Transformadas de Fourier

Luis A. Núñez

Escuela de Física, Facultad de Ciencias,
Universidad Industrial de Santander, Santander, Colombia

13 de octubre de 2020

Agenda de Transformadas de Fourier

1. Otra vez series de Fourier
2. Expresión integral para la series de Fourier
3. Transformada de Fourier
4. Transformadas Integrales
5. Propiedades de la Transformada de Fourier
6. Una aplicación fugaz
7. Recapitulando

- Cualquier función en $[0, 2\pi]$ puede expresarse en como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ |e_i\rangle \ \Rightarrow c_i = \langle e_i \ |f\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si} \quad i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \mathrm{sen}(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si} \quad i = 2n-1 \end{cases}$$

donde los c_i son los coeficientes de Fourier,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)\right] \ ,$$

- Cualquier función en $[0, 2\pi]$ puede expresarse en como

$$|f\rangle = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \ |e_i\rangle \ \Rightarrow c_i = \langle e_i \ |f\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) = c_0 \equiv a_0 & \text{si} \quad i = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \cos(nx) = c_{2n} \equiv a_m & \text{si} \quad i = 2n \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}x \ f(x) \ \mathrm{sen}(nx) = c_{2n-1} \equiv b_m & \text{si} \quad i = 2n - 1 \end{cases}$$

donde los c_i son los coeficientes de Fourier,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \mathrm{sen}(nx)\right] \ ,$$

- Si el período es T y para un t_0 genérico

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right] \ \text{con} \ \begin{cases} a_0 = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \ f(t) \\ \text{doble del promedio de la función} \\ \\ a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}x \ f(t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ \text{amplitud de la función par, } f(-x) = f(x) \\ \\ b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \ f(t) \ \mathrm{sen}\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \\ \text{amplitud de la función impar, } f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

Expresión integral para la series de Fourier

- Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \cos(nt) \right] \cos(nx) + \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \mathrm{sen}(nt) \right] \mathrm{sen}(nx) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \cos(n[t-x]) \, .
\end{aligned}
$$

Expresión integral para la series de Fourier

- Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \cos(nt) \right] \cos(nx) + \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \mathrm{sen}(nt) \right] \mathrm{sen}(nx) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \cos(n[t - x]) \, .
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kx) + b_k \mathrm{sen}(kx)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \cos(n(t - x)) \right] \\
&= \Re \left[\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(e^{-i(t-x)k} \right) \right\} \right] \, .
\end{aligned}
$$

Expresión integral para la series de Fourier

- Podemos expresar la expansión de una serie de Fourier de manera más compacta,

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t) \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\cos(nt)\right]\cos(nx) + \left[\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\mathrm{sen}(nt)\right]\mathrm{sen}(nx)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\cos(n[t-x])\,.
\end{aligned}
$$

- Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
F_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k\cos(kx) + b_k\mathrm{sen}(kx)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\cos(n(t-x))\right] \\
&= \Re\left[\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{-i(t-x)k}\right)\right\}\right]\,.
\end{aligned}
$$

- y al sumar la progresión geométrica que representa una serie de exponenciales llegamos a

$$
F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\left[\frac{\mathrm{sen}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(t-x)\right)}{\mathrm{sen}\left(\frac{1}{2}(t-x)\right)}\right] \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\ \mathcal{K}(x,n,t)\,,
$$

por lo tanto pasamos de $f(t)$ a $F(x)$ mediante una “transformación”

$$
F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\ \mathcal{K}(x,n,t)\,.
$$

- También es muy común expresar una función $f(t)$ en términos de una serie de Fourier compleja: $\left\{\cdots \left|\tilde{\phi}_n\right\rangle \cdots\right\} \leftrightarrow \left\{\cdots e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \cdots\right\}$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Esto es

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n \left|\tilde{\phi}_n\right\rangle \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \quad \text{con } \tilde{C}_n = \frac{\left\langle \tilde{\phi}_n | f \right\rangle}{\left\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_n \right\rangle} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \mathrm{d}t \; e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} f(t).$$

Transformada de Fourier

- También es muy común expresar una función $f(t)$ en términos de una serie de Fourier compleja: $\left\{\cdots\left|\tilde{\phi}_n\right\rangle\cdots\right\} \leftrightarrow \left\{\cdots e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}\cdots\right\}$ con $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. Esto es

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n \left|\tilde{\phi}_n\right\rangle \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \text{ con } \tilde{C}_n = \frac{\left\langle\tilde{\phi}_n|f\right\rangle}{\left\langle\tilde{\phi}_n|\tilde{\phi}_n\right\rangle} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{d}t\ e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} f(t).$$

- si $\omega_n = \frac{2n\pi}{T} \Leftrightarrow \Delta\omega_n = \frac{2\Delta n\pi}{T}$, obviamente $\Delta n = 1 \equiv \frac{T\Delta\omega_n}{2\pi}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi}\tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t}\Delta\omega_n \Leftrightarrow f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t},$$

Transformada de Fourier

- También es muy común expresar una función $f(t)$ en términos de una serie de Fourier compleja: $\left\{\cdots \left|\tilde{\phi}_n\right\rangle \cdots\right\} \leftrightarrow \left\{\cdots e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \cdots\right\}$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Esto es

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n \left|\tilde{\phi}_n\right\rangle \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \quad \text{con} \quad \tilde{C}_n = \frac{\left\langle \tilde{\phi}_n | f \right\rangle}{\left\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_n \right\rangle} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{d}t \; e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} f(t).$$

- si $\omega_n = \frac{2n\pi}{T} \Leftrightarrow \Delta\omega_n = \frac{2\Delta n\pi}{T}$, obviamente $\Delta n = 1 \equiv \frac{T\Delta\omega_n}{2\pi}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi}\tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \Leftrightarrow f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t},$$

- pasamos $\tilde{C}_n \to C_{\varpi}$, ambos discretos. Pero además cuando $T \to \infty \Rightarrow \Delta\omega_n \to 0 \Rightarrow \omega_n \to \omega$, i.e. cuando el período de la función es infinito (la función no es periódica), entonces el índice ω_n se convierte en una variable ω continua:

$$f(t) = \lim_{T\to\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi}\tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$$

Universidad Industrial de Santander
CONSTRUIMOS FUTURO

- También es muy común expresar una función $f(t)$ en términos de una serie de Fourier compleja: $\left\{\cdots \left|\tilde{\phi}_n\right\rangle \cdots\right\} \leftrightarrow \left\{\cdots e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \cdots\right\}$ con $n = 0, \pm1, \pm2, \cdots$. Esto es

$$|f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n \left|\tilde{\phi}_n\right\rangle \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \quad \text{con } \tilde{C}_n = \frac{\left\langle \tilde{\phi}_n | f \right\rangle}{\left\langle \tilde{\phi}_n | \tilde{\phi}_n \right\rangle} = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \mathrm{d}t\ e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} f(t).$$

- si $\omega_n = \frac{2n\pi}{T} \Leftrightarrow \Delta\omega_n = \frac{2\Delta n\pi}{T}$, obviamente $\Delta n = 1 \equiv \frac{T\Delta\omega_n}{2\pi}$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi}\tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t}\Delta\omega_n \Leftrightarrow f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t},$$

- pasamos $\tilde{C}_n \to C_{\varpi}$, ambos discretos. Pero además cuando $T \to \infty \Rightarrow \Delta\omega_n \to 0 \Rightarrow \omega_n \to \omega$, i.e. cuando el período de la función es infinito (la función no es periódica), entonces el índice ω_n se convierte en una variable ω continua:

$$f(t) = \lim_{T\to\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{T}{2\pi}\tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t}\Delta\omega_n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

- Con lo cual podemos expresar la transforma y la anti-transformada de Fourier como

$$F(\omega) \equiv \mathbb{T}\left\{f(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{-i\omega t} f(t) \quad \Leftrightarrow \quad f(t) \equiv \mathbb{T}^{-1}\left\{F(\omega)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\ e^{i\omega t} F(\omega)\,.$$

$$F_n(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\ \mathcal{K}(s,t)\,.$$

Nombre	$F(s) = \mathbb{T}\left\{f(t)\right\}$	$f(t) = \mathbb{T}^{-1}\left\{F(s)\right\}$
Laplace	$F(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s)\mathrm{d}s$
Fourier de senos y cosenos	$F(s) = \int_0^\infty \begin{matrix} \mathrm{sen}(st) \\ \cos(st) \end{matrix}\ f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^\infty \begin{matrix} \mathrm{sen}(st) \\ \cos(st) \end{matrix}\ F(s)\mathrm{d}s$
Fourier compleja	$F(s) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{ist} f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-ist} F(s)\mathrm{d}s$
Hankel	$F(s) = \int_0^\infty tJ_n(st)f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \int_0^\infty sJ_n(ts)F(s)\mathrm{d}s$
Mellin	$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1}\ f(t)\mathrm{d}t$	$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} s^{-t}\ F(s)\mathrm{d}s$

- La transformada de la derivada $\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathbb{T}\left\{f^{n}(t)\right\} = i^{n}\omega^{n}F(\omega)$. Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f'(t) = \left. e^{i\omega t} f(t)\right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de la derivada $\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathbb{T}\left\{f^n(t)\right\} = i^n\omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; e^{i\omega t} f'(t) = \left. e^{i\omega t} f(t)\right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \; e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral $\mathbb{T}\left\{\int^t \mathrm{d}t \; f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$ donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ es la delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de la derivada $\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathbb{T}\left\{f^n(t)\right\} = i^n \omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\; e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\; e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral $\mathbb{T}\left\{\int^t \mathrm{d}t\; f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$ donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ es la delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento $\mathbb{T}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de la derivada $\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathbb{T}\left\{f^n(t)\right\} = i^n\omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f'(t) = \left. e^{i\omega t} f(t)\right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral $\mathbb{T}\left\{\int^{t} \mathrm{d}t\ f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$ donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ es la delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento $\mathbb{T}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$
- Traslación $\mathbb{T}\left\{f(t+a)\right\} = e^{ia\omega} F(\omega)$

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de la derivada $\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathbb{T}\left\{f^n(t)\right\} = i^n\omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral $\mathbb{T}\left\{\int^t \mathrm{d}t\ f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$ donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ es la delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento $\mathbb{T}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$
- Traslación $\mathbb{T}\left\{f(t+a)\right\} = e^{ia\omega} F(\omega)$
- Multiplicación por un exponencial $\mathbb{T}\left\{e^{\alpha t} f(t)\right\} = F(\omega + i\alpha)$

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de la derivada $\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathbb{T}\left\{f^n(t)\right\} = i^n\omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral $\mathbb{T}\left\{\int^t \mathrm{d}t\ f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$ donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ es la delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento $\mathbb{T}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$
- Traslación $\mathbb{T}\left\{f(t+a)\right\} = e^{ia\omega} F(\omega)$
- Multiplicación por un exponencial $\mathbb{T}\left\{e^{\alpha t} f(t)\right\} = F(\omega + i\alpha)$
- Si $f(t)$ es par $F(\omega)$ es real o si $f(t)$ es impar $F(\omega)$ es imaginario puro

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de la derivada $\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathbb{T}\left\{f^n(t)\right\} = i^n\omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f'(t) = \left. e^{i\omega t} f(t)\right|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral $\mathbb{T}\left\{\int^t \mathrm{d}t\ f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$ donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ es la delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento $\mathbb{T}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$
- Traslación $\mathbb{T}\left\{f(t+a)\right\} = e^{ia\omega} F(\omega)$
- Multiplicación por un exponencial $\mathbb{T}\left\{e^{\alpha t} f(t)\right\} = F(\omega + i\alpha)$
- Si $f(t)$ es par $F(\omega)$ es real o si $f(t)$ es impar $F(\omega)$ es imaginario puro
- Además se cumple la relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

o equivalentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) G(-\omega) \mathrm{d}\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t) \mathrm{d}t$$

Propiedades de la Transformada de Fourier

- La transformada de la derivada $\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = i\omega F(\omega)$ y en general $\mathbb{T}\left\{f^n(t)\right\} = i^n\omega^n F(\omega)$. Esta propiedad es inmediata a partir de la definición integrando por partes

$$\mathbb{T}\left\{f'(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f'(t) = e^{i\omega t} f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\ e^{i\omega t} f(t) \equiv i\omega F(\omega)$$

- La transformada de la integral $\mathbb{T}\left\{\int^t \mathrm{d}t\ f(t)\right\} = \frac{1}{i\omega} F(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$ donde la función (distribución) $\delta(\omega)$ es la delta de Dirac y el término $2\pi c\delta(\omega)$ representa la transformada de la constante de integración
- Escalamiento $\mathbb{T}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{a} F(\frac{\omega}{a})$
- Traslación $\mathbb{T}\left\{f(t+a)\right\} = e^{ia\omega} F(\omega)$
- Multiplicación por un exponencial $\mathbb{T}\left\{e^{\alpha t} f(t)\right\} = F(\omega + i\alpha)$
- Si $f(t)$ es par $F(\omega)$ es real o si $f(t)$ es impar $F(\omega)$ es imaginario puro
- Además se cumple la relación de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t$$

o equivalentemente

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G(-\omega)\mathrm{d}\omega \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t$$

- Más aún $\mathbb{T}\left\{h(t)\right\} = F(\omega) * G(\omega) \Leftrightarrow h(t) \equiv (f*g) \equiv (g*f) \propto \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(t-\xi)\mathrm{d}\xi$

Transformada de Fourier y Ecuaciones diferenciales

$$\alpha\ \ddot{u} + \beta\ \dot{u} + \gamma\ u \equiv \alpha\ \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \beta\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \gamma\ u = \lambda(t)$$

La cual utiliza para describir sistemas mecánicos y toma la forma

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\ x = F(t) \ \text{con} \ \left\{ \begin{array}{ccl} x & \Rightarrow & \text{Desplazamiento} \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} & \Rightarrow & \text{Velocidad} \\ m & \Rightarrow & \text{masa} \\ \eta & \Rightarrow & \text{Amortiguamiento} \\ k & \Rightarrow & \text{Elasticidad} \\ F(t) & \Rightarrow & \text{Fuerza Aplicada} \end{array} \right.$$

y circuitos eléctricos

$$L\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}Q = E(t) \ \text{con} \ \left\{ \begin{array}{ccl} Q & \Rightarrow & \text{Carga Eléctrica} \\ \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I & \Rightarrow & \text{Int. de Corriente} \\ L & \Rightarrow & \text{Inductancia} \\ R & \Rightarrow & \text{Resistencia} \\ C & \Rightarrow & \text{Capacitancia} \end{array} \right.$$

Entonces

$$\mathbb{T}\left\{\alpha\ \ddot{f}+\beta\ \dot{f}+\gamma\ f\right\}\equiv\mathbb{T}\left\{\alpha\ \frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2}+\beta\ \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}+\gamma\ f(t)\right\}=\mathbb{T}\left\{\lambda(t)\right\}$$

se transforma en una ecuación algebraica

$$\left[\omega_0^2-\omega^2+i\frac{\beta}{\alpha}\omega\right]F(\omega)=\frac{\Lambda(\omega)}{\alpha}$$

donde hemos definido $F(\omega)=\mathbb{T}\left\{f(t)\right\}$, $\quad \omega_0^2=\frac{\gamma}{\alpha}\quad$ y $\Lambda(\omega)=\mathbb{T}\left\{\lambda(t)\right\}$. Por lo tanto podemos despejar $F(\omega)$ como

$$F(\omega)=\frac{\Lambda(\omega)}{\alpha\left[\omega_0^2-\omega^2+i\frac{\beta}{\alpha}\omega\right]}\qquad\Rightarrow f(t)=\mathbb{T}^{-1}\left\{\frac{\Lambda(\omega)}{\alpha\left[\omega_0^2-\omega^2+i\frac{\beta}{\alpha}\omega\right]}\right\}$$

vale decir, formalmente la solución será $f(t)=\mathbb{T}^{-1}\left\{F(\omega)\right\}$

Recapitulando

En presentación consideramos

1. Repasamos una vez más las series de Fourier

En presentación consideramos

1. Repasamos una vez más las series de Fourier
2. Presentamos la representación integral de las series de Fourier $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \; \mathcal{K}(x, n, t)$.

Recapitulando

En presentación consideramos

1. Repasamos una vez más las series de Fourier
2. Presentamos la representación integral de las series de Fourier $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \; \mathcal{K}(x, n, t)$.
3. Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquedata con n, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$ a una serie de Fourier discreta, etiquetada por ϖ: $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$

Recapitulando

En presentación consideramos

1. Repasamos una vez más las series de Fourier
2. Presentamos la representación integral de las series de Fourier $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \; \mathcal{K}(x, n, t)$.
3. Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquedata con n, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$ a una serie de Fourier discreta, etiquetada por ϖ: $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$
4. Extendimos el período de la función a toda la recta real $T \to \infty$ y convertimos la variable discreta ω_n en una variable contínua: $\Delta\omega_n \to 0 \Rightarrow \omega_n \to \omega$

Recapitulando

En presentación consideramos

1. Repasamos una vez más las series de Fourier
2. Presentamos la representación integral de las series de Fourier $F_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t\ f(t)\ \mathcal{K}(x,n,t)$.
3. Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquedata con n, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$ a una serie de Fourier discreta, etiquetada por ϖ: $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_\varpi e^{i\varpi t}$
4. Extendimos el período de la función a toda la recta real $T \to \infty$ y convertimos la variable discreta ω_n en una variable contínua: $\Delta\omega_n \to 0 \Rightarrow \omega_n \to \omega$
5. Entonces los coeficientes se nos convierten en funciones y las sumatorias en integrales $f(t) = \lim_{T\to\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{T}{2\pi}\tilde{C}_n\right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t}\Delta\omega_n\right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$, La tranformada de Fourier

En presentación consideramos

1. Repasamos una vez más las series de Fourier
2. Presentamos la representación integral de las series de Fourier $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \ f(t) \ \mathcal{K}(x, n, t)$.
3. Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquedata con n, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$ a una serie de Fourier discreta, etiquetada por ϖ: $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$
4. Extendimos el período de la función a toda la recta real $T \to \infty$ y convertimos la variable discreta ω_n en una variable contínua: $\Delta\omega_n \to 0 \Rightarrow \omega_n \to \omega$
5. Entonces los coeficientes se nos convierten en funciones y las sumatorias en integrales $f(t) = \lim_{T\to\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n \right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$, La tranformada de Fourier
6. Presentamos algunas propiedades de la Transformada de Fourier

En presentación consideramos

1. Repasamos una vez más las series de Fourier
2. Presentamos la representación integral de las series de Fourier $F_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \; f(t) \; \mathcal{K}(x, n, t)$.
3. Pasamos de una serie de Fourier discreta, etiquedata con n, $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{C}_n e^{i\left(\frac{2n\pi}{T}\right)t}$ a una serie de Fourier discreta, etiquetada por ϖ: $f(t) = \sum_{\varpi=-\infty}^{\infty} C_{\varpi} e^{i\varpi t}$
4. Extendimos el período de la función a toda la recta real $T \to \infty$ y convertimos la variable discreta ω_n en una variable contínua: $\Delta\omega_n \to 0 \Rightarrow \omega_n \to \omega$
5. Entonces los coeficientes se nos convierten en funciones y las sumatorias en integrales $f(t) = \lim_{T\to\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{T}{2\pi} \tilde{C}_n \right) e^{i\frac{2n\pi}{T}t} \Delta\omega_n \right) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \mathrm{d}\omega$, La tranformada de Fourier
6. Presentamos algunas propiedades de la Transformada de Fourier
7. Consideramos una aplicación formal para una ecuación diferencial de segundo orden