Mes solutions aux Olympiades de Première

Pierre GALLOIS

April 24, 2023

Contents

Exercice 1

Le fonctionnement d'un ordinateur

Amiens 2017 - Exercice 4

1.

Action	P_1	P_2	Résultat
Situation initiale	$[a, b, c]$	$[d, e]$	Aucun
Lire P_1	$[a, b, c]$	$[d, e]$	c
Transfert de P_1 vers P_2	$[a, b]$	$[d, e, c]$	Aucun
Dépiler P_1	$[a]$	$[d, e, c]$	Aucun
Empiler la donnée "f" sur P_1	$[a, f]$	$[d, e, c]$	Aucun
Transfert de P_2 vers P_1	$[a, f, c]$	$[d, e]$	Aucun
Lire P_2	$[a, f, c]$	$[d, e]$	e

2. Soit $P_1 = [a, b, c]$

On ne peut pas lire b sans recourir à une autre pile ni perdre des données : Il faut d'abord enlever c soit avec "Transfert de P_1 vers P_2" soit avec "Dépiler P_1" avant de "Lire P_1", ce qui est à l'encontre des conditions.

3. Dans ce cas, on peut commencer par faire "Transfert de P_1 vers P_2", ce qui donne[1] :

$$P_1 = [a, b]$$

$$P_2 = [c]$$

On peut alors "Lire P_1", ce qui donne b.

4. Soient $P_1 = [a, b]$, $P_2 = []$, $P_3 = []$

[1]Si P_2 est vide

Action	P_1	P_2	P_3
Situation initiale	$[a, b]$	$[]$	$[]$
Transfert de P_1vers P_3	$[a]$	$[]$	$[b]$
Transfert de P_1vers P_2	$[]$	$[a]$	$[b]$
Transfert de P_3vers P_1	$[b]$	$[a]$	$[]$
Transfert de P_2vers P_1	$[b, a]$	$[]$	$[]$

4.

Action	P_1	P_2	P_3
Situation initiale	$[a, b, c]$	$[]$	$[]$
Transfert de P_1vers P_3	$[a, b]$	$[]$	$[c]$
Transfert de P_1vers P_2	$[a]$	$[b]$	$[c]$
Transfert de P_1vers P_2	$[]$	$[b, a]$	$[c]$
Transfert de P_3vers P_1	$[c]$	$[b, a]$	$[]$
Transfert de P_2vers P_3	$[c]$	$[b]$	$[a]$
Transfert de P_2vers P_1	$[c, b]$	$[]$	$[a]$
Transfert de P_3vers P_1	$[c, b, a]$	$[]$	$[]$

Exercice 2

Palindromes binaires

Lyon 2017 - Exercice 2

Partie 1

1.

$$\begin{aligned} 135 &= 128 + 4 + 2 + 1 \\ &= 2^7 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\ &= (10000111)_2 \end{aligned}$$

Le nombre 135 se note donc 10000111 dans le système binaire.

2.

$$\begin{aligned} (101011)_2 &= 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \\ &= 32 + 8 + 2 + 1 \\ &= 43 \end{aligned}$$

Donc 101011 en binaire est 43 en décimal.

3.a) Cas $N = 6$:

Le reste de la division euclidienne de N par 2[1] est 0. 0 est donc affiché. Ensuite, on affecte à N $6 \div 2 = 3$[2]. On affiche $3 \mod 2 = 1$ et on affecte à N $3 \div 2 = 1$, puis on affiche $1 \mod 2 = 0$ et on affecte à N $1 \div 2 = 0$. Comme $N = 0$. Le programme s'arrête.

Les nombres affichés sont donc $0, 1, 1$.

Cas $N = 53$:

Les nombres affichés sont $1, 0, 1, 0, 1, 1$

b) On sait que $6 = (110)_2$ et $53 = (110101)_2$. On en conclut que le programme affiche les chiffre de N converti en binaire à l'envers.

[1] noté par la suite $N \mod 2$

[2] Le quotient de la division euclidienne de 6 par 2

4. On note n le nombre de chiffres dans un nombre et p la place d'un chiffre dans un nombre. On a : TODO : Preuve

$$2^n = (\sum_{p=1}^{n} 2^{n-p}) + 1$$

Or,

$$\begin{aligned}\underbrace{(111\ldots1)_2}_{n \text{ fois}} &= 2^{n-1} + 2^{n-2} \ldots 2^{n-n} \\ &= \sum_{p=1}^{n} 2^{n-p}\end{aligned}$$

On a donc bien $\underbrace{(111\ldots1)_2}_{n \text{ fois}} = 2^n - 1$.

5. On a autant de couleurs possibles sur 24 bits que de nombre que l'on peut créer avec ces 24 bits. Or, on a $2^{24} = 16\,777\,216$ combinaisons différentes. On peut donc créer 16 777 216 couleurs différentes avec ce système.

Partie 2

1. Les années palindromes binaires entre 1 et 129 sont :

$$\begin{aligned}
1 &= (1)_2 \\
3 &= (11)_2 \\
5 &= (101)_2 \\
7 &= (111)_2 \\
9 &= (1001)_2 \\
15 &= (1111)_2 \\
17 &= (10001)_2 \\
21 &= (10101)_2 \\
27 &= (11011)_2 \\
31 &= (11111)_2 \\
33 &= (100001)_2 \\
45 &= (101101)_2 \\
51 &= (110011)_2 \\
63 &= (111111)_2 \\
65 &= (1000001)_2 \\
73 &= (1001001)_2 \\
85 &= (1010101)_2 \\
93 &= (1011101)_2 \\
99 &= (1100011)_2 \\
107 &= (1101011)_2 \\
119 &= (1110111)_2 \\
127 &= (1111111)_2 \\
129 &= (10000001)_2
\end{aligned}$$

2. $2017 = (11111100001)_2$. Ce nombre n'est donc un palindrome binaire, car retourné il vaut 7231
3. La prochaine année palidrome binaire est $2047 = (11111111111)_2$
4. On utilise les résultats du 1.

- Palindromes à 3 chiffres : 2 (101, 111)
- Palindromes à 4 chiffres : 2 (1001, 1111)
- Palindromes à 5 chiffres : 4 (10001, 10101, 11011, 11111)
- Palindromes à 6 chiffres : 4 (100001, 101101, 110011, 111111)

- Palindromes à 7 chiffres : 8 (1000001, 1001001, 1010101, 1011101, 1100011, 1101011, 1110111, 1111111)

5. a)

TODO: Finir l'exo

Exercice 3

La constante de Pythagore

Normandie (Caen-Rouen) 2017 - Exercice 1

Partie A

On note L la longueur et l la largeur.

1. D'après l'énoncé, un rectangle diagonal est tel que :

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}}$$

On peut donc dire que :

$$\begin{aligned}
\frac{L}{l} &= \frac{l \cdot 2}{L} \\
\frac{L^2}{l} &= 2l \\
L^2 &= 2l^2 \\
\frac{L^2}{l^2} &= 2 \\
\frac{L}{l} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

2. On note $A(n)$ l'aire d'une feuille A_n, ainsi que L_n et l_n les longueurs et largeurs d'une feuille A_n. On a:

$$A(n) = L_n \cdot l_n$$

On sait que $A(0) = 1$. Trouvons L_0 et l_0 :

$$\begin{aligned}
L_0 \cdot l_0 &= 1 \\
L_0 &= \frac{1}{l_0}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

$$L_0{}^2 = \frac{L_0}{l_0} \qquad \frac{L_0}{l_0} = \frac{1}{l_0{}^2}$$

$$L_0{}^2 = \sqrt{2} \qquad \sqrt{2} = \frac{1}{l_0{}^2}$$

$$L_0 = \sqrt{\sqrt{2}} \qquad l_0 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$$l_0 = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$l_0 = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$l_0 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$$

Partie B

1. Cas pair au carré :

Si la division en facteurs premiers d'un nombre contient 2, alors son carré contient aussi 2. Ce carré est donc pair.

Cas impair au carré :

Cette fois, la division en facteurs premiers ne contient pas de 2. Le carré n'en contient pas non plus, le carré est donc impair.

2. Supposons qu'il existe a et b tels que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$

a)

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$
$$a^2 = 2b^2$$

On sait que a^2 est divisible par deux car si $a = 2n$, a est pair. Or la racine d'un nombre pair est paire. Donc $\sqrt{a^2} = a$ est pair.

b) Si un carré est pair, sa décomposition en facteurs premiers contient au moins deux 2. a^2 est pair, donc $\frac{a^2}{2}$ est aussi pair. Or, $\frac{a^2}{2} = b^2$. b^2 est pair, donc b est pair.

c)

Définition. *Un nombre rationnel peut être écrit sous la forme d'une fraction* ***irréductible*** $\frac{p}{q}$ *avec p et q des entiers relatifs.*

On sait que a et b sont pairs, ce qui signifie qu'ils sont tous deux divisibles par 2. La définition dit que $\frac{a}{b}$ doit être irréductible, mais ici $\frac{a}{b}$ est réductible par 2. On en conclut que $\sqrt{2}$ n'est par un nombre rationnel.
3. Le nombre $\frac{22\,619\,537}{15\,994\,428}$ est rationnel, mais $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. On peut donc dire $\sqrt{2} \neq \frac{22\,619\,537}{15\,994\,428}$