\wedge K(a)$ T,I,(1)

5） $Q(a)$ T,I,(2),(4)

6） $M(a)\wedge T(a)$ T,I,(1)

7） $M(a)\wedge Q(a)\wedge T(a)$ T,I,(5),(6)

8） $\forall x((M(x)\wedge Q(x)\wedge T(x))\rightarrow S(x))$ P

9） $(M(a)\wedge Q(a)\wedge T(a))\rightarrow S(a)$ US,(8)

10） $S(a)$ T,I,(7),(9)

（4）令M(x)：x是人；C(x)：x长期吸烟；K(x)：x长期酗酒；J(x)：x身体健康；P(x)：x能参加体育比赛，则推理可以形式化为：

$\forall x((M(x)\wedge(C(x)\vee K(x)))\rightarrow\neg J(x)),\ \forall x((M(x)\wedge\neg J(x))\rightarrow\neg P(x)),\ \exists x(M(x)\wedge P(x)) \Rightarrow \exists x(M(x)\wedge\neg K(x))$

证明：

1） $\exists x(M(x)\wedge P(x))$	P
2） $M(c)\wedge P(c)$	ES,(1)
3） $\forall x((M(x)\wedge\neg J(x))\rightarrow\neg P(x))$	P
4） $(M(c)\wedge\neg J(c))\rightarrow\neg P(c)$	US,(3)
5） $P(c)$	T,I,(2)
6） $\neg(M(c)\wedge\neg J(c))$	T,I,(4),(5)
7） $\neg M(c)\vee J(c)$	R,E,(6)
8） $M(c)$	T,I,(2)
9） $J(c)$	T,I,(7),(8)
10） $\forall x((M(x)\wedge(C(x)\vee K(x)))\rightarrow\neg J(x))$	P
11） $(M(c)\wedge(C(c)\vee K(c)))\rightarrow\neg J(c)$	US,(10)
12） $\neg(M(c)\wedge(C(c)\vee K(c)))$	T,I,(9),(11)
13） $\neg M(c)\vee(\neg C(c)\wedge\neg K(c))$	R,E,(12)
14） $\neg C(c)\wedge\neg K(c)$	T,I,(8),(13)
15） $\neg K(c)$	T,I,(14)
16） $M(c)\wedge\neg K(c)$	T,I,(8),(15)
17） $\exists x(M(x)\wedge\neg K(x))$	EG,(16)

（5）令a：小王；S(x)：x是一年级生；L(x)：x是理科生；W(x)：x是文科生；F(x,y)：x是y的辅导员，则推理可以形式化为:

$\forall x(S(x)\wedge\neg W(x)\rightarrow\exists yF(y,x)),\ S(a),\ L(a),\ \forall x(F(x, a)\rightarrow L(x)),\ \forall x(L(x)\rightarrow\neg W(x)) \Rightarrow \exists x\exists y(\neg W(x)\wedge F(x, y))$.

证明：

（1） $\forall x(L(x)\rightarrow\neg W(x))$	P
（2） $L(a)\rightarrow\neg W(a)$	US,(1)
（3） $L(a)$	P
（4） $\neg W(a)$	T,I,(2),(3)
（5） $S(a)$	P
（6） $S(a)\wedge\neg W(a)$	T,I,(4),(5)
（7） $\forall x(S(x)\wedge\neg W(x)\rightarrow\exists yF(y,x))$	P
(8) $S(a)\wedge\neg W(a)\rightarrow\exists yF(y, a)$	US,(7)
（9） $\exists yF(y, a)$	T,I,(6),(8)
（10） $F(c, a)$	ES,(9)
（11） $\forall x(F(x, a)\rightarrow L(x))$	P

(12) $F(c, a) \to L(c)$ US,(11)

(13) $L(c)$ T,I,(10),(12)

(14) $L(c) \to \neg W(c)$ US,(1)

(15) $\neg W(c)$ T,I,(13),(14)

(16) $\neg W(c) \wedge F(c, a)$ T,I,(10),(15)

(17) $\exists y(\neg W(c) \wedge F(c, y))$ EG,(16)

(18) $\exists x \exists y(\neg W(x) \wedge F(x, y))$ EG,(17)

因此，该推理是有效的.

T2. Consider the following problem. We know that horses are faster than dogs and that there is a greyhound that is faster than every rabbit. We know that Harry is a horse and that Ralph is a rabbit. Our job is to derive the fact that Harry is faster than Ralph (可以应用直接证明方法与归结法. 注意要增加两个公认的事实：Greyhound是Dog，速度可以传递比较的).

Problem translated in FOPL:

$\forall x\ \forall y\ ((Horse(x) \wedge Dog(y)) \to Faster(x,y))$

$\exists y\ (Greyhound(y) \wedge (\forall z\ Rabbit(z) \to Faster(y,z)))$

Horse(Harry)

Rabbit(Ralph)

Derive the following fact:

Faster(Harry, Ralph)

Added axioms to represent commonsense knowledge:

$\forall y\ (Greyhound(y) \to Dog(y))$

$\forall x\ \forall y\ \forall z\ ((Faster(x,y) \wedge Faster(y,z)) \to Faster(x,z))$

Proving using Proof Theory and a set of inference rules

1. $\forall x\ \forall y\ Horse(x) \wedge Dog(y) \to Faster(x, y)$ Premise
2. $\exists y\ Greyhound(y) \wedge (\forall z\ Rabbit(z) \to Faster(y, z))$ Premise
3. $\forall y\ Greyhound(y) \to Dog(y)$ Premise
4. $\forall x \forall y \forall z\ Faster(x, y) \wedge Faster(y, z) \to Faster(x, z)$ Premise
5. Horse(Harry) Premise
6. Rabbit(Ralph) Premise
7. $Greyhound(Greg) \wedge (\forall z\ Rabbit(z) \to Faster(Greg, z))$ ES (2)
8. Greyhound(Greg) T, I (7)
9. $\forall z\ Rabbit(z) \to Faster(Greg, z))$ T, I (7)
10. $Rabbit(Ralph) \to Faster(Greg, Ralph)$ US (9)
11. Faster(Greg, Ralph) T, I (6)(10)
12. $Greyhound(Greg) \to Dog(Greg)$ US (3)
13. Dog(Greg) T, I (12)(8)
14. $Horse(Harry) \wedge Dog(Greg) \to Faster(Harry, Greg)$ US (1)
15. $Horse(Harry) \wedge Dog(Greg)$ T, I (5)(13)
16. Faster(Harry, Greg) T, I (14)(15)
17. $Faster(Harry, Greg) \wedge Faster(Greg, Ralph) \to Faster(Harry, Ralph)$ US (4)

18. Faster(Harry, Greg) ∧ Faster(Greg, Ralph)   T, I (11)(16)

19. Faster(Harry, Ralph)   T, I (17)(19)

QED.

Using Resolution(归结法) to determine logical entailment

1.	{¬Horse(x), ¬Dog(y), Faster(x, y)}	Premise
2.	{Greyhound(Greg)}	Premise
3.	{¬Rabbit(z), Faster(Greg, z)}	Premise
4.	{¬Greyhound(y), Dog(y)}	Premise
5.	{¬Faster(x, y), ¬Faster(y, z), Faster(x, z)}	Premise
6.	{Horse(Harry)}	Premise
7.	{Rabbit(Ralph)}	Premise
8.	{¬Faster(Harry, Ralph)}	Negated Goal
9.	{Dog(Greg)}	(2)(4)归结
10.	{¬Dog(y), Faster(Harry, y)}	(6)(1)归结
11.	{Faster(Harry, Greg)}	(9)(10)归结
12.	{Faster(Greg, Ralph)}	(7)(3)归结
13.	{¬Faster(Greg, z), Faster(Harry, z)}	(11)(5)归结
14.	{Faster(Harry, Ralph)}	(12)(13)归结
15.	{}	(14)(8)归结

QED.