

## Clase Matriz

La clase `Matriz` tiene dos constructores: uno que recibe una matriz como parámetro y otro que recibe las dimensiones de la matriz. Los elementos de la matriz pueden ser accedidos o modificados mediante la propiedad indexada.

Además de los operadores aritméticos básicos (`+`, `-` y `\*`), se han implementado también operadores para multiplicar una matriz con un escalar y para multiplicar una matriz con un vector. El ejemplo anterior es un ejemplo canónico.

### Propiedades que están de manifiesto

**Adición:**  $A, B \in M_{m \times n}(K), C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \forall i, j.$

#### Propiedades de la adición:

Sean  $A, B, C \in M_{m \times n}(K)$ , entonces,

- Asociativa:  $(A + B) + C = A + (B + C)$
- Conmutativa:  $A + B = B + A$
- Neutro:  $O_{m \times n}$
- Opuesto:  $A' = -(a_{ij}) \forall i, j$

#### Multiplicación por un escalar:

Sean  $A \in M_{m \times n}(K), \alpha \in K \Rightarrow \alpha A = (\alpha a_{ij}) \forall i, j.$

#### Propiedades de la multiplicación por un escalar:

- Existe Neutro:  $1 \cdot A = A; \quad 1 \in K.$
- Asociativa:  $\alpha \beta A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A); \quad \alpha, \beta \in K.$
- Distributiva:  $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A; \quad \alpha, \beta \in K.$
- Distributiva:  $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; \quad \alpha \in K.$

## Multiplicación de matrices:

$$A \in M_{m \times p}(K), B \in M_{p \times n}(K), C = AB \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} \quad \forall i, j.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mp} \end{pmatrix}_{m \times p} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{p1} & \dots & b_{pj} & \dots & b_{pn} \end{pmatrix}_{p \times n} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & c_{ij} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}_{m \times n}$$

## Propiedades de la multiplicación de matrices:

- Asociativa:  $A(BC) = (AB)C$ .
- Distributiva respecto a la suma por la izquierda:  $A(B+C) = AB + AC$ .
- Distributiva respecto a la suma por la derecha:  $(B+C)A = BA + CA$ .
- Asociativa respecto al producto por un escalar:  $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ .
- Neutro para el producto (son diferentes a la izquierda y a la derecha):

$$A_{m \times n} I_n = A_{m \times n}, \quad I_m A_{m \times n} = A_{m \times n}.$$

- Multiplicación por una matriz nula:

$$A_{m \times n} O_{n \times p} = O_{m \times p}, \quad O_{p \times m} A_{m \times n} = O_{p \times n}.$$