Aproximación de Funciones

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

3 de noviembre de 2020

Agenda: Aproximación de Funciones

Complementos Ortogonales

- Si $\left|\bar{v}_i\right\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\left\langle s_k \middle| \bar{v}_i \right\rangle = 0 \quad \forall \ \left|s_k\right\rangle \in \mathbf{S}$,

Complementos Ortogonales

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k |\bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \ |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,
- Dado $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle, \ |v_2\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces, $\forall \ |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$ y esta descomposición es única $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp}, \quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$, y adicionalmente, $\| |v_k\rangle \|^2 = \| |s_k\rangle \|^2 + \left\| |s_k\rangle^{\perp} \right\|^2$.

Complementos Ortogonales

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k | \bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \ |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,
- Dado $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle, \ |v_2\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces, $\forall \ |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$ y esta descomposición es única $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp}, \quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$, y adicionalmente, $\| |v_k\rangle \|^2 = \| |s_k\rangle \|^2 + \left\| |s_k\rangle^{\perp} \right\|^2$.
- Si $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ de dimensión finita y $|v_k\rangle \in \mathbf{V}$ y $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \Rightarrow$ $|s_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_k | \mathrm{e}_i\rangle |\mathrm{e}_i\rangle$, será la proyección de $|v_k\rangle$ en $\mathbf{S}$.

Complementos Ortogonales

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k |\bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \ |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,
- Dado $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle \,, \ |v_2\rangle \,, \cdots, |v_n\rangle \,, \cdots\}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces, $\forall \ |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$ y esta descomposición es única $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp} \,, \quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$, y adicionalmente, $\| |v_k\rangle \|^2 = \| |s_k\rangle \|^2 + \left\| |s_k\rangle^{\perp} \right\|^2$.
- Si $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ de dimensión finita y $|v_k\rangle \in \mathbf{V}$ y $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \Rightarrow$ $|s_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_k |\mathrm{e}_i\rangle |\mathrm{e}_i\rangle$, será la proyección de $|v_k\rangle$ en $\mathbf{S}$.
- Dado un vector $|x\rangle \in \mathbf{V}$ y un subespacio de $\mathbf{V}$ con dimensión finita, $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, entonces la distancia de $|x\rangle$ a $\mathbf{S}^m$ es la norma de la componente de $|x\rangle$, perpendicular a $\mathbf{S}^m$.

- Si $|\bar{v}_i\rangle \in \mathbf{V}$ es ortogonal a $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, si $\langle s_k |\bar{v}_i\rangle = 0 \quad \forall \ |s_k\rangle \in \mathbf{S}$,
- Dado $\mathbf{V} : \{|v_1\rangle , \ |v_2\rangle , \cdots , |v_n\rangle , \cdots\}$ y $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ con $\dim \mathbf{S} = m$. Entonces, $\forall \ |v_k\rangle \in \mathbf{V}$ puede expresarse como la suma de dos vectores $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \wedge \ |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$ y esta descomposición es única $|v_k\rangle = |s_k\rangle + |s_k\rangle^{\perp} , \quad |s_k\rangle \in \mathbf{S} \quad \wedge \quad |s_k\rangle^{\perp} \in \mathbf{S}^{\perp}$, y adicionalmente, $\| |v_k\rangle \|^2 = \| |s_k\rangle \|^2 + \left\| |s_k\rangle^{\perp} \right\|^2$.
- Si $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ de dimensión finita y $|v_k\rangle \in \mathbf{V}$ y $|s_k\rangle \in \mathbf{S} \ \Rightarrow$ $|s_k\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle v_k |\mathrm{e}_i\rangle |\mathrm{e}_i\rangle$, será la proyección de $|v_k\rangle$ en $\mathbf{S}$.
- Dado un vector $|x\rangle \in \mathbf{V}$ y un subespacio de $\mathbf{V}$ con dimensión finita, $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, entonces la distancia de $|x\rangle$ a $\mathbf{S}^m$ es la norma de la componente de $|x\rangle$, perpendicular a $\mathbf{S}^m$.
- Más aún esa distancia será mínima y $|x\rangle_{\mathbf{S}^m}$ la proyección de $|x\rangle$, en $\mathbf{S}^m$ será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|x\rangle$ y, por la mejor aproximación.

- Sea $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle\,,\cdots,|v_n\rangle\,,\cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, $\mathbf{V}$, y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m$, $|s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras $\||v_i\rangle - |s_i\rangle\| \leq \||v_i\rangle - |t_i\rangle\| \ \forall \ |t_i\rangle \in \mathbf{S}$.

- Sea $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle\,,\cdots,|v_n\rangle\,,\cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, $\mathbf{V}$, y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m$, $|s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras $\||v_i\rangle - |s_i\rangle\| \leq \||v_i\rangle - |t_i\rangle\| \ \forall \ |t_i\rangle \in \mathbf{S}$.
- Considemos funciones continuas, reales de variable real, en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, mediante funciones trigonométricas y con el producto interno definido por: $\langle f|\, g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$.

Aproximación de funciones

- Sea $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle, \cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, $\mathbf{V}$, y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m$, $|s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras $\| |v_i\rangle - |s_i\rangle \| \leq \| |v_i\rangle - |t_i\rangle \| \ \forall \ |t_i\rangle \in \mathbf{S}$.
- Considemos funciones continuas, reales de variable real, en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, mediante funciones trigonométricas y con el producto interno definido por: $\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ g(x)$.
- Para ese espacio vectorial tenemos una base ortogonal definida por $|\mathrm{e}_0\rangle = 1$, $|\mathrm{e}_{2n-1}\rangle = \cos(nx)$ y $|\mathrm{e}_{2n}\rangle = \mathrm{sen}\ (nx)$,

Aproximación de funciones

- Sea $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\ |v_3\rangle\,,\cdots,|v_n\rangle\,,\cdots\}$ un espacio euclidiano de dimensión infinita, $\mathbf{V}$, y un subespacio $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, con dimensión finita $\dim \mathbf{S} = m$, y sea un elemento $|v_i\rangle \in \mathbf{V}$. La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m, |s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$. En otras palabras $\||v_i\rangle - |s_i\rangle\| \leq \||v_i\rangle - |t_i\rangle\| \ \forall \ |t_i\rangle \in \mathbf{S}$.
- Considemos funciones continuas, reales de variable real, en $[0, 2\pi]$, $\mathcal{C}^{\infty}_{[0,2\pi]}$, mediante funciones trigonométricas y con el producto interno definido por: $\langle f|\, g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$.
- Para ese espacio vectorial tenemos una base ortogonal definida por $|\mathrm{e}_0\rangle = 1,\ |\mathrm{e}_{2n-1}\rangle = \cos(nx)$ y $|\mathrm{e}_{2n}\rangle = \mathrm{sen}\ (nx)$,
- Cualquier función definida en $[0, 2\pi]$ puede expresarse como

$$|f\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} C_i\,|\mathrm{e}_i\rangle\,, = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(kx) + b_k\mathrm{sen}\ (kx)\right]\ ,$$

donde

$$a_k = \frac{1}{\ } \int^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\cos(kx)\ \wedge\ b_k = \frac{1}{\ } \int^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\mathrm{sen}\ (kx)\ .$$

Mínimos Cuadrados

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.

Mínimos Cuadrados

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.
- Asociamos las medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.
- Asociamos las medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$
- Supondremos su mejor aproximación $\mathrm{c}\,|1\rangle \equiv (\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c}, \cdots, \mathrm{c})$, será la proyección perpendicular de $|x\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por $|1\rangle$:

$$|x\rangle = \mathrm{c}\,|1\rangle \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x\,|1\rangle}{\langle 1\,|1\rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \cdots + x_n}{n}\,.$$

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.
- Asociamos las medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$
- Supondremos su mejor aproximación $\mathrm{c}\,|1\rangle \equiv (\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c}, \cdots, \mathrm{c})$, será la proyección perpendicular de $|x\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por $|1\rangle$:

$$|x\rangle = \mathrm{c}\,|1\rangle \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x\,|1\rangle}{\langle 1\,|1\rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \cdots + x_n}{n}\,.$$

- Es una manera sofisticada de construir el promedio aritmético de las medidas.

Mínimos Cuadrados

- La idea es determinar el valor más aproximado de una cantidad física, c, a partir de un conjunto de medidas experimentales: $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$.
- Asociamos las medidas con las componentes de un vector $|x\rangle \equiv (x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$
- Supondremos su mejor aproximación $\mathrm{c}\,|1\rangle \equiv (\mathrm{c}, \mathrm{c}, \mathrm{c}, \cdots, \mathrm{c})$, será la proyección perpendicular de $|x\rangle$ (las medidas) sobre el subespacio generado por $|1\rangle$:

$$|x\rangle = \mathrm{c}\,|1\rangle \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x\,|1\rangle}{\langle 1\,|1\rangle} = \frac{x_1 + x_2 + x_3, \cdots + x_n}{n}\,.$$

- Es una manera sofisticada de construir el promedio aritmético de las medidas.
- La proyección perpendicular de $|x\rangle$ sobre $|1\rangle$ hace mínima la distancia entre el subespacio generado por $|1\rangle$ y el vector $|x\rangle$, por tanto $[d\,(|x\rangle\,, \mathrm{c}\,|1\rangle)]^2$

Ajuste a una recta

- La consecuencia más conocida es el "ajuste" de un conjunto de datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = cx$.

Ajuste a una recta

- La consecuencia más conocida es el "ajuste" de un conjunto de datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = \mathrm{c}x$.
- Queremos que la distancia entre $|y\rangle$ y su valor más aproximado $|y\rangle_{\approx} = \mathrm{c}\,|x\rangle$ sea la menor posible. Por lo tanto, $\left\| |\mathrm{c}x - y\rangle \right\|^2$ será la menor posible y $|\mathrm{c}x - y\rangle$ será perpendicular a $\mathbf{S}(|x\rangle)$,

$$\langle x\,|\mathrm{c}x - y\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x\,|y\rangle}{\langle x\,|x\rangle} = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + \cdots + x_ny_n}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

- La consecuencia más conocida es el "ajuste" de un conjunto de datos $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)\}$ a la ecuación de una recta $y = \mathrm{c}x$.
- Queremos que la distancia entre $|y\rangle$ y su valor más aproximado $|y\rangle_{\approx} = \mathrm{c}\,|x\rangle$ sea la menor posible. Por lo tanto, $\| |\mathrm{c}x - y\rangle \|^2$ será la menor posible y $|\mathrm{c}x - y\rangle$ será perpendicular a $\mathbf{S}(|x\rangle)$,

$$\langle x \,|\mathrm{c}x - y\rangle = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{c} = \frac{\langle x \,|y\rangle}{\langle x \,|x\rangle} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + \cdots + x_n y_n}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

- Si la recta a "ajustar" es $y = \mathrm{c}x + \mathrm{b}$, entondes $|\mathrm{b}\rangle = \mathrm{b}\,|1\rangle$, y tenemos:

$$|y\rangle = \mathrm{c}\,|x\rangle + |\mathrm{b}\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \langle x \,|y\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathrm{c}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \mathrm{b}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \\ \langle \mathrm{b} \,|y\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i = \mathrm{c}\sum_{i=1}^{n} x_i + \mathrm{b}n \end{array} \right.$$

- Supongamos que tenemos puntos experimentales $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos, de manera que: $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), \cdots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$. Para encontrar este polinomio lo expresaremos como una combinación lineal de polinomios de Legendre

- Supongamos que tenemos puntos experimentales $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)\}$ y para modelar ese experimento quisiéramos una función que ajuste estos puntos, de manera que: $\{(x_1, y_1 = f(x_1)), \cdots, (x_n, y_n = f(x_n))\}$. Para encontrar este polinomio lo expresaremos como una combinación lineal de polinomios de Legendre
- Esto es: $f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k \left|P_k\right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} C_k P_k(x) \Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = f(x_1) = C_0 P_0(x_1) + C_1 P_1(x_1) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = C_0 P_0(x_2) + C_1 P_1(x_2) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_2) \\ \vdots \\ y_n = f(x_n) = C_0 P_0(x_n) + C_1 P_1(x_n) + \cdots + C_{n-1} P_{n-1}(x_n) \end{array} \right.$$

n ecuaciones con n incógnitas $\{C_0, C_1, \cdots C_{n-1}\}$.

Recapitulando

1. **Complementos ortogonales.** Dado un vector $|x\rangle \in \mathbf{V}$ y un subespacio de $\mathbf{V}$ con dimensión finita, $\mathbf{S}^m \subset \mathbf{V}$, entonces la distancia de $|x\rangle$ a $\mathbf{S}^m$ será mínima y es la norma de la componente de $|x\rangle$, perpendicular a $\mathbf{S}^m$
2. **Aproximación de funciones y complementos ortogonales.** La proyección de $|v_i\rangle$ en $\mathbf{S}^m$, $|s_i\rangle$, será el elemento de $\mathbf{S}^m$ más próximo a $|v_k\rangle$
3. **Aproximación mediante series de funciones trigonométricas.** Con el producto interno definido por: $\langle f|\, g\rangle = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)$ y una base ortogonal $|\mathrm{e}_0\rangle = 1$, $|\mathrm{e}_{2n-1}\rangle = \cos(nx)$ y $|\mathrm{e}_{2n}\rangle = \mathrm{sen}\ (nx)$,
4. **Métodos de Mínimos cuadrados**
5. **Aproximación de funciones mediante una base de polinomios ortogonales**