

# Mes solutions aux Olympiades de Première

Pierre GALLOIS

April 24, 2023



# Contents

1	Amiens 2017 - Exercice 4	5
2	Lyon 2017 - Exercice 2	7
3	Normandie (Caen-Rouen) 2017 - Exercice 1	11



# Exercice 1

## *Le fonctionnement d'un ordinateur*

Amiens 2017 - Exercice 4

1.

Action	$P_1$	$P_2$	Résultat
Situation initiale	$[a, b, c]$	$[d, e]$	Aucun
Lire $P_1$	$[a, b, c]$	$[d, e]$	$c$
Transfert de $P_1$ vers $P_2$	$[a, b]$	$[d, e, c]$	Aucun
Dépiler $P_1$	$[a]$	$[d, e, c]$	Aucun
Empiler la donnée " $f$ " sur $P_1$	$[a, f]$	$[d, e, c]$	Aucun
Transfert de $P_2$ vers $P_1$	$[a, f, c]$	$[d, e]$	Aucun
Lire $P_2$	$[a, f, c]$	$[d, e]$	$e$

2. Soit  $P_1 = [a, b, c]$

On ne peut pas lire  $b$  sans recourir à une autre pile ni perdre des données : Il faut d'abord enlever  $c$  soit avec "Transfert de  $P_1$  vers  $P_2$ " soit avec "Dépiler  $P_1$ " avant de "Lire  $P_1$ ", ce qui est à l'encontre des conditions.

3. Dans ce cas, on peut commencer par faire "Transfert de  $P_1$  vers  $P_2$ ", ce qui donne<sup>1</sup> :

$$P_1 = [a, b]$$

$$P_2 = [c]$$

On peut alors "Lire  $P_1$ ", ce qui donne  $b$ .

4. Soient  $P_1 = [a, b]$ ,  $P_2 = []$ ,  $P_3 = []$

---

<sup>1</sup>Si  $P_2$  est vide

Action	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Situation initiale	$[a, b]$	$[]$	$[]$
Transfert de $P_1$ vers $P_3$	$[a]$	$[]$	$[b]$
Transfert de $P_1$ vers $P_2$	$[]$	$[a]$	$[b]$
Transfert de $P_3$ vers $P_1$	$[b]$	$[a]$	$[]$
Transfert de $P_2$ vers $P_1$	$[b, a]$	$[]$	$[]$

4.

Action	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Situation initiale	$[a, b, c]$	$[]$	$[]$
Transfert de $P_1$ vers $P_3$	$[a, b]$	$[]$	$[c]$
Transfert de $P_1$ vers $P_2$	$[a]$	$[b]$	$[c]$
Transfert de $P_1$ vers $P_2$	$[]$	$[b, a]$	$[c]$
Transfert de $P_3$ vers $P_1$	$[c]$	$[b, a]$	$[]$
Transfert de $P_2$ vers $P_3$	$[c]$	$[b]$	$[a]$
Transfert de $P_2$ vers $P_1$	$[c, b]$	$[]$	$[a]$
Transfert de $P_3$ vers $P_1$	$[c, b, a]$	$[]$	$[]$

## Exercice 2

### *Palindromes binaires*

Lyon 2017 - Exercice 2

#### Partie 1

1.

$$\begin{aligned} 135 &= 128 + 4 + 2 + 1 \\ &= 2^7 + 2^2 + 2^1 + 2^0 \\ &= (10000111)_2 \end{aligned}$$

Le nombre 135 se note donc 10000111 dans le système binaire.

2.

$$\begin{aligned} (101011)_2 &= 2^5 + 2^3 + 2^1 + 2^0 \\ &= 32 + 8 + 2 + 1 \\ &= 43 \end{aligned}$$

Donc 101011 en binaire est 43 en décimal.

**3.a)** Cas  $N = 6$ :

Le reste de la division euclidienne de  $N$  par  $2^1$  est 0. 0 est donc affiché. Ensuite, on affecte à  $N$   $6 \div 2 = 3^2$ . On affiche  $3 \bmod 2 = 1$  et on affecte à  $N$   $3 \div 2 = 1$ , puis on affiche  $1 \bmod 2 = 0$  et on affecte à  $N$   $1 \div 2 = 0$ . Comme  $N = 0$ . Le programme s'arrête.

Les nombres affichés sont donc 0, 1, 1.

Cas  $N = 53$  :

Les nombres affichés sont 1, 0, 1, 0, 1, 1

**b)** On sait que  $6 = (110)_2$  et  $53 = (110101)_2$ . On en conclut que le programme affiche les chiffres de  $N$  converti en binaire à l'envers.

---

<sup>1</sup>noté par la suite  $N \bmod 2$

<sup>2</sup>Le quotient de la division euclidienne de 6 par 2

4. On note  $n$  le nombre de chiffres dans un nombre et  $p$  la place d'un chiffre dans un nombre. On a : TODO : Preuve

$$2^n = \left( \sum_{p=1}^n 2^{n-p} \right) + 1$$

Or,

$$\begin{aligned} \underbrace{(111 \dots 1)_2}_{n \text{ fois}} &= 2^{n-1} + 2^{n-2} \dots 2^{n-n} \\ &= \sum_{p=1}^n 2^{n-p} \end{aligned}$$

On a donc bien  $\underbrace{(111 \dots 1)_2}_{n \text{ fois}} = 2^n - 1$ .

5. On a autant de couleurs possibles sur 24 bits que de nombre que l'on peut créer avec ces 24 bits. Or, on a  $2^{24} = 16\,777\,216$  combinaisons différentes. On peut donc créer 16 777 216 couleurs différentes avec ce système.

## Partie 2



**1.** Les années palindromes binaires entre 1 et 129 sont :

$$\begin{aligned}1 &= (1)_2 \\3 &= (11)_2 \\5 &= (101)_2 \\7 &= (111)_2 \\9 &= (1001)_2 \\15 &= (1111)_2 \\17 &= (10001)_2 \\21 &= (10101)_2 \\27 &= (11011)_2 \\31 &= (11111)_2 \\33 &= (100001)_2 \\45 &= (101101)_2 \\51 &= (110011)_2 \\63 &= (111111)_2 \\65 &= (1000001)_2 \\73 &= (1001001)_2 \\85 &= (1010101)_2 \\93 &= (1011101)_2 \\99 &= (1100011)_2 \\107 &= (1101011)_2 \\119 &= (1110111)_2 \\127 &= (1111111)_2 \\129 &= (10000001)_2\end{aligned}$$

**2.**  $2017 = (11111100001)_2$ . Ce nombre n'est donc un palindrome binaire, car retourné il vaut 7231

**3.** La prochaine année palidrome binaire est  $2047 = (1111111111)_2$

**4.** On utilise les résultats du 1.

- Palindromes à 3 chiffres : 2 (101, 111)
- Palindromes à 4 chiffres : 2 (1001, 1111)
- Palindromes à 5 chiffres : 4 (10001, 10101, 11011, 11111)
- Palindromes à 6 chiffres : 4 (100001, 101101, 110011, 111111)

- Palindromes à 7 chiffres : 8 (1000001, 1001001, 1010101, 1011101, 1100011, 1101011, 1110111, 1111111)

**5. a)**

TODO: Finir l'exo

## Exercice 3

### *La constante de Pythagore*

Normandie (Caen-Rouen) 2017 - Exercice 1

#### Partie A

On note  $L$  la longueur et  $l$  la largeur.

1. D'après l'énoncé, un rectangle diagonal est tel que :

$$\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}}$$

On peut donc dire que :

$$\begin{aligned}\frac{L}{l} &= \frac{l \cdot 2}{L} \\ \frac{L^2}{l} &= 2l \\ L^2 &= 2l^2 \\ \frac{L^2}{l^2} &= 2 \\ \frac{L}{l} &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

2. On note  $A(n)$  l'aire d'une feuille  $A_n$ , ainsi que  $L_n$  et  $l_n$  les longueurs et largeurs d'une feuille  $A_n$ . On a:

$$A(n) = L_n \cdot l_n$$

On sait que  $A(0) = 1$ . Trouvons  $L_0$  et  $l_0$  :

$$\begin{aligned}L_0 \cdot l_0 &= 1 \\ L_0 &= \frac{1}{l_0}\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$L_0^2 = \frac{L_0}{l_0}$$

$$L_0^2 = \sqrt{2}$$

$$L_0 = \sqrt{\sqrt{2}}$$

$$\frac{L_0}{l_0} = \frac{1}{l_0^2}$$

$$\sqrt{2} = \frac{1}{l_0^2}$$

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}$$

$$l_0 = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$$

$$l_0 = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$l_0 = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$$

**Partie B**