

基本等值式

1. 双重否定律 $A \Leftrightarrow \neg \neg A$
2. 幂等律 $A \Leftrightarrow A \vee A, A \Leftrightarrow A \wedge A$
3. 交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$
4. 结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C) \quad (A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$
5. 分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C) \quad (\vee \text{对} \wedge \text{的分配律})$
 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \quad (\wedge \text{对} \vee \text{的分配律})$
6. 德·摩根律 $\neg (A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B \quad \neg (A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
7. 吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$
8. 零律 $A \vee 1 \Leftrightarrow 1, A \wedge 0 \Leftrightarrow 0$
9. 同一律 $A \vee 0 \Leftrightarrow A, A \wedge 1 \Leftrightarrow A$
10. 排中律 $A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$
11. 矛盾律 $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0$
12. 蕴涵等值式 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$
13. 等价等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
14. 假言易位 $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
15. 等价否定等值式 $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$
16. 归谬论 $(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$

求给定公式范式的步骤

- (1) 消去联结词 $\rightarrow, \leftrightarrow$ (若存在)。
- (2) 否定号的消去(利用双重否定律)或内移(利用德摩根律)。
- (3) 利用分配律: 利用 \wedge 对 \vee 的分配律求析取范式, \vee 对 \wedge 的分配律求合取范式。

推理定律--重言蕴含式

- | | |
|---|-------------|
| (1) $A \Rightarrow (A \vee B)$ | 附加律 |
| (2) $(A \wedge B) \Rightarrow A$ | 化简律 |
| (3) $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$ | 假言推理 |
| (4) $(A \rightarrow B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ | 拒取式 |
| (5) $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ | 析取三段论 |
| (6) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow C)$ | 假言三段论 |
| (7) $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ | 等价三段论 |
| (8) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ | 构造性二难 |
| $(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow B) \wedge (A \vee \neg A) \Rightarrow B$ | 构造性二难(特殊形式) |
| (9) $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ | 破坏性二难 |

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	0 0 0	m_0	$p \vee q \vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	0 0 1	m_1	$p \vee q \vee \neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	0 1 0	m_2	$p \vee \neg q \vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p \wedge q \wedge r$	0 1 1	m_3	$p \vee \neg q \vee \neg r$	0 1 1	M_3
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p \vee q \vee r$	1 0 0	M_4
$p \wedge \neg q \wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p \vee q \vee \neg r$	1 0 1	M_5
$p \wedge q \wedge \neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p \vee \neg q \vee r$	1 1 0	M_6
$p \wedge q \wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	1 1 1	M_7

设个体域为有限集 $D=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 则有

- (1) $\forall x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n)$
- (2) $\exists x A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)$

设 $A(x)$ 是任意的含自由出现个体变项 x 的公式, 则

- (1) $\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$
- (2) $\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$

设 $A(x)$ 是任意的含自由出现个体变项 x 的公式, B 中不含 x 的出现, 则

- (1) $\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$
 $\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$
 $\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$
 $\forall x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$
- (2) $\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$
 $\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$
 $\exists x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow B$
 $\exists x(B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \exists x A(x)$

设 $A(x)$, $B(x)$ 是任意的含自由出现个体变项 x 的公式, 则

- (1) $\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$
- (2) $\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

全称量词“ \forall ”对“ \vee ”无分配律。

存在量词“ \exists ”对“ \wedge ”无分配律。

UI 规则。 $\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)}$ 或 $\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)}$

UG 规则。 $\frac{A(y)}{\therefore \forall x A(x)}$

EG 规则。 $\frac{A(c)}{\therefore \exists x A(x)}$

EI 规则。 $\frac{\exists x A(x)}{\therefore A(c)}$

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\text{幂集 } P(A) = \{x | x \subseteq A\}$$

$$\text{对称差集 } A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

$$\text{绝对补集 } \sim A = \{x | x \notin A\}$$

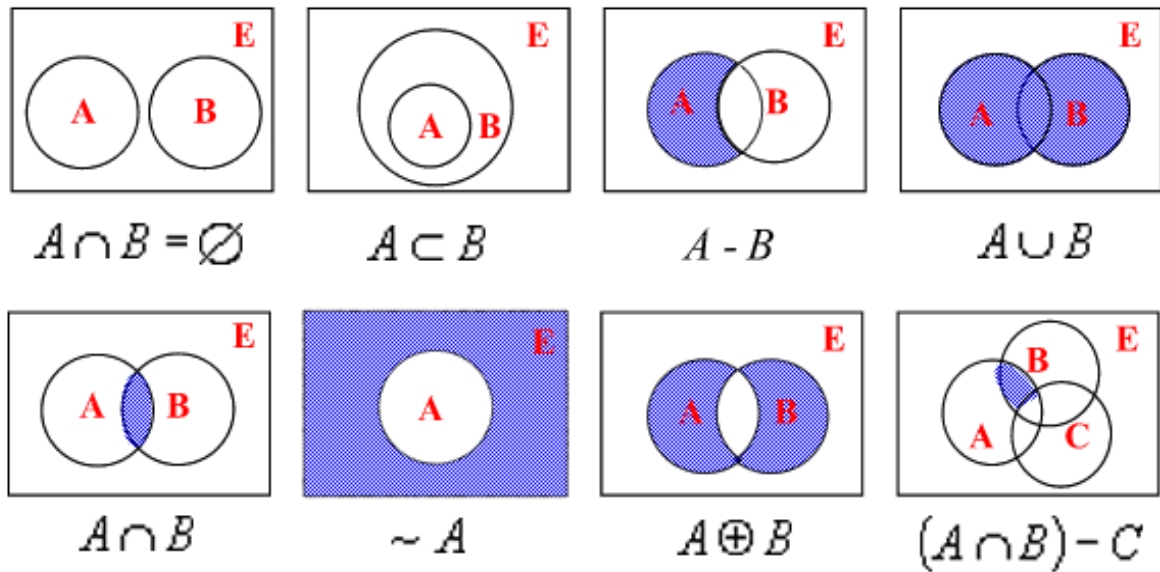


图6.2

$$\text{广义并 } \cup A = \{x | \exists z(z \in A \wedge x \in z)\}$$

$$\text{广义交 } \cap A = \{x | \forall z(z \in A \rightarrow x \in z)\}$$

$$\text{设 } A = \{\{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,e,f\}\} \quad B = \{\{a\}\} \quad C = \{a, \{c,d\}\}$$

$$\text{则 } \cup A = \{a,b,c,d,e,f\}$$

$$\cup B = \{a\}$$

$$\cup C = a \cup \{c,d\}$$

$$\cup \emptyset = \emptyset$$

$$\cap A = \{a\}$$

$$\cap B = \{a\}$$

$$\cap C = a \cap \{c,d\}$$

集合恒等式

$$\text{幂等律 } A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$\text{结合律 } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$\text{交换律 } A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$\text{分配律 } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\text{同一律 } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap E = A$$

$$\text{零律 } A \cup E = E$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

排中律	$A \cup \sim A = E$	
矛盾律	$A \cap \sim A = \emptyset$	
吸收律	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
德摩根律	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$	$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
	$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$	$\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$
	$\sim \emptyset = E$	$\sim E = \emptyset$
双重否定律	$\sim(\sim A) = A$	

集合运算性质的一些重要结果

$$\begin{aligned}
 &A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B \\
 &A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B \\
 &A - B \subseteq A \\
 &A - B = A \cap \sim B \\
 &A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset \\
 &A \oplus B = B \oplus A \\
 &(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C) \\
 &A \oplus \emptyset = A \\
 &A \oplus A = \emptyset \\
 &A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C
 \end{aligned}$$

对偶(dual)式: 一个集合表达式, 如果只含有 \cap 、 \cup 、 \sim 、 \emptyset 、 E 、 $=$ 、 \subseteq 、 \supseteq , 那么同时把 \cap 与 \cup 互换, 把 \emptyset 与 E 互换, 把 \subseteq 与 \supseteq 互换, 得到式子称为原式的对偶式。

有序对 $\langle x, y \rangle$ 具有以下性质: (1) 当 $x \neq y$ 时, $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ 。
(2) $\langle x, y \rangle = \langle u, v \rangle$ 的充分必要条件是 $x = u$ 且 $y = v$ 。

笛卡儿积的符号化表示为 $A \times B = \{\langle x, y \rangle | x \in A \wedge y \in B\}$
如果 $|A|=m, |B|=n$, 则 $|A \times B|=mn$ 。

笛卡儿积的运算性质

(1) 对任意集合 A , 根据定义有

$$A \times \emptyset = \emptyset, \emptyset \times A = \emptyset$$

(2) 一般的说, 笛卡儿积运算不满足交换律, 即

$$A \times B \neq B \times A \quad (\text{当 } A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge A \neq B \text{ 时})$$

(3) 笛卡儿积运算不满足结合律, 即

$$(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C) \quad (\text{当 } A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset \wedge C \neq \emptyset \text{ 时})$$

(4) 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律, 即

$$\begin{aligned}
 A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) & (B \cup C) \times A &= (B \times A) \cup (C \times A) \\
 A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) & (B \cap C) \times A &= (B \times A) \cap (C \times A)
 \end{aligned}$$

(5) $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \Rightarrow A \times B \subseteq C \times D$

常用的关系

对任意集合 A , 定义

$$\text{全域关系 } EA = \{\langle x, y \rangle | x \in A \wedge y \in A\} = A \times A$$

$$\text{恒等关系 } IA = \{\langle x, x \rangle | x \in A\}$$

$$\text{空关系 } \emptyset$$

小于或等于关系: $LA=\{\langle x,y \rangle | x,y \in A \wedge x \leq y\}$, 其中 $A \subseteq \mathbb{R}$ 。

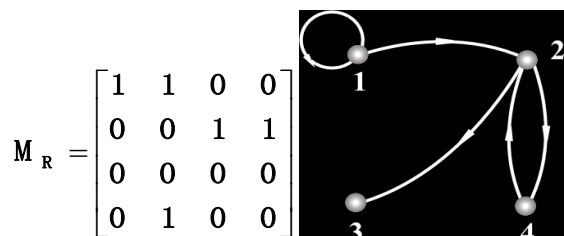
整除关系: $DB=\{\langle x,y \rangle | x,y \in B \wedge x \text{ 整除 } y\}$, 其中 $A \subseteq \mathbb{Z}^*$, \mathbb{Z}^* 是非零整数集

包含关系: $R_{\subseteq}=\{\langle x,y \rangle | x,y \in A \wedge x \subseteq y\}$, 其中 A 是集合族。

关系矩阵和关系图

设 $A=\{1,2,3,4\}$, $R=\{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle\}$,

则 R 的关系矩阵和关系图分别是



定义域 $\text{dom } R = \{x \mid \exists y (\langle x,y \rangle \in R)\}$

值域 $\text{ran } R = \{y \mid \exists x (\langle x,y \rangle \in R)\}$

域 $\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$

例 求 $R=\{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle\}$ 的定义域、值域和域。

解答 $\text{dom } R = \{1,2,4\}$ $\text{ran } R = \{2,3,4\}$ $\text{fld } R = \{1,2,3,4\}$

逆 $R^{-1} = \{\langle x,y \rangle \mid \langle y,x \rangle \in R\}$

右复合 $F \circ G = \{\langle x,y \rangle \mid \exists t (\langle x,t \rangle \in F \wedge \langle t,y \rangle \in G)\}$

限制 $R \upharpoonright A = \{\langle x,y \rangle \mid xRy \wedge x \in A\}$

像 $R[A] = \text{ran}(R \upharpoonright A)$

例 设 $R=\{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$

$R \upharpoonright \{1\} = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle\}$ $R \upharpoonright \emptyset = \emptyset$ $R \upharpoonright \{2,3\} = \{\langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$

$R[\{1\}] = \{2,3\}$ $R[\emptyset] = \emptyset$ $R[\{3\}] = \{2\}$

设 F 是任意的关系, 则

(1) $(F^{-1})^{-1} = F$

(2) $\text{dom } F^{-1} = \text{ran } F$, $\text{ran } F^{-1} = \text{dom } F$

设 F, G, H 是任意的关系, 则

(1) $(F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H)$

(2) $(F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$

设 R 为 A 上的关系, 则 $R \circ I_A = I_A \circ R = R$

设 F, G, H 是任意的关系, 则

(1) $F \circ (G \cup H) = F \circ G \cup F \circ H$

(2) $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$

(3) $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$

(4) $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$

设 F 为关系, A, B 为集合, 则

$$(1) F \uparrow (A \cup B) = F \uparrow A \cup F \uparrow B$$

$$(2) F[A \cup B] = F[A] \cup F[B]$$

$$(3) F \uparrow (A \cap B) = F \uparrow A \cap F \uparrow B$$

$$(4) F[A \cap B] \subseteq F[A] \cap F[B]$$

关系的幂运算

设 R 为 A 上的关系, n 为自然数, 则 R 的 n 次幂定义为:

$$(1) R_0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = I_A$$

$$(2) R_{n+1} = R_n \circ R$$

幂运算的性质

设 A 为 n 元集, R 是 A 上的关系, 则存在自然数 s 和 t , 使得 $R_s = R_t$ 。

设 R 是 A 上的关系, $m, n \in \mathbb{N}$, 则

$$(1) R_m \circ R_n = R_{m+n} \quad (2) (R_m)_n = R_{mn}$$

设 R 是 A 上的关系, 若存在自然数 $s, t (s < t)$ 使得 $R_s = R_t$, 则

$$(1) \text{ 对任何 } k \in \mathbb{N} \text{ 有 } R_{s+k} = R_{t+k}$$

$$(2) \text{ 对任何 } k, i \in \mathbb{N} \text{ 有 } R_{s+kp+i} = R_{s+i}, \text{ 其中 } p=t-s$$

$$(3) \text{ 令 } S = \{R_0, R_1, \dots, R_{t-1}\}, \text{ 则对于任意的 } q \in \mathbb{N} \text{ 有 } R_q \in S$$

自反 $\forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$,

反自反 $\forall x (x \in A \rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$,

对称 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \rightarrow \langle y, x \rangle \in R)$

反对称 $\forall x \forall y (x, y \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \rightarrow x = y)$,

传递 $\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$

关系性质的等价描述

设 R 为 A 上的关系, 则

$$(1) R \text{ 在 } A \text{ 上自反当且仅当 } I_A \subseteq R$$

$$(2) R \text{ 在 } A \text{ 上反自反当且仅当 } R \cap I_A = \emptyset$$

$$(3) R \text{ 在 } A \text{ 上对称当且仅当 } R = R^{-1}$$

$$(4) R \text{ 在 } A \text{ 上反对称当且仅当 } R \cap R^{-1} \subseteq I_A$$

$$(5) R \text{ 在 } A \text{ 上传递当且仅当 } R \circ R \subseteq R$$

(1) 若 R_1, R_2 是自反的和对称的, 则 $R_1 \cup R_2$ 也是自反的和对称的。

(2) 若 R_1 和 R_2 是传递的, 则 $R_1 \cap R_2$ 也是传递的。

关系性质的特点

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
集合表达式	$IA \subseteq R$	$R \cap IA = \emptyset$	$R = R^{-1}$	$R \cap R^{-1} \subseteq IA$	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	主对角线元素全是 1	主对角线元素全是 0	全矩阵是对称矩阵	若 $r_{ij}=1$, 且 $i \neq j$, 则 $r_{ji}=0$	对 M 中 1 所在位置, M 中相应的位置都是 1
关系图	每个顶点都有环	每个顶点都没有环	如果两个顶点之间有边, 一定是双向边(无单边)	如果两点之间有一条有向边, 则从 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 也有边	如果顶点 x_i 到 x_j 有边, x_j 到 x_k 有边, 则从 x_i 到 x_k 也有边

关系的性质和运算之间的关系

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
R^{-1}	√	√	√	√	√
$R_1 \cap R_2$	√	√	√	√	√
$R_1 \cup R_2$	√	√	√	×	×
$R_1 - R_2$	×	√	√	√	×
$R_1 \circ R_2$	√	×	×	×	×

闭包的构造方法

设 R 为 A 上的关系, 则有

- (1) 自反闭包 $r(R) = R \cup I_A$
- (2) 对称闭包 $s(R) = R \cup R^{-1}$
- (3) $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

关系性质与闭包运算之间的联系

设 R 是非空集合 A 上的关系,

- (1) 若 R 是自反的, 则 $s(R)$ 与 $t(R)$ 也是自反的。
- (2) 若 R 是对称的, 则 $r(R)$ 与 $t(R)$ 也是对称的。
- (3) 若 R 是传递的, 则 $r(R)$ 是传递的。

等价类的性质

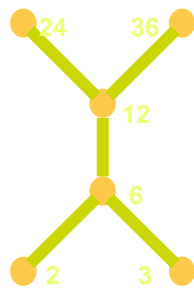
设 R 是非空集合 A 上的等价关系, 则

- (1) $\forall x \in A$, $[x]$ 是 A 的非空子集。
- (2) $\forall x, y \in A$, 如果 xRy , 则 $[x] = [y]$ 。
- (3) $\forall x, y \in A$, 如果 $\langle x, y \rangle \notin R$, 则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交。
- (4) $\cup \{[x] | x \in A\} = A$ 。

偏序集中的特殊元素

设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, $y \in B$ 。

- (1) 若 $\forall x (x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的最小元。
- (2) 若 $\forall x (x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的最大元。
- (3) 若 $\forall x (x \in B \wedge x \leq y \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的极小元。
- (4) 若 $\forall x (x \in B \wedge y \leq x \rightarrow x = y)$ 成立, 则称 y 为 B 的极大元。



B	最大元	最小元	极大元	极小元
$\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$	无	无	24, 36	2, 3
$\{6, 12\}$	12	6	12	6
$\{2, 3, 6\}$	6	无	6	2, 3
$\{6\}$	6	6	6	6

B	上界	下界	上确界	下确界
$\{2, 3, 6, 12, 24, 36\}$	无	无	无	无
$\{6, 12\}$	12, 24, 36	2, 3, 6	12	6
$\{2, 3, 6\}$	6, 12, 24, 36	无	6	无
$\{6\}$	6, 12, 24, 36, 2, 3, 6,	6	6	6

函数相等

由定义可知, 两个函数 F 和 G 相等, 一定满足下面两个条件:

- (1) $\text{dom } F = \text{dom } G$
- (2) $\forall x \in \text{dom } F = \text{dom } G$, 都有 $F(x) = G(x)$

所有从 A 到 B 的函数的集合记作 BA , 读作“ B 上 A ”, 符号化表示为 $BA = \{f | f: A \rightarrow B\}$ 。

例: 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$, 求 BA 。

$BA = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ 。其中

$$f_0 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_1 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_2 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_3 = \{\langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

$$f_4 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_5 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

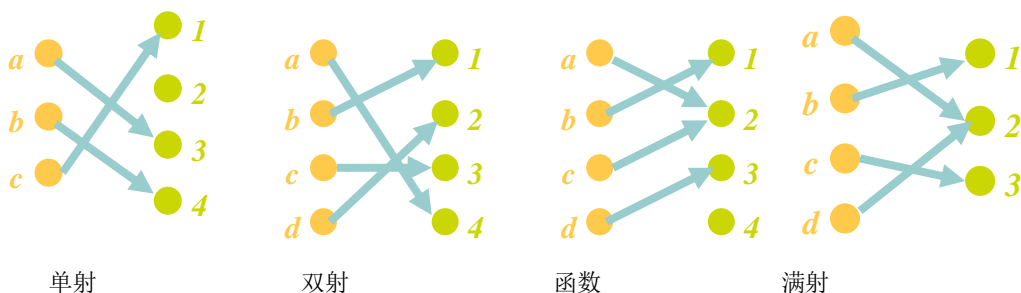
$$f_6 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, a \rangle\}$$

$$f_7 = \{\langle 1, b \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle\}$$

设 $f: A \rightarrow B$, (1) 若 $\text{ran } f = B$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是满射(surjection)的。

(2) 若 $\forall y \in \text{ran } f$ 都存在唯一的 $x \in A$ 使得 $f(x) = y$, 则称 $f: A \rightarrow B$ 是单射(injection)的。

(3) 若 f 既是满射又是单射的, 则称 $f:A \rightarrow B$ 是双射(bijection)



例: 判断下面函数是否为单射、满射、双射的, 为什么?

- (1) $f: R \rightarrow R, f(x) = -x^2 + 2x - 1$ (2) $f: Z_+ \rightarrow R, f(x) = \ln x, Z_+$ 为正整数集
(3) $f: R \rightarrow Z, f(x) = \lfloor x \rfloor$ (4) $f: R \rightarrow R, f(x) = 2x + 1$.

解 (1) f 在 $x=1$ 取得极大值 0。既不是单射也不是满射的。

(2) f 是单调上升的, 是单射的, 但不满射。 $\text{ran } f = \{\ln 1, \ln 2, \dots\}$ 。

(3) f 是满射的, 但不是单射的, 例如 $f(1.5) = f(1.2) = 1$ 。

(4) f 是满射、单射、双射的, 因为它是单调函数并且 $\text{ran } f = R$ 。

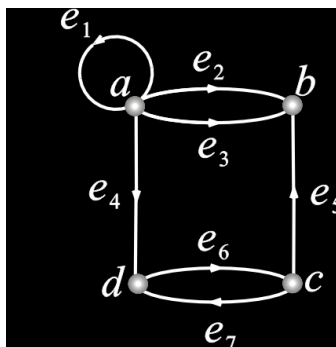
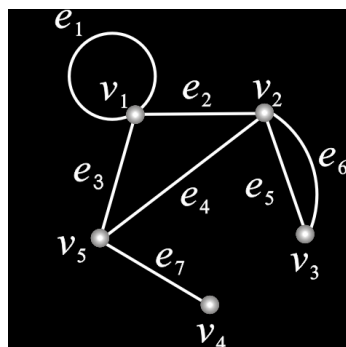
例: (1) 给定无向图 $G = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$,

$E = \{(v_1, v_1), (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_5), (v_1, v_5), (v_4, v_5)\}$ 。

(2) 给定有向图 $D = \langle V, E \rangle$, 其中 $V = \{a, b, c, d\}$,

$E = \{ \langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, b \rangle, \langle a, d \rangle, \langle c, d \rangle, \langle d, c \rangle, \langle c, b \rangle \}$ 。

画出 G 与 D 的图形。



邻域: $NG(v_1) = \{v_2, v_5\}$

闭邻域: $NG(v_1) = \{v_1, v_2, v_5\}$

关联集: $IG(v_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$

后继元集: $\Gamma + D(d) = \{c\}$

先驱元集: $\Gamma - D(d) = \{a, c\}$

邻域: $ND(d) = \{a, c\}$

闭邻域: $ND(d) = \{a, c, d\}$

$d(v_1) = 4$ (注意, 环提供 2 度),

$\Delta = 4, \delta = 1$,

v_4 是悬挂顶点, e_7 是悬挂边。

度数列为 4, 4, 2, 1, 3。

出度: $d+(a) = 4$, 入度: $d-(a) = 1$

(环 e_1 提供出度 1, 提供入度 1),

$d(a) = 4 + 1 = 5$, $\Delta = 5, \delta = 3$,

$\Delta + = 4$ (在 a 点达到)

$\delta + = 0$ (在 b 点达到)

$\Delta - = 3$ (在 b 点达到)

$\delta - = 1$ (在 a 和 c 点达到)

按字母顺序, 度数列为: 5, 3, 3, 3

出度列: 4, 0, 2, 1

入度列: 1, 3, 1, 2

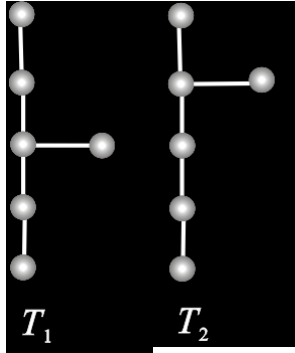
设 $G=\langle V,E \rangle$ 是 n 阶 m 条边的无向图, 则下面各命题是等价的:

- (1) G 是树。
- (2) G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径。
- (3) G 中无回路且 $m=n-1$ 。
- (4) G 是连通的且 $m=n-1$ 。
- (5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥。
- (6) G 中没有回路, 但在任何两个不同的顶点之间加一条新边, 在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

例题 已知无向树 T 中, 有 1 个 3 度顶点, 2 个 2 度顶点, 其余顶点全是树叶, 试求树叶数, 并画出满足要求的非同构的无向树。

解答 设有 x 片树叶, 于是结点总数

$$n=1+2+x=3+x$$



由握手定理和树的性质 $m=n-1$ 可知,

$$\begin{aligned} 2m &= 2(n-1) = 2 \times (2+x) \\ &= 1 \times 3 + 2 \times 2 + x \end{aligned}$$

解出 $x=3$, 故 T 有 3 片树叶。

故 T 的度数应为 1、1、1、2、2、3。

求最小生成树的算法 (避圈法(Kruskal))

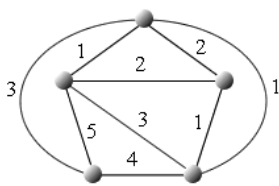
(1) 设 n 阶无向连通带权图 $G=\langle V,E,W \rangle$ 有 m 条边。不妨设 G 中没有环 (否则, 可以将所有的环先删去), 将 m 条边按权从小到大排序: e_1, e_2, \dots, e_m 。

(2) 取 e_1 在 T 中。

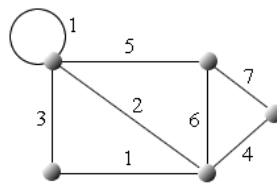
(3) 依次检查 e_2, \dots, e_m , 若 $e_j(j \geq 2)$ 与已在 T 中的边不构成回路, 取 e_j 也在 T 中, 否则弃去 e_j 。

(4) 算法停止时得到的 T 为 G 的最小生成树为止。

例: 求下图所示两个图中的最小生成树。



(1)



(2)

$$W(T_1)=6$$

$$W(T_2)=12$$

T 是 $n(n \geq 2)$ 阶有向树,

(1) T 为根树—— T 中有一个顶点入度为 0, 其余顶点的入度均为 1

(2) 树根——入度为 0 的顶点

(3) 树叶——入度为 1, 出度为 0 的顶点

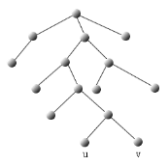
(4) 内点——入度为 1, 出度不为 0 的顶点

(5) 分支点——树根与内点的总称

(6) 顶点 v 的层数——从树根到 v 的通路长度

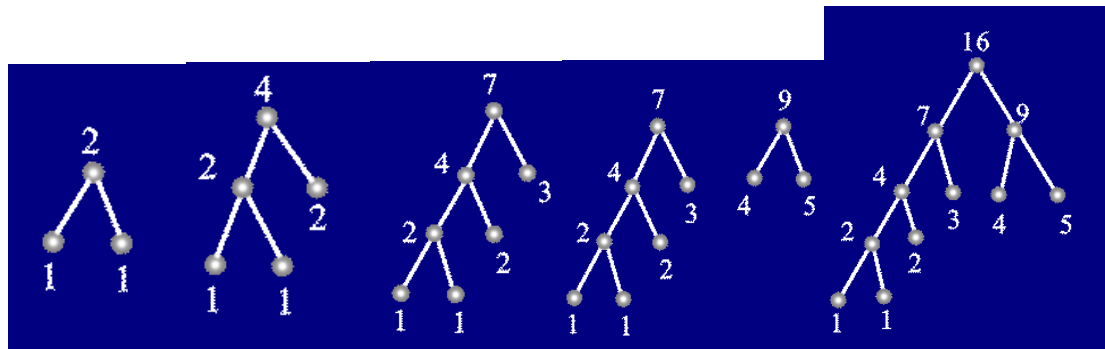
(7) 树高—— T 中层数最大顶点的层数

根树的画法：树根放上方，省去所有有向边上的箭头。

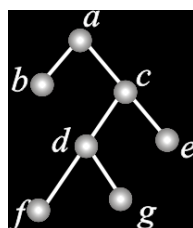


树叶——8片 内点——6个 分支点——7个 高度——5

求带权为 1、1、2、3、4、5 的最优树。



$W(T)=38$



中序行遍法： $b \underline{a} (f \underline{d} g) \underline{c} e$

前序行遍法： $\underline{a} b (\underline{c} (f \underline{d} g) e)$

后序行遍法： $b ((f g \underline{d}) e \underline{c}) \underline{a}$

\vdash 断定符 (公式在 L 中可证)	R 关系 r 相容关系
\models 满足符 (公式在 E 上有效, 公式在 E 上可满足)	$R \circ S$ 关系 与关系 的复合
\neg 命题的“非”运算	$\text{dom} f$ 函数 的 定义域 (前域)
\wedge 命题的“合取” (“与”) 运算	$\text{ran} f$ 函数 的值域
\vee 命题的“析取” (“或”, “可兼或”) 运算	$f: X \rightarrow Y$ f 是 X 到 Y 的函数
\rightarrow 命题的“条件”运算	$\text{GCD}(x, y)$ x, y 最大公约数
\leftrightarrow 命题的“双条件”运算的	$\text{LCM}(x, y)$ x, y 最小公倍数
$A \Leftrightarrow B$ 命题 A 与 B 等价关系	$aH(Ha)$ H 关于 a 的左 (右) 陪集
$A \Rightarrow B$ 命题 A 与 B 的蕴涵关系	$\text{Ker}(f)$ 同态映射 f 的核 (或称 f 同态核)
A^* 公式 A 的对偶公式	$[1, n]$ 1 到 n 的整数集合
wff 合式公式	$d(u, v)$ 点 u 与点 v 间的距离
iff 当且仅当	$d(v)$ 点 v 的度数 $G=(V, E)$ 点集为 V, 边集为 E 的图
\uparrow 命题的“与非”运算 (“ 与非门 ”)	$W(G)$ 图 G 的 连通分支数
\downarrow 命题的“或非”运算 (“或非门”)	$k(G)$ 图 G 的点连通度
\square 模态词 “必然”	$\Delta(G)$ 图 G 的最大点度
\diamond 模态词 “可能”	$A(G)$ 图 G 的 邻接矩阵
\varnothing 空集	$P(G)$ 图 G 的可达矩阵
\in 属于 (\notin 不属于)	$M(G)$ 图 G 的关联矩阵
$P(A)$ 集合 A 的幂集	\mathbb{C} 复数集
$ A $ 集合 A 的点数	\mathbb{N} 自然数集 (包含 0 在内)
$R^2 = R \circ R$ [$R^n = R^{(n-1)} \circ R$] 关系 R 的“复合”	\mathbb{N}^* 正自然数集
\aleph 阿列夫	\mathbb{P} 素数集
\subseteq 包含	\mathbb{Q} 有理数集
\subset (或下面加 \neq) 真包含	\mathbb{R} 实数集
\cup 集合的并运算	\mathbb{Z} 整数集
\cap 集合的交运算	Set 集范畴
$-$ (\sim) 集合的差运算	Top 拓扑空间范畴
$ $ 限制	Ab 交换群范畴
$[X]$ (右下角 R) 集合关于关系 R 的等价类	Grp 群范畴
A/R 集合 A 上关于 R 的商集	Mon 单元半群范畴
$[a]$ 元素 a 产生的循环群	Ring 有单位元的 (结合) 环范畴
I (i 大写) 环, 理想	Rng 环范畴
$\mathbb{Z}/(n)$ 模 n 的同余类集合	CRng 交换环范畴
$r(R)$ 关系 R 的自反闭包	$R\text{-mod}$ 环 R 的左模范畴
$s(R)$ 关系 的对称闭包	$\text{mod-}R$ 环 R 的右模范畴
CP 命题演绎的定理 (CP 规则)	Field 域范畴
EG 存在推广规则 (存在量词 引入规则)	Poset 偏序集范畴
ES 存在量词 特指规则 (存在量词 消去规则)	
UG 全称推广规则 (全称量词 引入规则)	
US 全称特指规则 (全称量词 消去规则)	