

Vectores:

L. A. Núñez

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*

9 de octubre de 2020

Vectores

Escalares y Vectores

Algebra de Vectores

Vectores linealmente independientes

Productos de vectores

- Producto escalar

- Producto vectorial

- Producto triple o mixto

Escalares y Vectores

- ▶ **Escalares:** cantidades las cuales se representan con UN solo número

Escalares y Vectores

- ▶ **Escalares:** cantidades las cuales se representan con UN solo número
- ▶ **Vectores:** requieren de UN número, UNA dirección y UN sentido. Esas características (módulo, dirección y sentido) se preservarán en todos los sistemas de coordenadas. **Los vectores son independientes del sistema de coordenadas.**
 - ▶ Vectores Deslizantes
 - ▶ Vectores Atados

Vectores deslizantes

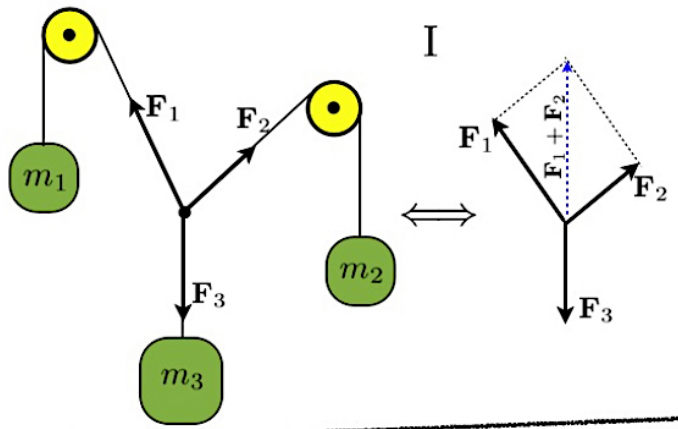


Figura: Vectores deslizantes

Vectores atados

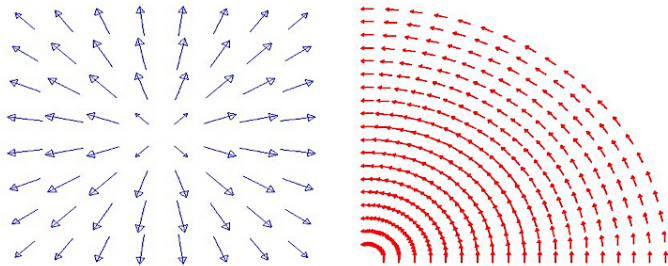


Figura: Vectores atados

Álgebra de Vectores

Las propiedades (obvias) del álgebra de vectores son:

- ▶ La suma de vectores:
 - ▶ es cerrada $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c}$,
 - ▶ es conmutativa $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,
 - ▶ es asociativa $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
 - ▶ tiene un único elemento neutro $\mathbf{0} + \mathbf{a} = \mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$, $\forall \mathbf{a}$,
 - ▶ existe un elemento simétrico $-\mathbf{a}$ (uno para cada vector) tal que $\mathbf{0} = \mathbf{a} - \mathbf{a} \equiv \mathbf{a} + (-\mathbf{a})$,
 - ▶ es distributiva respecto a la multiplicación por números:
 $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$.
- ▶ La multiplicación de números por vectores:
 - ▶ es conmutativa $\mathbf{a}\alpha = \alpha\mathbf{a}$,
 - ▶ es asociativa $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$,
 - ▶ es distributiva $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$.

Vectores linealmente independientes

- ▶ Tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son *linealmente independientes* en \mathbb{R}^3 si se cumple que:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Vectores linealmente independientes

- ▶ Tres vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ son *linealmente independientes* en \mathbb{R}^3 si se cumple que:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

- ▶ Si no se cumple lo anterior diremos que uno de los vectores será *linealmente dependiente* y por lo tanto se podrá expresar como combinación lineal de los otros dos. Si por ejemplo $\gamma \neq 0$, entonces:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \bar{\alpha} \mathbf{a} + \bar{\beta} \mathbf{b}.$$

Vectores linealmente independientes

- ▶ Tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} son *linealmente independientes* en \mathbb{R}^3 si se cumple que:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

- ▶ Si no se cumple lo anterior diremos que uno de los vectores será *linealmente dependiente* y por lo tanto se podrá expresar como combinación lineal de los otros dos. Si por ejemplo $\gamma \neq 0$, entonces:

$$\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = -\frac{\alpha}{\gamma} \mathbf{a} - \frac{\beta}{\gamma} \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c} = \bar{\alpha} \mathbf{a} + \bar{\beta} \mathbf{b}.$$

- ▶ Cuando un vector \mathbf{c} se pueda expresar en términos de dos vectores linealmente independientes, \mathbf{a} y \mathbf{b} , por ejemplo: $\mathbf{c} = \xi^1 \mathbf{a} + \xi^2 \mathbf{b}$, diremos que \mathbf{a} y \mathbf{b} forman una base para todos los vectores coplanares a éstos.

Producto escalar

Denominaremos producto escalar de dos vectores **a** y **b** a un escalar cuyo valor será igual al producto de los módulos multiplicado por el coseno del ángulo que ellos forman:

$$\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} .$$

Consecuencias del producto escalar

- *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo.

Consecuencias del producto escalar

- ▶ *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo.
- ▶ *El producto escalar es conmutativo:* $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,

Consecuencias del producto escalar

- ▶ *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo.
- ▶ *El producto escalar es conmutativo:* $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- ▶ *El producto escalar es distributivo:* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.

Consecuencias del producto escalar

- ▶ *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo.
- ▶ *El producto escalar es conmutativo:* $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- ▶ *El producto escalar es distributivo:* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- ▶ *La multiplicación por un número:* $\bar{\zeta} = \alpha \zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$.

Consecuencias del producto escalar

- ▶ *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo.
- ▶ *El producto escalar es conmutativo:* $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- ▶ *El producto escalar es distributivo:* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- ▶ *La multiplicación por un número:* $\bar{\zeta} = \alpha \zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$.
- ▶ *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$,
 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle})^2 \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow$
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, ya que: $0 \leq \cos^2(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} \leq 1$.

Consecuencias del producto escalar

- ▶ *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo.
- ▶ *El producto escalar es conmutativo:* $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- ▶ *El producto escalar es distributivo:* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- ▶ *La multiplicación por un número:* $\bar{\zeta} = \alpha \zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$.
- ▶ *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$,
 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle})^2 \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow$
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, ya que: $0 \leq \cos^2(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} \leq 1$.
- ▶ *El teorema del coseno.* Si $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow$
 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta),$

Consecuencias del producto escalar

- ▶ *El producto escalar de un vector consigo mismo, es positivo:*
 $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \geq 0$, y sólo será nulo si \mathbf{a} es el vector nulo.
- ▶ *El producto escalar es conmutativo:* $\zeta = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$,
- ▶ *El producto escalar es distributivo:* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.
- ▶ *La multiplicación por un número:* $\bar{\zeta} = \alpha \zeta = |\alpha| (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\alpha \mathbf{b}) = |\alpha \mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = |\mathbf{a}| |\alpha \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$.
- ▶ *Desigualdad de Cauchy-Schwarz:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$,
 $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle})^2 \Rightarrow (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \Leftrightarrow$
 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$, ya que: $0 \leq \cos^2(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} \leq 1$.
- ▶ *El teorema del coseno.* Si $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow$
 $\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \Rightarrow |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)$,
- ▶ *Perpendicularidad:* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = \frac{\pi}{2}$
 $\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = 0$.

Producto vectorial

el producto vectorial tiene como resultado otro vector: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (realmente un pseudovector) con:

- ▶ El módulo de \mathbf{c} , será: $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$. El módulo de \mathbf{c} representa el área del paralelogramo cuyos lados están formados por \mathbf{a} y \mathbf{b} .
- ▶ tendrá como dirección la perpendicular al plano que forman \mathbf{a} y \mathbf{b} , y con sentido positivo cuando la multiplicación de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ corresponda al sentido antihorario.
- ▶ *El producto vectorial es anticonmutativo.* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
- ▶ *El producto vectorial es distributivo respecto a la suma.*
 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
- ▶ *Dos vectores serán colineales si su producto vectorial se anula.*

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Rightarrow \theta_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = 0 \Rightarrow |\mathbf{c}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} = 0.$$

Si el módulo del vector es cero, obvio que es el vector nulo.

Ahora bien, también de aquí deducimos que:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Producto triple o mixto

El número (pseudoescalar) que proviene de la multiplicación:

$$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}| |(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}.$$

- ▶ *Representa el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} . Donde $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ es el área de la base y la altura la proyección del vector \mathbf{c} sobre la perpendicular al plano de la base que es, $|\mathbf{c}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c}, \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rangle}$.*
- ▶ *Es cíclico respecto a sus factores.*
 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}.$
- ▶ *Se anula cuando se repite alguno de sus factores.*
 $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{b} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0.$
Claramente, si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \Rightarrow (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0.$
- ▶ *Si los tres vectores \mathbf{a} , \mathbf{b} y \mathbf{c} son coplanares (linealmente dependientes) entonces: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 0.$*
- ▶ Tres vectores $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \neq 0$, son linealmente independientes y forman una base levógira (contraria al giro de las manecillas del reloj) si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} < 0$ y dextrógira (la convencional base de la mano derecha) si $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} > 0.$