Vectores e índices

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

19 de octubre de 2020

1. Vectores e índices
2. Vectores e índices
   - Convención de Einstein
   - Componetes de tensores e índices libres
   - Kronecker y Levi-civita 1/2
3. Algebra de Vectores e índices
4. Rotación de coordenadas
5. Transformación general de coordenadas de coordenadas
6. Escalares, pseudoescalares, vectores y pseudovectores
7. Pseudovectores y transformación de coordenadas

Convención de Einstein

El convenio de suma de Einstein es

1. Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:
$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^{3} a^m\mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m\mathbf{e}_m = a^i\mathbf{e}_i$.

Convención de Einstein

El convenio de suma de Einstein es

1. Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:
   $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^{3} a^m\mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m\mathbf{e}_m = a^i\mathbf{e}_i\,.$
2. Los índices repetidos son mudos (no importa las letras que los etiquete) y representan suma. Así:
   $$k^j a_j = k^m a_m = k^1 a_1 + k^2 a_2 + k^3 a_3 = b\,.$$
   La posición de los índices (arriba y abajo) solo tiene sentido estético y solo así indican suma. Más adelante veremos que representan cantidades distintas.

El convenio de suma de Einstein es

1. Los índices repetidos (arriba y abajo) indicarán suma por los valores que tomen los índices. Las componentes de los vectores tendrán índices arriba y los vectores base abajo:
$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \sum_{m=1}^{3} a^m\mathbf{e}_m \Leftrightarrow \mathbf{a} = a^m\mathbf{e}_m = a^i\mathbf{e}_i\,.$
2. Los índices repetidos son mudos (no importa las letras que los etiquete) y representan suma. Así:
$$k^j a_j = k^m a_m = k^1 a_1 + k^2 a_2 + k^3 a_3 = b\,.$$
La posición de los índices (arriba y abajo) solo tiene sentido estético y solo así indican suma. Más adelante veremos que representan cantidades distintas.
3. Llamaremos contracción cuando sumamos respecto a un par de índices, vale decir:
$$A_i^j \;\Rightarrow\; \sum_i A_i^i = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 \;\Rightarrow\; A_i^i = A_1^1 + A_2^2 + A_3^3\,.$$

Componetes de tensores e índices libres

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores. Son arreglos bidimensionales (tridimensionales, tetradimensionales, según el número de índices). Es claro que la contracción de índices convierte un conjunto de números $(i \times j) \to 1$, en un sólo número.

- Las cantidades con dos o más índices las llamaremos componentes de tensores. Son arreglos bidimensionales (tridimensionales, tetradimensionales, según el número de índices). Es claro que la contracción de índices convierte un conjunto de números $(i \times j) \to 1$, en un sólo número.
- Los índices libres (aquellos que no están sumados) indican el número de objetos disponibles y deben mantenerse a ambos lados de la ecuación. Por ejemplo:

$$B_i = K_i^k A_k \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} K_1^1 A_1 + K_1^2 A_2 + K_1^3 A_3 = B_1 \\ \\ K_2^1 A_1 + K_2^2 A_2 + K_2^3 A_3 = B_2 \\ \\ K_3^1 A_1 + K_3^2 A_2 + K_3^3 A_3 = B_1 \end{array} \right.$$

con lo cual $B_i = K_i^k A_k$ representa 3 ecuaciones. La operación $B_{ij} = K_i^k A_{kj}$ representa 9.

Kronecker y Levi-civita 1/2

- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$, y es nula en los otros casos:

$$K_{ij}^k \; \delta_k^i = K_{kj}^k = K_{ij}^i = K_{1j}^1 + K_{2j}^2 + K_{3j}^3 \,.$$

Kronecker y Levi-civita 1/2

- La delta de Kronecker es un objeto matemático de dos índices, representa $\delta_i^k = 1$ si $i = k$, y es nula en los otros casos:

$$K_{ij}^k \ \delta_k^i = K_{kj}^k = K_{ij}^i = K_{1j}^1 + K_{2j}^2 + K_{3j}^3 \, .$$

- El símbolo de permutación de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} = \left\{ \begin{array}{rl} +1 & \text{cuando } \{(i,j,k) = (1,2,3)\,;(3,1,2)\,;(2,3,1)\} \\ & \ \text{permutación cíclica} \\ -1 & \text{cuando } \{(i,j,k) = (1,3,2)\,;(3,2,1)\,;(2,1,3)\} \\ & \ \text{permutación impar o anticíclica} \\ 0 & \text{cuando } \{i = j\,, \quad i = k \quad \wedge \quad j = k\} \end{array} \right.$$

Kronecker y Levi-civita 2/2

- Con lo cual:

$$c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \;\Rightarrow\; \left\{ \begin{array}{l} c^1 = \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \\ c^2 = \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \\ c^3 = \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \right.$$

- Con lo cual:

$$
c^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k \;\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c^1 = \varepsilon^{123} a_2 b_3 + \varepsilon^{132} a_3 b_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ \\ c^2 = \varepsilon^{231} a_3 b_1 + \varepsilon^{213} a_1 b_3 = a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ \\ c^3 = \varepsilon^{312} a_1 b_2 + \varepsilon^{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \right.
$$

- Algunas propiedades de la delta de Kronecker y del símbolo de permutación de Levi-Civita son:

$$
\begin{aligned}
\delta^j_j &= 3\,, \\
\varepsilon_{jkm} \varepsilon^{ilm} &= \delta^i_j \delta^l_k - \delta^i_k \delta^l_j = \delta^i_j \delta^l_k - \delta^l_j \delta^i_k\,, \\
\varepsilon_{jmn} \varepsilon^{imn} &= 2\delta^i_j\,, \\
\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} &= 6\,.
\end{aligned}
$$

Algebra de Vectores e índices

- La suma: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = a^i \mathbf{e}_i + b^i \mathbf{e}_i = \left(a^i + b^i\right)\mathbf{e}_i = c^i \mathbf{e}_i$
  $\Rightarrow c^i = a^i + b^i$ con $i = 1, 2, 3.$

- La suma: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=a^i\mathbf{e}_i+b^i\mathbf{e}_i=\left(a^i+b^i\right)\mathbf{e}_i=c^i\mathbf{e}_i$
  $\Rightarrow c^i=a^i+b^i$ con $i=1,2,3.$
- El producto escalar : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\mathbf{ab}}=a^i b_i$ con $i=1,2,3.$

- La suma: $\mathbf{a}+\mathbf{b}=a^i\mathbf{e}_i+b^i\mathbf{e}_i=\left(a^i+b^i\right)\mathbf{e}_i=c^i\mathbf{e}_i$
  $\Rightarrow c^i=a^i+b^i$ con $i=1,2,3.$
- El producto escalar : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\mathbf{ab}}=a^i b_i$ con $i=1,2,3.$
- producto vectorial se puede expresar como: $c^i=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^i=\varepsilon^{ijk}a_jb_k$ con $i,j,k=1,2,3.$

- La suma: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = a^i\mathbf{e}_i + b^i\mathbf{e}_i = \left(a^i + b^i\right)\mathbf{e}_i = c^i\mathbf{e}_i$
  $\Rightarrow c^i = a^i + b^i$ con $i = 1,2,3.$
- El producto escalar : $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\mathbf{ab}} = a^i b_i$ con $i = 1,2,3.$
- producto vectorial se puede expresar como: $c^i = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})^i = \varepsilon^{ijk}a_j b_k$ con $i,j,k = 1,2,3.$
- multiplicación mixta: $\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\,|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|\cos(\theta)_{\langle\mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rangle} =$
  $$c^i\varepsilon_{ijk}\, a^j b^k = \varepsilon_{ijk}\, c^i a^j b^k = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y su base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, si rotamos el sistema de coordenadas un ángulo ϕ alrededor del eje z tendremos un nuevo sistema de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y una nueva base $\{\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}\}$.

- La regla de transformación que relaciona ambos sistemas de coordenadas es:

$$\left\{\begin{array}{ccl} x & = & \tilde{x}\cos(\phi) - \tilde{y}\,\mathrm{sen}(\phi) \\ y & = & \tilde{x}\,\mathrm{sen}(\phi) + \tilde{y}\cos(\phi) \\ z & = & \tilde{z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccl} \tilde{x} & = & x\cos(\phi) + y\,\mathrm{sen}(\phi) \\ \tilde{y} & = & -x\,\mathrm{sen}(\phi) + y\cos(\phi) \\ \tilde{z} & = & z \end{array}\right.$$

Rotación de coordenadas 1/2

Consideremos un sistema de coordenadas cartesiano (x, y, z) y su base canónica $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, si rotamos el sistema de coordenadas un ángulo ϕ alrededor del eje z tendremos un nuevo sistema de coordenadas $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y una nueva base $\{\tilde{\mathbf{i}}, \tilde{\mathbf{j}}, \tilde{\mathbf{k}}\}$.

- La regla de transformación que relaciona ambos sistemas de coordenadas es:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \tilde{x}\cos(\phi) - \tilde{y}\,\mathrm{sen}(\phi) \\ y & = & \tilde{x}\,\mathrm{sen}(\phi) + \tilde{y}\cos(\phi) \\ z & = & \tilde{z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \tilde{x} & = & x\cos(\phi) + y\,\mathrm{sen}(\phi) \\ \tilde{y} & = & -x\,\mathrm{sen}(\phi) + y\cos(\phi) \\ \tilde{z} & = & z \end{array}\right.$$

- Las bases transformarán como:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{\mathbf{i}} & = & \mathbf{i}\cos(\phi) + \mathbf{j}\,\mathrm{sen}(\phi) \\ \tilde{\mathbf{j}} & = & -\mathbf{i}\,\mathrm{sen}(\phi) + \mathbf{j}\cos(\phi) \\ \tilde{\mathbf{k}} & = & \mathbf{k} \end{array}\right.$$

- Diremos que un triplete de números $\left(a^1, a^2, a^3\right)$ definen las componente de un vector $\mathbf{a} = a^1\mathbf{i} + a^2\mathbf{j} + a^3\mathbf{k}$ si estas cantidades transforman bajo la rotación de la siguiente manera:
  $\tilde{a}_1 = a_1 \cos(\phi) + a_2 \operatorname{sen}(\phi)\,, \quad \tilde{a}_2 = -a_1 \operatorname{sen}(\phi) + a_2 \cos(\phi)$
  $\tilde{a}_3 = a_3\,.$
- Al usar la notación de índices podemos escribir las ecuaciones de transformación de coordenadas así:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{x} & = & x\cos(\phi) + y \operatorname{sen}(\phi) \\ \tilde{y} & = & -x \operatorname{sen}(\phi) + y\cos(\phi) \\ \tilde{z} & = & z \end{array}\right. \quad \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \tilde{x}^1 & = & A^1_1 x^1 + A^1_2 x^2 + A^1_3 x^3 \\ \tilde{x}^2 & = & A^2_1 x^1 + A^2_2 x^2 + A^2_3 x^3 \\ \tilde{x}^3 & = & A^3_1 x^1 + A^3_2 x^2 + A^3_3 x^3 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \tilde{x}^i = \tilde{A}^i_j x^j\,, \text{ con: } i,j = 1,2,3.$$

Es decir

$$\tilde{A}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\,,$$

- como la transformación de coordenadas es invertible, se tiene que: $\tilde{x}^i = \tilde{A}^i_j x^j \Leftrightarrow x^j = A^j_i \tilde{x}^i$, con: $A^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}$, y $\tilde{A}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$. Entonces, $\tilde{A}^i_k A^j_i = \delta^j_k$.

- como la transformación de coordenadas es invertible, se tiene que: $\tilde{x}^i = \tilde{A}^i_j x^j \Leftrightarrow x^j = A^j_i \tilde{x}^i$, con: $A^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}$, y $\tilde{A}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$. Entonces, $\tilde{A}^i_k A^j_i = \delta^j_k$.
- Por lo tanto, las componentes de un vector transformarán de la manera siguiente:

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} a^j \equiv \tilde{A}^i_j a^j \quad \Leftrightarrow \quad a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} a^j \equiv A^i_j a^j \quad .$$

- como la transformación de coordenadas es invertible, se tiene que: $\tilde{x}^i = \tilde{A}^i_j x^j \Leftrightarrow x^j = A^j_i \tilde{x}^i$, con: $A^j_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}$, y $\tilde{A}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}$. Entonces, $\tilde{A}^i_k A^j_i = \delta^j_k$.
- Por lo tanto, las componentes de un vector transformarán de la manera siguiente:

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} a^j \equiv \tilde{A}^i_j a^j \quad \Leftrightarrow \quad a^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} a^j \equiv A^i_j a^j \quad .$$

- y en general un objeto con varios índices (componentes de un tensor) transformará como:

$$\tilde{T}^{ij} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m} \; T^{km} \Longleftrightarrow T^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^m} \; \tilde{T}^{km} \, , \text{ con: } \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l} = \delta^i_l \, ,$$

- Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector: $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \rightarrow a^1(-\mathbf{e}_1) + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \equiv (-a^1)\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$.
  Los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores.

- Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector: $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \rightarrow a^1(-\mathbf{e}_1) + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \equiv (-a^1)\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$.
  Los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores.
- Si dos vectores polares **a** y **b**, son transformados bajo reflexión como en el caso anterior, entonces un vector axial **c** transformará como: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\tilde{\mathbf{c}}$. Es decir, los vectores axiales o pseudovectores cambian de signo bajo reflexión de los vectores que los generan.

- Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector: $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \to a^1(-\mathbf{e}_1) + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \equiv (-a^1)\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$.
  Los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores.
- Si dos vectores polares $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, son transformados bajo reflexión como en el caso anterior, entonces un vector axial $\mathbf{c}$ transformará como: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \to \tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\tilde{\mathbf{c}}$. Es decir, los vectores axiales o pseudovectores cambian de signo bajo reflexión de los vectores que los generan.
- De igual manera $d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ queda invariante bajo la transformación de reflexión, mientras que $V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ cambia de signo. Llamaremos escalar a d y pseudoescalar a V.

- Una reflexión en el plano yz se puede representar como un cambio de signo en la componente x del vector: $a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \rightarrow a^1(-\mathbf{e}_1) + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \equiv (-a^1)\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$.
  Los objetos que transforman de esta manera bajo reflexión son vectores polares o simplemente vectores.
- Si dos vectores polares $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$, son transformados bajo reflexión como en el caso anterior, entonces un vector axial $\mathbf{c}$ transformará como: $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \rightarrow \tilde{\mathbf{a}} \times \tilde{\mathbf{b}} = -\tilde{\mathbf{c}}$. Es decir, los vectores axiales o pseudovectores cambian de signo bajo reflexión de los vectores que los generan.
- De igual manera $d = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ queda invariante bajo la transformación de reflexión, mientras que $V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ cambia de signo. Llamaremos escalar a d y pseudoescalar a V.
- Pseudovectores: la cantidad de momento angular, $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$; el torque $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ y el campo de inducción magnética, $\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$.

- En general, podemos representar la reflexión (**??**) bajo el esquema que presentamos en (10), es decir, como transformaciones del tipo:

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_x \\ \tilde{a}_y \\ \tilde{a}_z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} .$$

donde: $\tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j$, donde $\tilde{A}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es la matriz de transformación de coordenadas.

- Las componentes de vectores y pseudovectores transforman:

si: $\tilde{A}^i_j = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \tilde{a}^i = \tilde{A}^i_j a^j \,, & \text{vectores,} \\ & \\ \tilde{p}^i = \det|\tilde{A}|\tilde{A}^i_j p^j \,, & \text{pseudovectores .} \end{array} \right.$

$\det|\tilde{A}| = 1$ *transformaciones propias* y $\det|\tilde{A}| = -1$ *transformaciones impropias*,