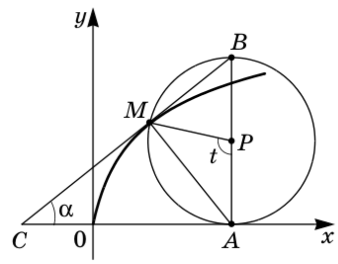

Рис. 79

При преобразовании параметра, меняющего ориентацию кривой, касательный вектор меняет направление на противоположное, так как в этом случае $t'_\tau < 0$

Пример. Найдем касательные к циклоиде (см. пример 2 в п. 16.2)

$$x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Вычислим производные: $x' = r(1 - \cos t), y' = r \sin t$. Обозначив через $\alpha, -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, угол образованный касательный в точке *M* циклоиды с осью абцисс, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - cost} = ctg\frac{t}{2} = tg(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})$$

и, следовательно, $\alpha = \pi/2 - t/2$. Отсюда следует простой способ построения касательных к циклоиде.

Обозначим через *B* верхнюю точку катящейся окружности, повернувшейся на угол *t* (рис.79), тогда $\angle MBA = \frac{1}{2} \overset{\frown}{MA} = \frac{t}{2}$. Поэтому, если *C*-точка пересечения прямой *BM* с осью абцисс, то $\angle ACB = \pi/2 - t/2 = \alpha$. Это означает, что прямая *CB* является касательной к циклоиде.

Итак, касательной к циклоиде в точке *M* является прямая, соединяющая точку *M* с верхней точкой *B* катящейся окружности.

Определение 14. *Пусть* Γ *- дифференцируемая кривая и* ***r'(t)***, $a \leqslant t \leqslant b$ *ее векторное представление. Точка* $r(t)$ *кривой* Γ*,в которой* ***r'***$(t) \neq 0$*,называется неособой, а точка, в которой* ***r'***$(t) = 0$ *особой.*

Выше было показано, что в данной точке кривой при всех представлениях **r'**(t) этой кривой либо одновременно ***r'*** $\neq 0$, либо ***r'*** $= 0$, поэтому неособая точка при одном прдставлении дифференцируемой кривой будет неособой и при другом ее представлении. Таким образом, понятие неособой и особой точки не зависит от выбора представления кривой.

Если ***r****(x(t), y(t), z(t))*, то из равенства $|$**r'**$| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (см. п. 15.2) имеем: *точка (x(t), y(t), z(t)) кривой* Γ *неособая*