Variedades Lineales

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

3 de noviembre de 2020

Agenda: Variedades Lineales

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así:
  $|0\rangle = C_1 \ |v_1\rangle + C_2 \ |v_2\rangle + C_3 \ |v_3\rangle \cdots + C_n \ |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \ |v_i\rangle$. Si $\forall \ C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes

Independencia lineal

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así: $|0\rangle = C_1 \ |v_1\rangle + C_2 \ |v_2\rangle + C_3 \ |v_3\rangle \cdots + C_n \ |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \ |v_i\rangle$. Si $\forall \ C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes
- Un conjunto $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle , \ |v_2\rangle , \cdots , |v_n\rangle\} \in \mathbf{V}$, serán base de $\mathbf{V}$ si los $|v_1\rangle , \ |v_2\rangle , \cdots , |v_n\rangle$ si son linealmente independientes

Independencia lineal

- Generalizamos el concepto de dependencia e independencia lineal de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Así: $|0\rangle = C_1\ |v_1\rangle + C_2\ |v_2\rangle + C_3\ |v_3\rangle \cdots + C_n\ |v_n\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ |v_i\rangle$. Si $\forall\ C_i = 0$ entonces $\{|v_i\rangle\}$ son linealmente independientes
- Un conjunto $\mathcal{B} = \{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,, \cdots, |v_n\rangle\} \in \mathbf{V}$, serán base de $\mathbf{V}$ si los $|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,, \cdots, |v_n\rangle$ si son linealmente independientes
- Dentro de un espacio vectorial $\mathbf{V}$ se puedan encontrar subespacios y sub-bases, si $\forall\ |x\rangle \in \mathbf{V}$:

$$|x\rangle = \underbrace{C_1\ |v_1\rangle \cdots + C_{n-j}\ |v_{n-j}\rangle}_{\mathbf{S}_1} + \underbrace{C_{n-j+1}\ |v_{n-j+1}\rangle \cdots C_{n-k}\ |v_{n-k}\rangle}_{\mathbf{S}_2} +$$
$$+ \underbrace{C_{n-k+1}\ |v_{n-k+1}\rangle \cdots C_n\ |v_n\rangle}_{\mathbf{S}_3}$$

$$|x\rangle = |x_1\rangle + |x_2\rangle + |x_3\rangle \quad \text{y} \quad |x_1\rangle \in \mathbf{S}_1; \quad |x_2\rangle \in \mathbf{S}_2; \quad |x_3\rangle \in \mathbf{S}_3\,,$$

entonces $\mathbf{V} = \mathbf{S}_1 \oplus \mathbf{S}_2 \oplus \mathbf{S}_3$.

Si $\{|v_1\rangle\,,\ |v_2\rangle\,,\cdots\,,|v_n\rangle\} \in \mathbf{V}\,.$

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i \ |v_i\rangle \ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} C_1 \ \langle v_1 |v_1\rangle + \cdots + C_n \ \langle v_1 |v_n\rangle & = & \langle v_1 |x\rangle \\ C_1 \ \langle v_2 |v_1\rangle + \cdots + C_n \ \langle v_2 |v_n\rangle & = & \langle v_2 |x\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ C_1 \ \langle v_n |v_1\rangle + \cdots + C_n \ \langle v_n |v_n\rangle & = & \langle v_n |x\rangle \end{array} \right.$$

Entonces

$$\left| \begin{array}{ccccc} \langle v_1 |v_1\rangle & \langle v_1 |v_2\rangle & \langle v_1 |v_3\rangle & \cdots & \langle v_1 |v_n\rangle \\ \langle v_2 |v_1\rangle & \langle v_2 |v_2\rangle & \langle v_2 |v_3\rangle & \cdots & \langle v_2 |v_n\rangle \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \langle v_n |v_1\rangle & \langle v_n |v_2\rangle & \langle v_n |v_3\rangle & \cdots & \langle v_n |v_n\rangle \end{array} \right| \neq 0$$

- Un conjunto $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\ \cdots\,,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

$$\langle \mathrm{e}_i\,|\mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij}\, \left\| |\mathrm{e}_j\rangle \right\|^2 ,\ i,j = 1,2,3,\cdots,n \ \ \text{con} \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{array} \right.$$

  y **ortonormal** si $\left\| |\mathrm{e}_j\rangle \right\|^2 = 1$.

Bases Ortogonales

- Un conjunto $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,, \ |\mathrm{e}_2\rangle\,, \ \cdots\,, |\mathrm{e}_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

$$\langle \mathrm{e}_i \, | \mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij} \, \| |\mathrm{e}_j\rangle \|^2 \,, \ i,j = 1,2,3,\cdots,n \ \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{array} \right.$$

  y **ortonormal** si $\| |\mathrm{e}_j\rangle \|^2 = 1$.
- Un conjunto ortogonal $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,, \ |\mathrm{e}_2\rangle\,, \cdots\,, |\mathrm{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente y por lo tanto **base** de $\mathbf{V}$.

Bases Ortogonales

- Un conjunto $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\ \cdots\,,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ será **ortogonal**, si

$$\langle \mathrm{e}_i\,|\mathrm{e}_j\rangle = \delta_{ij}\,\left\||\mathrm{e}_j\rangle\right\|^2\,,\ i,j = 1,2,3,\cdots,n \ \text{ con } \left\{ \begin{array}{l} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{array} \right.$$

  y **ortonormal** si $\left\||\mathrm{e}_j\rangle\right\|^2 = 1$.
- Un conjunto ortogonal $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\cdots,|\mathrm{e}_n\rangle\} \in \mathbf{V}$ es linealmente independiente y por lo tanto **base** de **V**.
- Si $\{|\mathrm{e}_1\rangle\,,\ |\mathrm{e}_2\rangle\,,\cdots,|\mathrm{e}_n\rangle\}$ base ortogonal de **V**, entonces

$$\forall\,|x\rangle \in \mathbf{V} \Rightarrow |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ |\mathrm{e}_i\rangle \Rightarrow \langle \mathrm{e}_j\,|x\rangle = \langle \mathrm{e}_j|\left[\sum_{i=1}^{n} C_i\ |\mathrm{e}_i\rangle\right] \Rightarrow$$

$$C_j = \frac{\langle \mathrm{e}_j\,|x\rangle}{\langle \mathrm{e}_j\,|e_j\rangle} = \frac{\langle \mathrm{e}_j\,|x\rangle}{\left\||\mathrm{e}_j\rangle\right\|^2}$$

- Si $\{|\hat{\mathrm{e}}_1\rangle\,,\ |\hat{\mathrm{e}}_2\rangle\,,\cdots,|\hat{\mathrm{e}}_n\rangle\} \in \mathbf{V}^n$, base ortonormal: $\left\||\hat{\mathrm{e}}_j\rangle\right\|^2 = 1$, entonces $C_j = \langle \hat{\mathrm{e}}_j\,|x\rangle \ \Rightarrow\ |x\rangle = \sum_{i=1}^{n} C_i\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \hat{\mathrm{e}}_i\,|x\rangle\ |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle \equiv \sum^{n} |\hat{\mathrm{e}}_i\rangle\langle \hat{\mathrm{e}}_i|\,|x\rangle$.

A partir de un conjunto de vectores linealmente independientes, $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, |v_3\rangle, \cdots, |v_n\rangle\}$ siempre se podrá construir un conjunto ortogonal de vectores, $\{|\mathrm{e}_1\rangle, |\mathrm{e}_2\rangle, |\mathrm{e}_3\rangle, \cdots, |\mathrm{e}_n\rangle\}$, de la siguiente forma:

$$|\mathrm{e}_1\rangle \equiv |v_1\rangle$$

$$|\mathrm{e}_2\rangle \equiv |v_2\rangle - \frac{\langle v_2 |\mathrm{e}_1\rangle}{\langle \mathrm{e}_1 |\mathrm{e}_1\rangle} |\mathrm{e}_1\rangle \qquad \langle \mathrm{e}_2 |\mathrm{e}_1\rangle = 0$$

$$|\mathrm{e}_3\rangle \equiv |v_3\rangle - \frac{\langle v_3 |\mathrm{e}_2\rangle}{\langle \mathrm{e}_2 |\mathrm{e}_2\rangle} |\mathrm{e}_2\rangle - \frac{\langle v_3 |\mathrm{e}_1\rangle}{\langle \mathrm{e}_1 |\mathrm{e}_1\rangle} |\mathrm{e}_1\rangle \qquad \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathrm{e}_3 |\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_3 |\mathrm{e}_2\rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$|\mathrm{e}_4\rangle \equiv |v_4\rangle - \frac{\langle v_4 |\mathrm{e}_3\rangle}{\langle \mathrm{e}_3 |\mathrm{e}_3\rangle} |\mathrm{e}_3\rangle - \frac{\langle v_4 |\mathrm{e}_2\rangle}{\langle \mathrm{e}_2 |\mathrm{e}_2\rangle} |\mathrm{e}_2\rangle - \frac{\langle v_4 |\mathrm{e}_1\rangle}{\langle \mathrm{e}_1 |\mathrm{e}_1\rangle} |\mathrm{e}_1\rangle \qquad \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_2\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_3\rangle = 0 \end{array} \right.$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$|\mathrm{e}_n\rangle \equiv |v_n\rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle v_n |\mathrm{e}_i\rangle}{\langle \mathrm{e}_i |\mathrm{e}_i\rangle} |\mathrm{e}_i\rangle \qquad \left\{ \begin{array}{l} \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_1\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_2\rangle = 0 \\ \langle \mathrm{e}_4 |\mathrm{e}_3\rangle = 0 \\ \vdots \end{array} \right.$$

¿ Qué presentamos ?

1. El concepto de dependencia e independencia lineal generalizado
2. Determinante de Gram para identificar independencia lineal
3. Bases, subespacio y sub-bases
4. Bases ortogonales
5. Métodos de Ortogonalización de Gram-Schmidt

1. Encontrar la proyección perpendicular de los siguientes vectores en $\mathcal{C}_{[-1,1]}$ (espacio de funciones continuas en el intervalo [-1,1]) al subespacio generado por los polinomios: $\{1, x, x^2 - 1\}$. Calcular la distancia de cada una de estas funciones al subespacio mencionado.
   1. $f(x) = x^n$, n entero.
   2. $f(x) = \text{sen}(x)$.
   3. $f(x) = 3x^2$.
2. Utilizando **Maxima** suponga el espacio de polinomios, $\mathcal{P}^n$, de grado $g \leq n$ definidos en el intervalo $[-1, 1]$. Este espacio vectorial tendrá como una posible base a $\{|\pi_i\rangle\} = \left\{1, t, t^2, t^3, \cdots, t^n\right\}$, considere el producto interno definido por: $\langle f|\, g\rangle = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\ f(x)\ g(x)\sqrt{1-x^2}$. Encuentre la base ortogonal correspondiente. A esta nueva base se le conoce como polinomios de Chebyshev de segunda especie[1].

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Chebyshev_polynomials