离散数学试卷（样卷） 参考解答

一、填空题

1 2^{2^n}，$(A(a)\wedge A(b)\wedge A(c))\vee((B(a)\vee B(b)\vee B(c))$，$\exists x\exists y\forall z(A(x,y)\vee\neg B(z)\vee C(x))$

2 (5)

3 (6)

4 (5)

5 (5)

6 (6)

7 6 , 5 , {a,b,c}

8 m, n, 否。

9 r，e，f(e)。

10 (3)

11 (5)

12 (6)

13 (4)

14 3，n^{n-2}，2(t-1)

15 |S| ，2，e=3n-6

二、解答题

1（8 分）求 $P\vee(\neg P\to(Q\vee(\neg Q\to R)))$ 的主析取范式与主合取范式（用符号 m、M 表示且其下标用十进制整数）。

（完整解答过程略）

主合取范式：$P\vee Q\vee R$，即：M_0

主析取范式：$(P\wedge Q\wedge R)\vee(P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge R)\vee(P\wedge\neg Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge R)\vee(\neg P\wedge Q\wedge\neg R)\vee(\neg P\wedge\neg Q\wedge R)$，即：$m_1\vee m_2\vee m_3\vee m_4\vee m_5\vee m_6\vee m_7$

2（8 分）形式化并证明如下推理：

有理数都是实数，有的有理数是整数，因此有的实数是整数。设个体域为全总个体域。

令 Q(x)：x 是有理数； R(x)：x 是实数；Z(x)：x 是整数，则推理可以形式化为：

$\forall x(Q(x)\to R(x)), \exists x(Q(x)\wedge Z(x))\Rightarrow\exists x(R(x)\wedge Z(x))$

下面证明上述推理形式：

1) $\exists x(Q(x)\wedge I(x))$ P

2) $Q(a)\wedge I(a)$ ES,(1)

3) $Q(a)$ T,I(2)

4) $Z(a)$ T,I(2)

5) $\forall x(Q(x)\to R(x))$ P

6) $Q(a)\to R(a)$ US,(5)

7) $R(a)$ T,I,(3),(6)

8) $R(a)\wedge Z(a)$ T,I,(4),(7)

9) $\exists x(R(x)\wedge Z(x))$ EG,(8)

3（8 分） 定义整数集合 Z 上关系$\rho=\{(x,y)|x\equiv y(\bmod\ n)$ 即 x 与 y 模 n 余数相同$\}$. 证明：ρ 为 Z 上等价关系，并给出相应等价类。

证明：

1) 对$\forall x\in Z$，有 $x-x=0=0\cdot n$，于是$(x, x)\in\rho$，所以ρ自反；

2) $\forall(x,y)\in\rho$，有 $x-y=kn$，有 $y-x=(-k)n$，于是$(y, x)\in\rho$,故ρ对称；

3) $\forall(x,y)\in\rho$, $(y,z)\in\rho$，有 $x-y=k_1n$，$y-z=k_2n$，于是 $x-z=(k_1+k_2)n$，从而$(x,z)\in\rho$，故ρ传递。

综上，ρ是 Z 上等价关系。

ρ在 Z 上定义了 n 个等价类：

$[0]=\{kn|k\in Z\}$, $[1]=\{1+kn|k\in Z\}$, $[2]=\{2+kn|k\in Z\}$, ..., $[n-1]=\{(n-1)+kn|k\in Z\}$。

4（8 分）证明代数结构<R+；o>与<R；+>同构，其中 R+、R 分别为正实数集合、实数集合，o、+为一般的乘法与加法运算。

证明：

显然，$<R_+;\ o>$与$<R;\ +>$为同型代数结构，下面证明二者之间存在双射关系且保持运算。

i) 建立双射关系 h：

令 h：$R_+\to R$, $h(x)=\ln x$，

显然，h 是映射且是单射，

$\forall y\in R$, $\exists x=e^y\in R_+$，使 $y=\ln e^y=\ln x=h(x)$，

故 h 是满射，

从而，h 是从 R_+到 R 的双射。

ii) 满足同态方程：对$\forall a, b\in R_+$，

$h(aob)=\ln(aob)=\ln a+\ln b=h(a)+h(b)$。

综上，$<R_+;\ o>$同构于$<R;\ +>$。

5（8 分）设 h、g 是从群$<V_1;\ *>$到群$<V_2;\ o>$的同态，$V_3=\{x|x\in V_1$ 且 $h(x)=g(x)\}$,请证明：$<V_3;\ *>$是$<V_1;\ *>$的子群.

设 e、e' 分别为 V_1、V_2的单位元。

由 $e*e=e$，有 $h(e*e)=h(e)$，即 $h(e)oh(e)=h(e)oe'$，从而 $h(e)=e'$，类似地，$g(e)=e'$。

由 $h(e)=g(e)=e'$. 于是，$e\in V_3$, V_3非空。

显然 $V_3\subseteq V_1$，需要证明对$\forall x,y\in V_3$, $x*y^{-1}\in V_3$。

$x*y^{-1}\in V_1$ 是显然的，下面证明：$h(x*y^{-1})=g(x*y^{-1})$，亦即 $h(x)oh(y^{-1})=g(x)og(y^{-1})$。

由 $x\in V_3$，有 $h(x)=g(x)$，于是只需要证明 $h(y^{-1})=g(y^{-1})$。

由 $h(e)=g(e)=e'$有 $h(y*y^{-1})=g(y*y^{-1})$，亦即 $h(y)oh(y^{-1})=g(y)og(y^{-1})$， (*)

又由 $y\in V_3$，有 $h(y)=g(y)$，于是群 V_2 中对式（*）应用消去律可得 $h(y^{-1})=g(y^{-1})$。

综上，对$\forall x,y\in V_3$, $x*y^{-1}\in V_3$，所以，$<V_3;\ *>$是$<V_1;\ *>$的子群。

6（8分）给出树T的结点数n与其边数m的关系，并用数学归纳法证明之.

树T的结点数n与其边数m的关系：m=n-1.下面用数学归纳法证明：

对n进行归纳。

如果n=1，则G是一棵平凡树，从而m=0，故m=n-1成立。

假设n=k时，命题成立。

则n=k+1时,设G有m条边，需证m=n-1.

首先证明G存在叶子结点。假设G不存在叶子结点，则G所有结点的度数至少为2，于是可以从任意结点u出发，达到与u相邻的结点v，由于v的度数也是至少为2，故可继续到达v的相邻结点w，依次类推，由于G结点有限，最终可以到达一个以前经过的结点，于是得到一条闭通路，从而G中存在一条环，与题设矛盾。故G中存在叶子结点。

现在，不妨设v为叶子结点，则G′=G-v与G相差一条边与一个结点，即G′的结点数为k，边数为m-1，于是由归纳假设G′有m-1=k-1，即m=(k+1)-1，即当n=k+1时，m=n-1成立。

综上，命题得证。

注：也可以类似地对m进行归纳。

7（7分）证明或反驳：平面图G中不一定存在度数小于等于5的结点。

平面图G中一定存在度数小于等于5的结点。下面证明之：

设平面图G为（n,m）图。

若n≤5，结论显然成立，下面考虑n≥5。

假设一个平面图G的所有结点度数均大于5，又由平面图性质当n≥3时，m≤3n-6。

于是有

$6n \le \sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$，即m≥3n，这与m≤3n-6矛盾。

综上，平面图G中一定存在度数小于等于5的结点。