Funcionales lineales:

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

10 de noviembre de 2020

Agenda: Funcionales lineales

- Funcional lineal asocia un número complejo (o real) $\in \mathbf{K}$ a un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}$ y cumple con:
  - $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}[|v\rangle] \in \mathbb{C}$,
  - $\mathcal{F}[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] \equiv \alpha \ \mathcal{F}[|v_1\rangle] + \beta \ \mathcal{F}[|v_2\rangle]$, $\forall \ |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}$ y $\forall \ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$.

- Funcional lineal asocia un número complejo (o real) $\in \mathbf{K}$ a un vector $|v\rangle \in \mathbf{V}$ y cumple con:
  - $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}[|v\rangle] \in \mathbb{C}$,
  - $\mathcal{F}[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] \equiv \alpha \ \mathcal{F}[|v_1\rangle] + \beta \ \mathcal{F}[|v_2\rangle]$, $\forall \ |v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbf{V}$ y $\forall \ \alpha, \beta \in \mathbf{K}$.
- Ejemplos de funcionales lineales
  - Un funcional lineal es la integral de Riemann $\mathcal{I}[|f\rangle] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
  - El producto interno constituye la expresión natural del funcional $\mathcal{F}_a[|v\rangle] \equiv \langle a \ |v\rangle \in \mathbb{C} \ \forall \ |v\rangle \in \mathbf{V}$.

Espacios vectoriales duales

- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$. $\mathbf{V}$ es el espacio directo y $\mathbf{V}^\star$ el espacio dual de $\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}$ es de dimensión finita n, entonces $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}^\star = n$.

Espacios vectoriales duales

- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$. $\mathbf{V}$ es el espacio directo y $\mathbf{V}^\star$ el espacio dual de $\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}$ es de dimensión finita n, entonces $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}^\star = n$.
- Aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional: $\mathcal{F}_a[|v\rangle] \equiv \langle a | v\rangle \quad \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in \mathbf{V}^\star$.

Espacios vectoriales duales

- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$. $\mathbf{V}$ es el espacio directo y $\mathbf{V}^\star$ el espacio dual de $\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}$ es de dimensión finita n, entonces $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}^\star = n$.
- Aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional: $\mathcal{F}_a\left[|v\rangle\right] \equiv \langle a\,|v\rangle \quad \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in \mathbf{V}^\star$.
- Se establece entonces una correspondencia 1 a 1 entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1\,|v_1\rangle + \lambda_2\,|v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^*\,\langle v_1| + \lambda_2^*\,\langle v_2|$,

Espacios vectoriales duales

- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$. $\mathbf{V}$ es el espacio directo y $\mathbf{V}^\star$ el espacio dual de $\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}$ es de dimensión finita n, entonces $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}^\star = n$.
- Aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional: $\mathcal{F}_a\left[|v\rangle\right] \equiv \langle a\,|v\rangle \quad \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in \mathbf{V}^\star$.
- Se establece entonces una correspondencia 1 a 1 entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|$,
- Dada una base $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots |\mathrm{e}_n\rangle\}$ para $\mathbf{V}$ siempre es posible asociar una base ortonormal para $\mathbf{V}^\star$ de tal manera que:
  $|v\rangle = v^i |\mathrm{e}_i\rangle \rightleftarrows \langle v| = v_i^* \left\langle e^i\right|$, con , entonces
  v^i son las **componentes contravariantes** de $|v\rangle$ y
  v_i son las **componentes covariantes** de $|v\rangle$

- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$. $\mathbf{V}$ es el espacio directo y $\mathbf{V}^\star$ el espacio dual de $\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}$ es de dimensión finita n, entonces $\dim\mathbf{V} = \dim\mathbf{V}^\star = n$.
- Aquellos espacios lineales con producto interno definido, el mismo producto interno constituye la expresión natural del funcional: $\mathcal{F}_a\left[|v\rangle\right] \equiv \langle a\,|v\rangle \quad \forall\ |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \forall \quad \langle a| \in \mathbf{V}^\star$.
- Se establece entonces una correspondencia 1 a 1 entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|$,
- Dada una base $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, \cdots |\mathrm{e}_n\rangle\}$ para $\mathbf{V}$ siempre es posible asociar una base ortonormal para $\mathbf{V}^\star$ de tal manera que:
  $|v\rangle = v^i |\mathrm{e}_i\rangle \ \rightleftarrows\ \langle v| = v_i^* \left\langle e^i\right|$, con , entonces
  v^i son las **componentes contravariantes** de $|v\rangle$ y
  v_i son las **componentes covariantes** de $|v\rangle$
- El producto interno es entre formas (covectores) y vectores $\langle a\,|b\rangle = \langle b\,|a\rangle^* = \left(b_i^* \left\langle \mathrm{e}^i\right|\right) \cdot \left(a^j |\mathrm{e}_j\rangle\right) = b_i^* a^j \delta_j^i = a^i b_i^*$;

Bases Duales

- Dado un espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{C}^2$ con producto interno conectamos la base $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ de $\mathbf{V}$ con la base $\{\langle \mathrm{e}^j|\}$ de $\mathbf{V}^\star$, con $\langle \mathrm{e}^i | \mathrm{e}_j\rangle = \delta^i_j$
  $|v\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 + i\tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 + i\tilde{y}^2 \end{pmatrix}$; la base sería $|\tilde{w}_1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{w}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$
  Consideremos una definición de producto interno
  $\langle \tilde{a} | \tilde{b} \rangle = (a^1)^* b_1 + 2(a^2)^* b_2$ la base dual será: $\langle \tilde{w}_1| = (-i, 0)$ y $\langle \tilde{w}_2| = (0, -i/2)$.

- Dado un espacio vectorial $\mathbf{V} = \mathbb{C}^2$ con producto interno conectamos la base $\{|\mathrm{e}_i\rangle\}$ de $\mathbf{V}$ con la base $\{\langle\mathrm{e}^j|\}$ de $\mathbf{V}^\star$, con $\langle\mathrm{e}^i\,|\mathrm{e}_j\rangle = \delta^i_j$
$$|v\rangle = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1 + i\tilde{y}^1 \\ \tilde{x}^2 + i\tilde{y}^2 \end{pmatrix};\ \text{la base sería } |\tilde{w}_1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\tilde{w}_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$$
Consideremos una definición de producto interno
$\langle\tilde{a}\,|\tilde{b}\rangle = (a^1)^* b_1 + 2(a^2)^* b_2$ la base dual será: $\langle\tilde{w}_1| = (-i, 0)$ y $\langle\tilde{w}_2| = (0, -i/2)$.
- Consideremos un espacio vectorial complejo $\mathbf{V} = \mathbb{C}^3$, de la forma
$$|v\rangle = \begin{pmatrix} x^1 + iy^1 \\ x^2 + iy^2 \\ x^3 + iy^3 \end{pmatrix} \text{ la base será}$$
$$|w_1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |w_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, |w_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \text{ y la base dual}$$
$\langle w_1| = (-i, 0, 0)$, $\langle w_2| = (0, -i, 0)$ y $\langle w_3| = (0, 0, -i)$.

Vectores y Covectores 1/2

- Los vectores con componentes contravariantes $\left\langle \mathrm{e}^i \,|a\right\rangle = a^i$ serán representados como arreglos columnas

$$|a\rangle \;\Rightarrow\; a^i = \left\langle \mathrm{e}^i \,|a\right\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, 3, \cdots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} .$$

- Los vectores con componentes contravariantes $\langle \mathrm{e}^i \left|a\right\rangle = a^j$ serán representados como arreglos columnas

$$|a\rangle \;\Rightarrow\; a^i = \langle \mathrm{e}^i \left|a\right\rangle \qquad \text{con } i = 1, 2, 3, \cdots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} .$$

- Si existen otras bases $\{|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle\}$ y $\left\{\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \right|\right\}$ en $\mathbf{V}$ y $\mathbf{V}^\star$, entonces las componentes de los vectores y formas, expresadas en esas bases, están relacionadas

$$\left.\begin{array}{c} \langle \mathrm{e}^i \left|a\right\rangle = a^j \langle \mathrm{e}^i \left|\mathrm{e}_j\right\rangle = a^j \delta^i_j = \tilde{a}^j \langle \mathrm{e}^i \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle \\ \\ \langle \tilde{\mathrm{e}}^i \left|a\right\rangle = \tilde{a}^j \langle \tilde{\mathrm{e}}^i \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = \tilde{a}^j \delta^i_j = a^j \langle \tilde{\mathrm{e}}^i \left|\mathrm{e}_j\right\rangle \end{array}\right\} \;\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} a^i = A^i_j \tilde{a}^j \\ \\ \tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j , \end{array}\right.$$

con $\langle \mathrm{e}^i \left|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = A^i_j$; $\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \left|\mathrm{e}_j\right\rangle = \tilde{A}^i_j \quad A^i_k \tilde{A}^k_j = \delta^i_j \Leftrightarrow \tilde{A}^i_j = \left(A^i_j\right)^{-1}$.

Vectores y Covectores 2/2

- Los covectores o formas, con componentes *covariantes* $\langle b \,|\mathrm{e}_i\rangle = b_i$, serán representadas como un arreglo tipo fila

$$\langle b| \;\Rightarrow\; b_i = \langle b \,|\mathrm{e}_i\rangle \text{ con } i = 1,2,3,\cdots,n \iff \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

- Los covectores o formas, con componentes *covariantes* $\langle b \,|\mathrm{e}_i\rangle = b_i$, serán representadas como un arreglo tipo fila

$$\langle b| \;\Rightarrow\; b_i = \langle b\,|\mathrm{e}_i\rangle \text{ con } i = 1,2,3,\cdots,n \iff \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

- Las componentes covariantes transforman de un sistema de referencia a otro mediante la siguiente ley de transformación:

$$\left.\begin{array}{l} \langle b\,|\mathrm{e}_j\rangle = b_i\left\langle \mathrm{e}^i\,|\mathrm{e}_j\right\rangle = b_i\delta^i_j = \tilde{b}_i\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\,|\mathrm{e}_j\right\rangle \\ \\ \langle b\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = \tilde{b}_i\left\langle \tilde{\mathrm{e}}^i\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle = \tilde{b}_i\delta^i_j = b_i\left\langle \mathrm{e}^i\,|\tilde{\mathrm{e}}_j\right\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} b_j = \tilde{b}_i A^i_j \\ \\ \tilde{b}_j = b_i \tilde{A}^i_j\,. \end{array}\right.$$

Cartensianas y Polares 1/2

- Consideremos dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Entonces

$$|a\rangle = a_x |\mathrm{i}\rangle + a_x |\mathrm{j}\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle \;;$$

Cartensianas y Polares 1/2

- Consideremos dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Entonces

$$|a\rangle = a_x |\mathrm{i}\rangle + a_x |\mathrm{j}\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle \ ;$$

- Expresamos una base en términos de la otra como

$$|u_r\rangle = \cos(\theta) |\mathrm{i}\rangle + \mathrm{sen}(\theta) |\mathrm{j}\rangle \ \text{ y } \ |u_\theta\rangle = -\mathrm{sen}(\theta) |\mathrm{i}\rangle + \cos(\theta) |\mathrm{j}\rangle \ ,$$

- Consideremos dos sistemas de coordenadas en el plano: Cartesianas $\{|\mathrm{i}\rangle, |\mathrm{j}\rangle\}$ y polares $\{|u_r\rangle, |u_\theta\rangle\}$. Entonces

$$|a\rangle = a_x |\mathrm{i}\rangle + a_x |\mathrm{j}\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle \ ;$$

- Expresamos una base en términos de la otra como

$$|u_r\rangle = \cos(\theta) |\mathrm{i}\rangle + \mathrm{sen}(\theta) |\mathrm{j}\rangle \ \text{y} \ |u_\theta\rangle = -\mathrm{sen}(\theta) |\mathrm{i}\rangle + \cos(\theta) |\mathrm{j}\rangle \ ,$$

- Entonces $\langle \tilde{\mathrm{e}}^i \, |\mathrm{e}_j\rangle = \tilde{A}^i_j \Rightarrow$

$$\tilde{A}^i_j = \begin{pmatrix} \langle u_r \, |\mathrm{i}\rangle & \langle u_r \, |\mathrm{j}\rangle \\ \langle u_\theta \, |\mathrm{i}\rangle & \langle u_\theta \, |\mathrm{j}\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

y

$$\langle e^i \, |\tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = A^i_j = \begin{pmatrix} \langle \mathrm{i} \, |u_r\rangle & \langle \mathrm{i} \, |u_\theta\rangle \\ \langle \mathrm{j} \, |u_r\rangle & \langle \mathrm{j} \, |u_\theta\rangle \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Entonces, como

$$|a\rangle = a_r |u_r\rangle + a_\theta |u_\theta\rangle \equiv \tilde{a}^1 |\tilde{\mathrm{e}}_1\rangle + \tilde{a}^2 |\tilde{\mathrm{e}}_2\rangle = a_x |\mathrm{i}\rangle + a_x |\mathrm{j}\rangle \equiv a^1 |\mathrm{e}_1\rangle + a^2 |\mathrm{e}_2\rangle$$

tendremos que $\tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j \iff$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \cos(\theta) + a_y \mathrm{sen}(\theta) \\ -a_x \mathrm{sen}(\theta) + a_y \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

con lo cual

$$a_r = a_x \cos(\theta) + a_y \mathrm{sen}(\theta) \quad \text{y} \quad a_\theta = -a_x \mathrm{sen}(\theta) + a_y \cos(\theta) .$$

Del mismo modo $a^i = A^i_j \tilde{a}^j \iff$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r \cos(\theta) - a_\theta \mathrm{sen}(\theta) \\ a_r \mathrm{sen}(\theta) + a_\theta \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

y

$$a_x = a_r \cos(\theta) - a_\theta \mathrm{sen}(\theta) \text{ y } a_y = a_r \mathrm{sen}(\theta) + a_\theta \cos(\theta) .$$

Recapitulando

- Definición de funcional lineal $\mathcal{F}\left[|v\rangle\right] \in \mathbb{C}$ con $\mathcal{F}\left[\alpha\ |v_1\rangle + \beta\ |v_2\rangle\right] \equiv \alpha\ \mathcal{F}\left[|v_1\rangle\right] + \beta\ \mathcal{F}\left[|v_2\rangle\right]$

Recapitulando

- Definición de funcional lineal $\mathcal{F}\left[|v\rangle\right] \in \mathbb{C}$ con $\mathcal{F}\left[\alpha\ |v_1\rangle + \beta\ |v_2\rangle\right] \equiv \alpha\ \mathcal{F}\left[|v_1\rangle\right] + \beta\ \mathcal{F}\left[|v_2\rangle\right]$
- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$

Recapitulando

- Definición de funcional lineal $\mathcal{F}[|v\rangle] \in \mathbb{C}$ con $\mathcal{F}[\alpha\ |v_1\rangle + \beta\ |v_2\rangle] \equiv \alpha\ \mathcal{F}[|v_1\rangle] + \beta\ \mathcal{F}[|v_2\rangle]$
- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$
- Correspondencia entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|$,

- Definición de funcional lineal $\mathcal{F}[|v\rangle] \in \mathbb{C}$ con
$\mathcal{F}[\alpha \ |v_1\rangle + \beta \ |v_2\rangle] \equiv \alpha \ \mathcal{F}[|v_1\rangle] + \beta \ \mathcal{F}[|v_2\rangle]$
- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$
- Correspondencia entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|$,
- **El producto interno entre formas (covectores) y vectores**
$\langle a | b\rangle = \langle b | a\rangle^* = \left(b_i^* \left\langle \mathrm{e}^i \right|\right) \cdot \left(a^j \left|\mathrm{e}_j\right\rangle\right) = b_i^* a^j \delta_j^i = a^i b_i^*$;

Recapitulando

- Definición de funcional lineal $\mathcal{F}[|v\rangle] \in \mathbb{C}$ con $\mathcal{F}[\alpha\ |v_1\rangle + \beta\ |v_2\rangle] \equiv \alpha\ \mathcal{F}[|v_1\rangle] + \beta\ \mathcal{F}[|v_2\rangle]$
- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$
- Correspondencia entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|$,
- **El producto interno entre formas (covectores) y vectores** $\langle a |b\rangle = \langle b |a\rangle^* = \left(b_i^* \langle \mathrm{e}^i|\right) \cdot \left(a^j |\mathrm{e}_j\rangle\right) = b_i^* a^j \delta_j^i = a^i b_i^*$;
- $\langle \mathrm{e}^i |a\rangle = a^j$ las **componentes contravariantes** y $\langle b |\mathrm{e}_i\rangle = b_i$, las **componentes covariantes**

Recapitulando

- Definición de funcional lineal $\mathcal{F}[|v\rangle] \in \mathbb{C}$ con $\mathcal{F}[\alpha\ |v_1\rangle + \beta\ |v_2\rangle] \equiv \alpha\ \mathcal{F}[|v_1\rangle] + \beta\ \mathcal{F}[|v_2\rangle]$
- El $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \cdots, \mathcal{F}_n, \cdots\}$ forman un espacio vectorial dual $\mathbf{V}^\star$
- Correspondencia entre *kets* y *bras*, entre vectores y funcionales lineales (o formas diferenciales): $\lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle \quad \rightleftarrows \quad \lambda_1^* \langle v_1| + \lambda_2^* \langle v_2|$,
- **El producto interno entre formas (covectores) y vectores** $\langle a | b\rangle = \langle b | a\rangle^* = \left(b_i^* \langle \mathrm{e}^i|\right) \cdot \left(a^j |\mathrm{e}_j\rangle\right) = b_i^* a^j \delta_j^i = a^i b_i^*$;
- $\langle \mathrm{e}^i | a\rangle = a^i$ las **componentes contravariantes** y $\langle b | \mathrm{e}_i\rangle = b_i$, las **componentes covariantes**
- **Contravariantes transforman** $a^i = \tilde{a}^j \langle \mathrm{e}^i | \tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = A^i_j \tilde{a}^j$ y $\tilde{a}^i = a^j \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathrm{e}_j\rangle = \tilde{A}^i_j a^j$ con $\tilde{A}^i_j = \left(A^i_j\right)^{-1}$
- **Covariantes transforman** $b_j = \tilde{b}_i \langle \tilde{\mathrm{e}}^i | \mathrm{e}_j\rangle = \tilde{b}_i A^i_j$ y $\tilde{b}_j = b_i \langle \mathrm{e}^i | \tilde{\mathrm{e}}_j\rangle = b_i \tilde{A}^i_j$ y también $\tilde{A}^i_j = \left(A^i_j\right)^{-1}$