Bases y componentes de vectores

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

19 de octubre de 2020

Agenda

Bases y componentes

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\{a^1, a^2, a^3\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\left\{a^1, a^2, a^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.

Bases y componentes

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\{a^1, a^2, a^3\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.
- Utilizamos la convención dextrógira : $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y construimos el conjunto de vectores unitarios $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

- Con los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ podemos construir un sistema (oblicuo en general): $\mathbf{a} = a^1\mathbf{w}_1 + a^2\mathbf{w}_2 + a^3\mathbf{w}_3$, donde las cantidades $\left\{a^1, a^2, a^3\right\}$ son números (no son escalares) que representan las componentes del vector $\mathbf{a}$ a lo largo de cada uno de los vectores base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
- Existe sistemas de vectores base ortogonales (o mejor ortonormales), es decir los vectores base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ son perpendiculares entre si.
- Utilizamos la convención dextrógira : $(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 > 0$, y construimos el conjunto de vectores unitarios $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$: $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.
- Si a cada punto P del espacio asociamos un radio vector $\mathbf{r}(P) \equiv \overrightarrow{OP}$ que une el origen de coordenadas con el punto P entonces los números $\left\{x^1, x^2, x^3\right\}$ son las componentes de $\mathbf{r}(P)$. Es decir $\mathbf{r}(P) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$.

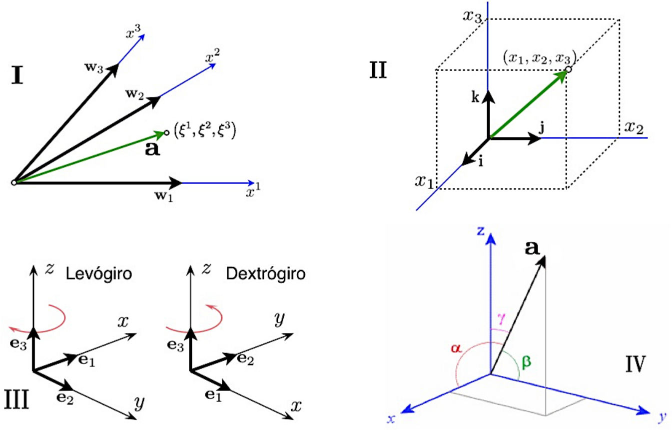

Figura: Sistemas coordenados

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}\,(P) = x^1\ \mathbf{e}_1 + x^2\ \mathbf{e}_2 + x^3\ \mathbf{e}_3\,.$

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector: $\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$ y $\mathbf{r}(P) = x^1\, \mathbf{e}_1 + x^2\, \mathbf{e}_2 + x^3\, \mathbf{e}_3$.
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir $|\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^+ (x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha \mathbf{a} = \left(\alpha a^1\right) \mathbf{e}_1 + \left(\alpha a^2\right) \mathbf{e}_2 + \left(\alpha a^3\right) \mathbf{e}_3 \;\Rightarrow$ $|\alpha \mathbf{a}| = \alpha \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$.

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}\left(P\right) = x^1\ \mathbf{e}_1 + x^2\ \mathbf{e}_2 + x^3\ \mathbf{e}_3\,.$
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir $|\mathbf{r}\left(P\right)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^{+}(x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha\mathbf{a} = \left(\alpha a^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\alpha a^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\alpha a^3\right)\mathbf{e}_3 \;\Rightarrow$ $|\alpha\mathbf{a}| = \alpha\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\,.$
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2}}\,,$

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector: $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(P) = x^1\ \mathbf{e}_1 + x^2\ \mathbf{e}_2 + x^3\ \mathbf{e}_3\,.$
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir $|\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^+(x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha\mathbf{a} = \left(\alpha a^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\alpha a^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\alpha a^3\right)\mathbf{e}_3 \ \Rightarrow$ $|\alpha\mathbf{a}| = \alpha\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\,.$
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}}\,,$

Sistemas coordenados

- Representan el sistema de coordenadas ortonormal como: $\mathbf{i} \equiv \mathbf{e}_1, \mathbf{j} \equiv \mathbf{e}_2$ y $\mathbf{k} \equiv \mathbf{e}_3$ y utilizaremos los superíndices $1, 2, 3$ para indicar las componentes del vector:
$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{r}(P) = x^1\,\mathbf{e}_1 + x^2\,\mathbf{e}_2 + x^3\,\mathbf{e}_3\,.$
- El módulo del vector: $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$, es decir $|\mathbf{r}(P)| = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^+ (x^3)^2}$ y la multiplicación por un número será: $\alpha\mathbf{a} = \left(\alpha a^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(\alpha a^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(\alpha a^3\right)\mathbf{e}_3 \;\Rightarrow$
$|\alpha\mathbf{a}| = \alpha\sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\,.$
- Un vector unitario: $\hat{\mathbf{u}}_a = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3}{\sqrt{(a^1)^2+(a^2)^2+(a^3)^2}}$,
- Cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\;\mathbf{i} + \cos(\beta)\;\mathbf{j} + \cos(\gamma)\;\mathbf{k}$.

- Sumas y restas de vectores
$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\left(a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3\right)+\left(b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3\right)=$
$\left(a^1+b^1\right)\mathbf{e}_1+\left(a^2+b^2\right)\mathbf{e}_2+\left(a^3+b^3\right)\mathbf{e}_3\,,$
- tres vectores: $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3\,,\mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{c}=c^1\mathbf{e}_1+c^2\mathbf{e}_2+c^3\mathbf{e}_3$, serán *linealmente independientes* si se cumple que: $\alpha\ \mathbf{a}+\beta\ \mathbf{b}+\gamma\ \mathbf{c}=\mathbf{0}\ \Rightarrow\alpha=\beta=\gamma=0\,.$ para la base canónica: $\mathbf{e}_1\equiv(1,0,0)\,,\mathbf{e}_2\equiv(0,1,0)\,,\mathbf{e}_3\equiv(0,0,1)$
$\mathbf{0}=\alpha\left(a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+a^3\mathbf{e}_3\right)+\beta\left(b^1\mathbf{e}_1+b^2\mathbf{e}_2+b^3\mathbf{e}_3\right)+$
$\gamma\left(c^1\mathbf{e}_1+c^2\mathbf{e}_2+c^3\mathbf{e}_3\right)\ \Rightarrow$

$$\begin{array}{c}\alpha a^1+\beta b^1+\gamma c^1=0\\ \alpha a^2+\beta b^2+\gamma c^2=0\\ \alpha a^3+\beta b^3+\gamma c^3=0\end{array}\ \Rightarrow\left|\begin{array}{ccc}a^1 & b^1 & c^1\\ a^2 & b^2 & c^2\\ a^3 & b^3 & c^3\end{array}\right|\neq 0\,.\ \Rightarrow$$

$$a^1\left(b^2c^3-b^3c^2\right)+a^2\left(b^3c^1-b^1c^3\right)+a^3\left(b^1c^2-b^2c^1\right)\neq 0$$

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
  - *Ortogonalidad:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.
  - *El Teorema del coseno y Pitágoras:* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \ \Rightarrow \ \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \ \Rightarrow \ |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}$,

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
  - *Ortogonalidad:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
  - *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*:
    $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.
  - *El Teorema del coseno y Pitágoras:*
    $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \;\Rightarrow\; |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b}\rangle}$,
- producto vectorial en componentes
  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right) \mathbf{e}_1 + \left(a^3 b^1 - a^1 b^3\right) \mathbf{e}_2 + \left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right) \mathbf{e}_3$,

- El **producto escalar** de dos vectores en una base cartesiana $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que es una base ortonormal: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3$,
    - *Ortogonalidad:* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$
    - *Desigualdad de Cauchy-Schwarz*: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3 \leq \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}\sqrt{(b^1)^2 + (b^2)^2 + (b^3)^2} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|$.
    - *El Teorema del coseno y Pitágoras:* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \;\Rightarrow\; |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{a},\mathbf{b} \rangle}$,
- producto vectorial en componentes $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(a^2 b^3 - a^3 b^2\right) \mathbf{e}_1 + \left(a^3 b^1 - a^1 b^3\right) \mathbf{e}_2 + \left(a^1 b^2 - a^2 b^1\right) \mathbf{e}_3$,
- Triple producto mixto:

$$V = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{c}|\,|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \cos(\theta)_{\langle \mathbf{c},\mathbf{a}\times\mathbf{b} \rangle} = \begin{vmatrix} c^1 & c^2 & c^3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix} .$$

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
   cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$
3. Algebra de vectores y componentes: Suma
   $\left(a^1 + b^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\mathbf{e}_3$,
   Independencia lineal
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
   cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$
3. Algebra de vectores y componentes: Suma
   $\left(a^1 + b^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\mathbf{e}_3$,
   Independencia lineal
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$
4. Producto escalar $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3$,

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
   cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$
3. Algebra de vectores y componentes: Suma
   $\left(a^1 + b^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\mathbf{e}_3\,,$
   Independencia lineal
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$
4. Producto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3\,,$
5. Producto vectorial
   $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(a^2b^3 - a^3b^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^3b^1 - a^1b^3\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^1b^2 - a^2b^1\right)\mathbf{e}_3\,,$

Recapitulando

Expresamos las operaciones vectoriales en componentes.

1. Sistemas coordenados: oblicuos, ortogonales, dextrógiros y levógira
2. Componentes coordenadas $\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3$, módulo $|\mathbf{a}| = \sqrt{(a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2}$,
   cosenos directores $\hat{\mathbf{u}}_a = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = cos(\alpha)\ \mathbf{i} + \cos(\beta)\ \mathbf{j} + \cos(\gamma)\ \mathbf{k}$
3. Algebra de vectores y componentes: Suma
   $\left(a^1 + b^1\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^2 + b^2\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^3 + b^3\right)\mathbf{e}_3\,,$
   Independencia lineal
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$
4. Producto escalar $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a^1b^1 + a^2b^2 + a^3b^3\,,$
5. Producto vectorial
   $\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(a^2b^3 - a^3b^2\right)\mathbf{e}_1 + \left(a^3b^1 - a^1b^3\right)\mathbf{e}_2 + \left(a^1b^2 - a^2b^1\right)\mathbf{e}_3\,,$
6. Triple producto mixto $V = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$
   $a^1\left(b^2c^3 - b^3c^2\right) + a^2\left(b^3c^1 - b^1c^3\right) + a^3\left(b^1c^2 - b^2c^1\right) \neq 0$