Parcial 3 Análisis Real

Dayana Gonzalez Vargas
dayana.gonzalez@urosario.edu.co
Estudiante de matemáticas aplicadas y ciencia de la computación.
(Universidad del Rosario)
(Dated: October 29, 2021)

Enunciado y demostración primer ejercicio

Una función real de variable real se dice que es un polinomio de grado $n \in \mathbb{Z}_+$ si tiene la forma

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

donde se define $ax_0 = a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Sea $d \in \mathbb{R}$ cualquiera, Q_n otra función polinómica de grado n y supongamos que $Q_n(d) \neq 0$. Demuestre, usando la definición $\epsilon - \delta$, que la función racional P_n/Q_n es continua en d.

Se quiere demostrar por definición $\epsilon - \delta$ que;

$$\lim_{x \to d} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_n(d)}{Q_n(d)}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración
Sea $\epsilon > 0$ y considere

$$|f(x) - f(c)| = |\frac{P_n(x)}{Q_n(x)} - \frac{P_n(d)}{Q_n(d)}|$$

$$= |\frac{P_n(x)Q_n(d) - P_n(d)Q_n(x)}{Q_n(d)Q_n(x)}|$$

$$= \frac{1}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{|P_n(x)Q_n(d) - P_n(d)Q_n(x)|}{|Q_n(x)|}$$

Renombremos $\hat{P_n}(x) = P_n(x)Q_n(d) - P_n(d)Q_n(x)$ entonces tenemos:

$$= \frac{1}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{|\hat{P_n}(x)|}{|Q_n(x)|}$$

Obteniendo $\hat{P_n}(x)$ y $Q_n(x)$ dos polinomios de grado n de la forma mencionada en el enunciado.

Ahora, una acotación para el denominador $Q_n(x)$, reescribiendo x como $((x-c)+c)$ con $c = d$.
como,

$$Q_n(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$$

$$= b_n((x-d)+d)^n + b_{n-1}((x-d)+d)^{n-1} + ... + b_1((x-d)+d) + b_0$$

con $b_n, b_{n-1}, .., b_1, b_0$ constantes.
Al utilizar **el binomio de newton**, el cual tiene la siguiente formula;

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

obteniendo,

$$= b_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-d)^k d^{n-k} + . + b_1 \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (x-d)^k d^{1-k} + b_0$$

Notemos que al evaluar $k = 0$ en cada una de las sumatorios obtenemos $Q_n(d)$ como la constante del polinomio entonces tenemos con $e_n, e_{n-1}, .., e_1$ constantes;

$$Q_n(x) = e_n(x-d)^n + e_{n-1}(x-d)^{n-1} + .. + e_1(x-d) + Q_n(d)$$

$$|Q_n(x)| = |e_n(x-d)^n + e_{n-1}(x-d)^{n-1} + .. + e_1(x-d) + Q_n(d)|$$

$$\geq Q_n(d) - |e_n||(x-d)|^n - |e_{n-1}||(x-d)|^{n-1} - .. - |e_1||(x-d)|$$

Supongamos que $|x-d| < 1$ entonces tenemos que se cumplen las siguientes desigualdades;

$$|x-d|^2 < |x-d|$$

$$|x-d|^3 < |x-d|^2 < |x-d|$$

$$...$$

$$|x-d|^n < |x-d|^{n-1} < .. < |x-d|$$

entonces se cumple que;

$$Q_n(d) - |e_n||(x-d)|^n - |e_{n-1}||(x-d)|^{n-1} - .. - |e_1||(x-d)|$$

$$\geq Q_n(d) - |e_n||(x-d)| - |e_{n-1}||(x-d)| - .. - |e_1||(x-d)|$$

$$= Q_n(d) - (|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)|(x-d)|$$

Entonces tenemos que;

$$Q_n(x) \geq Q_n(d) - (|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)|(x-d)|$$

Y si suponemos también que;

$$|x-d| < \frac{Q_n(d)}{2 \cdot (|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)}$$

$$(|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)|x-d| < \frac{Q_n(d)}{2}$$

$$-(|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)|x-d| > -\frac{Q_n(d)}{2}$$

$$Q_n(d) - (|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)|x-d| > Q_n(d) - \frac{Q_n(d)}{2}$$

$$Q_n(x) \geq Q_n(d) - (|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)|x-d| \geq \frac{Q_n(d)}{2}$$

$$Q_n(x) \geq \frac{Q_n(d)}{2}$$

$$\frac{1}{Q_n(x)} \leq \frac{1}{\frac{Q_n(d)}{2}}$$

Encontrando una acotación para el denominador. Entonces si $\delta = min\{1, \frac{Q_n(d)}{2 \cdot (|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)}\}$ y suponiendo que $|x-d| < \delta$ tenemos que se cumple;

$$\frac{1}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{|\hat{P_n}(x)|}{|Q_n(x)|} \leq \frac{1}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{2}{Q_n(d)} \cdot |\hat{P_n}(x)|$$

Ahora, encontraremos una acotación para el numerador $\hat{P_n}(x)$, siguiendo el procedimiento anteriormente realizado.
Recordemos que $\hat{P_n}(x) = P_n(x)Q_n(d) - P_n(d)Q_n(x)$, entonces

$$\hat{P_n}(x) =$$

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

$$\hat{P_n}(x) =$$

$$a_n((x-d)+d)^n + a_{n-1}((x-d)+d)^{n-1} + . + a_1((x-d)+d) + a_0$$

Y por binomio de newton obtenemos;

$$= a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-d)^k d^{n-k} + . + a_1 \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} (x-d)^k d^{1-k} + a_0$$

Notemos que al evaluar $k = 0$ en cada una de las sumatorios obtenemos $\hat{P_n}(d)$ como la constante del polinomio y $P_n(\hat{d}) = 0$ entonces tenemos con $f_n, f_{n-1}, .., f_1$ constantes;

$$\hat{P_n}(d) = f_n(x-d)^n + f_{n-1}(x-d)^{n-1} + .. + f_1(x-d)$$

$$|\hat{P_n}(d)| = |f_n(x-d)^n + f_{n-1}(x-d)^{n-1} + .. + f_1(x-d)|$$

$$\leq |f_n||(x-d)|^n + |f_{n-1}||(x-d)|^{n-1} + .. + |f_1||(x-d)|$$

Supongamos que $|x-d| < 1$ por lo anterior tenemos que

$$\hat{P_n}(d) \leq (|f_n| + |f_{n-1}| + .. + |f_1|)|(x-d)|$$

Ahora si $\delta_1 = |Q_n(d)| \cdot \frac{Q_n(d)}{2} \frac{1}{(|f_n| + |f_{n-1}| + .. + |f_1|)} \cdot \epsilon$
Tenemos que si $\delta = min\{1, \frac{Q_n(d)}{2 \cdot (|e_n| + |e_{n-1}| + .. + |e_1|)}, \delta_1\}$ y suponiendo que $|x-d| < \delta$ tenemos;

$$\frac{1}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{|\hat{P_n}(x)|}{|Q_n(x)|} \leq \frac{1}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{2}{Q_n(d)} \cdot |\hat{P_n}(x)|$$

$$\leq \frac{1}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{2}{Q_n(d)} \cdot (|f_n| + |f_{n-1}| + .. + |f_1|)|(x-d)|$$

$$\leq \frac{1}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{2}{Q_n(d)} \cdot (|f_n| + |f_{n-1}| + .. + |f_1|) \cdot \delta_1$$

$$\leq \frac{|Q_n(d)|}{|Q_n(d)|} \cdot \frac{2 \cdot Q_n(d)}{2 \cdot Q_n(d)} \cdot \frac{(|f_n| + |f_{n-1}| + .. + |f_1|)}{(|f_n| + |f_{n-1}| + .. + |f_1|)} \cdot \epsilon = \epsilon$$

y por lo tanto $\frac{P_n(d)}{Q_n(d)}$ es continua en d. □

Enunciado y demostración segundo ejercicio

Sean $f : A \subseteq R \to R$y $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(A) = Rango(f) \subseteq B$. Supongamos que $a \in A', b = f(a) \in B'$, que$f$ es continua en $x_0 = a$ y g es continua en $y_0 = b = f(a)$.

a) Usando la caracterización secuencial de la continuidad, demuestre que la función composición $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 = a$.

b) Establezca y explique un ejemplo de una función f continua en $x_0 = a$ y una función g discontinua en $y_0 = f(a)$; pero que la composición $h = g \circ f$ sea continua en $x0 = a$.

Demostración (parte a)

Se quiere mostrar que $h = g \circ f : A \to \mathbb{R}$ es continua en a.
Suponga que f es continua en a y g es continua en $b = f(a)$.

- Como g es continua en b, sea Y_n una sucesión en B tal que $Y_n \to b$ y se cumple que $g(Y_n) \to g(b)$.
- Como f es continua en a, sea X_n una sucesión en A tal que $X_n \to a$ y se cumple que $f(X_n) \to f(a)$.

Como $f(A) = Rango(A) \subseteq B$ tenemos sin perdida de generalidad que como $Y_n \in B$ es una sucesión con $f(X_n)$.

Ahora, notemos que $X_n \in A$ y $X_n \to a$ entonces tenemos que

$$f(X_n) \to f(a)$$

Por lo mencionado anteriormente podemos decir que esto es similar a tener

$$Y_n \to b$$

Lo cual es verdad, debido a que g es continuo en $b = f(a)$ y como $Y_n \in B$ lo que implica que

$$g(Y_n) \to g(b)$$

lo que es similar a tener

$$g(f(X_n)) \to g(f(a))$$

$$g \circ f(X_n) \to g \circ f(a)$$

$$h(X_n) \to h(a)$$

Recopilando lo demostrado tenemos que $X_n \in A$ y $X_n \to a$ se cumple que $h(X_n) \to h(a)$ por el criterio secuencial de continuidad tenemos que h es continua en a. $\square$

Parte B

Sea la función $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = x^2$$

notemos que $f(x)$ es continua en $x = 0$.
Sea la función $g : B \to \mathbb{R}$ que B se define como $B\{y \in \mathbb{R} : 0 < y \vee y > 0\}$ la función es definida como

$$g(y) = \frac{|x|}{x}$$

notemos que $g(x)$ es discontinua en $y = f(0) = 0$.
Entonces tenemos que $h = g \circ f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ en donde

$$h(x) = g(f(x)) = \frac{|f(x)|}{f(x)}$$

$$h(x) = \frac{|x^2|}{x^2}$$

donde por propiedades de valor absoluto y exponenciales se tiene que

$$|x^2| = |x|^2 = x^2$$

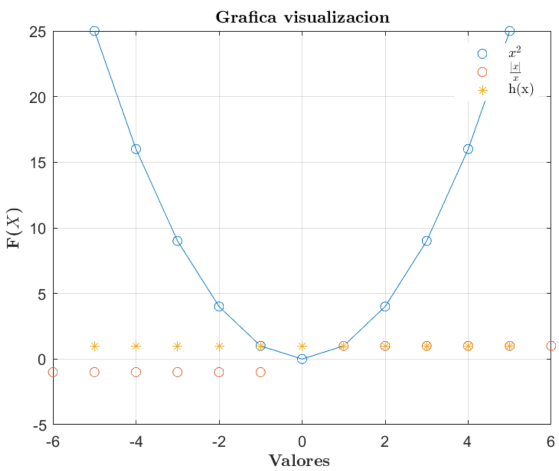
entonces tenemos que

$$h(x) = \frac{x^2}{x^2}$$

$$h(x) = 1$$

sabemos que una función contante es continua en todo R en este caso es continua en $x = 0$.

Visualización



Enunciado y demostración tercer ejercicio

Considere la función $f : R \to R$ cuya ley de asignación es

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ -x^3, & \text{si } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

Demuestre que esta función es continua en $c = 0$; pero que es discontinua en $c \neq 0$.

Demostración

1. Demostraremos que la función es continua en $c = 0$.
   Sea $\epsilon > 0$, consideremos los siguientes casos.
   - Caso 1: Sea $x \in \mathbb{Q}$, demostraremos que

     $$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

     entonces consideremos

     $$|f(x) - f(c)| = |x^2 - 0| = |x|^2$$

     Supongamos que $|x - 0| = |x| < 1$ entonces tenemos que

     $$|x| < 1$$

     $$|x|^2 < |x|$$

     Tenemos que si $\delta = min\{1, \epsilon\}$y suponiendo que $|x - 0| = |x| < \delta$ tenemos

     $$|f(x) - f(c)| = |x^2 - 0| = |x|^2 \leq |x| < \epsilon$$

     Por lo tanto cuando $x \in \mathbb{Q}$ la función es continua en $c = 0$.
   - Caso 2: Sea $x \in \mathbb{I}$, demostraremos que

     $$\lim_{x \to 0} -x^3 = 0$$

     entonces consideremos

     $$|f(x) - f(c)| = |-x^3 - 0| \leq |x^3 - 0| = |x|^3$$

Supongamos que $|x-0|=|x|<1$ entonces tenemos que

$$|x|<1$$

$$|x|^3<|x|^2<|x|$$

Tenemos que si $\delta = min\{1,\epsilon\}$y suponiendo que $|x-0|=|x|<\delta$ tenemos

$$|f(x)-f(c)| = |-x^3-0| \le |x|^3 \le |x| < \epsilon$$

Por lo tanto cuando $x \in \mathbb{I}$ la función es continua en $c=0$.
En ambos casos se demostró que la función es continua en $c=0$.

2. Demostrar que la función es discontinua en $c \neq 0$.
Sea $c \in \mathbb{R}-\{0\}$ se quiere mostrar que f es discontinua.
luego existe una sucesión $(X_n) \in \mathbb{Q}$, la cual toma valores positivos , también existe una sucesión $(Y_n) \in \mathbb{I}$, la cual también toma valores positivos. Tomemos la sucesión (X_n) y mostraremos que esta $(X_n) \to c$. como para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ existe una sucesión $(X_n) \in \mathbb{Q}$, tenemos por densidad de los racionales que $(X_n) \to c$. Similarmente si tomamos la sucesión (Y_n) con la densidad de los irracionales tenemos que $(Y_n) \to c$.
Ahora, Si f fuera continua en $c \in \mathbb{R}-\{0\}$ tenemos que las imágenes de ambas sucesiones convergen al mismo punto, donde

$$f(X_n) \to f(c) = c^2$$

$$X_n \to c$$

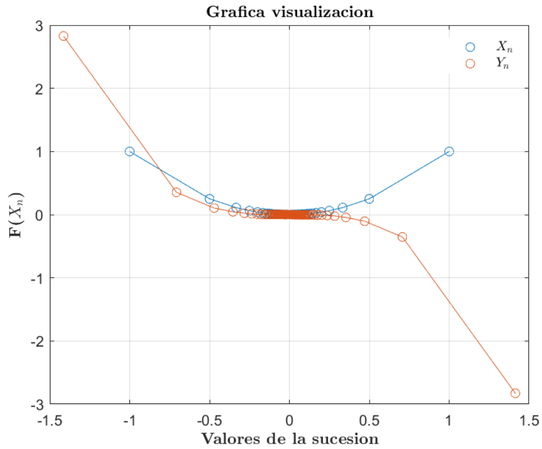
$$f(Y_n) \to f(c) = -c^3$$

$$Y_n \to c$$

Recordemos que tomamos dos sucesiones en donde sus valores son positivos y como $c \neq 0$ tenemos que c^2 siempre tomara valores positivos para los valores de la sucesión (X_n). con (Y_n) tenemos que $-c^3$ siempre tomara valores negativos, como $c \neq 0$, el único valor que puede ser positivo y negativo a la vez es cero se llega a una contradicción entonces $f(X_n)$ y $f(Y_n)$ convergen a puntos distintos. Por lo tanto f es discontinua en $c \neq 0$

□

Visualización



Enunciado y solución Cuarto ejercicio

Usando el Teorema de Localización de las Raíces, demuestre que la función

$$f(x) = e^x - xsen(x)$$

con $x \in [2,1]$ tiene al menos una raíz $c(2,1)$. Use la sucesión de los "puntos medios" $\{p_k\}$ definida en la demostración de este teorema para hallar una aproximación p_{k0} de c con un error menor que 10^{-3}. Explique como calcular el número de iteraciones necesarias para obtener tal aproximación y adjunte un código donde se obtenga tal aproximación. La salida debe una tabla con los resultados y la aproximación de la raíz c; así como el valor $f(c)$.

Solución

1. Note que la función $f(x)$ esta compuesta por dos funciones continuas en intervalo $I=[-2,1]$ y por propiedades de continuidad la suma de funciones continuas es continua, entonces podemos decir que $f(x)$ es continua en el intervalo I. Ahora, tenemos que $f(a) = f(-2) = -1.683 < 0$ y $f(b) = f(1) = 1.8768 > 0$ por lo cual también se cumple que $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces según el teorema de localización de raíces existe $c \in (-2,1)$ tal que $f(c)=0$, es decir que existe al menos una raíz en este intervalo para esta función.

2. A partir de la sucesión $\{p_k\}$ la cual esta compuesta por los "puntos medios", notemos que para cada uno de estos puntos se tienen un intervalo con longitud $l(I_k) = \frac{(b-a)}{2^k}$ y por lo anterior recordemos que $c \in (a_k, b_k)$.
luego $p_k = \frac{a_k+b_k}{2}$ entonces se sigue siempre y cuando $k \geq 1$ que:

$$|p_k - c| \leq \frac{a_k - b_k}{2}$$

y siguiendo la demostración del teorema de localización de raíces $l(I_k) = \frac{a_k+b_k}{2} = \frac{(b-a)}{2^k}$ entonces

$$|p_k - c| \leq \frac{(b-a)}{2^k}$$

Ahora notemos que esto es verdad;

$$|p_k - c| \leq \frac{(b-a)}{2^k} < error$$

Para encontrar el número de iteraciones para cierto error se debe realizar el siguiente despeje

$$\frac{(b-a)}{2^k} < error$$

$$\frac{1}{2^k} < \frac{error}{(b-a)}$$

$$2^k \geq \frac{(b-a)}{error}$$

$$\log_2 2^k \geq \log_2 \frac{(b-a)}{error}$$

$$k \geq \log_2 (b-a) - \log_2 error$$

Entonces notemos que en este ejercicio que se tiene un *error* de 10^{-3} con $a = -2, b = 1$ tenemos que

$$k \geq \log_2 (1 - (-2)) - \log_2 10^{-3}$$

$$k \geq 11.55074$$

Notemos que Al realizar nuestro algoritmo este para en la iteración 12 con un error de $7.3242 \times 10^{-4} < 10^{-3}$.

Muestra gráfica de el algoritmo tenemos que $c = -0.7278, f(c) = -0.0012$

k	a_{k}	b_{k}	p_{k}	f(a_{k})	f(b_{k})	f(p_{k})
1	-2.0000	1.0000	-0.5000	-1.6833	1.8768	0.3668
2	-2.0000	-0.5000	-1.2500	-1.6833	0.3668	-0.8997
3	-1.2500	-0.5000	-0.8750	-0.8997	0.3668	-0.2547
4	-0.8750	-0.5000	-0.6875	-0.2547	0.3668	0.0665
5	-0.8750	-0.6875	-0.7813	-0.2547	0.0665	-0.0923
6	-0.7813	-0.6875	-0.7344	-0.0923	0.0665	-0.0123
7	-0.7344	-0.6875	-0.7109	-0.0123	0.0665	0.0273
8	-0.7344	-0.7109	-0.7227	-0.0123	0.0273	0.0075
9	-0.7344	-0.7227	-0.7285	-0.0123	0.0075	-0.0024
10	-0.7285	-0.7227	-0.7256	-0.0024	0.0075	0.0026
11	-0.7285	-0.7256	-0.7271	-0.0024	0.0026	0.0001
12	-0.7285	-0.7271	-0.7278	-0.0024	0.0001	-0.0012

Enunciado y Explicación Quinto ejercicio

Usando el método de la demostración del Teorema de Localización de Raíces (divide y vencerá), provea un algoritmo para aproximar el valor c donde la imagen de la función

$$f(x) = \ln(x) - x\cos(x)$$

con $x \in [1, 4]$ sea igual a 2. Explique y provea un código con salida una tabla de los resultados en cada iteración y la aproximación de c. Provea gráficos de la situación programada.

Explicación del código

Recordando **el teorema del valor intermedio de Bolzano**, que nos dice; "*Sea I un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua sobre I. Si $a, b \in I$ y si $k \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < n < f(b)$ entonces existe $c \in I$ tal que $f(c) = n$* ".

A partir de el algoritmo anteriormente enunciado definimos que antes de ingresar al procedimiento se debe cumplir esa condición $f(a) < n < f(b)$, luego a medida que se va dividiendo el intervalo con un

$$p_k = (a+b)/2$$

tenemos que

- si $f(p_k) - n > 0$:se hace un cambio de variables con $a_k = a_{k+1}$ y $b_k = p_k$ y con estos cambios se sigue el algoritmo.
- si $f(p_k) - n < 0$:se hace un cambio de variables con $a_k = p_k$ y $b_k = b_{k+1}$ y con estos cambios se sigue el algoritmo.

El algoritmo termina cuando la tolerancia sea mayor que $\frac{1}{2^k}(b-a)$ o cuando $f(p_k) = n$.

Explicación del problema con el código

tenemos que nuestra función definida es continua sobre el intervalo, debido a que es suma de dos funciones continuas sobre este y tenemos que se cumple que $f(a) < k < f(b)$ es decir $f(1) < 2 < f(4)$ entonces

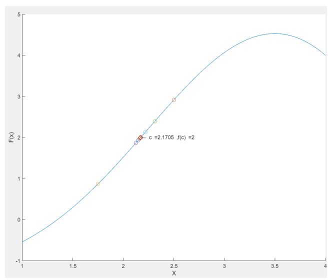
$$-0.5403 < 2 < 4.00086$$

Lo cual se cumple y se puede seguir con el desarrollo del algoritmo.

Visualización resultados algoritmo

k	a_{k}	b_{k}	p_{k}	f(a_{k})	f(b_{k})	f(p_{k})
1	1.0000	4.0000	2.5000	-0.5403	4.0009	2.9191
2	1.0000	2.5000	1.7500	-0.5403	2.9191	0.8715
3	1.7500	2.5000	2.1250	0.8715	2.9191	1.8721
4	2.1250	2.5000	2.3125	1.8721	2.9191	2.4005
5	2.1250	2.3125	2.2188	1.8721	2.4005	2.1361
6	2.1250	2.2188	2.1719	1.8721	2.1361	2.0039
7	2.1250	2.1719	2.1484	1.8721	2.0039	1.9379
8	2.1484	2.1719	2.1602	1.9379	2.0039	1.9709
9	2.1602	2.1719	2.1660	1.9709	2.0039	1.9874
10	2.1660	2.1719	2.1689	1.9874	2.0039	1.9956
11	2.1689	2.1719	2.1704	1.9956	2.0039	1.9997
12	2.1704	2.1719	2.1711	1.9997	2.0039	2.0018
13	2.1704	2.1711	2.1708	1.9997	2.0018	2.0008
14	2.1704	2.1708	2.1706	1.9997	2.0008	2.0002
15	2.1704	2.1706	2.1705	1.9997	2.0002	2.0000

(a) tabla



(b) gráfica

Bibliografía

[1] *Introduction to real analysis*, Bartle, R. and Sherbert, R , 4° Edition. John Wiley Sons, Inc. (2011).