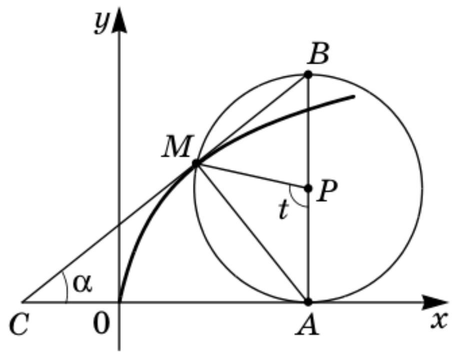


**Рис. 79**

При преобразовании параметра, меняющего ориентацию кривой, касательный вектор меняет направление на противоположное, так как в этом случае $t'_\tau < 0$

**Пример.** Найдем касательные к циклоиде (см. пример 2 в п. 16.2)

$$x = r(t - \sin t), y = r(1 - \cos t), 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

Вычислим производные:
$x' = r(1 - \cos t), y' = r \sin t$. Обозначив через $\alpha, -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, угол образованный касательный в точке $M$ циклоиды с осью абцисс, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\sin t}{1 - cost} = ctg\frac{t}{2} = tg(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2})$$

и, следовательно, $\alpha = \pi/2 - t/2$. Отсюда следует простой способо построения касательных к циклоиде.

Обозначим через $B$ верхнюю точку катящейся окружности, повернувшейся на угол $t$ (рис.79), тогда $\angle MBA = \frac{1}{2}\ \overset{\frown}{MA} = \frac{t}{2}$. Поэтому, если $C$-точка пересечения прямой $BM$ с осью абцисс, то $\angle ACB = \pi/2 - t/2 = \alpha$. Это означает, что прямая $CB$ является касательной к циклоиде.

Итак, касательной к циклоиде в точке $M$ является прямая, соединяющая точку $M$ с верхней точкой $B$ катящейся окружности.

**Определение 14.** *Пусть* $\Gamma$ *- дифференцируемая кривая и* $\boldsymbol{r'}(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ *ее векторное представление. Точка* $r(t)$ *кривой* $\Gamma$*,в которой* $\boldsymbol{r'}(t) \neq 0$*,называется неособой, а точка, в которой* $\boldsymbol{r'}(t) = 0$*, - особой.*

Выше было показано, что в данной точке кривой при всех представлениях $\mathbf{r'}(t)$ этой кривой либо одновременно $\boldsymbol{r'} \neq 0$, либо $\boldsymbol{r'} = 0$, поэтому неособая точка при одном прдеставлении дифференцируемой кривой будет неособой и при другом ее представлении. Таким образом, понятие неособой и особой точки не зависит от выбора представления кривой.

Если $\boldsymbol{r}(x(t), y(t), z(t))$, то из равенства $|\boldsymbol{r'}| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ (см. п. 15.2) имеем: *точка (x(t), y(t), z(t)) кривой* $\Gamma$ *неособая*