

# Trabalho 1

## Processos Iterativos

### &

## Solução de equações não-lineares

Dayanne Fernandes da Cunha, 13/0107191  
Yurick Hauschild, 12/0024136

<sup>1</sup>Dep. Matemática – Universidade de Brasília (UnB)  
Cálculo Numérico – Turma A

dayannefernandesc@gmail.com, yurick.hauschild@gmail.com

**Resumo.** *Este relatório corresponde aos informativos das resoluções do Trabalho 1 de Cálculo Numérico da Turma A do semestre 2016/2.*

### 1. Parte I : Processos iterativos

Esta primeira questão será sobre as bifurcações do mapa logístico. Considere o processo iterativo da Equação 1, chamado de *mapa logístico*. Este processo iterativo, apesar de aparentar ser bastante simples, tem uma dinâmica muito rica, que será analisada em detalhes ao longo desta parte 1 do trabalho.

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) \quad (1)$$

De suas análises, você deve obter que para  $\lambda \geq 3$ , nenhum ponto fixo é assintoticamente estável. Porém, vamos ver o que acontece quando  $\lambda \geq 3$ . Já em  $\lambda = 3$ , você verá que o sistema tem um comportamento interessante: apesar das iterações não convergirem para um ponto fixo, o sistema irá oscilar, depois de algumas iterações, entre dois valores fixos. Quando isto acontece, dizemos que o processo iterativo tem uma **órbita** de período 2, isto é,  $x_n = x_{n+2} = x_{n+4} = \dots = x_1^*$  e  $x_{n+1} = x_{n+3} = x_{n+5} = \dots = x_2^*$ . Este comportamento persistirá até  $\lambda \approx 3.449$ .

Se aumentarmos um pouco mais  $\lambda$ , veremos agora que o processo passa a ter órbita de período 4. Se seguirmos aumentando  $\lambda$ , veremos que o período das órbitas irá dobrar repetidas vezes até  $\lambda \approx 3.569$ . Isto é o que chamamos de uma bifurcação no sistema e, em particular, esta bifurcação se chama de duplicação de períodos (*period doubling*). O sistema se torna ainda mais rico, porém, se aumentarmos ainda mais  $\lambda$ . Neste caso, órbitas de qualquer período  $k \in \mathbb{N}$  aparecem, intercaladas com sequências de bifurcações de duplicação de períodos. Isto é o que chamamos de *caos determinístico*. Este comportamento é observado até  $\lambda = 4$ . A partir deste ponto, as iterações simplesmente divergem.

#### 1.1. Questão 1

Determine analiticamente pontos fixos  $x^*$  do mapa logístico, Equação 1 e determine as condições para que sejam assintoticamente estáveis. Veja que o parâmetro crucial deste problema é  $\lambda$ .

**Resolução:** A partir do processo iterativo descrito na Equação 1 é possível achar os pontos fixos  $x^*$  resolvendo a seguinte equação:

$$\begin{aligned}x^* &= \lambda x^*(1 - x^*) \\ \lambda x^* - \lambda x^{*2} - x^* &= 0 \\ x^*(\lambda - \lambda x^* - 1) &= 0\end{aligned}\tag{2}$$

Pela Equação 2 temos o ponto fixo  $x^* = 0$ . Agora quando  $x^* \neq 0$ :

$$\begin{aligned}\lambda - \lambda x^* - 1 &= 0 \\ -x^* &= \frac{1 - \lambda}{\lambda} \\ x^* &= \frac{\lambda - 1}{\lambda}\end{aligned}\tag{3}$$

Pela Equação 3 temos o ponto fixo  $x^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ .

Para que a Equação 1 do processo iterativo do mapa logístico tenha pontos fixos assintoticamente estáveis é necessário que a condição da dicotomia na Equação 4 seja válida para todos os pontos fixos do sistema.

$$\begin{aligned}g(x^*) &= \lambda x^*(1 - x^*) \\ |g'(x^*)| &< 1 \\ |\lambda - 2\lambda x^*| &< 1\end{aligned}\tag{4}$$

Para  $x^* = 0$ , temos:

$$\begin{aligned}|\lambda - 2\lambda 0| &< 1 \\ |\lambda| &< 1\end{aligned}\tag{5}$$

Para  $x^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$ , por sua vez:

$$\begin{aligned}\left| \lambda - 2\lambda \frac{\lambda-1}{\lambda} \right| &< 1 \\ |\lambda - 2\lambda + 2| &< 1 \\ |\lambda - 2| &< 1 \\ |\lambda| &< 3\end{aligned}\tag{6}$$

Concluimos, então, que, dado o apropriado  $x_0$ ,  $x^*$  vai para 0 com  $\lambda < 1$  e para  $\frac{\lambda-1}{\lambda}$  com  $1 < \lambda < 3$ .

## 1.2. Questão 2

Escreva um programa computacional para calcular os pontos fixos da Equação 1 a partir de seus resultados analíticos e trace um gráfico  $\lambda \times x^*$ . Trace, para seis valores representativos de  $\lambda$ , o resultado das iterações  $x_n \times n$ .

**Resolução:** Primeiro foi avaliado a escolha do  $x_0$ , que, através da análise do comportamento da função para diferentes valores de  $x$ , percebeu-se que o intervalo ideal para escolha do  $x_0$  está contido entre  $0.33 < x < 0.5$  como podemos observar na resolução abaixo:

$$\begin{aligned} 0 &< g'(x^*) < 1 \\ 0 &< \lambda - 2\lambda x < 1 \\ -\lambda &< -2\lambda x < 1 - \lambda \\ \lambda &> 2\lambda x > \lambda - 1 \\ 0.5 &> x > \frac{\lambda - 1}{2\lambda} \end{aligned} \quad (7)$$

Dado que  $\lambda < 3$  para o processo iterativo ser assintoticamente estável temos que um  $x_0$  ideal deve repousar no intervalo  $0.33 < x < 0.5$ . Escolhemos então o valor  $x_0 = 0.4$ .

O algoritmo implementado para gerar os dados do processo iterativo pode ser encontrado no arquivo "parte1/questao2.f90".

Foram gerados então dois gráficos para demonstrar os resultados analíticos dos pontos fixos, onde, na primeira Figura 1 mostramos o plano cartesiano de  $\lambda \times x^*$  e na Figura 2 é focado nos resultados das iterações  $x_n \times n$ .

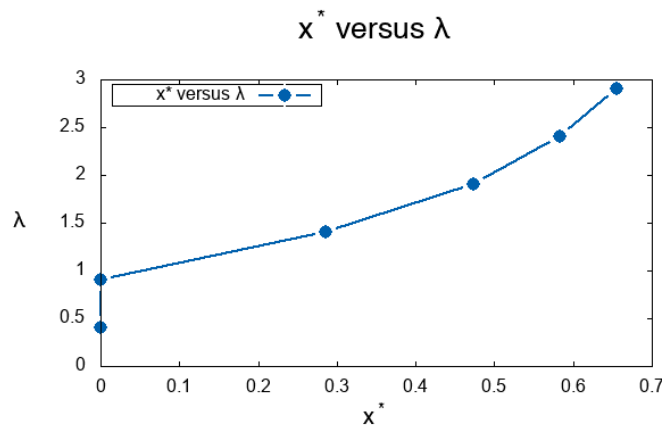


Figura 1. Gráfico de  $\lambda$  versus  $x^*$ .

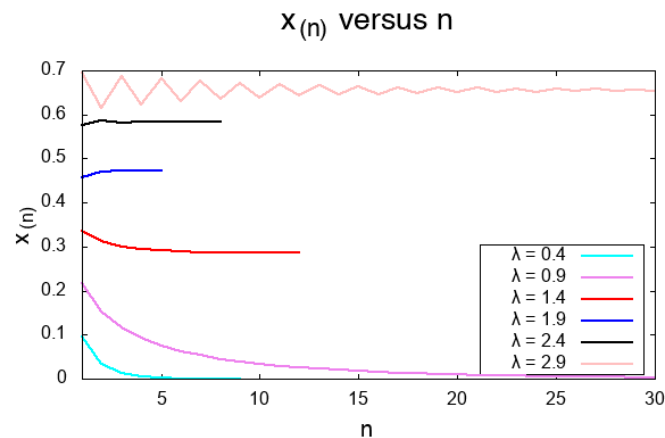


Figura 2. Gráfico de  $x_n$  versus  $n$

### 1.3. Questão 3

Escreva um programa para determinar, iterativamente, os elementos distintos de suas órbitas para  $\lambda \in [3, 4]$ , em incrementos de 0.001. Salve os seus resultados em um arquivo e, juntando-os com os pontos fixos encontrados na questão anterior, trace os resultados  $\lambda$  x  $x_k^*$ , para  $\lambda$  variando no intervalo  $[0, 4]$ , e surpreenda-se com a representação gráfica do caos!

**Resolução:** Foi implementado o programa para gerar os dados de  $\lambda \in [3, 4]$  em incrementos de 0.001, ele pode ser encontrado no arquivo "parte1/questao34.f90". Os resultados encontrados podem ser encontrados no arquivo "parte1/data/questao3.dat". Este arquivo possui na primeira coluna os valores de  $\lambda$  entre  $[3, 4]$  e nas colunas restantes os valores de cada iteração até formar uma órbita completa para cada valor iterado de  $\lambda$ .

Traçamos o gráfico  $\lambda$  x  $x_k^*$  com os resultados encontrados com o programa desta Questão 1.3 e da Questão 1.2 variando o  $\lambda$  no intervalo  $[0, 4]$  e a Figura 3 foi encontrada. O gráfico encontrado mostra o comportamento oscilatório esperado de  $4 \geq \lambda \geq 3$ , encontrando bifurcações a partir de  $\lambda = 3$ .

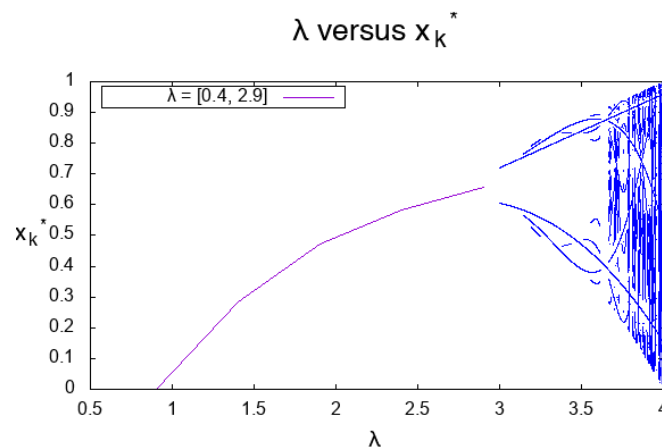


Figura 3. Gráfico de  $\lambda$  versus  $x_k^*$ .

#### 1.4. Questão 4

Para cada valor de  $\lambda$  utilizado nos cálculos, salve em uma tabela o período de cada uma das órbitas obtidas e, posteriormente, trace este resultado em um gráfico. Qual é o maior período de uma órbita observada em sua simulação? Quantas vezes a órbita de período 2 foi obtida? E a de período 5?

**Resolução:** O algoritmo da Questão 1.4 também está contido no arquivo `"parte1/questao34.f90"` pois utiliza o mesmo raciocínio. Os dados encontrados através do algoritmo podem ser encontrados no arquivo `"parte1/data/questao4.dat"`. A primeira coluna da tabela de dados contém valores de  $\lambda$  entre  $[3, 4]$  em incrementos de 0.001, e na segunda coluna possui o número de períodos de cada órbita de  $\lambda$ . O gráfico foi gerado a partir desses dados e podemos observá-lo na Figura 4. Podemos ver no gráfico que o número de ciclos cresce proporcionalmente à  $\lambda$ , porém, foi encontrado erros de decaimento nos períodos das órbitas possivelmente devido à erros de aproximação.

O maior período de uma órbita observado na simulação foi de  $k = 21$ , sendo o  $k = 2$  observado em 194 órbitas e  $k = 5$  em 13 órbitas.

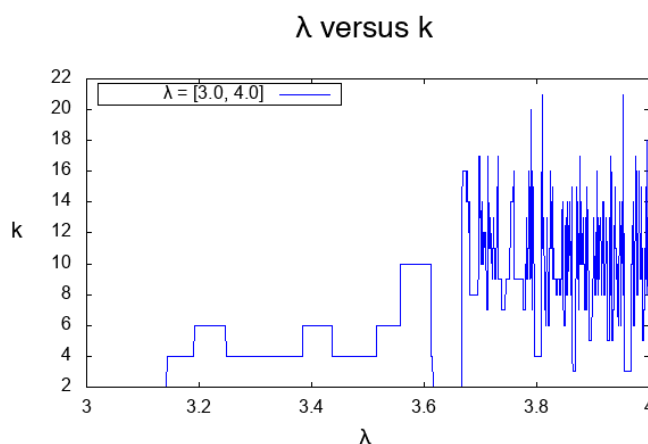


Figura 4. Gráfico de  $\lambda$  versus  $k$ .

## 2. Parte II : Solução de equações não-lineares

Nesta segunda parte, vamos estudar o processo de aquecimento de uma barra muito longa de um material, que é aquecida em uma de suas extremidades com o auxílio de um maçarico. Para isto, vamos modelar este processo da seguinte maneira: vamos considerar uma barra de seção transversal constante, semi-infinita e posicionada no eixo  $x \leq 0$ . A temperatura inicial da barra é  $T_i$  em toda a barra. O maçarico será modelado especificando-se um fluxo de calor constante  $q$  na posição  $x = 0$ . Considere que a barra tenha difusividade térmica  $\alpha$  e que a temperatura da barra seja  $T = T(x, t)$ . Este problema é governado pela Equação 8 do calor, cuja solução pode ser facilmente encontrada pela aplicação da *Transformada de Laplace* (Equação 9) (Não é preciso resolver a equação!).

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \text{ com } \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = q \text{ e } T(x, 0) = T_i \quad (8)$$

$$T(x, t) = T_i + q \left[ 2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} - x \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] \quad (9)$$

A função  $\operatorname{erfc}(x)$  é a função erro complementar, definida na Equação 10.

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-w^2} dw = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-w^2} dz = 1 - \operatorname{erf}(z) \quad (10)$$

A segunda integral (lado direito) na Equação 10 é a chamada função erro,  $\operatorname{erf}(z)$ . A função  $\operatorname{erfc}(z)$  é uma função especial, definida por uma integral que não pode ser resolvida explicitamente, já que não há uma primitiva trivial para a função  $e^{-z^2}$ . Porém, sabemos que  $\operatorname{erfc}(z)$  é uma função decrescente, tal que  $\operatorname{erfc}(z) \rightarrow 0$  quando  $z \rightarrow \infty$ , e que  $\operatorname{erfc}(0) = 1$ . Assim, é fácil perceber o que a Equação 9 representa fisicamente.

A Equação 9 descreve como a temperatura do corpo varia em cada posição  $x$  ao longo do tempo  $t$ . Assim, fixado um  $x$ , sabemos como a temperatura vai evoluir nesta posição ao longo do tempo. O problema, porém, é que a Equação 9 envolve funções muito complicadas, que não permitem a avaliação direta de valores numéricos. Vamos explorar a Equação 9 computacionalmente e vamos ver o que podemos aprender sobre este sistema. Nesta parte 2 do trabalho, consideraremos que a função erro  $\operatorname{erf}(z)$  será dada seguinte aproximação racional (Abramowitz & Stegun, 1964):

$$\operatorname{erf}(z) = 1 - \frac{1}{(1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_6 z^6)^{16}} \quad (11)$$

Na Equação 11 temos os seguintes valores para as constantes  $a_1, \dots, a_6$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.0705230784, & a_2 &= 0.0422820123, \\ a_3 &= 0.0092705272, & a_4 &= 0.0001520143, \\ a_5 &= 0.0002765672, & a_6 &= 0.0000430638. \end{aligned}$$

A função  $\operatorname{erfc}(z)$  que aparece na Equação 9 deverá ser calculada a partir destas expressões.

## 2.1. Questão 5

Suponha que queiramos determinar, a partir da Equação 9, quando a temperatura atingirá um determinado valor especificado  $T_f$ , para valores de  $\alpha$ ,  $q$  e  $x$  conhecidos. Apresente a formulação para o *Método de Newton-Raphson* aplicado a este problema.

**Resolução:** O *Método de Newton-Raphson* é representado da seguinte forma:

$$t_{n+1} = t_n - \frac{f(t_n)}{f'(t_n)} \quad (12)$$

Sendo  $f(t_n)$  e  $f'(t_n) = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$  representadas a seguir:

$$f(t_n) = T_i - T_f + q \left[ 2\sqrt{\frac{\alpha t_n}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t_n}} - x \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t_n}} \right) \right] \quad (13)$$

$$f'(t_n) = \frac{\partial T(x, t_n)}{\partial t_n} = \frac{q\alpha e^{-\frac{x^2}{4\alpha t_n}}}{\sqrt{\pi\alpha t_n}} \quad (14)$$

Logo aplicando a Equação 13 e a Equação 14 no método da Equação 12 teremos:

$$t_{n+1} = t_n - \left( \frac{T_i - T_f - q x \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t_n}} \right)}{\frac{q\alpha e^{-\frac{x^2}{4\alpha t_n}}}{\sqrt{\pi\alpha t_n}}} + 2t_n \right) \quad (15)$$

## 2.2. Questão 6

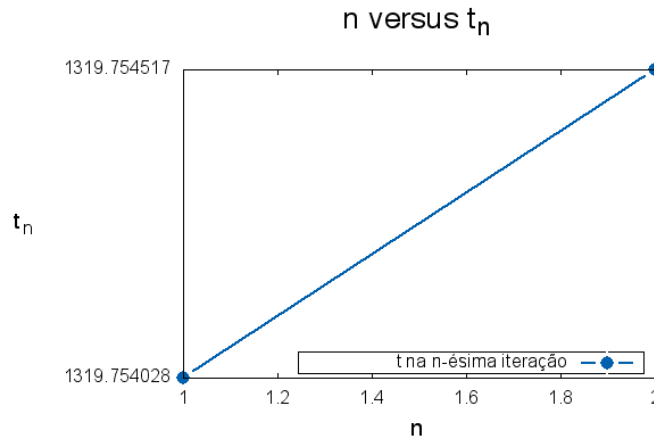
Escreva um programa que, para  $T_i = 10$ ,  $q = 1$  e  $\alpha = 1$ , determina o tempo  $t^*$  para que a temperatura em  $x = 1$  seja  $T_f = 50$ , usando o método de *Newton-Raphson*. Apresente esta resposta com precisão de 6 casas decimais, indicando quantas iterações foram necessárias para alcançar esta precisão. Faça uma estimativa a priori do chute inicial  $t_0$ , isto é, faça estimativas de valores, justificando seus passos. Apresente, com base no chute inicial, argumentos analíticos para justificar a existência de uma raiz para a equação em questão. Faça um teste da convergência do Método de *Newton-Raphson* em função do chute inicial. Por exemplo, escolha valores para o chute inicial iguais a 2, 3, 4, 5 e 10 vezes o chute estimado no item anterior e compare, num gráfico, a quantidade de iterações necessárias para alcançar a precisão desejada.

**Resolução:** O algoritmo da Questão 2.2 pode ser encontrado no arquivo "parte2/questao6.f90". Nele possui o processo iterativo utilizando o método de *Newton-Raphson* apresentado na questão anterior (Questão 2.1) utilizando os valores constantes de  $T_i = 10$ ,  $q = 1$  e  $\alpha = 1$ . O arquivo "parte2/data/questao6.dat" possui o tempo  $t^*$  encontrado após 5 iterações para quando a temperatura final em  $x = 1$  seja  $T_f = 50$ . A resposta é apresentada com uma precisão de 6 casas decimais e foi encontrado utilizando o chute inicial de  $t_0 = 800$ .

Analisando a fisionomia de  $f(t)$ , o chute inicial  $t_0$  não pode ter valores negativos pois ele está contido dentre raízes quadradas e nem pode ser nulo pois ele tem papel de divisor em alguns termos. Analisando o comportamento da equação para grandes valores de  $t$ , percebe-se que:

$$\begin{aligned}
T_f &= T_i + q \left[ 2\sqrt{\frac{\alpha t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha t}} - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right) \right] \\
50 &= 10 + \left[ 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{1}{4t}} - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right) \right] \\
40 &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} - 1 \\
41 &= 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \\
(20.5)^2 &= \frac{t}{\pi} \\
420.25\pi &= t \\
t &\approx 1320
\end{aligned} \tag{16}$$

Um bom chute, portanto, seria 1320. Ao utilizar o ponto fixo gerado pelo algoritmo desta questão (Figura 5) como entrada de  $f(t^*)$  foi obtido como resultado  $f(t^*) = 0$ , o que indica que a raiz encontrada está correta.



**Figura 5. Gráfico de  $n$  versus  $t_n$ .**

Logo, para verificar a convergência do Método de *Newton-Raphson* utilizamos a dicotomia  $|f'(t^*)| < 1$ . Quanto mais próximo de 0  $f'(t^*)$  se aproximar melhor será a convergência, logo, se tivermos  $f'(t^*) = 0$  teremos uma convergência quadrática. Portanto como podemos ver na Equação 17 a função irá convergir quase quadraticamente.

$$f'(t_n) = \frac{\partial T(x, t_n)}{\partial t_n} = \frac{q\alpha e^{\frac{-x^2}{4\alpha t_n}}}{\sqrt{\pi\alpha t_n}} = \frac{1.1 \cdot e^{\frac{-1}{4 \cdot 1.1 \cdot (1319.754395)}}}{\sqrt{\pi \cdot 1.1 \cdot (1319.754395)}} = 1.55273098E - 02 \tag{17}$$

A partir do valor inicial de  $t_0 = 1320$ , pegamos este valor e multiplicamos ele por 2, 3, 4, 5 e 10 para conferir a quantidade de iterações necessárias para alcançar a precisão desejada de 6 casas decimais. O resultado pode ser observado na Figura 6.



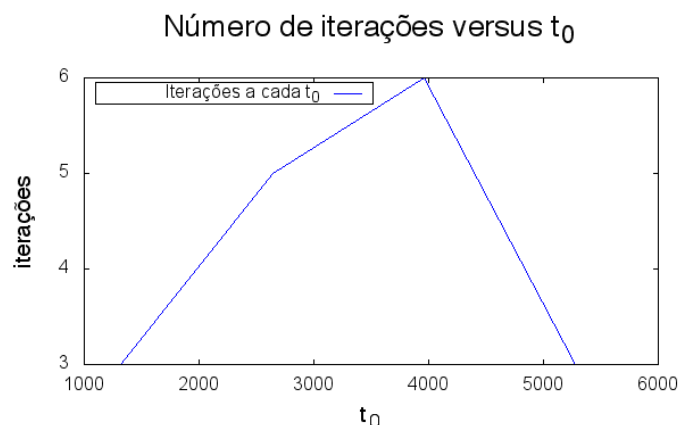


Figura 6. Gráfico de número de iterações a cada  $t_0$ .

### 2.3. Questão 7

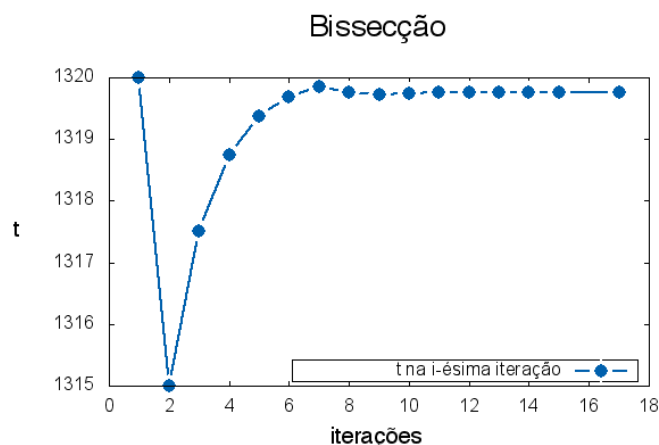
Implemente, também, o método da bisseção para este mesmo problema e, partindo de um intervalo de menor tamanho possível (como escolhê-lo?) centrado no chute inicial da questão anterior, compare a quantidade de iterações necessárias para se alcançar a mesma precisão para  $t^*$ . Mostre como prever este resultado teoricamente.

**Resolução:** O método de bisseção foi implementado para o mesmo problema na parte 2 deste trabalho e pode ser encontrado no arquivo *parte2/questao78910.f90*. O intervalo escolhido para aplicar o método foi de  $[1310, 1330]$ , pois  $f(1310) = -0.151741028$ ,  $f(1330) = 0.158782959$  e, como seus sinais são opostos, isto significa que há uma raiz da função no intervalo.

O professor pode notar que o código não utiliza este intervalo para os seus cálculos. Isto é decorrente do fato de que o arquivo *parte2/questao78910.f90* contém um código flexível, que abrange as soluções das questões 7, 8, 9 e 10. Portanto, um intervalo próprio para uma configuração de constantes pode não ser próprio para outra, e vice-versa.

Para modificar o intervalo no código, basta corrigir os parâmetros que o subprograma *bisect()* recebe, na linha 54.

Com o dado intervalo, foram necessárias 16 iterações para encontrar o valor com a precisão desejada. As iterações estão visíveis na Figura 7 abaixo.



**Figura 7. Gráfico de iterações da bissecção.**

O número de iterações máximo para o espaço amostral utilizado (de 20.000.000 de entradas, por causa da precisão de 6 dígitos) é  $\log_2(20.000.000) = 24$ . É fácil verificar que o número de iterações encontrado está na margem aceitável para o algoritmo, e que este número é muito maior que o número de iterações encontrado na questão 6 (6 iterações), indicando uma maior eficiência do método de Newton sobre a busca por bissecção.

## 2.4. Questão 8

Para os mesmos valores dos parâmetros  $T_i$ ,  $q$ ,  $\alpha$ , automatize o seu programa para encontrar os valores de  $t^*$  para posições  $x$  variando entre  $x = 1$  e  $x = 5$ . Faça este procedimento para pelo menos 10 pontos neste intervalo, trace um gráfico do seu resultado e comente-o. Você consegue definir uma velocidade da frente de calor que está se propagando por esta barra?

**Resolução:** O algoritmo implementado para resolver esta questão pode ser encontrado no arquivo *"parte2/questao78910.f90"*. Para os mesmo valores  $T_i = 10$ ,  $q = 1$ ,  $\alpha = 1$ , buscamos encontrar  $t^*$  para posições de  $x$  variando de  $[1, 5]$ . Na tabela de dados que se encontra no arquivo *"parte2/data/questao8.dat"* contém 10 pontos dentro do intervalo sugerido. O gráfico que geramos pode ser visto na Figura 8 abaixo. Podemos analisar pelo gráfico abaixo que ao variar  $x$ ,  $t(x)$  cresce proporcionalmente.

A velocidade média de propagação pode ser encontrada utilizando a variação de espaço no tempo, logo, temos a variação de  $x$  sendo igual  $5 - 1 = 4$  e a de  $t$  igual a 232.753905, resultando então em  $0.015466x/t$ .

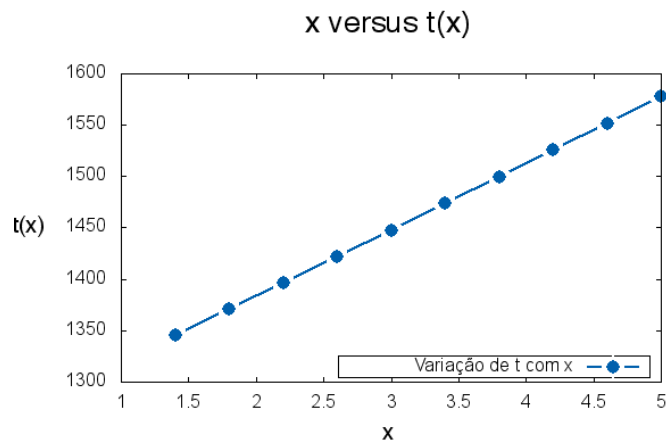


Figura 8. Gráfico de  $x$  versus  $t(x)$ .

## 2.5. Questão 9

Repita o procedimento da Questão 2.4, mas desta vez mantendo-se em um ponto fixo  $x$  e variando o valor de  $q$  entre  $q = 1$  e  $q = 10$ . Faça este procedimento para pelo menos 10 pontos neste intervalo, trace um gráfico do seu resultado e comente-o. O que acontece quando  $q$  aumenta? Agora, faça a mesma análise mantendo-se  $q = 1$ , mas variando  $\alpha$  entre  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 10$ . O que acontece quando  $\alpha$  aumenta?

**Resolução:** O mesmo procedimento da Questão 2.4 foi seguido e o algoritmo implementado para resolver esta questão também está presente no arquivo "parte2/questao78910.f90", porém desta vez  $x$  está em ponto fixo e temos uma variação de  $q$  entre  $[1, 10]$ . A tabela de dados que se encontra no arquivo "parte2/data/questao9.1.dat" contém 10 pontos entre este intervalo sugerido. O gráfico que geramos pode ser visto na Figura 9 abaixo. Podemos analisar pelo gráfico abaixo que ao variar  $q$ ,  $t(q)$  varia na forma  $\frac{1}{q}$ , conforme esperado.

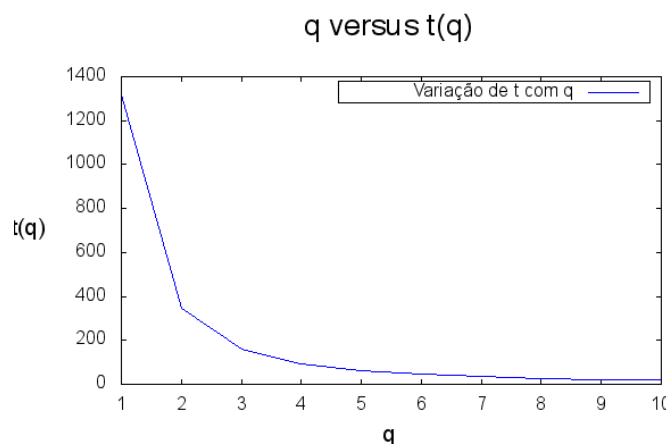


Figura 9. Gráfico de variação de  $t$  com  $q$ .

Logo após variamos  $\alpha$  entre  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 10$  com ponto fixo de  $q = 1$ . A tabela de dados que se encontra no arquivo "parte2/data/questao9.2.dat" contém 10 pontos dentro

do intervalo sugerido. O gráfico gerado é representado na Figura 10 abaixo. Pode-se analisar pelo gráfico que ao variar  $\alpha$ ,  $t(\alpha)$  encontramos a variação da forma  $e^{-\alpha}$ .

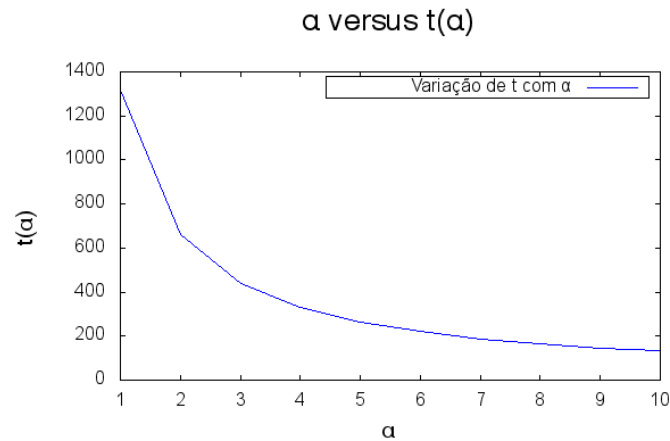


Figura 10. Gráfico de variação de  $t$  com  $\alpha$ .

## 2.6. Questão 10

Que outras análises poderiam ser feitas neste problema e com as ferramentas disponíveis? Escolha uma e apresente seus resultados, comentando-os adequadamente.

**Resolução:** É possível verificar o comportamento do processo de aquecimento de uma barra a partir de temperaturas iniciais diferentes. Por exemplo, vamos supor uma variação de  $T_i \in [0, 100]$ . Temos como valores constantes  $q = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $x = 1$  e  $T_f = 500$ , sendo assim, o mesmo procedimento da Questão 2.4 e Questão 2.5 é utilizado para 10 pontos neste intervalo. Uma tabela de dados foi gerada e o gráfico foi plotado a partir destes dados, como podemos analisar na Figura 11 abaixo.

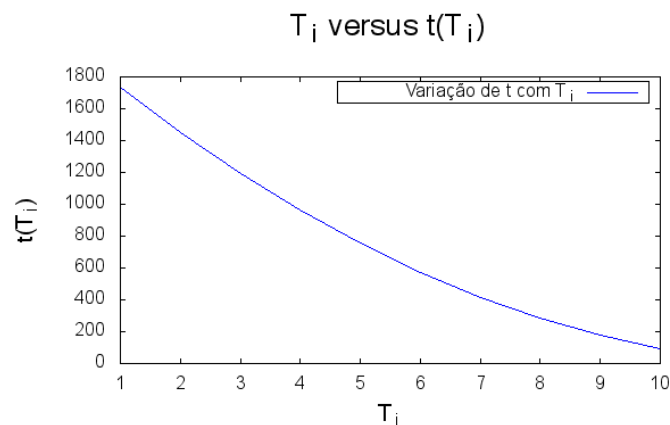


Figura 11. Gráfico de variação de  $t$  com  $T_i$

O comportamento aproximadamente linear seguindo  $t(T_i) \propto -T_i$  foi exatamente o esperado da análise da fisionomia da função.