离散数学试卷（样卷）

一、填空题(其中，选择填空题均为单选题．每题 3 分，共计 45 分)

1 含 n 个命题变元的不同真值函数共有__________个；设个体域 $D=\{a,b,c\}$，消去公式 $\forall xA(x)\vee\exists xB(x)$中的量词后得到的命题公式为________________________________；公式$\exists x(\neg\exists yA(x,y)\to(\exists zB(z)\to C(x)))$的前束析取范式为______________________。

2 关于命题公式类型判断，不正确的是__________。

（1）$(P\wedge(P\to Q))\to Q$ 为重言式

（2）$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$为重言式

（3）$\alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\leftrightarrow\alpha$是重言式

（4）$(P\wedge Q)\to(P\leftrightarrow Q)$是重言式

（5）$((P\to Q)\vee(R\to Q))\to(P\vee R\to Q)$是重言式

（6）$((P\to Q)\vee(R\to S))\to((P\vee R)\to(Q\vee S))$是可满足公式

3 关于谓词公式类型判断，不正确的是__________。

（1）$P(a)\to\neg\exists xP(x)$是可满足公式

（2）$\forall xP(x)\to\neg P(a)$是可满足公式

（3）$p(c)\wedge\neg p(c)$是不可满足公式

（4）$\forall xp(x)\to\exists xp(x)$是逻辑有效公式

（5）$\exists y\forall xP(x,y)\to\forall x\exists yP(x,y)$是逻辑有效公式

（6）$\exists x\forall y\ (P(y)\to Q(x,\ y))$是可满足公式，也是逻辑有效公式

4 关于等值式的判断，不正确的是__________。

（1）$\exists x(A(x)\to B)\Leftrightarrow\forall xA(x)\to B$

（2）$\exists x(A(x)\to B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\to\exists xB(x)$

（3）$\exists x(A(x)\to B(x))\Leftrightarrow\forall xA(x)\to\exists xB(x)$

（4）$\exists x(A(x)\vee B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\vee\exists xB(x)$

（5）$\exists x(A(x)\wedge B(x))\Leftrightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

（6）$\forall x\forall y(P(x)\to Q(y))\Leftrightarrow\exists xP(x)\to\forall yQ(y)$

5 下列关于集合的命题中，为假的是__________。

（1）$\exists A\exists B(A\in B\wedge A\subseteq B)$

（2）$\forall A\forall B(A\subseteq B\to P(A)\subseteq P(B))$

（3）若 R 是传递关系，则 $R^2\subseteq R$

（4）设 R 是集合 A 上的二元关系，则 R 的对称闭包 $s(R)=R\cup R^{-1}$

（5）正整数集合不能与其真子集奇正整数集合之间建立双射关系

6 设 R 是集合 A 上的等价关系，x, y∈A，下述相关命题，为假的是__________。

（1）$[x]_R\neq\varnothing$

（2）$xRy\Leftrightarrow[x]_R=[y]_R$

（3）$\neg xRy\Leftrightarrow[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$

（4）$\cup\{[x]_R|x\in A\}\subseteq A$

（5）$A\subseteq\cup\{[x]_R|x\in A\}$

（6）商集 A/R 不一定构成 A 的一个划分

7 设 A={a,b,c}，B={e, f}，则可以定义多少个由 A 到 B 的满射______, A 上可以定义多少种等价关系______，偏序集<P(A), ⊆>的最大元为__________。

8 设集合 A={m, m + 1, … , n}，其中，m，n 为整数且 m<n。定义二元运算”min”：min(x, y)=返回 x、y 中较小者。则代数结构<A; min>的零元为__________，单位元为__________，是否所有元素均有逆元__________。

9 设<G; *>是 m 阶群，e 为<G; *>的单位元; 若 a∈G, |a|=r，则$|a^{-1}|$=_________； 若 G 是交换群，且 m 为奇数，a_1，a_2，…，a_m 为 G 中元素，则 $a_1*a_2*…*a_m$=_________；若<H; +>是群，f 为 G 到 H 的同态，则<H; +>的单位元可表示为_________。

10 相关代数结构的陈述，不正确的是____________。

（1）代数结构间的同构关系是等价关系

（2）独异点运算表中任何两行两列均不完全相同

（3）f 是代数结构 V_1 到 V_2 的映射，若证明了 f 不是同构映射，就证明了 V_1 与 V_2 不同构

（4）存在零元可逆的代数结构

（5）设代数结构 V=<S；*>，V′=<S′；*′>，ϕ是从 V 到 V′的满同态映射，在 S 上定义一个关系 ρ_ϕ，使得当且仅当ϕ(x)=ϕ(y)时 xρ_ϕy，则可以证明：ρ_ϕ是 V 上的同余关系

（6）<A；*>是一个代数结构,R 是 A 上的等价关系，当 aRb 时，有 c*aRc*b，则称 R 是 A 上的左同余关系，类似可以定义右同余关系。于是有：若 R 是 A 上左同余关系与右同余关系，则 R 是 A 上的同余关系

11 关于群的相关命题，为假的是____________。

（1）群 G 中，方程 a*x=b, y*a=b 对于未知量 x、y 皆有唯一解

（2）a，b 为群 G 任意二元素,若(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)，则<G；*>是一个阿贝尔群

（3）设 H 是群 G 的子群，a，b∈G,若 Ha∩Hb≠∅,则 Ha=Hb

（4）若 G 是有限群，a∈G，|a|=r, 则 r||G|且{a^0, a^1, a^2, …, a^{r-1}}构成一个群

（5）有限群 G 中，周期大于 2 的元素的个数一定是奇数

（6）无限阶循环群<a>有两个生成元，即 a 与 a^{-1}，且<a>与整数加群同构

12 下述命题中，不正确的是____________。

（1）若图 G 是不连通的，则它的补图是连通的

（2）至少有两个结点的图中存在有两个相同度数的结点

（3）任意阶为 6 的图 G 或 G 的补图中一定存在一个 K_3

（4）若阶为 n 的图 G 是自补图，则 G 有 n(n-1)/4 条边

（5）设 G 是一(n，m)图，G 有ω个分图，则 m≥n-ω

（6）单向连通图 G 中不一定存在包含每个结点至少一次的通路

13 下述命题中，不正确的是____________。

（1）任意平面图都是 5 可着色的

（2）哈密尔顿图中的哈密尔顿回路不一定唯一

（3）完全二分图 $K_{m,n}$ 是哈密尔顿图的必要条件是 m=n

（4）完全图 K_5 与完全二分图 $K_{3,3}$ 都不是平面图，但都是欧拉图

（5）图 G 具有一条欧拉路，当且仅当 G 是连通的，且有零个或两个奇数度结点

（6）有 t 片树叶的 m 元树 T，若 T 是完全且平衡的，则 T 的高度 h=$\lceil \log_m t \rceil$

（7）树的任二结点间添加一条边后，将构成包含该二结点的环；树的每一条边均为其割边

14 无向完全图 K_4 的含 3 条边的所有非同构的生成子图数为______; n 个结点的标号完全图 K_n，其生成树有多少棵________; T 为有 t 片叶的完全二分树，则 T 有_______条边。

15 若 G 是哈密顿图，则对于非空真子集 S⊆V(G)，G-S 的分图数不超过______; n(n≥2)个结点的树的色数是______；极大平面图的边数 e 与结点数 n(n≥3)关系为_____________。

二、解答题(7 个小题，共计 55 分)

1（8 分）求 $P\vee(\neg P\rightarrow(Q\vee(\neg Q\rightarrow R)))$ 的主析取范式与主合取范式（用符号 m、M 表示且其下标用十进制整数）。

2（8 分）形式化并证明如下推理：

有理数都是实数，有的有理数是整数，因此有的实数是整数。设个体域为全总个体域。

3（8 分）定义整数集合 Z 上关系ρ={(x,y)|x≡y(mod n) 即 x 与 y 摸 n 余数相同：x-y=kn (k∈Z), x,y∈Z, n∈{2,3,4,…}}. 证明：ρ为 Z 上等价关系，并给出相应等价类。

4（8 分）证明代数结构<R+；o>与<R；+>同构，其中 R+、R 分别为正实数集合、实数集合，o、+为一般的乘法与加法运算。

5（8 分）设 h、g 是从群<V_1；*>到群<V_2；o>的同态，V_3={x|x∈V_1 且 h(x)=g(x)},请证明：<V_3；*>是<V_1；*>的子群.

6（8 分）给出树 T 的结点数 n 与其边数 m 的关系，并用数学归纳法证明之.

7（7 分）证明或反驳：平面图 G 中不一定存在度数小于等于 5 的结点。

选做题

1 简要给出群论中 Cayley 定理证明关键步骤。

2 简述半哈密尔顿图判定定理证明思路。