Tensores Abstractos

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

13 de noviembre de 2020

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo **K**, complejo o real, a un vector $|v\rangle \in V$, a una forma $\langle u| \in \mathbf{V}^*$, o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v\rangle\right] \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{T}\left[\langle u|\,;\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] \equiv \alpha\mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v_1\rangle\right] + \beta\;\mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v_2\rangle\right] \quad \forall\,|v_1\rangle\,,|v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- $\mathcal{T}\left[\zeta\;\langle u_1| + \xi\,\langle u_2|\,;|v\rangle\right] \equiv \zeta\mathcal{T}\left[\langle u_1|\,;|v\rangle\right] + \xi\;\mathcal{T}\left[\langle u_2|\,;|v\rangle\right] \quad \forall\;|v\rangle\,, \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|\,,\langle u_2| \in \mathbf{V}^*$

Tensores: Funcionales Bilineales 1/2

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo **K**, complejo o real, a un vector $|v\rangle \in V$, a una forma $\langle u| \in \mathbf{V}^*$, o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \rightarrow \quad \mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v\rangle\right] \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{T}\left[\langle u|\,;\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle\right] \equiv \alpha\mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v_1\rangle\right] + \beta\;\mathcal{T}\left[\langle u|\,;|v_2\rangle\right] \quad \forall\,|v_1\rangle\,,|v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- $\mathcal{T}\left[\zeta\;\langle u_1| + \xi\,\langle u_2|\,;|v\rangle\right] \equiv \zeta\mathcal{T}\left[\langle u_1|\,;|v\rangle\right] + \xi\;\mathcal{T}\left[\langle u_2|\,;|v\rangle\right] \quad \forall\;|v\rangle\,, \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|\,,\langle u_2| \in \mathbf{V}^*$
- Un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas

Definiremos como un tensor a un funcional lineal (bilineal en este caso) que asocia un elemento del Campo **K**, complejo o real, a un vector $|v\rangle \in V$, a una forma $\langle u| \in \mathbf{V}^*$, o ambas, y cumple con la linealidad. Esto es:

- $\forall \quad |v\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^* \to \quad \mathcal{T}[\langle u|\,;|v\rangle] \in \mathbb{C}$
- $\mathcal{T}[\langle u|\,;\alpha\,|v_1\rangle + \beta\,|v_2\rangle] \equiv$
  $\alpha\mathcal{T}[\langle u|\,;|v_1\rangle] + \beta\,\mathcal{T}[\langle u|\,;|v_2\rangle] \quad \forall\,|v_1\rangle\,,|v_2\rangle \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u| \in \mathbf{V}^*$
- $\mathcal{T}[\zeta\ \langle u_1| + \xi\,\langle u_2|\,;|v\rangle] \equiv \zeta\mathcal{T}[\langle u_1|\,;|v\rangle] + \xi\,\mathcal{T}[\langle u_2|\,;|v\rangle] \quad \forall\ |v\rangle\,, \in \mathbf{V} \quad \wedge \quad \langle u_1|\,,\langle u_2| \in \mathbf{V}^*$

- Un tensor es un funcional generalizado cuyos argumentos son vectores y/o formas
- $\mathcal{T}[\circ;\bullet]$ es una cantidad con dos “puestos” y una vez “cubiertos” se convierte en un escalar (complejo o real).

Tensores: Funcionales Multilineales 2/2

- En general

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{c} |v_1\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \begin{array}{c} |v_2\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \cdots, \begin{array}{c} |v_n\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}; \begin{array}{c} \langle u_1| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \langle u_2| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \cdots, \begin{array}{c} \langle u_m| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}\right] \in \mathbb{C} \quad \text{tensor de tipo} \left(\begin{array}{c} m \\ n \end{array}\right).$$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- En general

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{c} |v_1\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \begin{array}{c} |v_2\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \cdots, \begin{array}{c} |v_n\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}; \begin{array}{c} \langle u_1| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \langle u_2| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \cdots, \begin{array}{c} \langle u_m| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}\right] \in \mathbb{C} \quad \text{tensor de tipo} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

- $\mathcal{T} : \underbrace{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \cdots \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^*}_{\mathbf{V}^{*m}} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \mathbf{V} \cdots \mathbf{V} \times \mathbf{V}}_{\mathbf{V}^n} \rightarrow \mathbb{C}$

- En general

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{c} |v_1\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \begin{array}{c} |v_2\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}, \cdots, \begin{array}{c} |v_n\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}; \begin{array}{c} \langle u_1| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}, \begin{array}{c} \langle u_2| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \cdots, \begin{array}{c} \langle u_m| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}\right] \in \mathbb{C} \quad \text{tensor de tipo } \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

- $\mathcal{T} : \underbrace{\mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^* \cdots \mathbf{V}^* \times \mathbf{V}^*}_{\mathbf{V}^{*m}} \times \underbrace{\mathbf{V} \times \mathbf{V} \cdots \mathbf{V} \times \mathbf{V}}_{\mathbf{V}^n} \rightarrow \mathbb{C}$

- **Un vector** es un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T}\left[\begin{array}{c} \langle u| \\ \downarrow \\ \bullet \end{array}\right] \in \mathbb{C}.$

- **Una forma** es un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{T}\left[\begin{array}{c} |v\rangle \\ \downarrow \\ \circ \end{array}\right] \in \mathbb{C}.$

- **Un escalar** es un tensor del tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}.$

Producto Tensorial: Definición

Dados $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ dos espacios vectoriales con dimensiones n_1 y n_2, respectivamente y vectores genéricos, $|\varphi(1)\rangle \in \mathbf{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2$.

- Definiremos el *producto tensorial* (*exterior o directo*) de espacios vectoriales, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Producto Tensorial: Definición

Dados $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ dos espacios vectoriales con dimensiones n_1 y n_2, respectivamente y vectores genéricos, $|\varphi(1)\rangle \in \mathbf{E}_1$ y $|\chi(2)\rangle \in \mathbf{E}_2$.

- Definiremos el *producto tensorial* (*exterior o directo*) de espacios vectoriales, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$, si a cada par de vectores $|\varphi(1)\rangle$ y $|\chi(2)\rangle$ le asociamos un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Si se cumple que $|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle \Leftrightarrow$

$$\mathcal{T}\left[\begin{array}{ccc} \overset{\langle\zeta(1)|}{\downarrow} & & \overset{\langle\xi(2)|}{\downarrow} \\ \bullet & , & \bullet \end{array}\right] = \langle\zeta(1)\,|\varphi(1)\rangle\,\langle\xi(2)\,|\chi(2)\rangle \in \mathbb{C}$$

Producto Tensorial: Propiedades

- La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$\begin{aligned} |\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\ &= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \ ; \end{aligned}$$

Producto Tensorial: Propiedades

- La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$
\begin{aligned}
|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\
&= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \ ;
\end{aligned}
$$

- El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales λ y μ

$$
\begin{aligned}
[|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = [\lambda\, |\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] \\
|\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] = |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu\, |\chi(2)\rangle] = \mu\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle]
\end{aligned}
$$

Producto Tensorial: Propiedades

- La suma entre tensores de **E** viene definida como:

$$
\begin{aligned}
|\varphi(1)\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\xi(2)\rangle &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\zeta(1)\rangle \otimes |\xi(2)\rangle \\
&= |\varphi(1) + \zeta(1)\rangle \otimes |\chi(2) + \xi(2)\rangle \ ;
\end{aligned}
$$

- El producto tensorial es lineal respecto a la multiplicación con números reales λ y μ

$$
\begin{aligned}
[|\lambda\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= [\lambda\, |\varphi(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle = \lambda\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle] \\
|\varphi(1)\rangle \otimes [|\mu\chi(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes [\mu\, |\chi(2)\rangle] = \mu\, [|\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle]
\end{aligned}
$$

- El producto tensorial es distributivo respecto a la suma:

$$
\begin{aligned}
|\varphi(1)\rangle \otimes [|\chi_1(2)\rangle + |\chi_2(2)\rangle] &= |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_1(2)\rangle + |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi_2(2)\rangle \\
[|\varphi_1(1)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle] \otimes |\chi(2)\rangle &= |\varphi_1(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle + |\varphi_2(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle
\end{aligned}
$$

Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- Dados $\left|\varphi(1)\chi(2)\right\rangle, \left|\phi(1)\xi(2)\right\rangle, \left|\omega(1)\theta(2)\right\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$

Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle\,, |\phi(1)\xi(2)\rangle\,, |\omega(1)\theta(2)\rangle\,, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$
  - es cerrada
  - es conmutativa y asociativa
  - Existe un único elemento neutro: $|0(1)0(2)\rangle$
  - Existe un elemento simétrico para cada elemento: $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - Cumple con las propiedades de multiplicación por números

Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$
  - es cerrada
  - es conmutativa y asociativa
  - Existe un único elemento neutro: $|0(1)0(2)\rangle$
  - Existe un elemento simétrico para cada elemento: $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
  - Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\,|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\,|\chi(2)\rangle$ NO es producto interno

Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle\,, |\phi(1)\xi(2)\rangle\,, |\omega(1)\theta(2)\rangle\,, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$
    - es cerrada
    - es conmutativa y asociativa
    - Existe un único elemento neutro: $|0(1)0(2)\rangle$
    - Existe un elemento simétrico para cada elemento: $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
    - Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\,|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\,|\chi(2)\rangle$ NO es producto interno
- Si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ bases discretas para $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ entonces $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$ será base para $\mathbf{E}$

Producto Tensorial: Espacio Tensorial

- Dados $|\varphi(1)\chi(2)\rangle, |\phi(1)\xi(2)\rangle, |\omega(1)\theta(2)\rangle, \in \mathbf{E} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2$ entonces la operación suma $\boxplus$
    - es cerrada
    - es conmutativa y asociativa
    - Existe un único elemento neutro: $|0(1)0(2)\rangle$
    - Existe un elemento simétrico para cada elemento: $|\varphi(1)\chi(2)\rangle \Leftrightarrow -|\varphi(1)\chi(2)\rangle$
    - Cumple con las propiedades de multiplicación por números
- $\langle\tilde{\varphi}(1)\tilde{\chi}(2)\,|\varphi(1)\chi(2)\rangle = \langle\tilde{\varphi}(1)\,|\varphi(1)\rangle \cdot \langle\tilde{\chi}(2)\,|\chi(2)\rangle$ NO es producto interno
- Si $\{|u_i(1)\rangle\}$ y $\{|v_i(2)\rangle\}$ bases discretas para $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ entonces $|u_i(1)v_j(2)\rangle = |u_i(1)\rangle \otimes |v_j(2)\rangle$ será base para $\mathbf{E}$
- Entonces un tensor genérico

$$|\varphi(1)\chi(2)\rangle = |\varphi(1)\rangle \otimes |\chi(2)\rangle = \varphi^i\chi^j\,|u_i(1)v_j(2)\rangle = c^{ij}\,|u_i(1)v_j(2)\rangle$$

Ejemplo

- Definimos la siguiente operación: $\mathbf{M}_{31} \otimes \mathbf{M}_{13} = \mathbf{M}_{33}$

$$
|\mathrm{v}\ \ \mathrm{u}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix} .
$$

Es un funcional bilineal

- Definimos la siguiente operación: $\mathbf{M}_{31} \otimes \mathbf{M}_{13} = \mathbf{M}_{33}$

$$|\mathrm{v} \ \ \mathrm{u}\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix}.$$

  Es un funcional bilineal

- Si $|e_1(1)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|e_2(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|e_3(1)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, base para $\mathbf{V}^1$ y $\langle e_1(2)| = (1\,0\,0)$, $\langle e_2(2)| = (0\,1\,0)$, $\langle e_3(2)| = (0\,0\,1)$ base para $\mathbf{V}^{2*}$ entonces podemos construir:

$$|e_1(1)\rangle \otimes \langle e_1(2)| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, |e_1(1)\rangle \otimes \langle e_2(2)| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

  ...

Tensores, componentes y contracciones

- Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S}\left[\begin{array}{ccccccccc} |u_i(1)\rangle & & |v_j(2)\rangle & & |w_k(3)\rangle & & \langle x^m(1)| & & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & , & \circ & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet \\ & & & & & & & & \end{array}\right].$$

- Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S}\left[\begin{array}{ccccccccc} |u_i(1)\rangle & & \left|v_j(2)\right\rangle & & |w_k(3)\rangle & & \langle x^m(1)| & & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & , & \circ & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet \\ & & & & & & & & \end{array}\right] .$$

- Combinaciones lineales de tensores $R_{kl}^{ij} = \alpha Q_{kl}^{ij} + \beta P_{kl}^{ij}$.

- Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S}\left[\begin{array}{ccccccccc} |u_i(1)\rangle & & \left|v_j(2)\right\rangle & & |w_k(3)\rangle & & \langle x^m(1)| & & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \circ & , & \circ & , & \circ & ; & \bullet & , & \bullet \\ & & & & & & & & \end{array}\right] .$$

- Combinaciones lineales de tensores $R_{kl}^{ij} = \alpha Q_{kl}^{ij} + \beta P_{kl}^{ij}$.
- Producto tensorial de tensores $R_k^{ijlm} = T^{ij} P_k^{lm}$

- Las componentes de un tensor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ serán

$$S_{ijk}^{mn} = \mathcal{S}\left[\begin{array}{ccccc} |u_i(1)\rangle & |v_j(2)\rangle & |w_k(3)\rangle & \langle x^m(1)| & \langle y^n(2)| \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \circ \; , & \circ \; , & \circ \; ; & \bullet \; , & \bullet \end{array}\right] .$$

- Combinaciones lineales de tensores $R_{kl}^{ij} = \alpha Q_{kl}^{ij} + \beta P_{kl}^{ij}$.
- Producto tensorial de tensores $R_{k}^{ijlm} = T^{ij} P_{k}^{lm}$
- Contracción de un tensor. dos tensores, P^{lm} y Q_{zk}^{ij} generarán componentes de nuevos tensores $R_{k}^{lij} = P^{lm} Q_{mk}^{ij}$:

$$\left.\begin{array}{lcl} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \Rightarrow & P^{lm} \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} & \Rightarrow & Q_{zk}^{ij} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R_{k}^{lij} = P^{lm} Q_{mk}^{ij} .$$

- Un tensor (las componentes) será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}\,,\;S^{ij} = S^{ji}\,,\;S_{ij\cdots kl\cdots mn} = S_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,\;S^{ij\cdots kl\cdots mn} = S^{ij\cdots lk\cdots mn}\,,$$

y será antisimétrico si:

$$A_{ij} = -A_{ji}\,,\;A^{ij} = -A^{ji}\,,\;A_{ij\cdots kl\cdots mn} = -A_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,$$
$$A^{ij\cdots kl\cdots mn} = -A^{ij\cdots lk\cdots mn}\,.$$

- Un tensor (las componentes) será simétrico respecto a dos de sus índices si su permutación no cambia su valor:

$$S_{ij} = S_{ji}\,,\; S^{ij} = S^{ji}\,,\; S_{ij\cdots kl\cdots mn} = S_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,\; S^{ij\cdots kl\cdots mn} = S^{ij\cdots lk\cdots mn}\,,$$

y será antisimétrico si:

$$A_{ij} = -A_{ji}\,,\; A^{ij} = -A^{ji}\,,\; A_{ij\cdots kl\cdots mn} = -A_{ij\cdots lk\cdots mn}\,,$$
$$A^{ij\cdots kl\cdots mn} = -A^{ij\cdots lk\cdots mn}\,.$$

- Un tensor de rango 2, viene representado por una matriz que tendrá $3^2 = 9$ componentes. Si la matriz es simétrica tendrá como máximo 6 componentes distintas.

$$S^i_j = S^j_i = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^1_2 & S^1_3 \\ S^2_1 & S^2_2 & S^2_3 \\ S^3_1 & S^3_2 & S^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S^1_1 & S^2_1 & S^3_1 \\ S^1_2 & S^2_2 & S^3_2 \\ S^1_3 & S^2_3 & S^3_3 \end{pmatrix}.$$

¿Cuantás componentes independientes tiene un tensor antisimétrico de rango 2?

- Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \equiv T_{(ij)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$S_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} + T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots(kl)\cdots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \equiv T_{[ij]} \quad \Longleftrightarrow$$

$$A_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} - T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots[kl]\cdots mn}\,.$$

Simetrización de tensores

- Siempre es posible construir tensores simétricos y antisimétricos a partir de un tensor genérico. Esto es:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) \equiv T_{(ij)} \quad \Longleftrightarrow$$

$$S_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} + T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots(kl)\cdots mn}$$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) \equiv T_{[ij]} \quad \Longleftrightarrow$$

$$A_{ij\cdots kl\cdots mn} = \frac{1}{2}\left(T_{ij\cdots kl\cdots mn} - T_{ij\cdots lk\cdots mn}\right) = T_{ij\cdots[kl]\cdots mn} \,.$$

- Es evidente que las componentes de un tensor genérico, T_{ij}, pueden expresarse como una combinación de su parte simétrica y antisimétrica:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij} \,.$$

Recapitulando

- Tensores como funcionales multilineales
- Producto tensorial: definición, propiedades
- Espacios tensoriales
- Bases y componentes de tensores
- Propiedades de las componentes de los tensores
    - Contracción y expansión de componente
    - Simetrización y antisimetrización de componentes