书面作业4.2 参考解答或提示

第1部分 基础

无.

第2部分 理论

T1. 设 R 为 A 上二元关系，如果对每一 $a\in A$ 均存在 $b\in A$ 使 aRb，则称 R 为连续的.

证明：当 R 连续、对称、传递时，R 为等价关系.

只需证 R 是自反的. 设 a 是 A 上任意元素，则有 $b\in A$ 使 aRb（因为 R 连续），因而有 bRa（因为 R 对称），所以有 aRa（因为 R 传递）. 因此 R 是自反的.

T2. 设 R 是集合 A 上的一个自反关系，证明：R 是等价关系当且仅当若 $(a,b)\in R \wedge (a,c)\in R$ 时，则 $(b,c)\in R$.

当 R 等价时，容易证明结论，下面证明另一方面, 即证 R 等价.

（1） R 自反（题设）；

（2）若 aRb，因 R 自反，有 aRa，从而由条件有：bRa，所以 R 对称；

（3）若 aRb,bRc，则由已证对称知，bRa，加上 bRc，由条件有：aRc，所以 R 传递.

综上，R 是等价关系.

T3. 假设给定了正整数的序偶集合 A，在 A 上定义二元关系 R 如下：$((x,y),(u,v))\in R$，当且仅当 xv=yu，证明：R 是一个等价关系.

（1）自反性：$\forall (x,y)\in A$，因为 xy=yx，所以 $((x,y),(x,y))\in R$，因此 R 是自反的；

（2）对称性：$\forall (x,y)$，$(u,v)\in A$，若 $((x,y),(u,v))\in R\Rightarrow xv=yu\Rightarrow uy=vx\Rightarrow ((u,v),(x,y)\in R$，因此 R 是对称的；

（3）传递性：$\forall (x,y)$，(u,v)，$(s,t)\in A$，若 $((x,y),(u,v))\in R\wedge((u,v),(s,t))\in R\Rightarrow xv=yu\wedge ut=vs\Rightarrow xvut=yuvs$
$\Rightarrow xt=ys\Rightarrow ((x,y),(s,t))\in R$，因此 R 是传递的.

综上，R 是一个等价关系.

T4. 令 C = $\{a+bi \mid a,b$ 为实数$,a\neq 0\}$，定义 C 上关系 R：$(a+bi)R(c+di)$ 当且仅当 $ac>0$， 证明 R 为等价关系.

对任意 $s=(a+bi)\in C$，$a\neq 0$，有 $a\cdot a>0$，则 $(a+bi)R(a+bi)$，所以 R 是自反的；

若 $(a+bi)R(c+di)$，则有 $ac>0$，所以 $ca>0$，故 $(c+di)R(a+bi)$，R 是对称的；

若 $(a+bi)R(c+di)$，$(c+di)R(e+fi)$，则 $ac>0$，$ce>0$，因此 $ae>0$，

所以 $(a+bi)R(e+fi)$，故 R 是传递的.

因此 R 为等价关系.

T5. 设 R 为 A 上二元关系，且 dom(R)=A. 若 $RoR^{-1}oR = R$，证明 RoR^{-1} 和 $R^{-1}oR$ 都是 A 上的等价关系.

先证 $R\circ R^{-1}$ 是 A 上的等价关系. dom(R)=A，

对任意 $x\in A$，有 $y\in A$，使 xRy，所以 $yR^{-1}x$，因此 $xR\circ R^{-1}x$，$R\circ R^{-1}$是自反的；

对任意 $x, y\in A$, 若 $xR\circ R^{-1}y$，则存在 $u\in A$，使得 xRu，$uR^{-1}y$，所以有 $uR^{-1}x$，yRu，因此 $yR\circ R^{-1}x$，$R\circ R^{-1}$是对称的；

对任意 $x, y, z\in A$, 若 $xR\circ R^{-1}y$，$yR\circ R^{-1}z$，则存在 u、$v\in A$，使得 xRu，$uR^{-1}y$，yRv，$vR^{-1}z$，所以$(x,v)\in R\circ R^{-1}\circ R$，而 $R\circ R^{-1}\circ R=R$，所以有$(x,v.)\in R$，同时$(v,z)\in R^{-1}$，因此 $xR\circ R^{-1}z$，$R\circ R^{-1}$是传递的；

综上所述，$R\circ R^{-1}$是 A 上的等价关系。同理易证 $R^{-1}\circ R$ 也是 A 上的等价关系.

T6. 设$\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$是集合 A 的一个划分，我们定义 A 上的一个二元关系 R，使$(a,b)\in R$ 当且仅当 a 和 b 在这个划分的同一块中. 证明 R 是等价关系.

T7. 设 R，S 为 A 上的两个等价关系，且 $R\subseteq S$, 定义 A/R 上的关系 R/S: $([x],[y])\in R/S$ 当且仅当$(x,y)\in S$.

证明：R/S 为 A/R 上的等价关系.

S 为 A 上的等价关系，那么对任意 x 有$(x,x)\in S$，所以$([x],[x])\in R/S$，R/S 是自反的；

对任意$[x],[y]\in A/R$, 若$([x],[y])\in R/S$，则$(x,y)\in S$，由 S 对称知$(y,x)\in S$，所以$([y],[x])\in R/S$，R/S 是对称的；

对任意$[x],[y],[z]\in A/R$, 若$([x],[y])\in R/S$，$([y],[z])\in R/S$，则$(x,y)\in S$，$(y,z)\in S$，由 S 传递知$(x,z)\in S$，

所以$([x],[z])\in R/S$，R/S 是传递的.

故 R/S 为 A/R 上的等价关系.

T8. 教材 P232 题 7.

证明 (1) "⇒".设 $R\circ S$ 是 A 上的等价关系.

(a) 对任意的$\langle x,y\rangle\in R\circ S(x,y\in A)$，因 $R\circ S$ 是对称的，所以$\langle y,x\rangle\in R\circ S$.存在 $z\in A$，使得$(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,x\rangle\in S)$，因 R 和 S 是对称的，所以$(\langle x,z\rangle\in S)\wedge(\langle z,y\rangle\in R)$.由"$\circ$"知：$\langle x,y\rangle\in S\circ R$.所以 $R\circ S\subseteq S\circ R$.

(b) 对任意的$\langle x,y\rangle\in S\circ R(x,y\in A)$，则存在 $z\in A$，使得$(\langle x,z\rangle\in S)\wedge(\langle z,y\rangle\in R)$，因 R 和 S 是对称的，所以$(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,x\rangle\in S)$.由"$\circ$"知：$\langle y,x\rangle\in R\circ S$.因 $R\circ S$ 是对称的，所以$\langle x,y\rangle\in R\circ S$，所以 $S\circ R\subseteq R\circ S$.

由(a)，(b)知 $R\circ S=S\circ R$.

(2) "⇐".设 $R\circ S=S\circ R$.

(a) 对任意的 $x\in A$，由 R,S 是自反的$(\langle x,x\rangle\in R)\wedge(\langle x,x\rangle\in S)$，所以$\langle x,x\rangle\in R\circ S$.即 $R\circ S$ 是自反的.

(b) 对任意的 $x,y\in A$，

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle\in R\circ S &\Rightarrow \langle x,y\rangle\in S\circ R\\
&\Rightarrow(\langle x,z\rangle\in S)\wedge(\langle z,y\rangle\in R)\\
&\Rightarrow(\langle y,z\rangle\in R)\wedge(\langle z,x\rangle\in S)\\
&\Rightarrow\langle y,x\rangle\in R\circ S,
\end{aligned}
$$

所以 $R\circ S$ 是对称的.

(c) 对任意的 $x,y,z\in A$，

$$
\begin{aligned}
(\langle x,y\rangle\in R\circ S)\wedge(\langle y,z\rangle\in R\circ S) &\Rightarrow(\langle x,y\rangle\in R\circ S)\wedge(\langle y,z\rangle\in S\circ R)\\
&\Rightarrow(\langle x,w\rangle\in R)\wedge(\langle w,y\rangle\in S)\wedge\\
&\quad\ (\langle y,t\rangle\in S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)\\
&\Rightarrow(\langle x,w\rangle\in R)\wedge(\langle w,t\rangle\in S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)\\
&\Rightarrow(\langle x,t\rangle\in R\circ S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)\\
&\Rightarrow(\langle t,x\rangle\in R\circ S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R).\\
&\Rightarrow(\langle t,w\rangle\in R)\wedge(\langle w,x\rangle\in S)\wedge(\langle t,z\rangle\in R)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow (\langle z,t\rangle \in R) \wedge (\langle t,w\rangle \in R) \wedge (\langle w,x\rangle \in S)$

$\Rightarrow (\langle z,w\rangle \in R) \wedge (\langle w,x\rangle \in S).$

$\Rightarrow \langle z,x\rangle \in R\circ S \Rightarrow \langle x,z\rangle \in R\circ S.$

所以 $R\circ S$ 是传递的.

由(a),(b),(c)知 $R\circ S$ 是等价关系.

T9. 教材 P233 题 18.

解 (1) X 的最大元为 x_1；

X 无最小元；

极大元为 x_1；

极小元为 x_4, x_5.

(2) X_1 无最大元；

X_1 的最小元为 x_4；

X_1 的上界为 x_1；

X_1 的下界为 x_4；

极大元为 x_2, x_3；

极小元为 x_4；

最小上界为 x_1；

最大下界为 x_4.

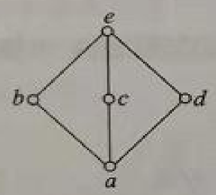

图 7.7.8

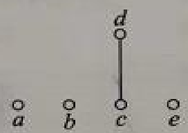

图 7.7.9

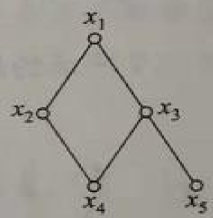

图 7.7.10

(3) X_2 的最大元为 x_3；

X_2 无最小元；

X_2 的上界为 x_1, x_3；

X_2 无下界；

极大元为 x_3；

极小元为 x_4, x_5；

最小上界为 x_3；

无最大下界；

(4) X_3 的最大元为 x_1；

X_3 无最小元；

X_3 的上界为 x_1；

X_3 的下界为 x_4；

极大元为 x_1；

极小元为 x_2, x_3；

最小上界为 x_1；

最大下界为 x_4.

T10. 教材 P233 题 24.

解 (1)断言成立.若 R 是 S 上的传递关系,则对任意 $x,y,z\in S_1$,若 $\langle x,y\rangle \in R_1$ 且 $\langle y,z\rangle \in R_1$,则有:

$$(\langle x,y\rangle \in R \text{ 且 } \langle y,z\rangle \in R) \text{ 以及 } (\langle x,y\rangle \in S_1\times S_1 \text{ 且 } \langle y,z\rangle \in S_1\times S_1).$$

因为 $S_1\subseteq S$,所以 $x,y,z\in S$.

由 R 在 S 上是传递的且 $S_1\times S_1$ 也是传递的知:$\langle x,z\rangle \in R$ 且 $\langle x,z\rangle \in S_1\times S_1$,所以,$\langle x,z\rangle \in R_1$,即 R_1 是传递的.

(2)断言成立.若 R 是 S 上的偏序关系,则 R 是自反、反对称和传递的.则

① 对任意 $x\in S_1$,因为 $S_1\subseteq S$,所以 $x\in S$.又因为 R 和 $S_1\times S_1$ 是自反的,所以 $\langle x,x\rangle \in R$ 且 $\langle x,x\rangle \in S_1\times S_1$,则有 $\langle x,x\rangle \in R\cap S_1\times S_1$.即 R_1 是自反的.

② 对任意 $x,y\in S_1$,若 $\langle x,y\rangle \in R_1$ 且 $\langle y,x\rangle \in R_1$,则有

$$(\langle x,y\rangle \in R \text{ 且 } \langle y,x\rangle \in R) \text{ 以及 } (\langle x,y\rangle \in S_1\times S_1 \text{ 且 } \langle y,x\rangle \in S_1\times S_1).$$

因为 $S_1\subseteq S$,所以 $x,y\in S$,由 R 在 S 上是对称的,且 $S_1\times S_1$ 也是对称的知 $x=y$,所以 R_1 是反对称的.

③ 由题(1)知 R_1 是传递的.

由①,②,③知:R_1 是偏序关系.

(3)断言成立.若 R 是 S 上的拟序关系,则 R 是反自反、反对称和传递的,则

① 对任意 $x\in S_1$,因为 $S_1\subseteq S$,所以,$x\in S$,因为 R 是反自反的,所以,$\langle x,x\rangle \notin R$,则有 $\langle x,x\rangle \notin R\cap S_1\times S_1$,即 R_1 是反自反的.

② 由题(2)的②知 R_1 是反对称的.

③ 由题(1)知 R_1 是传递的.

由①,②,③知 R_1 是拟序关系.

(4) 断言成立.若 R 是 S 上的全序关系,即 R 是偏序关系且对任意 $x,y\in S$,有 xRy 且 yRx.

① 由(2)知 R_1 是偏序关系.

② 对任意 $x,y\in S_1$,则有($x,y\in S$)且($\langle x,y\rangle\in R$ 或 $\langle y,x\rangle\in R$).又($\langle x,y\rangle\in S_1\times S_1$ 且 $\langle y,x\rangle\in S_1\times S_1$),所以($\langle x,y\rangle\in R\cap S_1\times S_1$)或($\langle y,x\rangle\in R\cap S_1\times S_1$),即 $\langle x,y\rangle\in R_1$ 或 $\langle y,x\rangle\in R_1$.

由①,②知 R_1 是全序关系.

(5) 断言成立.若 R 是 S 上的良序关系,即 S 的任意非空子集都有最小元.

① 因良序关系一定是全序关系,由(4)知 R_1 是全序关系.

② 对 S_1 的任意非空子集 T,显然 T 是 S 的非空子集,因此 T 中存在关于关系 R 的最小元,即存在 $a\in T$,使得对任意 $x\in T$,都有 $\langle a,x\rangle\in R$.

又 $\langle a,x\rangle\in S_1\times S_1$,所以 $\langle a,x\rangle\in R\cap S_1\times S_1$,即 $\langle a,x\rangle\in R_1$,故 a 是 T 中关于关系 R_1 的最小元.

由①,②知 R_1 是良序关系.

T11. 设 $<A,\le>$ 是偏序集，有关系 f：$A\to P(A)$, 对 $\forall a\in A$，$f(a)=\{x|x\in A, x\le a\}$，证明 f 是单射，且当 $a\le b$ 时，有 $f(a)\subseteq f(b)$.

首先，对 $\forall a\in A$，有 $a\le a$，所以 $a\in f(a)$，且 f(a)唯一，故 fA 到 P(A)的为函数.

其次，当 $a\neq b$ 时，若 $a\le b$, 则 $a\in f(a)$, $b\in f(b)$, 但 $b\notin f(a)$, $b\in f(b)$, 因此，$f(a)\neq f(b)$; 若 a、b 不可比，则 a, b 分别在 f(a)、f(b)中, 因此，$f(a)\neq f(b)$. 故，当 $a\neq b$ 时，$f(a)\neq f(b)$，即 f 是单射.

当 $a\le b$ 时，对于任意 $x\in f(a)$, $x\le a$, 于是，$x\le b$，从而 $x\in f(b)$，故 $f(a)\subseteq f(b)$.

T12. 设 f：$A\to B$，定义关系 g：$B\to P(A)$，对于 $b\in B$，$g(b)=\{x\in A|f(x)=b\}$，请证明：如果 f 是从 A 到 B 的满射，则 g 是单射，并判断其逆命题是否成立。

f 是从 A 到 B 的满射，则，任意 $b\in B$，b 在 f 下有原像, 于是 g(b)非空且唯一，故 g 是 B 到 P(A)的函数. 又，当 $b_1\neq b_2\in B$，$g(b_1)$、$g(b_2)$均非空，于是，$g(b_1)\neq g(b_2)$，否则，存在元素 $a\in g(b_1)=g(b_2)$，使得 $f(a)=b_1$, $f(a)=b_2$, 出现 f 下的一对多情况，与 f 为函数矛盾，故 g 是单射函数.

其逆否命题不成立，因为如果仅有一个元素 $b\in B$，$g(b)=\Phi$（即 b 无 f 下的原像），此时，g 也可以构成单射函数，但 f 不是满射函数.

T13. 设 R 是集合 A 上的等价关系，在什么条件下从 A 到 A/R 存在双射?

当 R 是 A 上的恒等关系时.

T14. 证明：存在一个从集合 X 到它的幂集 P(X)的单射.

令 f：$X\to P(X)$, 任意 $x\in X$, $f(x)=\{x\}$. 显然 f 是函数, 且对任意 x_1，$x_2\in X$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，因此 f 是单射函数. 得证.

T15. 设 A={a, b, c}，B={p, q}，定义函数 f：$A\to B$，问可以定义多少个函数 f，其中有多少满射.

8 个函数，其中 6 个满射.

T16. 设 A，B 为非空集合，|A|=n，|B|=m ,试计算

(1) 集合 A 到集合 B 的不同的单射函数有多少种?

(2) 集合 A 到集合 B 的不同的满射函数有多少种?

(3) 集合 A 到集合 B 的不同的双射函数有多少种?

(1) $n\le m$，时存在单射函数数量：m(m-1)(m-2)...(m-n+1)

(2) $m\le n$ 时，存在满射函数：这一问题等价于先“把 n 个有区别的球放入 m 个相同的盒子中，要求无一空盒，记为：S(m,n)”（分堆问题），再对这 n 个盒子进行不同的排列（假定盒子有区别），其总数为所求

得满射数。即所求的不同的满射有 $S(m,n)\cdot n!$个。其中，$S(m,n)$称为 Stirling 数，满足下面递推公式（详见组合数学教材）：

$S(m,0)=0$；$S(m,1)=1$；$S(m,n)=n\,S(m-1,n)+S(m-1,n-1)$.

（3）m=n 时，存在双射函数数量：n!

T17. 设有函数 f：A→A,g：A→A 和 h：A→A,使得复合函数 hof=hog，证明：若 h 是单射，则 f=g.（提示：用反证法）

（反证法）假设 $f\neq g$，则必存在元素 $a\in A$，使得 $f(a)\neq g(a)$，因为 h 是内射，所以 $h(f(a))\neq h(g(a))$，即 $h\circ f(a)\neq h\circ g(a)$. 这与题设 $h\circ f=h\circ g$ 相矛盾. 故 f=g.

T18(选做). An interesting consequence of equivalence relations and partitions is that any function f can be factored（分解）into a composition of two functions, one an injection（单射） and one a surjection（满射）. For a function $f : A \to B$, let P be the partition of A by the kernel relation R of f，that is, aRb iff f(a)=f(b) for a,b in A. Then define $s : A \to P$ by $s(a) = [a]_R$ and define $i : P \to B$ by $i([a]_R) = f(a)$. Please prove that s is a surjection, i is an injection, and $f = i \circ s$.

（1）f 是函数，A 中任意元素 a 在函数 f 下都有像，易证 R 是等价关系，P 即 A/R，每一个划分块（等价类）其实就是 f(B)中元素的原像集合. A 中任意元素 a 在划分块$[a]_R\in P$ 中，且 P 中每一个元素 $[a]_R$ 在 A 中有 s 下的原像 $a \in A$. 所以，s 是满射函数.

（2）P 中每一个元素$[a]_R$都有代表元 a，a 在 f 下有像 f(a)，所以 i 是函数； 且 i 是单射，因为若 $i([a]) = i([b])$, 有 $f(a) = f(b)$，从而 aRb，则可得 $[a] = [b]$.（即：$[a] \neq [b]$时，$i([a]) \neq i([b])$）.

（3）至于 $f= i \circ s$, 注意到：f, i o s 都是 A 到 B 的函数, 且 $(i \circ s)(a) = i(s(a)) = i([a]) = f(a)$.

第3部分 综合应用

1 现有一个软件开发需求：基于城市之间的交通可达数据提供一个交通信息查询服务，交通方式可以是通过火车、飞机、汽车或轮船的多种方式的结合或仅其中一种方式. 试用集合、关系语言来描述该系统基础数据，以及一些基本服务：如某两个城市间是否有飞机或火车直达，或通过换乘方式可达.

提示：用 C 表示所有城市的集合，R 表示城市间的可达性，对于任意 2 个城市 C_1，$C_2\in C$，如果有交通可达，则$<C_1, C_2>\in R$. 容易证明，R 是等价关系，商集 R/C 的等价类表示该等价类集合中的城市间是相互可达的；求解 R 的传递闭包 t(R)，城市间是否换乘可达可以基于 t(R)查询；对于各种交通工具的班次可以用元组来描述，从而构建关系数据库.

2 在项目安排与工作调度中（如工厂流水线作业、岸桥卸船作业等、软件开发等），某些工作任务与其它某些工作任务存在优先级关系，设计一个好的项目任务的优化调度安排是非常重要的. 试用集合与关系语言描述这类调度问题及其求解方法.

提示：用 T 表示任务集合，定义 T 上的偏序关系 R: $\{(x,y)|x\leq y$ 当且仅当 x 的优先级比 y 高，$x, y\in T\}$，进而可以利用逐步求解偏序集中极小元的算法设计任务的完成顺序.