



书面作业5.1 参考解答或提示

第1部分 基础

无.

第2部分 理论

T1-T5: 教材第9章习题: 题9, 14, 22, 27, 28.

T6 请证明: 设 G 是一 (n, m) 图, G 有 ω 个分图, 则 $n - \omega \leq m \leq (n - \omega)(n - \omega + 1)/2$.

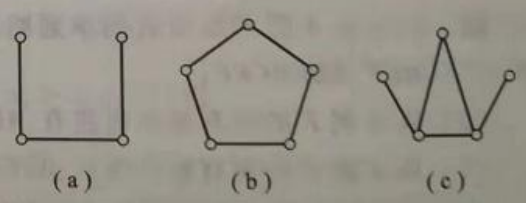
上述练习中, T2 可以应用反证法来证明, T1、T3 需要清楚补图、有向图连通性等基本概念, T4、T5 需要理解如何应用矩阵计算来证明或求解图有关结论. T6 左端不等式可以考虑用数学归纳法, 右端不等式可以考虑用构造法证明.

T1(题9)

解 (1) 图 7.9.6 中(a)与它的补图同构, 所以它是具有 4 个结点的自补图, 此外再也没有与它不同构的具有 4 个结点的自补图了;

(2) 具有 5 个结点的非同构的自补图只有两个, 它们分别是图 7.9.6 中的(b)和(c);

(3) 若具有 n 个结点无向图 G 是自补图, 则因 $G \cong \bar{G}$, 因而 G 与 \bar{G} 边数相同, 设它们的边数为 m . 又因为 G 与 \bar{G} 的边数之和为 K_n 的边数 $\frac{1}{2}n(n-1)$, 所以 $\frac{1}{2}n(n-1) = 2m$, 即 $n(n-1) = 4m$, 因而 n 为 4 的倍数, 即 $n = 4k$, 或者 $n-1$ 为 4 的倍数, 即 $n = 4k+1$.



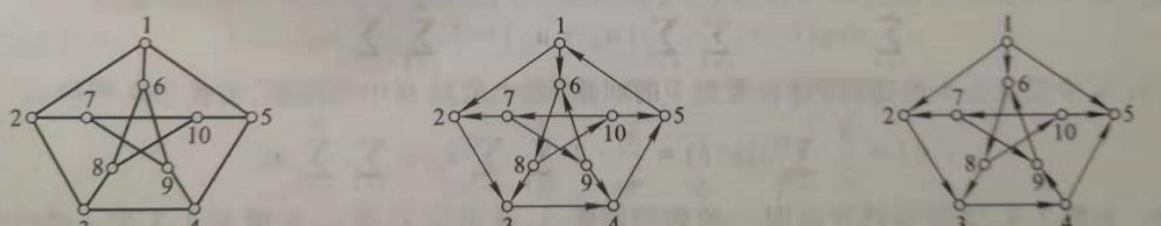
T2(题14)

请参考定理 11.3.2.

T3(题22)

解 (1) 给图 7.9.13 加方向如图 7.9.14 所示便成为强连通图, 事实上, 图 7.9.14 中存在一条回路 1, 2, 3, 4, 5, 1, 6, 8, 10, 7, 9, 4, 5, 1, 该回路经过图中每个结点至少一次;

(2) 给图 7.9.13 加方向如图 7.9.15 所示便成为单向连通图, 但不是强连通图, 事实上, 该图中的结点 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10 相互可达, 结点 1 可达其他所有结点, 而其他所有结点都不可达 1. 所有结点都可达结点 5, 但 5 不可达其他所有结点.





T4(题 27)

解 (1) 将 G 中结点按 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 排序, 则 G 的邻接矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) 为了求 G 中长度为 4 的连通数目, 就要计算 A^4 , 为此先计算 A^2 和 A^3 ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因 $\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 a_{ij}^{(4)} = 32$, 故 G 中长度为 4 的通路有 32 条. 因 A^4 的主对角元素均为 0, G 中无长度为 4 的回路.

(3) 因为

$$A^{(2)} = A \wedge A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^{(3)} = A \wedge A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(4)} = A \wedge A^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^{(5)} = A \wedge A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

所以 G 的可达性矩阵

$$P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)} \vee A^{(5)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 P 中每个元素均为 1, 所以 G 是强连通图, 当然也是单向连通图.

T5(题 28)

(1) 根据 G_1 的邻接矩阵 A 求解其可达矩阵 P :

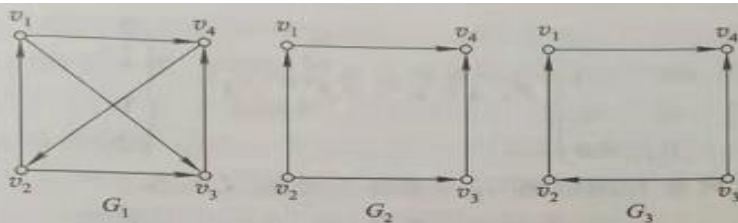


图 7.9.20

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

由于 P 中每个元素均为 1, 所以图 G_1 是强连通图, 当然也是单向连通图和弱连通图.

(2) 写出图 7.9.20 中图 G_2 的邻接矩阵 A , 并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 P 中不是每个元素均为 1, 所以图 G_2 不是强连通图. 又因为

$$P' = P \vee P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

中不是除主对角元外所有元素均为 1, 所以图 G_2 不是单向连通图. 下面计算

$$A_1 = A \vee A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

及

$$P_1 = A_1 \vee A_1^{(2)} \vee A_1^{(3)} \vee A_1^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 P_1 中每个元素均为 1, 所以图 G_2 是弱连通图.

(3) 写出图 7.9.20 中图 G_3 的邻接矩阵 A , 并根据 A 求出可达性矩阵 P 如下:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P = A \vee A^{(2)} \vee A^{(3)} \vee A^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 P 中不是每个元素均为 1, 所以图 G_3 不是强连通图. 又因为

$$P' = P \vee P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

中除主对角元外所有元素均为 1, 所以图 G_3 是单向连通图.

证明 首先证明 $m \geq n - \omega$. 对 G 的边数 m 施归纳法, 当 $m=0$ 时, 显然 $\omega=n$, $m \geq n - \omega$ 成立.

假设对于 $m=m_0-1$ 的图结论成立, 设图 G 边数 $m=m_0$, 从 G 中删去一条边, 得到图 G' , 可能有两种情形:

(1) G' 有 n 个结点, ω 个分图, m_0-1 条边. 由归纳假设, $n - \omega \leq m_0 - 1$, 即有 $n - \omega \leq m_0$; (2) G' 有 n 个结点,



$\omega+1$ 个分图, m_0-1 条边. 由归纳假设, $n-(\omega+1) \leq m_0-1$, 即 $n-\omega \leq m_0$. 因此, 对于 $m=m_0$ 结论成立.

再证 $m \leq (n-\omega)(n-\omega+1)/2$.

对于有 ω 个分图的 G , 其边数不大于将 G 中每一个分图均变为完全图的情形. 现在假设 G 的每个分图均为完全图, G_i 和 G_j 是其中的两个分图, G_i 有 n_i 个结点, G_j 有 n_j 个结点, 设 $n_i \geq n_j \geq 1$. 若 G_i 变为 n_i+1 个结点的完全图, 而 G_j 变为 n_j-1 个结点的完全图, 则结点总数 n_i+n_j 不变, 而边数变化为:

$$((n_i+1)n_i - n_i(n_i-1))/2 - (n_j(n_j-1) - (n_j-1)(n_j-2))/2 = n_i - n_j + 1 > 0$$

即这样的变化使边数增加.

因此, G 的子图均为完全图的情况下, G 的边数必小于等于由 $n-\omega+1$ 个结点的完全图和 $\omega-1$ 个结点情形下的边数, 故有 $m \leq (n-\omega)(n-\omega+1)/2$.

综上, 命题得证.

第3部分 综合应用

下述 2 个应用问题, 需要首先构建图模型, 之后通过判断图的连通性来证明相关结论.

T1 已知有关人员 a, b, c, d, e, f, g 具有如下的语言能力: a 说英语; b 说英语和西班牙语; c 说英语、意大利语和俄语; d 说日语和西班牙语; e 说德语和意大利语; f 说法语、日语和俄语; g 说法语和德语.

试问: 上述七人是否任意二人都能交谈(可借助于其余五人组成的译员链)?

思路: 用简单图来表示上述问题: 结点表示相关人员, 如果二人可以说同一语言, 则在相应的二结点间加边. 如果得到的图是连通图则表示上述七人可以任意二人进行交谈.

T2 某局域网上的 $2n$ 台计算机, 如果每一台计算机至少可以与另外 n 台计算机直接传递数据, 那么, 在这 $2n$ 台计算机中任何两台之间都可以传递数据(可能需要通过其它计算机).

思路: 用结点表示计算机, 如果二计算机可以进行直接数据传递, 则在相应而结点间加边, 从而可以将原问题表示为一个简单图 G , 如果图 G 是连通的, 则表示在这 $2n$ 台计算机中任何两台之间都可以传递数据(可能要通过其它计算机).

应用反证法来证明 G 是连通的(参考本次习题的 T2).

假设 G 不连通, 则至少存在两个分图, 设其中二个分图的结点数分别为 n_1, n_2 , 结点 u, v 分别在这两个分图中, 于是, 容易得到: $d(u)+d(v) \geq 2n$ 与 $d(u)+d(v) \leq (n_1-1)+(n_2-1) \leq 2n-2$ 的矛盾.

此题还可以直接用后续证明 G 为 Hamilton 图的方法来证明其连通性.