



Рис. 79

При преобразовании параметра, меняющего ориентацию кривой, касательный вектор меняет направление на противоположное, так как в этом случае  $t'_\tau < 0$

**Пример.** Найдем касательные к циклоиде (см. пример 2 в п. 16.2)

$$x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$$

Вычислим производные:  $x' = r(1 - \cos t)$ ,  $y' = r \sin t$ . Обозначив через  $\alpha$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , угол образованный касательный в точке  $M$  циклоиды с осью абсцисс, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2} \right)$$

и, следовательно,  $\alpha = \pi/2 - t/2$ . Отсюда следует простой способ построения касательных к циклоиде.

Обозначим через  $B$  верхнюю точку катящейся окружности, повернувшейся на угол  $t$  (рис.79), тогда  $\angle MBA = \frac{1}{2} \widehat{MA} = \frac{t}{2}$ . Поэтому, если  $C$ -точка пересечения прямой  $BM$  с осью абсцисс, то  $\angle ACB = \pi/2 - t/2 = \alpha$ . Это означает, что прямая  $CB$  является касательной к циклоиде.

Итак, касательной к циклоиде в точке  $M$  является прямая, соединяющая точку  $M$  с верхней точкой  $B$  катящейся окружности.

**Определение 14.** Пусть  $\Gamma$  - дифференцируемая кривая и  $\mathbf{r}'(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  ее векторное представление. Точка  $\mathbf{r}(t)$  кривой  $\Gamma$ , в которой  $\mathbf{r}'(t) \neq 0$ , называется неособой, а точка, в которой  $\mathbf{r}'(t) = 0$  особой.

Выше было показано, что в данной точке кривой при всех представлениях  $\mathbf{r}'(t)$  этой кривой либо одновременно  $\mathbf{r}' \neq 0$ , либо  $\mathbf{r}' = 0$ , поэтому неособая точка при одном представлении дифференцируемой кривой будет неособой и при другом ее представлении. Таким образом, понятие неособой и особой точки не зависит от выбора представления кривой.

Если  $\mathbf{r}(x(t), y(t), z(t))$ , то из равенства  $|\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$  (см. п. 15.2) имеем: точка  $(x(t), y(t), z(t))$  кривой  $\Gamma$  неособая