TD1

M 2201 Graphes

Exercice 1 : Mise en jambe

Pour les objets suivants, décrire les sommets et la relation mise en jeu dans une modélisation (simplifiée) en graphe. Déterminer si ces graphes doivent être orientés ou non.

1. facebook
2. twitter
3. grille 4×5
4. shifoumi
5. un arbre généalogique
6. le réseau routier
7. mappemonde (atlas des pays)
8. réseau Kicéo (SNCF pour les non-locaux)
9. organigramme d'entreprise

Pour chacune des propriétés suivantes, donner un exemple de graphe :

a. orienté d'ordre 5

b. orienté de taille 8

c. orienté d'ordre 10 et taille 2

d. non orienté ayant 6 sommets de degrés respectifs $3, 3, 2, 1, 1$ et 0

e. non orienté ayant uniquement des sommets de degré 2

Donner la matrice d'adjacence du graphe a. la matrice d'incidence des graphes b. et e. et la liste d'adjacence du graphe b.

Exercice 2 : Définitions

Voici quelques-unes des multiples représentations mathématiques trouvées dans la littérature sur les graphes.

1) Pour chacune d'entre elles indiquez en vous justifiant : s'il s'agit d'un graphe orienté ou non, si les multi-arcs dans le cas orienté ou les multi-arêtes dans le cas non orienté sont autorisés, si les boucles sont autorisées, si les graphes sont simples. (Un graphe est simple s'il ne contient ni de multi-arêtes (arcs) ni de boucles)

2) Pour chacune d'entre elles dessinez un exemple de graphe réunissant les différentes possibilités offertes par la représentation et sa définition mathématique complète à l'aide de la représentation considérée.

Soit S un ensemble non vide et fini d'éléments appelés sommets ;

A. Soit $A \subset S \times S$. Un graphe est G est défini par $G = (S, A)$

B. Soit $A = a_1, a_2, ..., a_n$ une famille d'éléments vérifiant tous : $\forall i, a_i \in S \times S$. Un graphe est G est défini par $G = (S, A)$

C. Soit A un ensemble fini. Soit $\alpha : A \to S$ et $\beta : A \to S$ deux applications (fonctions totales) appelés respectivement application origine et fin. Un graphe est G est défini par $G = (S, A, \alpha, \beta)$.

D. Soit A un ensemble fini. Soit $\gamma : A \to S \times S$ une application. Un graphe G est $G = (S, A, \gamma)$.

E. Soit $A \subset \{\{a, b\} | a \in S, b \in S \text{ et } a \neq b\}$. Un graphe est $G = (S, A)$.

F. On appelle $\mathcal{P}_2(S)$ l'ensemble des parties de S à deux éléments. Soit $A \subset \mathcal{P}_2(S)$. Un graphe est $G = (S, A)$.

G. Soit A un ensemble fini. Soit $\gamma : A \to \mathcal{P}_2(S) \cup \mathcal{P}_1(S)$ (ensemble des parties à un élément de S) une application (fonction totale). Un graphe G est $G = (S, A, \gamma)$.

H. Soit A une relation binaire symétrique sur S. Un graphe est G est défini par $G = (S, A)$

Exercice 3 : On considère l'ensemble $\{1, 2, 3, 5, 8, 9\}$ et la relation binaire A *"divise"*. Ce graphe est-il orienté ? Dessiner le graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ défini, donner son ordre, sa taille et les degrés (entrants et sortants) de chaque sommets. Même question avec la relation A' définie par

$\forall s, t \in S, sA't \Leftrightarrow$ s et t sont reliés par un arc dans le diagramme de Hasse de la relation A

Exercice 4 : Graphes circulants
Un graphe $\mathcal{G}$ est dit circulant d'ordre n et de partie $C \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$ si et seulement $G = (S, A)$ avec $S = \{0, 1, \dots, n-1\}$ et $\forall x, y \in S, xAy \iff \exists k \in \mathbb{N}, \exists c \in C, |x - y| = c + kn$.
Ces graphes sont-ils orientés ? Dessiner tous les graphes circulants d'ordres 3,4 et 5.

Exercice 5 : Matrices

Représenter le graphe correspondant à la matrice d'adjacence suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Est-ce que les matrices suivantes sont les matrices d'incidence d'un graphe simple non orienté. Si c'est le cas, représenter ce graphe. Sinon, donner la raison.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6 : Dans chacun des exemples suivants, dites si la matrice utilisée peut être une matrice d'adjacence, d'incidence ou ne peut pas représenter un graphe. Dans les deux premiers cas, dessinez un graphe correspondant, dans le dernier cas, justifiez pourquoi.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 7 : Graphes réguliers
Dessinez un graphe 3-régulier qui ne soit pas le graphe complet K_4.
Un graphe dont tous les sommets sont de degré 4 est dit 4-régulier. Montrez que dès que $n \geq 5$, il est possible de construire un graphe 4-régulier à n sommets. Que pensez vous des graphes 3-réguliers ?

Exercice 8 : Soit $G = (S = \{a, b, c, d, e, f\}, \{bAc, dAe, eAf, fAd\})$ un graphe. Représenter le graphe G, donner toutes les chaînes de G, puis tous les cycles de G.
Soit $G' = (\{a, b, c, d, e, f\}, \{aAb, aA'e, bA'c, bA'd, cA'd, cA'e, eA'f\})$ un graphe. Représenter le graphe G', donner tous les cycles de G', donner toutes les chaînes de G' d'extrémités a et e.

Exercice 9 :* Montrer qu'un graphe connexe d'ordre n a au moins $n - 1$ arêtes.

Montrer qu'un graphes dont tous les sommets sont de degré au moins 2 possède un cycle.

Montrer un graphe simple d'ordre n tel que chaque sommet est de degré supérieur ou égal à $n/2$ est connexe.

Exercice 10 : Soint $G = (S = \{a, b, c, d, e, f\}, \{bAc, dAe, eAf, fAd\})$ et
$G' = (S' = \{a, b, c, d, e, f\}, \{aA"b, aA'e, bA'c, bA'd, cA'd, cA'e, eA'f\})$ deux graphes.
Représenter les graphes $G \cup G'$ et $G \cap G'$.

Exercice 11 : Don de sang
Il existe 4 groupes sanguins : `O, A, B` et `AB`. Le groupe `O` est donneur universel, les groupes `A` et `B` ne peuvent donner qu'a eux même ou à `AB`, et le groupe `AB` ne peut donner qu'à lui même.
Modéliser ces informations comme un graphe et donner sa définition formelle.
Donner sa matrice d'adjacence et sa liste d'adjacence.
Pour une transfusion, en plus du groupe sanguin, il faut tenir compte du rhésus du donneur, lequel est positif (`+`) ou négatif (`-`). Une personne au rhésus positive ne peut pas donner à une autre au rhésus négatif, tandis qu'une personne au rhésus négatif n'a pas de contrainte supplémentaire pour le don. Modéliser l'ensemble de ces informations comme un produit de graphes.

La relation `"peut donner"` est une relation d'ordre sur les ensembles {`O, A, B,AB`}, {`-,+`} et {`O, A, B,AB`} × {`-,+`}. Donner les définitions formelles des graphes associés aux diagramme de Hasse de cette relation sur les ensembles {`O, A, B,AB`}, {`-,+`} ainsi que leurs matrices d'adjacence. Exprimer le graphe du diagramme de Hasse de la relation sur {`O, A, B,AB`} × {`-,+`} comme un produit de graphes.

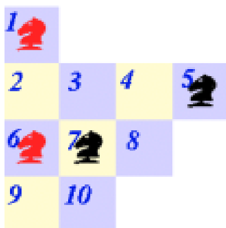
Exercice 12 : *Complémentaire
Donner la matrice d'adjacence du complémentaire d'un graphe en fonction de sa matrice d'adjacence.
Une *clique* est un sous-graphe induit complet, un *stable* un sous-graphe induit sans arête.
Dessiner un graphe ayant une clique de taille 5 et un stable de taille 3.

Montrer qu'un stable forme une clique dans le graphe (simple) complémentaire.

Soit $\mathcal{G}$ un graphe d'ordre au moins 5. Montrer que le graphe ou son complémentaire possède un cycle.

Exercice 13 : **Échange de cavaliers (Jean-Paul Davalan)

Échanger les positions des deux cavaliers rouges avec celles des deux noirs, en respectant évidemment les règles du déplacement du cavalier sur un échiquier et en n'utilisant que les dix cases dessinées.
Doit-on utiliser les 10 cases ?



Exercice 14 : ** Tuile de Wang
Une *tuile de Wang* est un carré dont chaque arête est colorié (les couleurs appartiennent à un ensemble fini, une tuile est donc la donnée du 4-uplet $(c_{\text{nord}}, c_{\text{est}}, c_{\text{sud}}), c_{\text{ouest}}))$; un pavage est valide si les carrés sont mis côte-à-côte et que les arêtes qui se touchent ont la même couleur.
Dessiner quelques ensembles de tuiles sur les couleurs rouge, noir, bleu, vert, blanc.

Dessiner un ensemble de tuiles qui pavent/ne pavent pas le plan.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de tuiles pave une ligne. Est-il possible d'étendre ce résultat au plan ?