

离散数学阶段测试 (抽象代数)

2021.12.29

说明：闭卷；可携带本人设计的笔记（A4 纸大小，1 页）；需要写出详细求解步骤，尽量展示你的工作；独立完成，不可讨论。

1. 设 h 是代数结构 $V_1 = \langle S; \circ \rangle$ 到 $V_2 = \langle S'; \circ' \rangle$ 的同态映射， h 的同态像为 $h(S) \subseteq S'$ ，证明： h 是 V_1 到 $\langle h(S); \circ' \rangle$ 的满同态映射。

2. 有素数阶群 G ，证明： G 是循环群，且除了单位元的其他元素都是 G 的生成元。

3. 某通讯编码由 4 个数据位 x_1, x_2, x_3, x_4 和 3 位校验位 x_5, x_6, x_7 构成，其中，
 $x_5 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $x_6 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$, $x_7 = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4$,

\oplus 为异或运算。若 S 为满足上述关系的码字的集合，且当 $x, y \in S$ 时有 $x \oplus y = x_1 \oplus y_1, \dots, x_7 \oplus y_7$ ，
则 $\langle S; \oplus \rangle$ 是群，试证明之。