

# Vectores complejos

**Luis A. Núñez**

*Escuela de Física, Facultad de Ciencias,  
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia*



21 de octubre de 2020

- 1 Números Complejos
- 2 Algebra de números complejos
- 3 Vectores y números complejos
- 4 Productos de vectores y números complejos
- 5 Expresiones de números complejos
- 6 Recapitulando

- Un número complejo,  $z$ , es:

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

- Un número complejo,  $z$ , es:

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

- Cada número complejo,  $z$  tendrá asociado un número complejo conjugado,  $z^*$  tal que:

$$z = a + ib \quad \Leftrightarrow \quad z^* = a - ib,$$

$$\Downarrow$$

$$(z^*)^* = z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2,$$

$$\text{claramente: } z \cdot z^* \geq 0 \Rightarrow |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2.$$

- Un número complejo,  $z$ , es:

$$z = a + ib \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow & \text{parte real} \\ b \rightarrow & \text{parte imaginaria} \end{cases}$$

- Cada número complejo,  $z$  tendrá asociado un número complejo conjugado,  $z^*$  tal que:

$$\begin{aligned} z = a + ib &\quad \Leftrightarrow \quad z^* = a - ib, \\ &\quad \Downarrow \\ (z^*)^* &= z \quad \wedge \quad z \cdot z^* = a^2 + b^2, \end{aligned}$$

claramente:  $z \cdot z^* \geq 0 \Rightarrow |z|^2 = |z^*|^2 = z \cdot z^* = a^2 + b^2$ .

- no existe relación de orden entre los números complejos:

$$z_1 \not\leq z_2 \quad \vee \quad z_1 \not\geq z_2$$

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son:  $z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son:  $z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias:  $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow$   
 $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria  $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$  y claramente  $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$ , también  $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$ . Igualmente es inmediato comprobar que:  $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ .

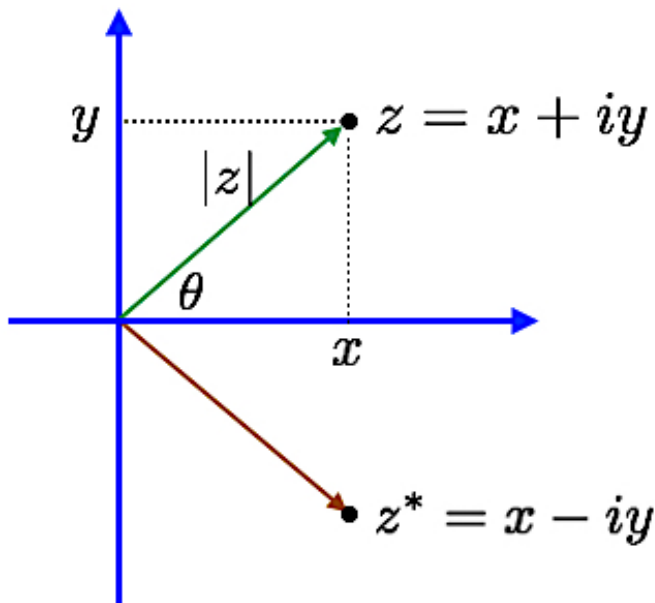
- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son:  $z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias:  $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow$   
 $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria  $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$  y claramente  $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$ , también  $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$ . Igualmente es inmediato comprobar que:  $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ .
- Se multiplican números complejos por escalares  
 $z_3 = \alpha z_1 \Rightarrow \alpha(a_1 + ib_1) = \alpha a_1 + i(\alpha b_1)$ .



- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son:  $z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias:  $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria  $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$  y claramente  $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$ , también  $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$ . Igualmente es inmediato comprobar que:  $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ .
- Se multiplican números complejos por escalares  $z_3 = \alpha z_1 \Rightarrow \alpha(a_1 + ib_1) = \alpha a_1 + i(\alpha b_1)$ .
- Se multiplican números complejos entre si, con cuidado que  $i^2 = -1$ :  $z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ , también es inmediato comprobar que  $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ .

- Dos números complejos serán iguales si sus partes reales e imaginarios lo son:  $z_1 = z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
- Se suman dos números complejos sumando sus partes reales y sus partes imaginarias:  $z_3 = z_1 + z_2 \Rightarrow$   
 $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
- El conjugado de un número complejo cambia el signo a la parte imaginaria  $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$  y claramente  $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$ , también  $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$ . Igualmente es inmediato comprobar que:  $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$ .
- Se multiplican números complejos por escalares  
 $z_3 = \alpha z_1 \Rightarrow \alpha(a_1 + ib_1) = \alpha a_1 + i(\alpha b_1)$ .
- Se multiplican números complejos entre sí, con cuidado que  $i^2 = -1$ :  
 $z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ , también es inmediato comprobar que  $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$ .
- Se dividen números complejos racionalizando fracciones  
 $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}$

# Vectores y números complejos 1/2



- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números  $z = (a + ib) \Leftrightarrow z = (a, b)$ .

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números  $z = (a + ib) \Leftrightarrow z = (a, b)$ .
- La representación geométrica de  $z^*$  (complejo conjugado de  $z$ ) es la reflexión de  $z$  respecto al eje real.

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números  $z = (a + ib) \Leftrightarrow z = (a, b)$ .
- La representación geométrica de  $z^*$  (complejo conjugado de  $z$ ) es la reflexión de  $z$  respecto al eje real.
- $|z| = \sqrt{zz^*}$  viene a ser la distancia del punto  $(0, 0)$  al punto  $(x, y)$ , es la longitud o norma del vector  $(x, y)$ .

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números  $z = (a + ib) \Leftrightarrow z = (a, b)$ .
- La representación geométrica de  $z^*$  (complejo conjugado de  $z$ ) es la reflexión de  $z$  respecto al eje real.
- $|z| = \sqrt{zz^*}$  viene a ser la distancia del punto  $(0, 0)$  al punto  $(x, y)$ , es la longitud o norma del vector  $(x, y)$ .

- En el plano real podemos ver que:  $z = x + iy \Leftrightarrow$   
$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \text{ con: } \begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

- Un número complejo puede ser representado por una *dupla* de números  $z = (a + ib) \Leftrightarrow z = (a, b)$ .
- La representación geométrica de  $z^*$  (complejo conjugado de  $z$ ) es la reflexión de  $z$  respecto al eje real.
- $|z| = \sqrt{zz^*}$  viene a ser la distancia del punto  $(0, 0)$  al punto  $(x, y)$ , es la longitud o norma del vector  $(x, y)$ .
- En el plano real podemos ver que:  $z = x + iy \Leftrightarrow$   
 $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , con: 
$$\begin{cases} r = \sqrt{zz^*} = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\theta) = \frac{y}{x}, \text{ donde } -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$
- Con esta interpretación tendremos:

$x = \operatorname{Re} z$	$\Rightarrow$	componente real del vector $z$ o parte real de $z$
$y = \operatorname{Im} z$	$\Rightarrow$	componente imaginaria del vector $z$ o parte ima
$r = \sqrt{zz^*} =  z $	$\Rightarrow$	módulo, magnitud o valor absoluto de $z$
$\theta$	$\Rightarrow$	ángulo polar o de fase del número complejo $z$



- Los vectores complejos se multiplican y se ¡ dividen !
  - $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$
  - $\frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} \right) .$

- Los vectores complejos se multiplican y se ¡ dividen !
  - $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + b_1 a_2)$
  - $\frac{(a_1, b_1)}{(a_2, b_2)} = \left( \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}, \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} \right)$ .
- Los productos escalar y vectorial nos llevan a:
  - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a^i)^* a_i$  siempre será un número real.
  - $z_1 \cdot z_2 = \text{Re}(z_1 z_2^*) = \text{Re}(z_1^* z_2)$  y en componentes  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a^i)^* b_i$ 
    - $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^*$ .
    - $(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda^* \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .
    - $\mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}) = \lambda \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .
  - $z_1 \times z_2 = \text{Im}(z_1^* z_2) = -\text{Im}(z_1 z_2^*)$ .

- Tenemos tres formas de representar un número complejo:

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \quad \Leftrightarrow \quad z = |z| e^{i\theta}.$$

- Tenemos tres formas de representar un número complejo:

$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \quad \Leftrightarrow \quad z = |z| e^{i\theta}.$$

- La forma polar (y la de Euler), es ambigua, ya que:

$$z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = r(\cos(\theta + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)), \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

- Tenemos tres formas de representar un número complejo:  
$$z = x + iy \quad \Leftrightarrow \quad z = |z| (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \quad \Leftrightarrow \quad z = |z| e^{i\theta}.$$
- La forma polar (y la de Euler), es ambigua, ya que:  
$$z = r(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) = r(\cos(\theta + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)),$$
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$
- Las sumas de números complejos se plantean más fácilmente en su forma cartesiana. La multiplicación y división serán directas en la forma de Euler. Si  $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$  y  $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$ , entonces:  
$$z_1 z_2 = |z_1| e^{i\theta_1} |z_2| e^{i\theta_2} = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)} =$$
$$|z_1 z_2| (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$
- La división será:  
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\theta_1}}{|z_2| e^{i\theta_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)).$$
- A partir de la relación o fórmula de Euler se puede demostrar:  
$$z^n = |z|^n (e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta} \Rightarrow |z|^n (\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n =$$
$$|z|^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)),$$

- 1 Números complejos  $z = a + ib$  con  $a$  parte real  $b$  parte imaginarias.  
Su complejo conjugado  $z^* = \bar{z} = a - ib$

- 1 Números complejos  $z = a + ib$  con  $a$  parte real  $b$  parte imaginarias.  
Su complejo conjugado  $z^* = \bar{z} = a - ib$
- 2 Álgebra de números complejos:
  - igualdad  $(a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
  - suma  $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
  - Conjugado  $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$  y  $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$ , también  $z - z^* = 2i \operatorname{Im} z$ .
  - $z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ ,
  - División  $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} \frac{(a_2 - ib_2)}{(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}$ ,

- 1 Números complejos  $z = a + ib$  con  $a$  parte real  $b$  parte imaginarias.  
Su complejo conjugado  $z^* = \bar{z} = a - ib$
- 2 Álgebra de números complejos:
  - igualdad  $(a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
  - suma  $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
  - Conjugado  $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$  y  $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$ , también  $z - z^* = 2i \operatorname{Im} z$ .
  - $z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ ,
  - División  $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}$ ,
- 3 Vectores Complejos: *dupla* de números  $z = (a + ib) \Leftrightarrow z = (a, b)$ .
  - Los vectores complejos se multiplican y se  $i$  dividen !
  - Productos escalar/vectorial  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^* \equiv (a^i)^* b_i$  y  $z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}(z_1^* z_2) = -\operatorname{Im}(z_1 z_2^*)$ .



- ① Números complejos  $z = a + ib$  con  $a$  parte real  $b$  parte imaginarias.  
Su complejo conjugado  $z^* = \bar{z} = a - ib$
- ② Algebra de números complejos:
  - igualdad  $(a_1 + ib_1) = (a_2 + ib_2) \Rightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$ .
  - suma  $(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = a_3 + ib_3$ ,
  - Conjugado  $(a_1 + ib_1)^* = (a_1 - ib_1)$  y  $z + z^* = 2 \operatorname{Re} z$ , también  $z - z^* = 2 \operatorname{Im} z$ .
  - $z_3 = z_1 z_2 \Rightarrow (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$ ,
  - División  $z_3 = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{(a_2^2 + b_2^2)}$ ,
- ③ Vectores Complejos: *dupla* de números  $z = (a + ib) \Leftrightarrow z = (a, b)$ .
  - Los vectores complejos se multiplican y se  $\dot{}$  dividen !
  - Productos escalar/vectorial  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})^* \equiv (a^i)^* b_i$   
 $z_1 \times z_2 = \operatorname{Im}(z_1^* z_2) = -\operatorname{Im}(z_1 z_2^*)$ .
- ④ Tenemos tres formas de representar un número complejo:  
 $z = x + iy \Leftrightarrow z = |z|(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta)) \Leftrightarrow z = |z|e^{i\theta}$ .