Trabalho 1
Processos Iterativos
&
Solução de equações não-lineares

Dayanne Fernandes da Cunha, 13/0107191
Yurick Hauschild , 12/0024136

[1]Dep. Matemática – Universidade de Brasília (UnB)
Cálculo Numérico - Turma A

dayannefernandesc@gmail.com, yurick.hauschild@gmail.com

Abstract. *This report corresponds to the ...*

Resumo. *Este relatório corresponde aos informativos das resoluções do Trabalho 1 de Cálculo Numérico da Turma A do semestre 2016/2.*

Parte I: Processos iterativos

Esta primeira questão será sobre as bifurcações do mapa logístico. Considere o processo iterativo da Equação 1, chamado de *mapa logístico*. Este processo iterativo, apesar de aparentar ser bastante simples, tem uma dinâmica muito rica, que será analisada em detalhes ao longo desta parte 1 do trabalho.

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \tag{1}$$

De suas análises, você deve obter que para $\lambda \geq 3$, nenhum ponto fixo é assintoticamente estável. Porém, vamos ver o que acontece quando $\lambda \geq 3$. Já em $\lambda = 3$, você verá que o sistema tem um comportamento interessante: apesar das iterações não convergirem para um ponto fixo, o sistema irá oscilar, depois de algumas iterações, entre dois valores fixos. Quando isto acontece, dizemos que o processo iterativo tem uma **órbita** de período 2, isto é, $x_n = x_{n+2} = x_{n+4} = ... = x_1^*$ e $x_{n+1} = x_{n+3} = x_{n+5} = ... = x_2^*$. Este comportamento persistirá até $\lambda \approx 3.449$.

Se aumentarmos um pouco mais λ, veremos agora que o processo passa a ter órbita de período 4. Se seguirmos aumentando λ, veremos que o período das órbitas irá dobrar repetidas vezes até $\lambda \approx 3.569$. Isto é o que chamamos de uma bifurcação no sistema e, em particular, esta bifurcação se chama de duplicação de períodos (*period doubling*). O sistema se torna ainda mais rico, porém, se aumentarmos ainda mais λ. Neste caso, órbitas de qualquer período $k \in \mathbb{N}$ aparecem, intercaladas com sequências de bifurcações de duplicação de períodos. Isto é o que chamamos de *caos determinístico*. Este comportamento é observado até $\lambda = 4$. A partir deste ponto, as iterações simplesmente divergem.

Questão 1

Determine analiticamente pontos fixos x^* do mapa logístico, Equação 1 e determine as condições para que sejam assintoticamente estáveis. Veja que o parâmetro crucial deste problema é λ.

Resolução: A partir do processo iterativo descrito na Equação 1 é possível achar os pontos fixos x^* analisando as raízes do sistema:

$$\begin{aligned} x^* &= \lambda x^*(1-x^*) \\ \lambda x^* - \lambda {x^*}^2 - x^* &= 0 \\ x^*(\lambda - \lambda x^* - 1) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Pela Equação 3 temos o ponto fixo $x^* = 0$. Agora quando $x^* \neq 0$:

$$\begin{aligned} \lambda - \lambda x^* - 1 &= 0 \\ -x^* &= \frac{1-\lambda}{\lambda} \\ x^* &= \frac{\lambda - 1}{\lambda} \end{aligned} \tag{3}$$

Pela Equação 4 temos o ponto fixo $x^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$.

Para que a Equação 1 do processo iterativo do mapa logístico tenha pontos fixos assintoticamente estáveis é necessário que a condição da dicotomia na Equação 4 seja válida para todos os pontos fixos do sistema.

$$|g(x^*)'| < 1 \tag{4}$$

Questão 2

Escreva um programa computacional para calcular os pontos fixos da Equação 1 a partir de seus resultados analíticos e trace um gráfico λ x x^*. Trace, para seis valores representativos de λ, o resultado das iterações x_n x n.

Questão 3

Escreva um programa para determinar, iterativamente, os elementos distintos de suas órbitas para $\lambda \in [3,4]$, em incrementos de 0.001. Salve os seus resultados em um arquivo e, juntando-os com os pontos fixos encontrados na questão anterior, trace os resultados λ x x_k^*, para λ variando no intervalo $[0,4]$, e surpreenda-se com a representação gráfica do caos!

Questão 4

Para cada valor de λ utilizado nos cálculos, salve em uma tabela o período de cada uma das órbitas obtidas e, posteriormente, trace este resultado em um gráfico. Qual é o maior período de uma órbita observada em sua simulação? Quantas vezes a órbita de período 2 foi obtida? E a de período 5?

Parte II: Solução de equações não-lineares

Nesta segunda parte, vamos estudar o processo de aquecimento de uma barra muito longa de um material, que é aquecida em uma de suas extremidades com o auxílio de um maçarico. Para isto, vamos modelar este processo da seguinte maneira: vamos considerar uma barra de seção transversal constante, semi-infinita e posicionada no eixo $x \leq 0$. A temperatura inicial da barra é T_i em toda a barra. O maçarico será modelado especificando-se um fluxo de calor constante q na posição $x = 0$. Considere que a barra tenha difusividade térmica α e que a temperatura da barra seja $T = T(x, t)$. Este problema é governado pela Equação 5 do calor, cuja solução pode ser facilmente encontrada pela aplicação da *Transformada de Laplace* (Equação 6) (Não é preciso resolver a equação!).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ com } \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = q \text{ e } T(x, 0) = T_i \tag{5}$$

$$T(x, t) = T_i + q \left[2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} - xerfc\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right] \tag{6}$$

A função erfc(x) é a função erro complementar, definida na Equação 7.

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-w^2} dw = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-w^2} dz = 1 - erf(z) \tag{7}$$

A segunda integral (lado direito) na Equação 7 é a chamada função erro, $erf(z)$. A função $erfc(z)$ é uma função especial, definida por uma integral que não pode ser resolvida explicitamente, já que não há uma primitiva trivial para a função e^{-z^2}. Porém, sabemos que $erfc(z)$ é uma função decrescente, tal que $erfc(z) \to 0$ quando $z \to \infty$, e que $erfc(0) = 1$. Assim, é fácil perceber o que a Equação 6 representa fisicamente.

A Equação 6 descreve como a temperatura do corpo varia em cada posição x ao longo do tempo t. Assim, fixado um x, sabemos como a temperatura vai evoluir nesta posição ao longo do tempo. O problema, porém, é que a Equação 6 envolve funções muito complicadas, que não permitem a avaliação direta de valores numéricos. Vamos explorar a Equação 6 computacionalmente e vamos ver o que podemos aprender sobre este sistema. Nesta parte 2 do trabalho, consideraremos que a função erro $erf(z)$ será dada seguinte aproximação racional (*Abramowitz & Stegun, 1964*):

$$erf(z) = 1 - \frac{1}{(1 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_6 z^6)^{16}} \tag{8}$$

Na Equação 8 temos os seguintes valores para as constantes $a1, ..., a6$:

$$a_1 = 0.0705230784, \qquad a_2 = 0.0422820123,$$
$$a_3 = 0.0092705272, \qquad a_4 = 0.0001520143,$$
$$a_5 = 0.0002765672, \qquad a_6 = 0.0000430638.$$

A função $erfc(z)$ que aparece na Equação 6 deverá ser calculada a partir destas expressões.

Questão 5

Suponha que queiramos determinar, a partir da Equação 6, quando a temperatura atingirá um determinado valor especificado T_f, para valores de α, q e x conhecidos. Apresente a formulação para o *Método de Newton-Raphson* aplicado a este problema.

Questão 6

Escreva um programa que, para $T_i = 10$, $q = 1$ e $\alpha = 1$, determina o tempo t^* para que a temperatura em $x = 1$ seja $T_f = 50$, usando o método de *Newton-Raphson*. Apresente esta resposta com precisão de 6 casas decimais, indicando quantas iterações foram necessárias para alcançar esta precisão. Faça uma estimativa a priori do chute inicial t_0, isto é, faça estimativas de valores, justificando seus passos. Apresente, com base no chute inicial, argumentos analíticos para justificar a existência de uma raiz para a equação em questão. Faça um teste da convergência do Método de *Newton-Raphson* em função do chute inicial. Por exemplo, escolha valores para o chute inicial iguais a 2, 3, 4, 5 e 10 vezes o chute estimado no item anterior e compare, num gráfico, a quantidade de iterações necessárias para alcançar a precisão desejada.

Questão 7

Implemente, também, o método da bisseção para este mesmo problema e, partindo de um intervalo de menor tamanho possível (como escolhê-lo?) centrado no chute inicial da questão anterior, compare a quantidade de iterações necessárias para se alcançar a mesma precisão para t^*. Mostre como prever este resultado teoricamente.

Questão 8

Para os mesmos valores dos parâmetros T_i, q, α, automatize o seu programa para encontrar os valores de t^* para posições x variando entre $x = 1$ e $x = 5$. Faça este procedimento para pelo menos 10 pontos neste intervalo, trace um gráfico do seu resultado e comente-o. Você consegue definir uma velocidade da frente de calor que está se propagando por esta barra?

Questão 9

Repita o procedimento da Questão , mas desta vez mantendo-se em um ponto fixo x e variando o valor de q entre $q = 1$ e $q = 10$. Faça este procedimento para pelo menos 10 pontos neste intervalo, trace um gráfico do seu resultado e comente-o. O que acontece quando q aumenta? Agora, faça a mesma análise mantendo-se $q = 1$, mas variando α entre $\alpha = 1$ e $\alpha = 10$. O que acontece quando α aumenta?

Questão 10

Que outras análises poderiam ser feitas neste problema e com as ferramentas disponíveis? Escolha uma e apresente seus resultados, comentando-os adequadamente.