



书面作业4.1 参考解答或提示

第1部分 基础

本次作业均为教材习题.

教材P205-207: 7、8、11、14、15、18、20、21、22、23.

习题7

解 由已知得 $R = \{\langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$, $S = \{\langle 2,0 \rangle, \langle 3,1 \rangle\}$, 于是有

$$(1) \text{ 因为 } M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ 所以,}$$

$$M_{R \circ S} = M_R \circ M_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

从而, $R \circ S = \{\langle 1,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$.

(2) $R, S, S \circ R$ 的关系图分别见图 7.6.1(a), 7.6.1(b) 和 7.6.1(c), 则

$$S \circ R = \{\langle 2,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}.$$

(3) $R \circ S \circ R = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,0 \rangle, \langle 2,2 \rangle\}$,

$$R^3 = \{\langle 0,3 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,0 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle\},$$

$$S^3 = \emptyset.$$

习题8

解 (1) R 的关系图见图 7.6.2, R 的关系矩阵为:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $R^2 = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle\}$;

$$R^3 = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle\};$$

$$R^4 = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle\}.$$

习题11



- 解 (1) $R \circ R = \{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in P) \wedge (x \text{ 是 } y \text{ 的祖父}) \}$;
- (2) $S^{-1} \circ R = \emptyset$;
- (3) $S \circ R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in P) \wedge (x \text{ 是 } y \text{ 的妻子}) \}$;
- (4) $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in P) \wedge (y \text{ 是 } x \text{ 的外祖母}) \}$ 可表示为 $S \circ S$;
- (5) $\{ \langle x, y \rangle \mid (x, y \in P) \wedge (y \text{ 是 } x \text{ 的祖母}) \}$ 可表示为 $S \circ R$.

习题14

证明 由于 A 上的不同二元关系共有 $2^{n \times n}$ 个, 根据鸽笼原理, 由 R 产生的 $2^{n \times n} + 1$ 个幂集关系

$$R^0, R^1, R^2, \dots, R^{n \times n}$$

中, 至少存在相同的. 因此存在 $0 \leq s \leq 2^{n \times n}, 0 \leq t \leq 2^{n \times n}, s \neq t$, 使得 $R^s = R^t$.

习题15

证明 (1) 对任意 $\langle x, z \rangle \in R \circ T (x, z \in A)$, 由“ \circ ”知: 存在 $y \in A$, 使得

$$\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in T.$$

由 $R \subseteq S$ 知: $\langle x, y \rangle \in S$.

由“ \circ ”知: $\langle x, y \rangle \in S, \langle y, z \rangle \in T \Rightarrow \langle x, z \rangle \in S \circ T$.

所以, $R \circ T \subseteq S \circ T$;

(2) 对任意 $\langle y, x \rangle \in R^{-1} (x, y \in A)$, 有 $\langle x, y \rangle \in R$. 由 $R \subseteq S$ 知 $\langle x, y \rangle \in S$, 即 $\langle y, x \rangle \in S^{-1}$. 所以 $R^{-1} \subseteq S^{-1}$.

(3) ① 对任意 $\langle y, x \rangle \in (R \cap S)^{-1} (x, y \in A)$, 有 $\langle x, y \rangle \in R \cap S$. 即 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle x, y \rangle \in S$. 从而有 $\langle y, x \rangle \in R^{-1}, \langle y, x \rangle \in S^{-1}$, 即 $\langle y, x \rangle \in R^{-1} \cap S^{-1}$. 于是得到

$$(R \cap S)^{-1} \subseteq R^{-1} \cap S^{-1}.$$

② 对任意 $\langle y, x \rangle \in R^{-1} \cap S^{-1} (x, y \in A)$, 有 $\langle y, x \rangle \in R^{-1}$ 且 $\langle y, x \rangle \in S^{-1}$. 从而有 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle x, y \rangle \in S$, 即 $\langle x, y \rangle \in R \cap S$. 于是 $\langle y, x \rangle \in (R \cap S)^{-1}$. 即

$$R^{-1} \cap S^{-1} \subseteq (R \cap S)^{-1}.$$

由①, ②知 $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

(4) 对任意 $\langle x, y \rangle \in \bar{S}$, 有 $\langle x, y \rangle \notin S$. 由 $R \subseteq S$, 所以 $\langle x, y \rangle \notin R$, 即 $\langle x, y \rangle \in \bar{R}$, 从而 $\bar{S} \subseteq \bar{R}$.

(5) ① 首先证明 $(R \cup S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cup (S \circ T)$.

对任意 $\langle x, z \rangle \in (R \cup S) \circ T (x, z \in A)$, 由“ \circ ”知: 存在 $y \in A$, 使得 $\langle x, y \rangle \in (R \cup S)$ 并且 $\langle y, z \rangle \in T$, 从而有 $\langle x, y \rangle \in R$ 或 $\langle x, y \rangle \in S$.

由“ \circ ”知:

$$\langle x, y \rangle \in R, \langle y, z \rangle \in T \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R \circ T \text{ 或}$$

$$\langle x, y \rangle \in S, \langle y, z \rangle \in T \Rightarrow \langle x, z \rangle \in S \circ T,$$

所以 $\langle x, z \rangle \in (R \circ T) \cup (S \circ T)$. 即

$$(R \cup S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cup (S \circ T).$$

习题18

- 解 (1) 设 $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$, 则 R 既不是自反的, 又不是反自反的;
- (2) 设 $R = \{ \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle \}$, 则 R 既是对称的, 又是反对称的;
- (3) 设 $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$, 则 R 既不是对称的, 也不是反对称的;
- (4) 设 $R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 1, 3 \rangle \}$, 则 R 是传递的.

习题20



- 解 (1) R 是反对称的、反自反的、传递的；
 (2) R 是反对称的；
 (3) I_A 是自反的、对称的、反对称的、传递的；
 (4) R 是对称的。

习题21

解 (1) $r(R) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$;
 $s(R) = R$;
 $t(R) = R$.

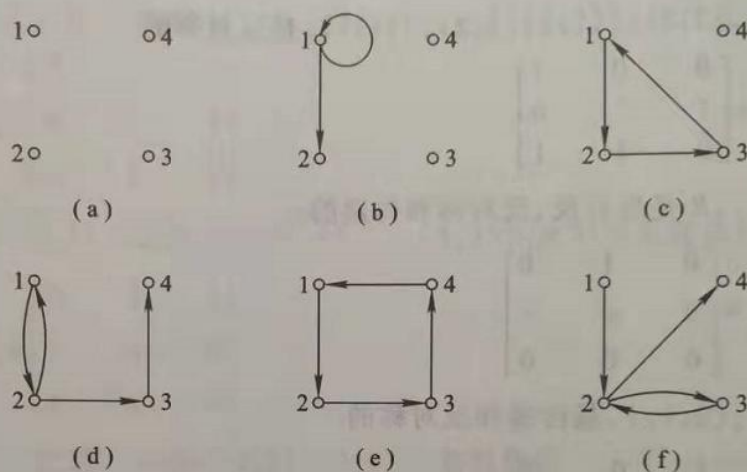


图 7.6.5

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.6(a), 7.6.6(b) 和 7.6.6(c).

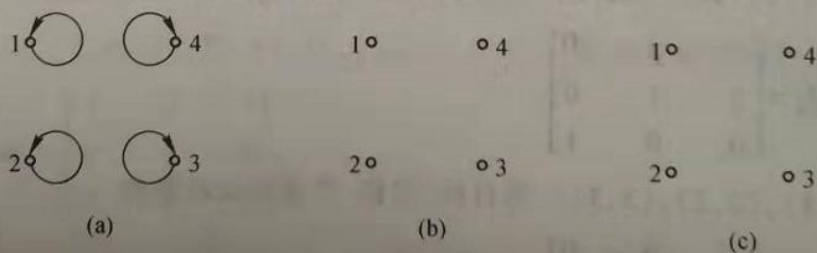


图 7.6.6

(2) $r(R) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$;
 $s(R) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle\}$;
 $t(R) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle\}$.

$r(R)$, $s(R)$, $t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.7(a), 7.6.7(b) 和 7.6.7(c).

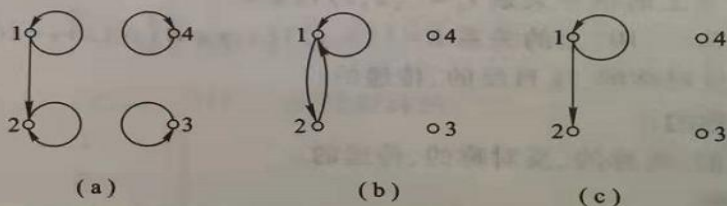


图 7.6.7

(3) $r(R) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle\}$;
 $s(R) = \{\langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle\}$;
 $t(R) = \{\langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 3,2 \rangle\}$.



$r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.8(a), 7.6.8(b) 和 7.6.8(c).

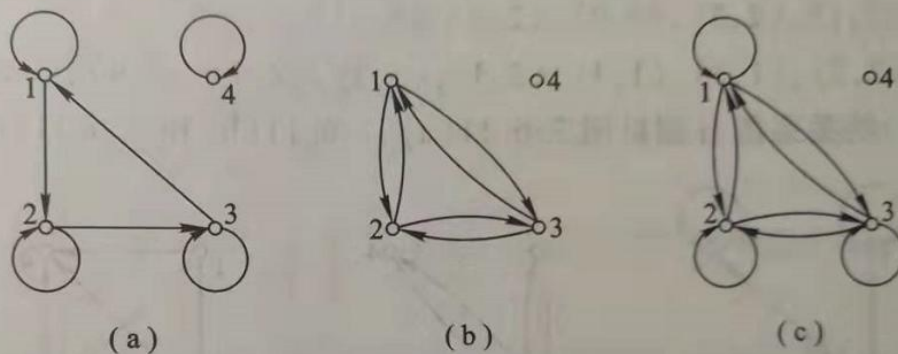


图 7.6.8

(4) $r(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$;
 $s(R) = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle \}$;
 $t(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle \}$.
 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.9(a), 7.6.9(b) 和 7.6.9(c).

(5) $r(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$;
 $s(R) = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 1,4 \rangle \}$;
 $t(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 3,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 4,1 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 4,3 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$.

$r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.10(a), 7.6.10(b) 和 7.6.10(c).

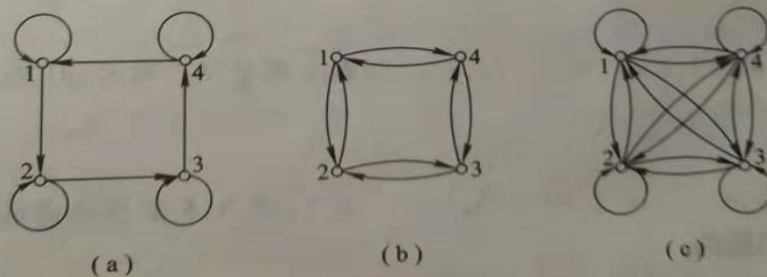


图 7.6.10

(6) $r(R) = \{ \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle, \langle 4,4 \rangle \}$;
 $s(R) = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 4,2 \rangle \}$;
 $t(R) = \{ \langle 1,2 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \langle 1,4 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \langle 3,2 \rangle, \langle 2,4 \rangle, \langle 3,4 \rangle, \langle 3,3 \rangle \}$.
 $r(R), s(R), t(R)$ 的关系图分别见图 7.6.11(a), 7.6.11(b) 和 7.6.11(c).

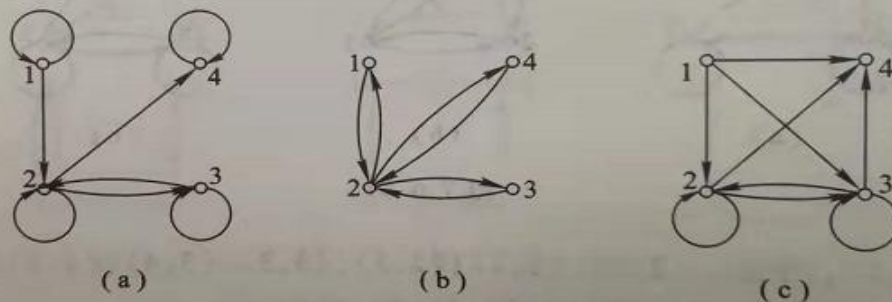


图 7.6.11



解 (1)是正确的.

对任意的 $x \in A$, 因为 R, S 是自反的, 所以 $\langle x, x \rangle \in R, \langle x, x \rangle \in S$. 由“ \circ ”知: $\langle x, x \rangle \in R \circ S$. 所以, $R \circ S$ 是自反的.

(2) 不一定正确.

如 $R = \{\langle a, b \rangle\}, S = \{\langle b, a \rangle\}$, 则 R, S 都是反自反的, 但 $R \circ S = \{\langle a, a \rangle\}$ 不是反自反的.

(3) 不一定正确.

如 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle\}, S = \{\langle b, c \rangle, \langle c, b \rangle\}$, 则 R, S 都是对称的, 但 $R \circ S = \{\langle a, c \rangle\}$ 不是对称的.

(4) 不一定正确.

如 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle\}, S = \{\langle b, b \rangle, \langle c, a \rangle\}$, 则 R, S 都是反对称的, 但 $R \circ S = \{\langle b, a \rangle, \langle a, b \rangle\}$ 不是反对称的.

(5) 不一定正确.

如 $R = \{\langle a, b \rangle, \langle b, c \rangle, \langle a, c \rangle\}, S = \{\langle b, b \rangle, \langle c, a \rangle\}$, 则 R, S 都是传递的, 但 $R \circ S = \{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, a \rangle\}$ 不是传递的.

习题23

证明(1) ① 对任意的 $x \in A$, 因为 R 是自反的, 所以 $\langle x, x \rangle \in R$. 又因为 $R \subseteq s(R)$, 所以 $\langle x, x \rangle \in s(R)$. 即 $s(R)$ 是自反的.

② 对任意的 $x \in A$, 因为 R 是自反的, 所以 $\langle x, x \rangle \in R$. 又因为 $R \subseteq t(R)$, 所以 $\langle x, x \rangle \in t(R)$. 即 $t(R)$ 是自反的.

(2) ① 对任意的 $x, y \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in r(R) = R \cup I_A$, 则有 $\langle x, y \rangle \in R$ 或 $\langle x, y \rangle \in I_A$.

若 $\langle x, y \rangle \in R$, 则由 R 是对称的, 所以 $\langle y, x \rangle \in R$. 又因为 $R \subseteq r(R)$, 所以 $\langle y, x \rangle \in r(R)$.

若 $\langle x, y \rangle \in I_A$, 则 $x = y$, 即 $\langle y, x \rangle \in I_A$. 又因为 $I_A \subseteq r(R)$, 所以 $\langle y, x \rangle \in r(R)$.

无论是哪一种情况, 都有 $\langle y, x \rangle \in r(R)$. 即 $r(R)$ 是对称的.

② 对任意的 $x, y \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in t(R)$, 则存在 $i \in \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$, 使得 $\langle x, y \rangle \in R^i$. 由“ \circ ”的定义知: 存在 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{i-1}$, 使得 $\langle x, c_1 \rangle \in R, \langle c_1, c_2 \rangle \in R, \langle c_2, c_3 \rangle \in R, \dots, \langle c_{i-1}, y \rangle \in R$. 因为 R 是对称的, 所以有 $\langle y, c_{i-1} \rangle \in R, \langle c_{i-2}, c_{i-3} \rangle \in R, \langle c_{i-3}, c_{i-4} \rangle \in R, \dots, \langle c_1, x \rangle \in R$. 由“ \circ ”的定义知: $\langle y, x \rangle \in R^i$, 即有 $\langle y, x \rangle \in t(R)$. 所以 $t(R)$ 是对称的.

(3) ① 对任意 $x, y, z \in A$, 若 $\langle x, y \rangle \in r(R) = R \cup I_A, \langle y, z \rangle \in r(R) = R \cup I_A$, 则有 $(\langle x, y \rangle \in R \text{ 或 } \langle x, y \rangle \in I_A) \text{ 并且 } (\langle y, z \rangle \in R \text{ 或 } \langle y, z \rangle \in I_A)$.

若 $\langle x, y \rangle \in R$ 且 $\langle y, z \rangle \in R$, 则由 R 是传递的, 所以 $\langle x, z \rangle \in R$. 又因为 $R \subseteq r(R)$, 所以 $\langle x, z \rangle \in r(R)$.

若 $\langle x, y \rangle \in I_A$ 或 $\langle y, z \rangle \in I_A$, 则有 $x = y$ 或 $y = z$. 又因为 $I_A \subseteq r(R)$, 则由 $\langle x, x \rangle \in r(R)$ 及 $\langle x, z \rangle \in r(R)$, 有 $\langle x, z \rangle \in r(R)$.

由 $\langle x, z \rangle \in r(R)$ 及 $\langle z, z \rangle \in r(R)$, 有 $\langle x, z \rangle \in r(R)$.

所以 $\langle x, z \rangle \in r(R)$.

无论是哪一种情况, 都有 $\langle x, z \rangle \in r(R)$. 即 $r(R)$ 是传递的.

② 结论不一定成立.

如 $R = \{\langle 1, 2 \rangle\}$, 则 R 可传递, 但 $s(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ 不可传递.

(4) 结论不一定成立.

若 $R = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}$, 则 R 是反对称的, 但 $t(R) = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ 不是反对称的.

第2部分 理论

无

第3部分 综合应用

无