

离散数学阶段测试 (关系)

2021.11.17

说明：闭卷；可携带本人设计的笔记（A4 纸大小，1 页）；需要写出详细求解步骤，尽量展示你的工作；独立完成，不可讨论。

1. 假设给定了正整数的序偶集合 A ，在 A 上定义二元关系 R 如下：

$((x,y),(u,v)) \in R$ ，当且仅当 $x*v=y*u$ ， $*$ 为一般乘法. 证明： R 是一个等价关系.

(1) 自反性： $\forall (x,y) \in A$ ，因为 $x*y=y*x$ ，所以 $((x,y),(x,y)) \in R$ ，因此 R 是自反的；

(2) 对称性： $\forall (x,y), (u,v) \in A$ ，

若 $((x,y),(u,v)) \in R \Rightarrow x*v=y*u \Rightarrow u*y=v*x \Rightarrow ((u,v),(x,y)) \in R$ ，因此 R 是对称的；

(3) 传递性： $\forall (x,y), (u,v), (s,t) \in A$ ，

若 $((x,y),(u,v)) \in R \wedge ((u,v),(s,t)) \in R \Rightarrow x*v=y*u \wedge u*t=v*s \Rightarrow x*v*u*t=y*u*v*s \Rightarrow x*t=y*s \Rightarrow ((x,y),(s,t)) \in R$ ，因此 R 是传递的.

综上， R 是一个等价关系.

2. 设 $S=\{a,b,c\}$ ，求 A 上所有的等价关系对应的商集.

$A/R_1=\{\{a,b,c\}\}$ ；

$A/R_2=\{\{a,b\},\{c\}\}$ ；

$A/R_3=\{\{a,c\},\{b\}\}$ ；

$A/R_4=\{\{a\},\{b,c\}\}$ ；

$A/R_5=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$.

3. 设 $P = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$ 是四个程序， $R = \{<P_1, P_2>, <P_1, P_3>, <P_2, P_4>, <P_3, P_4>\}$ 是

定义在 P 上的调用关系. 求解 $t(R)$.

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$$

$$= \{<P_1, P_2>, <P_1, P_3>, <P_2, P_4>, <P_3, P_4>\} \cup \{<P_1, P_4>\} \cup \Phi \cup \Phi$$

$$= \{<P_1, P_2>, <P_1, P_3>, <P_2, P_4>, <P_3, P_4>, <P_1, P_4>\}.$$

4. 集合 $S = \{1, 2, 3\}$, A 的幂集 $P(S)$ 上的包含关系 \subseteq 是一个偏序关系, 请画出 $\langle P(S), \subseteq \rangle$ 的哈斯图. $\langle P(S), \subseteq \rangle$ 是否为良序关系, 为什么?

哈斯图略. 不是良序, 如 $\{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$ 无最小元.