3) границя функції $f(x)$ в точці x_0 рівна значенню функції в цій точці x_0, тобто

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (5.2)$$

Точка x_0, в якій не виконується хоча б одна з умов неперервності функції $y = f(x)$, називається **точкою розриву функції**. Якщо в точці x_0 існують скінчені границі $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$, такі, що $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 називається **неусувною точкою розриву першого роду**. Зокрема, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то x_0 є **усувною точкою розриву першого роду**. Якщо ж хоча б одна з односторонніх границь $f(x_0 - 0)$ або $f(x_0 + 0)$ не існує або дорівнює нескінченності, точку x_0 називають **точкою розриву другого роду**.

Функція, неперервна у всіх точках деякої області, називається **неперервною в цій області**.

6. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

6.1. Похідна

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x називається границя

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}, \qquad (6.1)$$

де $\triangle x$ – приріст аргументу, а $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$ – приріст функції.

Якщо ця границя є скінченою, то функція $f(x)$ називається **диференційовною** в точці x; при цьому вона є обов'язково і неперервною в цій точці.

Похідну позначають y' або $f'(x)$, або $\dfrac{dy}{dx}$, або $\dfrac{df(x)}{dx}$.

6.1.1. Основні правила диференціювання

Якщо C – стала величина, а $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – деякі диференційовні функції від x, то справедливі наступні правила диференціювання:

1) $C' = 0$, $x' = 1$;

2) $(C_1 u \pm C_2 v)' = (C_1 u)' \pm (C_2 v)' = C_1 u' \pm C_2 v'$;

3) $(uv)' = u'v + uv'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, $\left(\dfrac{C}{v}\right)' = -\dfrac{Cv'}{v^2}$;

5) якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$ – складена функція, то

$$y'_x = y'_u \, u'_x, \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx};$$

6) якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$, то $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$;

7) якщо функцію задано параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ то $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$;

8) якщо функцію задано в неявній формі $F(x, y) = 0$, то для знаходження похідної $dy/dx = y'$ потрібно продиференціювати за змінною x обидві частини рівняння $F(x, y) = 0$, вважаючи y функцією від x: $dF(x, y)/dx = 0$. З цього рівняння знаходимо y';

9) нехай задано показниково-степеневу функцію виду $y = u^v$. Прологарифмуємо її за основою e: $\ln y = v \ln u$. Після диференціювання обох частин рівності дістанемо

$$\frac{y'}{y} = v' \ln u + v\frac{u'}{u}.$$

Звідси

$$y' = vu^{v-1}u' + u^v \ln u \cdot v'.$$

6.1.2. Таблиця похідних

1. $(u^a)' = au^{a-1}u'$.

2. $(\sqrt[n]{u^m})' = \dfrac{mu'}{n\sqrt[n]{u^{m-n}}}$.

3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$.

4. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

5. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

6.$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

7. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.

8. $(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$.

9. $(\operatorname{ctg} u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$.

10. $(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

11. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.

12. $(\operatorname{arctg} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$.

13. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$.

14. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$.

15. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$.

16. $(\operatorname{th} u)' = \dfrac{u'}{\operatorname{ch}^2 u}$.

17. $(\operatorname{cth} u)' = -\dfrac{u'}{\operatorname{sh}^2 u}$.

6.1.3. Похідні вищих порядків

Похідна $y' = f'(x)$ від функції $y = f(x)$ називається **похідною першого порядку** і являє собою деяку нову функцію, яка теж може мати похідну. Тоді похідна від похідної першого порядку $(y')'$ називається **похідною другого порядку від функції** $y = f(x)$ і позначається $y'' = (y')'$, $f''(x) = (f'(x))'$ або $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Аналогічно визначається **похідна третього порядку**: $y''' = (y'')'$, $f'''(x) = (f''(x))'$ або $\dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)$.

Першу похідну від похідної $(n-1)$-го порядку $(y^{(n-1)})'$ називають **похідною n-го порядку**: $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ або $\dfrac{d^ny}{dx^n} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$.

Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ мають похідні до n-го порядку включно, то справедлива формула Лейбніца

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}. \qquad (6.2)$$

Нехай функція $y = f(x)$ задана неявно рівністю $F(x, y) = 0$. Диференціюючи цю рівність за змінною x і розв'язуючи одержане рівняння відносно y', знаходимо першу похідну. Щоб знайти другу похідну, потрібно продиференціювати по x першу похідну і в одержане співвідношення підставити її значення. Продовжуючи диференціювання, можна знайти одна за одною послідовно похідні будь-якого порядку.

Для функцій заданих параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ похідні можна знайти за формулами

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)'_t \frac{1}{x'_t} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}; \quad \ldots \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)'_t \frac{1}{x'_t}.$$

6.2. Диференціал

Диференціалом функції $y = f(x)$ називається головна частина її приросту, лінійна відносно приросту аргументу Δx

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (6.3)$$

Диференціал dy називають також **диференціалом першого порядку**.

Оскільки $dx = \Delta x$, то формулу (6.3) можна записати так:

$$dy = f'(x)dx. \qquad (6.4)$$

При досить малих значеннях Δx справджується наближена рівність $\Delta y \approx dy$. Звідси дістаємо формулу для наближеного обчислення значення функції

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \qquad (6.5)$$

6.2.1. Основні властивості диференціала

1) $dC = 0$, $C = \text{const}$;
2) $d(C_1u \pm C_2v) = d(C_1u) \pm d(C_2v) = C_1du \pm C_2dv$;
3) $d(uv) = udv + vdu$;
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{vdu - udv}{v^2}$, $d\left(\dfrac{C}{v}\right) = -\dfrac{C}{v^2}dv$;
5) якщо $y = f(u)$, $u = u(x)$, тобто $y = f(u(x))$ – складена функція, причому функції $f(u)$, $u(x)$ диференційовні в точках u і x. Тоді існує похідна $y'_x = y'_u\, u'_x$, а отже, і диференціал

$$dy = y'_x dx = y'_u\, u'_x dx = y'_u\, du \tag{6.6}$$

6.2.2. Диференціали вищих порядків

Диференціалом другого порядку, називається диференціал від першого диференціала:

$$d^2y = d(dy).$$

Оскільки dx не залежить від x, то при диференціюванні першого диференціала dx можна винести за знак похідної, тому

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2. \tag{6.7}$$

Тут dx розглядається як один символ, тому $(dx)^n = dx^n$.

Диференціалом третього порядку d^3y, називається диференціал від другого диференціала:

$$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = f'''(x)dx^3. \tag{6.8}$$

Диференціалом n-го порядку d^ny, називається диференціал від диференціала $(n-1)$-го порядку:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{6.9}$$