1.1 Series de Fourier

Demostrar los siguientes teoremas:

- Si $f(t)$ es continua cuando $-T/2 \leq t \leq T/2$ con $f(-T/2)=f(T/2)$, y si la derivada $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciable; entonces la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n w_0 t) + b_n \sin(n w_0 t))$$

se puede diferenciar término por término para obtener:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n w_0 (-a_n \sin(n w_0 t) + b_n \cos(n w_0 t))$$

Al definir $f(t)$ como una función continua por tramos, decimos que aunque esta tenga discontinuidades (cantidad finita), estas serán tomadas como discontinuidades removibles.

Si tomamos $f(t)$ continua en el tramo $[-T/2, T/2]$ afirmamos que esta está acotada por un M_n t.q:

$$\boxed{|f_n(t)| \leq M_n, \ \forall n \geq 1}$$

y por las condiciones de Dirichlet afirmamos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = M$.

Ahora bien, necesitamos demostrar que si $f(t)$ y $f'(t)$ son continuas en un intervalo, entonces la serie de Fourier de $f(t)$ converge a la extensión periódica de $f(t)$, $\tilde{f}(t)$ para toda t.

Así que, si vemos que $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t)$ Convergerá uniformemente, entonces:

definimos $f_n(t) = c_n e^{i w_0 n t}$, $|f_n(t)| = |c_n|$

Sabiendo que los C_n están representados de la sig. forma:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i n w_0 t} dt$$

Entonces, buscamos $|C_n|$:

$$C_n \leq \left| \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i n w_0 t} dt \right| \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)| dt$$

Que sería lo mismo que decir:

$$C_n \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt \text{, lo que nos daría } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \ //$$

La sumatoria anterior es convergente y como $M_n = |C_n|^3$ podemos afirmar que la sumatoria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(t)$ también convergerá, y lo hará uniformemente.

ahora bien, habiendo demostrado que la serie de Fourier para $f(t)$ converge uniformemente, procedemos a derivar término por término.

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$f'(t) = \cancel{\frac{d}{dt}}\left(\frac{a_0}{2}\right)^{0} + \frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(a_n \cos(n\omega_0 t)\right) + \frac{d}{dt}\left(b_n \sin(n\omega_0 t)\right)$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} - a_n n \omega_0 \operatorname{sen}(n\omega_0 t) + b_n n \omega_0 \cos(n\omega_0 t)$$

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 \left(- a_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t)\right) //$$

- Sea $f(t)$ continua por tramos en el intervalo $-T/2 \leq t \leq T/2$ y sea $f(t+T) = f(t)$.

Demostrar que la serie de Fourier se puede integrar término por término para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{1}{2} a_0 (t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0}\Big[-b_n(\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)) + a_n(\operatorname{sen}(n\omega_0 t_2) - \operatorname{sen}(n\omega_0 t_1))\Big]$$

Como ya demostramos anteriormente la convergencia uniforme de $f(t)$, pasamos a integrar directamente:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\right] dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_0}{2}\,dt + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{t_1}^{t_2} \cos(n\omega_0 t)\,dt + b_n \int_{t_1}^{t_2} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)\,dt\right)$$

$$= \frac{a_0}{2}(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n\omega_0}\Big[\operatorname{sen}(n\omega_0 t)\Big]_{t_1}^{t_2} - \frac{b_n}{n\omega_0}\Big[\cos(n\omega_0 t)\Big]_{t_1}^{t_2}\right.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(t_2-t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n\omega_0}\left(\operatorname{sen}(n\omega_0 t_2) - \operatorname{sen}(n\omega_0 t_1)\right)\cdots\right.$$

$$\left. - \frac{b_n}{n\omega_0}\left(\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)\right)\right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}(t_2-t_1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\omega_0}\left[a_n\left(\operatorname{sen}(n\omega_0 t_2) - \operatorname{sen}(n\omega_0 t_1)\right)\cdots\right.$$

$$\left. - b_n\left(\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)\right)\right] //$$

1.3 Función $\zeta(s)$ de Riemann :

1. Integrar (analíticamente) la serie de Fourier de $f(t) = t^2$ en el intervalo $-\pi \le t \le \pi$ y $f(t+2\pi) = f(t)$

Primero hallamos la representación de la serie de Fourier para esta función :

$$f(t) = t^2 \quad , \; -\pi \le t \le \pi$$

Hallamos los coeficientes de Fourier :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi^2 //$$

Coeficientes de Fourier

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos\left(\frac{n\cancel{\pi} t}{\cancel{\pi}}\right)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2\cos(nt)\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^3}\left(n^2t^2\sin(nt) - 2(\sin(nt) - nt\cos(nt))\right)\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}}\left(\frac{4\cancel{\pi}(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2}(-1)^n //$$

$$\cancel{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \operatorname{sen}(nt)\,dt} \overset{0}{} \longrightarrow \text{función impar}$$

Por lo que la representación en series de Fourier para $f(t) = t^2$ en el intervalo $-\pi \le t \le \pi$ será :

$$t^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nt) //$$

Scanned by TapScanner

Ahora, integramos la serie hallada:

$$\int f(t)\,dt = \int \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{\pi^2}{3}t + 4\sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nt)\,dt$$

$$\int t^2\,dt = \frac{\pi^2}{3}t + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\frac{\operatorname{sen}(nt)}{n}$$

$$\frac{t^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}t + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen}(nt)$$

$$\frac{t^3}{3} - \frac{\pi^2}{3}t = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen}(nt)$$

$$\frac{1}{12}\left(t^3 - \pi^2 t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen}(nt)$$

$$\frac{t}{12}\left(t^2 - \pi^2\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}\operatorname{sen}(nt)$$

- Usando dicha integral y la identidad de Parseval, pensar en un programa para estimar numéricamente la función $\zeta(6)$ de Riemann.

$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

<u>Identidad de Parseval</u>

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} [f(t)]^2\,dt = \frac{1}{4}a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad ; \qquad T = 2\pi$$

Calculamos nuestros coeficientes de Fourier para usar la identidad de parseval.

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{12}\left(t^2 - \pi^2\right)dt = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t^3}{12}\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t\pi^2}{12}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cancelto{0}{\left[\frac{t^4}{4\cdot 12}\right]_{-\pi}^{\pi}} - \cancelto{0}{\left[\frac{t^2\pi^2}{2\cdot 12}\right]_{-\pi}^{\pi}}\right) = 0$$

$a_n = 0 \rightarrow t^3$ es impar

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi t}{L}\right)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{12}\left(t^2 - \pi^2\right)\operatorname{sen}(nt)\,dt$$

Resolviendo la integral tenemos:

$$b_n = \frac{1}{\cancel{\pi}}\left[\frac{\cancel{\pi}(-1)^n}{n^3}\right] = \frac{(-1)^n}{n^3}$$

Ahora usamos la identidad de Parseval:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{t}{12}\left(t^2-\pi^2\right)\right]^2 dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n^3}\right]^2$$

$$\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{t}{12}\left(t^2-\pi^2\right)\right]^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^6}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{t^2}{12^2}\left(t^2-\pi^2\right)^2\right] dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^6}$$

Desarrollando la integral obtenemos:

$$\frac{1}{\cancel{\pi}}\left[\frac{\pi^{\cancel{7}}}{945}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^6}$$

$$\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^6} \longrightarrow (-1)^{2n} = 1$$

Que sería lo mismo que decir:

$$\frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} = \zeta(6) \,//$$