

# LMAD - Rekurencje

## A Zadania na ćwiczenia

**Zadanie A.1.** Bankomat ma w zasobach tylko banknoty o wartości 20 i 50 PLN. Napisz funkcję **rekurencyjną**, który wyznaczy wszystkie sposoby, na które bankomat może wydać kwotę  $n \cdot 10$  PLN, jeśli interesuje nas jedynie kolejność nominałów. Przykładowo, kwotę 70 PLN można wydać na dwa sposoby: najpierw banknot 20 PLN, potem 50 PLN lub najpierw banknot 50 PLN, a potem 20 PLN. Wypróbuj działanie funkcji dla następujących wartości  $n$ :

- a. 12,
- b. 20.

Ile konfiguracji otrzymujemy w każdym przypadku?

**Zadanie A.2.** Dane jest jednorodnie liniowe równanie rekurencyjne:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r},$$

gdzie  $c_i, i = 1, 2, \dots, r$ , są zadanymi stałymi (niezależnymi od  $n$ ) oraz  $c_r \neq 0$ . Napisz program, który w sposób **rekurencyjny** wyznacza  $n$ -ty wyraz ciągu zadanego przez to równanie rekurencyjne. Sprawdź działanie programu dla następujących równań rekurencyjnych i zadaných wyrazów:

- a.  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , dla  $n \geq 2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ;  $a_{20} = ?$ ,
- b.  $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$ , dla  $n \geq 3$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -2$ ,  $a_3 = -3$ ;  $a_{15} = ?$ .

**Zadanie A.3.** Dane jest jednorodnie liniowe równanie rekurencyjne:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r},$$

gdzie  $c_i, i = 1, 2, \dots, r$ , są zadanymi stałymi (niezależnymi od  $n$ ) oraz  $c_r \neq 0$ . Napisz program, który w sposób **iteracyjny** wyznacza  $n$ -ty wyraz ciągu zadanego przez to równanie rekurencyjne. Sprawdź działanie programu dla następujących równań rekurencyjnych i zadaných wyrazów:

- a.  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , dla  $n \geq 2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ;  $a_{20} = ?$ ,
- b.  $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$ , dla  $n \geq 3$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -2$ ,  $a_3 = -3$ ;  $a_{15} = ?$ .

**Zadanie A.4.** Dane jest jednorodnie liniowe równanie rekurencyjne:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_r a_{n-r},$$

gdzie  $c_i, i = 1, 2, \dots, r$ , są zadanymi stałymi (niezależnymi od  $n$ ) oraz  $c_r \neq 0$ . Zmodyfikuj programy z dwóch poprzednich zadań tak, aby wyznaczały także czas potrzebny do wyznaczenia danego wyrazu ciągu.

Na wejściu podane będą: liczba naturalna  $n$ , ciąg współczynników  $c_1, c_2, \dots, c_r$  oraz ciąg początkowych wyrazów ciągu  $a_0, a_1, \dots, a_{r-1}$  oddzielonych przecinkami. Wyjście powinno zawierać  $n+1$  linijek, a w  $i$ -tej ( $0 \leq i \leq n$ ) linii powinny być wypisane kolejno: wartość wyrazu  $a_i$  ciągu, czas potrzebny do jego wyliczenia przy użyciu procedury rekurencyjnej i czas porzebny do jego wyliczenia przy użyciu procedury iteracyjnej.

**Przykład:**

**Wejście:**

3  
1, -1, 2  
1, 0, -1

**Wyjście:**

1, 1.7200363799929619e-06, 6.399932317435741e-07  
0, 1.2500095181167126e-06, 4.899920895695686e-07  
-1, 4.799803718924522e-07, 4.00003045797348e-07  
1, 3.7899590097367764e-06, 2.700020559132099e-06

Sprawdź działanie programu dla następujących równań rekurencyjnych i zadaných wyrazów:

- a.  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , dla  $n \geq 2$ ,  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ;  $n = 30$ ,
- b.  $a_n = 3a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3}$ , dla  $n \geq 3$ ,  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = -2$ ,  $a_3 = -3$ ;  $n = 20$ .

**Zadanie A.5.** Ciąg  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  jest zadany przez następujące równanie rekurencyjne:

$$a_n = -\frac{35}{6}a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{6}.$$

- a. Używając jednego z wcześniej napisanych programów, wyznacz pierwszych 30 wyrazów tego ciągu. Na podstawie wyznaczonych wyrazów, spróbuj określić, co możemy powiedzieć o granicy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- b. Używając metod poznanych na ćwiczeniach, wyznacz wzór ogólny na  $n$ -y wyraz ciągu. Korzystając z tego wzoru, wyznacz ponownie pierwszych 30 wyrazów tego ciągu. Na podstawie wyznaczonych wyrazów, spróbuj określić, co możemy powiedzieć o granicy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .
- c. Porównaj rezultaty z podpunktów a) i b). Spróbuj wyjaśnić powstałe różnice.

## B Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

**Zadanie B.1.** Wypełniamy planszę o wymiarach  $3 \times 2n$  nierozróżnialnymi kostkami domina o wymiarach  $1 \times 2$ . Plansza ma być zakryta w całości, żadna kostka domina nie powinna wystawać poza planszę ani nachodzić na inną kostkę i kostek nie możemy łamać. Napisz funkcję, która dla zadanego  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  wypisuje wszystkie możliwe wypełnienia planszy oraz podaje ich liczbę. Funkcja powinna opierać się na rekurencji.

**Zadanie B.2.** Pan Adam odebrał telefon z banku. Konsultant banku zaproponował mu następującą ofertę inwestycyjną:

- pan Adam wpłaci na konto banku  $e - 1$  zł ( $e$  - podstawa logarytmu naturalnego),
- po pierwszym miesiącu bank pobiera 1 zł za prowadzenie inwestycji,
- po drugim miesiącu bank podwaja zgromadzony kapitał, a następnie pobiera 1 zł za prowadzenie inwestycji,
- po trzecim miesiącu bank potraja zgromadzony kapitał, a następnie pobiera 1 zł za prowadzenie inwestycji,
- ...,
- po  $n$ -tym miesiącu bank mnoży zgromadzony kapitał przez  $n$ , a następnie pobiera 1 zł za prowadzenie inwestycji.

Niech  $a_n$  oznacza kapitał, który może zgromadzić pan Adam, jeśli zdecyduje się skorzystać z tej oferty. Napisz program, który wylicza wartość  $a_n$ , korzystając z procedury rekurencyjnej. Sprawdź działanie tego programu dla  $n \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$ . Następnie spróbuj znaleźć wzór ogólny dla  $a_n$  i na jego podstawie ponownie wylicz wartości  $a_n$  dla  $n \in \{5, 10, 15, 20, 25\}$ . Spróbuj wyjaśnić powstałe różnice.

## C Zadania do samodzielnej pracy w domu

**Zadanie C.1.** Co roku pracownik dostaje podwyżkę pensji, która wynosi  $p\%$  kwoty pensji wypłacanej przez poprzedni rok pomniejszone o  $q\%$  kwoty pensji wypłacanej rok wcześniej ( $0 < q < p < 100$ ). Na początku pracownik zarabia 1000 zł. Napisz funkcję rekurencyjną, która wyznaczy wysokość pensji pracownika po  $n$  latach. Na wejściu będą podane liczby  $n$ ,  $p$ ,  $q$ , a na wyjściu ma być podana pensja po  $n$  latach.

**Zadanie C.2.** Dany jest zbiór  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ . Interesują nas te podzbiory tego zbioru (niekoniecznie niepuste), które nie zawierają dwóch kolejnych liczb naturalnych. Napisz funkcję rekurencyjną, która dla danego  $n$  wypisuje wszystkie takie podzbiory i podaje ich liczbę.

**Zadanie C.3.** Przed domem Pawła stoi  $n$ -metrowy maszt. Paweł chce wypełnić go flagami, przy czym ma do dyspozycji nieograniczoną liczbę flag o szerokości 1 m występujących w  $k$  różnych kolorach oraz nieograniczoną liczbę flag o szerokości 2 m występujących w  $m$  różnych kolorach. Ważne jest dla niego w jakiej kolejności będą umieszczone flagi, jaka będzie ich szerokość i kolor. Napisz funkcję rekurencyjną, która wypisze wszystkie możliwe wypełnienia masztu. Na wejściu podane będą dwie listy: pierwsza zawierająca kolory flag o szerokości 1 m i druga zawierająca kolory flag o szerokości 2 m.