

**命题**：称能判断真假的陈述句为命题。

**命题公式**：若在复合命题中， $p, q, r$  等不仅可以代表命题常项，还可以代表命题变项，这样的复合命题形式称为命题公式。

**命题的赋值**：设  $A$  为一命题公式， $p, p, \dots, p$  为出现在  $A$  中的所有命题变项。给  $p, p, \dots, p$  指定一组真值，称为对  $A$  的一个**赋值或解释**。若指定的一组值使  $A$  的值为真，则称**成真赋值**。

**真值表**：含  $n$  ( $n \geq 1$ ) 个命题变项的命题公式，共有  $2^n$  组赋值。将命题公式  $A$  在所有赋值下的取值情况列成表，称为  $A$  的真值表。

**命题公式的类型**：(1) 若  $A$  在它的各种赋值下均取值为真，则称  $A$  为重言式或永真式。

(2) 若  $A$  在它的赋值下取值均为假，则称  $A$  为矛盾式或永假式。

(3) 若  $A$  至少存在一组赋值是成真赋值，则  $A$  是可满足式。

**主析取范式**：设命题公式  $A$  中含  $n$  个命题变项，如果  $A$  得析取范式中的简单合取式全是极小项，则称该析取范式为  $A$  的主析取范式。

**主合取范式**：设命题公式  $A$  中含  $n$  个命题变项，如果  $A$  得析取范式中的简单合析式全是极大项，则称该析取范式为  $A$  的主析取范式。

**命题的等值式**：设  $A, B$  为两命题公式，若等价式  $A \leftrightarrow B$  是重言式，则称  $A$  与  $B$  是等值的，记作  $A \Leftrightarrow B$ 。

**约束变元和自由变元**：在合式公式  $\forall x A$  和  $\exists x A$  中，称  $x$  为指导变项，称  $A$  为相应量词的辖域， $x$  称为约束变元， $x$  的出现称为约束出现， $A$  中其他出现称为自由出现（自由变元）。

**一阶逻辑等值式**：设  $A, B$  是一阶逻辑中任意的两公式，若  $A \leftrightarrow B$  为逻辑有效式，则称  $A$  与  $B$  是等值的，记作  $A \Leftrightarrow B$ ，称  $A \Leftrightarrow B$  为等值式。

**前束范式**：设  $A$  为一谓词公式，若  $A$  具有如下形式  $Q_1 x_1 Q_2 x_2 Q_k \dots x_k B$ ，称  $A$  为前束范式。

**集合的基本运算**：并、交、差、相对补和对称差运算。

**笛卡尔积**：设  $A$  和  $B$  为集合，用  $A$  中元素为第一元素，用  $B$  中元素为第二元素构成有序对组成的集合称为  $A$  和  $B$  的笛卡尔积，记为  $A \times B$ 。

**二元关系**：如果一个集合  $R$  为空集或者它的元素都是有序对，则称集合  $R$  是一个二元关系。

**特殊关系**：(1)、空关系： $\emptyset$  (2) 全域关系： $E_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in A \wedge y \in A \} = A \times A$

(3) 恒等关系： $I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$

(4) 小于等于关系： $L_A = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y \in A \}, A \subseteq R$

(5) 整除关系： $R_\subseteq = \{ \langle x, y \rangle \mid x, y \in \Psi \wedge x \subseteq y \}, \Psi$  是集合族

**二元关系的运算**：设  $R$  是二元关系，

(1)  $R$  中所有有序对的第一元素构成的集合称为  $R$  的定义域  $\text{dom} R = \{ x \mid \exists y (\langle x, y \rangle \in R) \}$

(2)  $R$  中所有有序对的第二元素构成的集合称为  $R$  的值域  $\text{ran} R = \{ y \mid \exists x (\langle x, y \rangle \in R) \}$

(3)  $R$  的定义域和值域的并集称为  $R$  的域  $\text{fld} R = \text{dom} R \cup \text{ran} R$

**二元关系的性质**：自反性，反自反性，对称性，反对称性，传递性。

**等价关系**：如果集合  $A$  上的二元关系  $R$  是自反的，对称的和传递的，那么称  $R$  是等价关系。

设  $R$  是  $A$  上的等价关系， $x, y$  是  $A$  的任意元素，记作  $x \sim y$ 。

**等价类**：设  $R$  是  $A$  上的等价关系，对任意的  $\forall x \in A$ ，令  $[x]_R = \{ y \mid y \in A \wedge x R y \}$ ，称  $[x]_R$  为  $x$  关于  $R$  的等价类。

**偏序关系**：设  $R$  是集合  $A$  上的二元关系，如果  $R$  是自反的，反对称的和传递的，那么称  $R$  为  $A$  上的偏序，记作  $\leq$ ；称序偶  $\langle A, R \rangle$  为偏序集合。

**函数的性质**：设  $f: A \rightarrow B$ ，

(1) 若  $\text{ran} f = B$ ，则称  $f$  是满射（到上）的。

(2) 若  $\forall y \in \text{ran} f$  都存在唯一的  $x \in A$  使得  $f(x) = y$ ，则称  $f$  是单射（一一）的。

(3) 若  $f$  既是满射又是单射的，则称  $f$  是双射（一一到上）的。

**无向图**：是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$ ，记作  $G$ ，其中：

(1)  $V \neq \emptyset$  称为顶点集，其元素称为**顶点或结点**。

(2)  $E$  为边集，它是无序积  $V \times V$  的多重子集，其元素称为**无向边**，简称**边**。

**有向图**：是一个有序的二元组 $\langle V, E \rangle$ ，记作  $D$ ，其中

(1)  $V$  同无向图。(2)  $E$  为边集，它是笛卡尔积  $V \times V$  的多重子集，其元素称为**有向边**。

设  $G = \langle V, E \rangle$  是一个无向图或有向图。

**有限图**：若  $V, E$  是有限集，则称  $G$  为有限图。

**$n$  阶图**：若  $|V| = n$ ，称  $G$  为  $n$  阶图。

**零图**：若  $|E| = 0$ ，称  $G$  为零图，当  $|V| = 1$  时，称  $G$  为平凡图。

**基图**：将有向图变为无向图得到的新图，称为有向图的基图。

**图的同构**：在用图形表示图时，由于顶点的位置不同，边的形状不同，同一个事物之间的关系可以用不同的图表示，这样的图称为图同构。

**带权图**：在处理有关图的实际问题时，往往有值的存在，一般这个值成为权值，带权值的图称为带权图或赋权图。

**连通图**：若无向图是平凡图，或图中任意两个顶点都是连通的，则称  $G$  是**连通图**。否则称为**非连通图**。设  $D$  是一个有向图，如果  $D$  的基图是连通图，则称  $D$  是**弱连通图**，若  $D$  中任意两个顶点至少一个可达另一个，则称  $D$  是**单向连通图**。若  $D$  中任意两个顶点是相互可达的，则称  $D$  是**强连通图**。

**欧拉图**：通过图中所有边一次且仅一次并且通过所有顶点的通路（回路），称为**欧拉通路（回路）**。存在欧拉回路的图称为欧拉图。

**哈密顿图**：经过图中每个顶点一次且仅一次的通路（回路），称为哈密顿通路（回路），存在哈密顿回路的图称为哈密顿图。

**平面图**：一个图  $G$  如果能以这样的方式画在平面上：出定点处外没有变交叉出现，则称  $G$  为平面图。画出的没有边交叉出现的图称为  $G$  的一个**平面嵌入**。

**二部图**：若无向图  $G = \langle V, E \rangle$  的顶点集合  $V$  可以划分成两个子集  $V_1$  和  $V_2$  ( $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ )，使  $G$  中的任何一条边的两个端点分别属于  $V_1$  和  $V_2$ ，则称  $G$  为二部图（**偶图**）。二部图可记为  $G = \langle V_1, V_2, E \rangle$ ， $V_1$  和  $V_2$  称为互补顶点子集。

**树的定义**：连通无回路的无向图称为无向树，简称**树**，常用  $T$  表示树。平凡图称为**平凡树**。若无向图  $G$  至少有两个连通分支，每个连通都是树，则称  $G$  为**森林**。在无向图中，悬挂顶点称为**树叶**，度数大于或等于 2 的顶点称为**分支点**。

**树的性质**：性质 1、设  $G = \langle V, E \rangle$  是  $n$  阶  $m$  条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1)  $G$  是树 (2)  $G$  中任意两个顶点之间存在唯一的路径 (3)  $G$  中无回路且  $m = n - 1$ 。

(4)  $G$  是连通的且  $m = n - 1$ 。 (5)  $G$  是连通的且  $G$  中任何边均为桥。 (6)  $G$  中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

性质 2、设  $T$  是  $n$  阶非平凡的无向树，则  $T$  中至少有两片树叶。

证：设  $T$  有  $x$  片树叶，由握手定理及性质 1 可知， $2(n-1) = \sum d(v_i) \geq x + 2(n-x)$  由上式解出  $x \geq 2$ 。

**最小生成树**：设  $T$  是无向图  $G$  的子图并且为树，则称  $T$  为  $G$  的树。若  $T$  是  $G$  的树且为生成子图，则称  $T$  是  $G$  的生成树。设  $T$  是  $G$  的生成树。 $e \in E(G)$ ，若  $e \in E(T)$ ，则称  $e$  为  $T$  的树枝，否则称  $e$  为  $T$  的弦。并称导出子图  $G[E(G) - E(T)]$  为  $T$  的余树，记作  $T'$ 。

**最优二元树**：设 2 叉树  $T$  有  $t$  片树叶  $v_1, v_2, \dots, v_t$ ，权分别为  $w_1, w_2, \dots, w_t$ ，称  $W(t) = \sum w_i l(v_i)$  为  $T$  的权，其中  $l(v_i)$  是  $v_i$  的层数。在所有有  $t$  片树叶，带权  $w_1, w_2, \dots, w_t$  的 2 叉树中，权最小的 2 叉树称为**最优 2 叉树**。

**最佳前缀码**：利用 Huffman 算法求最优 2 叉树，由最优 2 叉树产生的前缀码称为最佳前缀码，用最佳前缀码传输对应的各符号能使传输的二进制数位最省。

## 蕴含式推理

E <sub>1</sub>	$\neg \neg p \Leftrightarrow p$	E <sub>12</sub>	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E <sub>2</sub>	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	E <sub>13</sub>	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E <sub>3</sub>	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	E <sub>14</sub>	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow T$
E <sub>4</sub>	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	E <sub>15</sub>	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow F$
E <sub>5</sub>	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	E <sub>16</sub>	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E <sub>6</sub>	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	E <sub>17</sub>	$\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E <sub>7</sub>	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	E <sub>18</sub>	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E <sub>8</sub>	$\neg (P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	E <sub>19</sub>	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E <sub>9</sub>	$\neg (P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	E <sub>20</sub>	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E <sub>10</sub>	$P \vee P \Leftrightarrow P$	E <sub>21</sub>	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E <sub>11</sub>	$P \wedge P \Leftrightarrow P$	E <sub>22</sub>	$\neg (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$

## 等值公式表

$P \wedge Q \Rightarrow P$	化简式		
$P \wedge Q \Rightarrow Q$	化简式		
$P \Rightarrow P \vee Q$	附加式		
$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$	变形附加式		
$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$	变形附加式		
$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow P$	变形简化式		
$\neg (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$	变形简化式		
$p \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow Q$	假言推论		
$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$	拒取式		
$\neg p \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	析取三段式		
$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R) \Rightarrow P \rightarrow R$	条件三段式		
$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow P \leftrightarrow R$	双条件三段式		
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \wedge R) \Rightarrow Q \rightarrow S$	合取构造二难		
$(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \Rightarrow Q \vee S$	析取构造二难		
$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$	前后附加式		
$P \rightarrow Q \Rightarrow (P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$	前后附加式		
E <sub>23</sub>	$(\exists x)((Ax) \vee (Bx)) \Leftrightarrow (\exists x)(Ax) \vee (\exists x)(Bx)$	E <sub>30</sub>	$(\forall x)(Ax) \rightarrow B \Leftrightarrow (\exists x)((Ax) \rightarrow B)$
E <sub>24</sub>	$(\forall x)((Ax) \wedge (Bx)) \Leftrightarrow (\forall x)(Ax) \wedge (\forall x)(Bx)$	E <sub>31</sub>	$(\exists x)(Ax) \rightarrow B \Leftrightarrow (\forall x)((Ax) \rightarrow B)$
E <sub>25</sub>	$\neg (\exists x)(Ax) \Leftrightarrow (\forall x)\neg (Ax)$	E <sub>32</sub>	$A \rightarrow (\forall x)(Bx) \Leftrightarrow (\forall x)(A \rightarrow (Bx))$
E <sub>26</sub>	$\neg (\forall x)(Ax) \Leftrightarrow (\exists x)\neg (Ax)$	E <sub>33</sub>	$A \rightarrow (\exists x)(Bx) \Leftrightarrow (\exists x)(A \rightarrow (Bx))$
E <sub>27</sub>	$(\forall x)(A \vee (Bx)) \Leftrightarrow A \vee (\forall x)(Bx)$	I <sub>17</sub>	$(\forall x)(Ax) \vee (\forall x)(Bx) \Rightarrow (\forall x)((Ax) \vee (Bx))$
E <sub>28</sub>	$(\exists x)(A \wedge (Bx)) \Leftrightarrow A \wedge (\exists x)(Bx)$	I <sub>18</sub>	$(\exists x)((Ax) \wedge (Bx)) \Rightarrow (\forall x)(Ax) \wedge (\forall x)(Bx)$
E <sub>29</sub>	$(\exists x)((Ax) \rightarrow (Bx)) \Leftrightarrow (\forall x)(Ax) \rightarrow (\exists x)(Bx)$	I <sub>19</sub>	$(\forall x)(Ax) \rightarrow (\forall x)(Bx) \Rightarrow (\forall x)((Ax) \rightarrow (Bx))$

### 集合恒等式: P61

幂等律:  $A \cup A = A$ ;  $A \cap A = A$

结合律:  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ ;  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

交换律:  $A \cup B = B \cup A$ ;  $A \cap B = B \cap A$

分配律:  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ;  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

同一律:  $A \cup \phi = A$ ;  $A \cap E = A$

零律:  $A \cup E = A$ ;  $A \cap \phi = \phi$

排中律:  $A \cup \sim A = E$

矛盾律:  $A \cap \sim A = \phi$

吸收律:  $A \cap (A \cup B) = A$ ;  $A \cup (A \cap B) = A$

德摩根定律:  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ ;  $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ ;  $\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$ ;  $\sim \phi = E$ ;  $\sim E = \phi$

双重否定律:  $\sim(\sim A) = A$

### 二元关系的运算:

设  $F, G, H$  是任意的关系,

$$(1) (F^{-1})^{-1} = F$$

$$(2) \text{dom}(F^{-1}) = \text{ran} F; \text{ran}(F^{-1}) = \text{dom} F$$

$$(3) (F \circ G) \circ H = F \circ (G \circ H) \quad (4) (F \circ G)^{-1} = G^{-1} \circ F^{-1}$$

设  $R$  是  $A$  上的关系 (幂运算)

$$(1) R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$$

$$(2) R^n = R^{n-1} \circ R, n \geq 1 \quad (3) R \circ R^0 = R^0 \circ R = R$$

### 图的矩阵表示:

(1) 无向图的关联矩阵: 设无向图  $G = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ , 令  $m_{ij}$  为顶点  $v_i$  与边的关联次数, 则称  $(m_{ij})_{n \times m}$  为  $G$  的关联矩阵。记为  $M(G)$ 。

(2) 有向图的关联矩阵: 设无向图  $D = \langle V, E \rangle$ ,  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的始点} \\ 0, & v_i \text{ 与 } e_j \text{ 不关联} \\ -1, & v_i \text{ 是 } e_j \text{ 的终点} \end{cases}$$

则称  $(m_{ij})_{n \times m}$  为  $D$  的关联矩阵。记为  $M(D)$ 。