КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ

Основні правила комбінаторного аналізу. Вибірки, розміщення та сполучення

Почнемо з формулювання двох основних правил комбінаторики: *правила суми* та *правила добутку.*

Правило суми. Якщо об’єкт x можна вибрати n_1 способами, а інший об’єкт $y - n_2$ способами, то або x, або y можна вибрати $n_1 + n_2$ способами.

Приклад. Студент має вибрати тему курсової роботи зі списку, розміщеного на трьох аркушах. Аркуші містять відповідно 20, 15 і 17 тем. З якої кількості можливих тем студент робить свій вибір? За правилом суми кількість тем для вибору становить $20 + 15 + 17 = 52$.

Правило добутку. Якщо об’єкт x можна вибрати n_1 способами та після кожного такого вибору об’єкт y можна вибрати n_2 способами, то пару об’єктів (x, y) у зазначеному порядку можна вибрати $n_1 \times n_2$ способами. Це правило можна пояснити інакше. Нехай якусь процедуру можна виконати розв’язавши два завдання. Якщо є n_1 способів розв’язати перше завдання та n_2 способів розв’язати після цього друге завдання, то всю процедуру можна виконати $n_1 n_2$ способами.

Приклад. В одній із версій мови БЕЙСІК ім’я змінної – це рядок з одного чи двох символів, якими можуть бути 26 букв латинського алфавіту та 10 цифр. Першим символом має бути буква. Крім того, не можна використовувати п’ять двосимвольних рядків, які зарезервовані для спеціального використання. Знайдемо, скільки різних імен змінних є в цій версії мови БЕЙСІК.

Нехай V – величина, яку потрібно обчислити, V_1 – кількість односимвольних імен, V_2 – двосимвольних. За правилом суми всього імен $V = V_1 + V_2$. Очевидно, що $V_1 = 26$; за правилом добутку $V_2 = 26 \cdot 36 - 5 = 931$. Отже, $V = 26 + 931 = 957$.

Розглянемо основні комбінаторні об’єкти – розміщення та сполучення – попередньо означивши важливе поняття вибірки.

Нехай задано скінченну непорожню множину $A = \{a_ь\ a_2, ..., a_n\}$ і виконано k

таких кроків.

- Крок 1. Із множини A вибирають якийсь елемент a_{i_1}.
- Крок 2. Із множини A чи з $A/\{a_{i_1}\}$ вибирають якийсь елемент a_{i_2}.
- Крок k. Якщо $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_{k-1}}$ – елементи, які вибрані на перших $k-1$ кроках $(k \geq 3)$, то на цьому кроці вибирають якийсь елемент a_{i_k}, із множини A чи $A \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \{a_{i_j}\}$. Тоді елементи $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$ утворюють *вибірку обсягом* k, або k*-вибірку,* із множини *A*.

Вибірку називають *упорядкованою,* якщо задано порядок її елементів, а якщо ні – то *невпорядкованою.* Зрозуміло, що впорядкована *k*-вибірка – це кортеж (вектор) з k компонентами, і тому її позначають $(b_1, b_2, ..., b_k), b_i \in A, i = 1, ..., k$. Невпорядковану *k*-вибірку позначатимемо як $[b_1, b_2, ..., b_k], b_i \in A, i = 1, ..., k$.

Упорядковані k-вибірки з *n*-елементної множини називають *розміщеннями з n елементів по k,* а невпорядковані – *сполученнями з n елементів по k.* Використовують також поняття *k*-розміщення й *k*-сполучення. Розглянемо два способи вибору елементів.

Згідно з першим способом вибору на кожному кроці вибирають елемент з усієї множини A. Отже, один і той самий елемент із множини *A* може зустрітись у вибірці декілька разів. Такі вибірки називаються *вибірками з повтореннями.* У разі застосування другого способу вибраний елемент вилучають із множини *A*. Це означає, що на кожному j-му кроці $(1 < j \leq s)$ вибирають елемент із множини $A \setminus \bigcup_{s=1}^{j-1} \{a_{i_s}\}$ і вибірка не містить однакових елементів. Такі вибірки називають *вибірками без повторень.*

Приклад. Задано множину $A = \{a, b, c\}$, тобто *n* = 3.

Наведемо розміщення без повторень із трьох елементів по два, тобто $n = 3, k = 2$:

$$(a,b),(a,c),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b);$$

розміщення з повтореннями з трьох елементів по два:

$$(a,b),(a,c),(b,c),(b,a),(c,a),(c,b),(a,a),(b,b),(c,c);$$

сполучення без повторень із трьох елементів по два:

$$[a,b],[a,c],[b,c];$$

сполучення з повтореннями із трьох елементів по два:

$$[a,b],[a,c],[b,c],[a,a],[b,b],[c,c].$$

Зазначимо, що сполучення без повторень з *n* елементів по *k* – це просто *k*-елементні підмножини множини з *n* елементів; отже, їх можна записати так: $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$. Сполучення з повтореннями – це, узагалі кажучи, не множина у звичайному розумінні: її елементи можуть повторюватись, тобто зустрічатися більше одного разу.

Обчислення кількості розміщень і сполучень

Кількість усіх розміщень без повторень з *n* елементів по *k* позначають як A_n^k, або $A(n,k)$, де k і n – невід'ємні цілі числа, причому $k \le n$. Кількість різних розміщень із повтореннями з *n* елементів по *k* позначають як $\tilde{A}_n^r$ або $\tilde{A}(n,k)$. Тут *k* і *n* – будь-які невід'ємні цілі числа. Кількість усіх сполучень без повторень з *n* елементів по *k* позначають як $C_n^k, C(n,k)$ або $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, де *k* і *n* – невід'ємні цілі числа, причому $k \le n$. Кількість усіх сполучень із повтореннями з *n* елементів по *k* позначимо як $\tilde{C}_n^k$ або $\tilde{C}(n,k)$, де *k* і *n* – будь-які невід'ємні цілі числа. Числа C_n^k називають ще *біноміальними коефіцієнтами.*

Доведемо, що

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!},$$

$$\tilde{A}_n^k = n^k$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Доведемо першу рівність. Розглянемо якесь розміщення $(b_1, b_2, ..., b_k)$ без повторень з n елементів по k. Ми можемо взяти як b_1 будь-який з n елементів, як b_2 – будь-який з $(n-1)$ елементів, що залишились, і продовжити цей процес. Отже, для b_k залишається $(n+k-1)$ можливостей вибору. Використавши правило добутку, переконуємось у тому, що перша рівність правильна.

Друга рівність також справджується, бо в розміщенні з повтореннями $(b_1, b_2, ..., b_k)$ для кожного елемента $b_i, i = 1, 2, ..., k$ є n незалежних можливостей вибору.

Доведемо третю рівність. Розглянемо якесь сполучення $[b_1, b_2, ..., b_k]$ без повторень з n елементів по k. Виявимо, скільки можна отримати різних розміщень без повторень з k елементів по k із цього сполучення як з k-елементної множини. За першою формулою дістанемо $A_k^k = k(k-1)...2 \cdot 1 = k!$. Очевидно, що в разі $[b_1, ..., b_k] \neq [c_1, ..., c_k]$ із двох сполучень без повторень $[b_1, ..., b_k]$ і $[c_1, ..., c_k]$ не можна одержати однакових розміщень без повторень з k елементів по k. Отже, $A_n^k = k! \cdot C_n^k$, і третя рівність доведена.

Нарешті, доведемо четверту рівність. Замість n-елементної множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ розглянемо множину $A' = \{1, 2, ..., n\}$ також з n елементів. Кожну невпорядковану k-вибірку з множини A' можна записати у вигляді $[m_1, m_2, ..., m_k]$, де $m_1 \le m_2 \le ... \le m_k$, оскільки порядок елементів не суттєвий. Тоді $[m_1 + 0, m_2 + 1, ..., m_k + k - 1]$ – сполучення без повторень з $n + k - 1$ елементів по k.

Розглянемо відображення Г множини всіх сполучень із повтореннями з n елементів по k на множину всіх сполучень без повторень з $n + k - 1$ елементів по k. $\Gamma([m_1, m_2, ..., m_k]) = [m_1 + 0, m_2 + 1, ..., m_k + k - 1]$. Два сполучення з повтореннями *рівні,* якщо вони складаються з однакових елементів і кратності цих елементів збігаються. Якщо $[m_1, m_2, ..., m_k] \neq [m_1', m_2', ..., m_k']$ то й

$\left[m_1+0, m_2+1, ..., m_k+k-1\right] \neq \left[m_1^{'}+0, m_2^{'}+1, ..., m_k^{'}+k-1\right]$. Більше того, якщо $\left[n_1, n_2, ..., n_k\right]$ – сполучення без повторень з $n+k-1$ елементів по *k*, де $n_1 < n_2 < ... < n_k$, то $\left[n_1, n_2-1, ..., n_k-k+1\right]$ – елемент множини сполучень із повтореннями з n елементів по *k*. Отже, Г – бієктивне відображення множини всіх сполучень із повтореннями з *n* елементів по *k* на множину всіх сполучень без повторень з $n+k-1$ елементів по *k*. Рівність доведено.

Перестановки

Перестановка з n елементів – це особливий випадок розміщення без повторень з n елементів, коли в розміщення входять усі елементи. Перестановки з *n* елементів називають також n*-перестановками.* Окремі n-перестановки різняться лише порядком елементів. Кількість таких перестановок позначають як P_n. Формулу для P_n одержують із формули для кількості розміщень без повторень: $P_n = A_n^n = n!$.

Розглянемо тепер задачу про перестановки n елементів за умови, що не всі елементи різні (перестановки з повтореннями). Точніше, нехай є n елементів *s* різних типів, а число $n_j\left(j=1,\ldots,s\right)$ – кількість елементів j-го типу. Очевидно, що $n_1+n_2+\ldots+n_s=n$. Перестановки з n елементів за такої умови називають *перестановками з повтореннями.* Кількість таких перестановок позначають як $P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_s\right)$. Щоб знайти явний вираз для $P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_s\right)$, візьмемо окрему перестановку та замінимо в ній усі однакові елементи різними. Тоді кількість різних перестановок, котрі можна отримати з узятої однієї перестановки, дорівнює $n_1!n_2!\ldots n_s!$. Якщо зробити це для кожної перестановки, то одержимо $n!$ перестановок. Отже, $P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_s\right)n_1!n_2!\ldots n_s! = n!$, звідки

$$P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_s\right)=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_s!}$$

Приклад. Знайдемо кількість слів (рядків), які можна утворити, переставляючи букви слова PRODUCT. Оскільки жодна буква тут не повторюється, то можна утворити $P_7 = 7! = 5040$ слів.

Приклад. Знайдемо, скільки слів можна утворити, переставляючи букви слова SUCCESS. У цьому слові є повторні входження букв, тому скористаємося формулою для перестановок із повтореннями:

$$P_7\left(3,2,1,1\right) = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420 \text{ слів.}$$

Приклад. Розглянемо задачу розкладання в ящики. Загальне формулювання цієї задачі таке. Дано n різних предметів і k ящиків. Потрібно покласти в перший ящик n_1 предметів, у другий – n_2 предметів, ..., у k-*й* – n_k предметів, де $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Тут $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – фіксовані числа. Скількома способами можна зробити це? Можна розкласти предмети так. Серед n предметів візьмемо довільну n_1-підмножину й покладемо її в перший ящик (це можна зробити $C_n^{n_1}$ способами). Серед $n - n_1$ предметів, що залишились, візьмемо n_2-підмножину й покладемо її в другий ящик (це можна зробити $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами) і продовжимо цей процес. За правилом добутку загальна кількість розкладань дорівнює

$$C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-n_1-n_2-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!\left(n-n_1\right)!} \frac{\left(n-n_1\right)!}{n_2!\left(n-n_1-n_2\right)!} \ldots \frac{\left(n-n_1-\ldots-n_{k-1}\right)!}{n_k!\left(n-n_1-\ldots-n_k\right)!} =$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$$

Отже, розкладань у ящики стільки, скільки перестановок із повтореннями. Розглянемо зв'язок між цими двома задачами. Для цього занумеруємо всі n місць, які можуть займати предмети. Кожній перестановці відповідає розподіл номерів місць на k класів: в i-*й* клас потрапляють номери тих місць, на які покладено предмети i-го типу. Отже, знайдено відповідність між перестановками з повторенням та розкладанням номерів місць у ящики. Тому формули розв'язання обох задач збігаються.

Біном Ньютона

Нагадаємо, що біноміальними коефіцієнтами називають числа $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – кількість сполучень з n елементів по k. Розглянемо деякі властивості біноміальних коефіцієнтів.

1. Нехай n і k – невід'ємні цілі числа, $n \geq k$. Тоді $C_n^k = C_n^{n-k}$. Справді,

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\left[n-(n-k)\right]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k .$$

2. Рівність Паскаля: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Позначимо як $S_{n,k}$ множину всіх сполучень з елементів $\{a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$ по k елементів; як $S_{n-1,k}$ – відповідно з елементів $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ по k; $S_{n-1,k-1}$ – з елементів $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ по $k-1$. Кожному сполученню з $S_{n,k}$, яке містить елемент a_n, відповідає сполучення з $S_{n-1,k-1}$. Якщо ж сполучення з $S_{n,k}$ не містить a_n, то йому відповідає сполучення з $S_{n-1,k}$. Отже, існує біекція між множинами $S_{n,k}$ й $S_{n-1,k} \cup S_{n-1,k-1}$. Оскільки очевидно, що $S_{n-1,k} \cap S_{n-1,k-1} = \varnothing$, то $\left|S_{n,k}\right| = \left|S_{n-1,k}\right| + \left|S_{n-1,k-1}\right|$, тобто $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Отримане рекурентне співвідношення дає змогу побудувати таблицю для чисел C_n^k, яку називають *трикутником Паскаля*.

Таблиця

$n \backslash k$		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
0		1										…
1		1	1									…
2		1	2	1								…
3		1	3	3	1							…
4		1	4	6	4	1						…
5		1	5	10	10	5	1					…
6		1	6	15	20	15	6	1				…
7		1	7	21	35	35	21	7	1			…
8		1	8	28	56	70	56	28	8	1		…

9		1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	…
…		…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

3. Послідовність $\left(p_n\right)$ дійсних чисел називають *унімодальною,* якщо існує такий натуральний номер m, що $p_0 < p_1 < \ldots < p_m; p_m \geq p_{m+1} > p_{m+2} > \ldots > p_n$, тобто:

- послідовність строго зростає на відрізку $\left[0,m\right], m > 0$;
- послідовність строго спадає на відрізку $\left[m+1,n\right], m+1 < n$;
- максимальне значення досягається не більше ніж у двох точках: m і, можливо, $m+1$.

Нагадаємо, що як $\lfloor x \rfloor$ позначають найбільше ціле число, яке менше чи дорівнює x *(цілу частину числа x);* наприклад, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3, \lfloor -3.14 \rfloor = -4$.

Теорема. За фіксованого n послідовність біноміальних коефіцієнтів $\left(C_n^k\right), k = 0,1,2,\ldots,n$, унімодальна, $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$. У разі парного n максимум досягається в точці $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$, а в разі непарного – у двох точках: $m = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ й $m+1 = \frac{n+1}{2}$.

Вказівка для доведення: оцінити відношення двох сусідніх членів послідовності $\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k}$.

4. Рівність Вандермонда. Нехай m,n,r – невід'ємні цілі числа, причому $r \leq \min\left\{m,n\right\}$. Тоді $C_{m+n}^r = \sum_{k=0}^{r} C_m^{r-k} C_n^k$. Вказівка для доведення: скористатися правилом добутку.

Теорема (біноміальна). Нехай x та y – змінні, n – додатне ціле число. Тоді

$$\left(x+y\right)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^j y^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j .$$

Доведення. Дамо комбінаторне доведення цієї теореми. Оскільки $x^j y^{n-j}$ отримано внаслідок j-кратного вибору x і $(n-j)$-кратного вибору y з n співмножників у виразі $(x+y)^n$, то коефіцієнт при $x^j y^{n-j}$ дорівнює кількості способів j-кратного вибору x з n співмножників, тобто C_n^j. Друга рівність випливає з того, що $C_n^j = C_n^{n-j}$.

Легко переконатись, що

$$(x-y)^n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j C_n^j x^{n-j} y^j .$$

Приклад. Знайдемо розклад виразу $(x+y)^4$. Скориставшись біноміальною теоремою, можемо записати:

$$\begin{aligned}(x+y)^4 &= C_4^0 x^4 + C_4^1 x^3 y + C_4^2 x^2 y^2 + C_4^3 x y^3 + C_4^4 y^4 = \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4.\end{aligned}$$

Біноміальні коефіцієнти можна брати з трикутника Паскаля чи обчислювати за формулою для кількості сполучень без повторень.

Приклад. Визначимо коефіцієнт при $x^{12} y^{13}$ в розкладі $(x+y)^{25}$. Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює

$$C_{25}^{13} = \frac{25!}{13!12!} = 5200300 .$$

За допомогою біноміальної теореми можна довести ще дві властивості біноміальних коефіцієнтів.

5. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Справді, $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k$.

6. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^n C_n^k = 0$.

Аналогічно до попереднього, $0 = \left[1+(-1)\right]^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k$.

Поліноміальна теорема

Як узагальнення бінома розглянемо вираз у вигляді $\left(x_1+x_2+\cdots+x_k\right)^n$. Основний результат сформульовано в наведеній нижче теоремі.

Теорема (поліноміальна). Вираз $\left(x_1+x_2+\cdots+x_k\right)^n$ дорівнює сумі всіх можливих доданків $P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$, де $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, тобто

$$\left(x_1+x_2+\cdots+x_k\right)^n=\sum_{\substack{n_1\geq 0,\ldots n_k\geq 0\\ n_1+n_2+\ldots+n_k=n}} P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$$

Доведення. Запишемо $\left(x_1+x_2+\cdots+x_k\right)^n$ у вигляді добутку n співмножників і розкриємо дужки. Коефіцієнт при $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$ дорівнює кількості перестановок із повтореннями таких, що елемент x_1 міститься в кожній з них n_1 разів, x_2 – n_2 разів, ..., x_k входить n_k разів, а всього елементів $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Очевидно, що цей коефіцієнт дорівнює $P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)$.

Отриману формулу називають поліноміальною. Вона, зокрема, дає змогу доводити деякі властивості чисел $P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)$. Зазначимо дві з них.

1. Нехай $x_1=x_2=\ldots=x_k=1$, тоді

$$\sum_{\substack{n_1\geq 0,\ldots n_k\geq 0\\ n_1+n_2+\ldots+n_k=n}} P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)=k^n$$

2. Помножимо обидві частини поліноміальної формули $n-1$ на $\left(x_1+x_2+\cdots+x_k\right)$ та порівняємо коефіцієнти при однакових доданках. Одержимо наступне співвідношення:

$$P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k\right)=P_{n-1}\left(n_1-1,n_2,\ldots,n_k\right)+P_n\left(n_1,n_2-1,\ldots,n_k\right)+\ldots+P_n\left(n_1,n_2,\ldots,n_k-1\right)$$

Генерування перестановок у лексикографічному порядку

Проблемі систематичної побудови всіх $n!$ перестановок n-елементної множини присвячено багато публікацій. Ця проблема має давню історію. Її появу можна віднести до початку XVII ст., коли в Англії виникло особливе мистецтво дзвонарства. Воно полягало у вибиванні на n різних дзвонах усіх $n!$ перестановок. Це слід було робити по пам'яті. Тому шанувальники цього мистецтва розробили перші прості методи систематичної побудови всіх перестановок без повторень.

Деякі з цих незаслужено забутих методів було знову відкрито в наш час у зв'язку з появою комп'ютерів. Зазначене мистецтво проіснувало довго. Знаменита „Книга рекордів Гіннеса" містить інформацію про вибивання всіх $8! = 40320$ перестановок на восьми дзвонах у 1963 р. Для цього було потрібно 17 год 58 хв 30 с. Звичайно, використання комп'ютерів дає змогу генерувати перестановки значно швидше.

Кожній n-елементній множині A можна поставити у взаємно-однозначну відповідність множину $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$. Зручно спочатку генерувати перестановки n перших натуральних чисел, а потім замінити кожне число відповідним елементом множини A. Унаслідок цього отримаємо всі перестановки елементів даної множини A.

Існують різні алгоритми побудови всіх перестановок множини $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо один із них. Цей алгоритм ґрунтується на послідовній побудові перестановок множини A' у лексикографічному порядку. Далі перестановку $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ для спрощення записів позначатимемо як $a_1 a_2 \ldots a_n$. На множині всіх перестановок (загальніше – на множині всіх кортежів довжиною n з елементами з множини $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$) означимо *лексикографічний порядок:* $a_1 a_2 \ldots a_n < b_1 b_2 \ldots b_n$ якщо для якогось k, $1 \le k \le n$ виконуються співвідношення $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_{k-1} = b_{k-1}$, але $a_k < b_k$. У такому разі говорять, що перестановка $a_1 a_2 \ldots a_n$ менша від перестановки $b_1 b_2 \ldots b_n$, або перестановка $b_1 b_2 \ldots b_n$ більша від перестановки $a_1 a_2 \ldots a_n$. Якщо замість чисел 1, 2,…, n узяти букви $a, b, \ldots, z$ із природним порядком $a < b < \ldots < z$, то лексикографічний порядок – це стандартна послідовність, у якій слова довжиною n наведено в словнику. Перестановку $b_1 b_2 \ldots b_n$ називають *лексикографічно наступною* за $a_1 a_2 \ldots a_n$ якщо не існує такої перестановки $c_1 c_2 \ldots c_n$ що $a_1 a_2 \ldots a_n < c_1 c_2 \ldots c_n$ і $c_1 c_2 \ldots c_n < b_1 b_2 \ldots b_n$.

Приклад. Перестановка 23<u>4</u>15 множини {1,2,3,4,5} менша від перестановки 23<u>5</u>14.

Алгоритм генерування перестановок множини $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$ ґрунтується на процедурі, що будує перестановку, лексикографічно наступну за даною перестановкою $a_1 a_2 \ldots a_n$. Покажемо, як це можна зробити. Спочатку припустимо, що $a_{n-1} < a_n$. Поміняємо місцями a_{n-1} й a_n і одержимо більшу перестановку. Вона лексикографічно наступна, бо ніяка інша перестановка не більша за дану перестановку й не менша за отриману.

Приклад. Нехай 2341<u>56</u> – задана перестановка; тоді перестановка 2341<u>65</u> лексикографічно наступна.

Тепер розглянемо випадок $a_{n-1} > a_n$. Проглянемо останні три члени перестановки. Якщо $a_{n-2} < a_{n-1}$, то останні три члени можна переставити для отримання наступної перестановки. Поставимо менше з двох чисел a_{n-1} і a_n, яке, однак, більше, ніж a_{n-2}, на позицію n–2. Потім розмістимо число, яке залишилося, й a_{n-2} на останніх двох позиціях у висхідному порядку.

Приклад. Нехай 234<u>165</u> – задана перестановка; тоді перестановка 234<u>516</u> лексикографічно наступна.

Узагальнивши ці міркування, одержимо такий алгоритм.

Алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки за перестановкою $a_1 a_2 \ldots a_n$

Наведемо кроки алгоритму.

- Крок 1. Знайти такі числа a_j, і a_{j+1}, що $\left(a_j < a_{j+1}\right) \wedge \left(a_{j+1} > a_{j+2} > \ldots > a_n\right)$.
- Для цього треба знайти в перестановці першу справа пару сусідніх чисел,

у якій число, що ліворуч, менше від числа, що праворуч.

- Крок 2. Записати в j-ту позицію таке найменше з чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$, яке водночас більше, ніж a_j.
- Крок 3. Записати у висхідному порядку число a_j і решту чисел $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_n$ у позиції $j+1, \ldots, n$.

Обґрунтування алгоритму

Доведемо, що не існує перестановки, яка водночас більша від $a_1 a_2 \ldots a_n$, але менша від побудованої за цим алгоритмом. Це означає, що побудована перестановка дійсно лексикографічно наступна за даною перестановкою $a_1 a_2 \ldots a_n$. Справді, за наведеним алгоритмом нова перестановка збігається зі старою в позиціях $1, \ldots, j-1$. У j-й позиції нова перестановка містить a_k, а стара $-a_j$ причому $a_k > a_j$. Отже, нова перестановка лексикографічно більша від старої. Окрім того, вона перша в лексикографічному порядку з $a_1, a_2, ..., a_{j-1}, a_k$ у позиціях з 1 до j. Стара перестановка остання з $a_1, a_2, ..., a_{j-1}, a_j$ у цих самих позиціях. Згідно з алгоритмом a_k вибирають найменшим з $a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$, але більшим, ніж a_j Отже, не існує жодної перестановки між старою та новою.

Приклад. Побудуємо перестановку, наступну в лексикографічному порядку за 362541. Остання пара чисел, у якій перше число менше за друге, – 25. Отже, розглянемо послідовність чисел 541. Серед них найменше число, більше від 2, це – 4. Тепер 4 запишемо на місце 2, а решту чисел 251 розмістимо на останніх трьох позиціях у вихідному порядку: 364125.

Щоб побудувати всі $n!$ перестановок множини $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$, починаємо з лексикографічно найменшої перестановки 123 ... n і послідовно $n!-1$ разів виконуємо алгоритм побудови лексикографічно наступної перестановки.

Приклад. Розглянемо всі можливі перестановки множини $A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Кількість цих перестановок $P_6 = 6! = 720$. Деякі з них наведені у таблиці.

Таблиця

Перестановки множини $\{1,2,3,4,5,6\}$ у лексикографічному порядку

1.	1,2,3,4,5,6	8.	1,2,4,3,6,5
2.	1,2,3,4,6,5	9.	1,2,4,5,3,6
3.	1,2,3,5,4,6	10.	1,2,4,5,6,3
4.	1,2,3,5,6,4	…	……………
5.	1,2,3,6,4,5	718.	6,5,4,2,3,1
6.	1,2,3,6,5,4	719.	6,5,4,3,1,2
7.	1,2,4,3,5,6	720.	6,5,4,3,2,1

Генерування сполучень у лексикографічному порядку

Як і у випадку генерування перестановок, розглянемо множину $A' = \{1,2,\ldots,n\}$. Сполучення без повторень з n елементів по k – це k-елементна підмножина множини A'. Позаяк порядок запису елементів множини неістотний, то домовимося записувати елементи в кожному сполученні у висхідному порядку: наприклад, {3, 5, 1} будемо записуватимемо як {1, 3, 5}. Отже, сполучення $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ розглядатимемо як рядок чисел $a_1 a_2 \ldots a_k$ причому $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$.

Як і для перестановок, покажемо, як за даним сполученням знайти наступне відповідно до лексикографічного порядку. Припустимо, що $n = 5$ та $k = 3$. Якщо можна збільшити останню цифру, то так і будемо робити. Тому, маючи рядок 123, його можна замінити на 124. Якщо ж маємо 125, останнє число збільшити не можна. Тому переходимо до наступного (справа) числа й дивимось, чи можна його збільшити. У даному разі це можна зробити: потрібно замінити 2 на 3. Проте ми прагнемо побудувати найменший рядок із тих, котрі більші 125. Тому збільшуємо останнє число (тобто 3) на 1 і записуємо результат у наступну позицію. Отже, перші два числа – 1 і 3, тому наступний рядок – 134. Припустимо, що є рядок 145. Останнє й передостаннє числа збільшити не можна. Проте перше число можна збільшити, тому замість 1 пишемо 2. Щоб зробити рядок мінімальним, як останні числа візьмемо 3 та 4, унаслідок чого отримаємо рядок 234.

Узагальнимо ці міркування. Значення останнього числа в рядку – найбільше можливе, якщо воно дорівнює $n-k+k$. Якщо останнє число – найбільше можливе, то передостаннє – найбільше можливе, якщо воно дорівнює $n-k+(k-1)$ або $n-k+i$, де $i=k-1$ – позиція цього числа. Загалом, значення кожного i-го числа найбільше можливе, якщо числа праворуч від нього – найбільші можливі, і це значення дорівнює $n-k+i$. Отже, проглядаємо рядок справа наліво й визначаємо, чи дорівнює значення i-го елемента $n-k+i$ (це максимальне значення, яке може бути в i-й позиції). Перше значення, яке не задовольняє цю умову, можна збільшити. Нехай, наприклад, це значення дорівнює m і займає j-ту позицію. Збільшуємо m на 1, а значення кожного елемента, що стоїть після j-го, дорівнює значенню попереднього елемента плюс 1. Тепер можемо сформулювати потрібний алгоритм.

Алгоритм побудови лексикографічно наступного сполучення

Наведемо кроки алгоритму.

- Крок 1. Знайти в рядку перший справа елемент a_i такий, що $a_i \neq n-k+i$.
- Крок 2. Для знайденого елемента виконати присвоювання $a_i := a_i + 1$.
- Крок 3. Для $j=i+1, i+2, \ldots, k$ виконати $a_j := a_i + j - i$ (або, що те саме, $a_j := a_{j-1} + 1$).

Приклад. Нехай $A' = \{1,2,3,4,5,6\}$. Знайдемо сполучення, наступне за $\{1,2,5,6\}$ у лексикографічному порядку.

Це сполучення подамо рядком 1256. Маємо $n=6$, $k=4$. Перший справа з таких елементів, що $a_i \neq 6-4+i$, – це $a_2 = 2$. Для обчислення наступного більшого сполучення збільшуємо a_2 на 1 й одержуємо $a_2 = 3$. Тепер нехай $a_3 = 3+1 = 4$ і $a_4 = 3+2 = 5$. Отже, наступне в лексикографічному порядку сполучення – те, що зображене рядком 1345, тобто $\{1,3,4,5\}$.

Обґрунтування алгоритму

Доведемо, що наведений алгоритм дійсно будує наступне в лексикографічному порядку сполучення. Рядок чисел, яким подано лексикографічно наступне сполучення, відрізняється від рядка, що зображає дане сполучення, з позиції $i,$ бо в даному сполученні в позиціях $i+1, i+2, \ldots, k$ є максимально можливі числа. Отже, a_i+1– найменше можливе число, яке можна записати в позицію $i,$ якщо хочемо отримати сполучення, більше від даного. Тоді $a_i+2, \ldots, a_i+k-i+1$ – найменші можливі числа, які можна записати в позиціях від $i+1$ до k.

Приклад. Розглянемо генерування всіх сполучень з множини $A' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ з n = 6 по k = 4. Кількість цих сполучень $C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15$ і вони наведені у таблиці.

Таблиця

Сполучення з множини $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ з n = 6 по k = 4

у лексикографічному порядку

1.	1,2,3,4	9.	1,3,5,6
2.	1,2,3,5	10.	1,4,5,6
3.	1,2,3,6	11.	2,3,4,5
4.	1,2,4,5	12.	2,3,4,6
5.	1,2,4,6	13.	2,3,5,6
6.	1,2,5,6	14.	2,3,5,6
7.	1,3,4,5	15.	3,4,5,6
8.	1,3,4,6		

Генерування розміщень у лексикографічному порядку

Коротко зупинімося на питанні генерування всіх розміщень з n елементів по k. Знову розглядатимемо цю задачу лише для множини $A' = \{1, 2, \ldots, n\}$. Один із можливих способів її розв'язання такий. Використаємо алгоритм генерування лексикографічно наступного сполучення для побудови k-елементних сполучень n-елементної множини A'. Після кожної стадії, коли побудовано чергове k-сполучення, застосуємо $k!-1$ разів алгоритм побудови перестановки за умови $n=k$ для побудови всіх перестановок елементів цього сполучення як k-елементної множини

Розбиття множин. Числа Стірлінга другого роду та числа Белла

Нехай $A=\{a_1,a_2,\dots a_n\}$ - n-елементна множина. Розбиттям множини A на k непорожніх частин називають систему $\{B_1,B_2,\cdots B_k\}$ непорожніх підмножин множини A таку, що

$$B_i \cap B_j = \varnothing \ (i \neq j),$$
$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k = A$$

Розглянемо задачу визначення кількості розбиттів множини A на непорожні частини.

Приклад. Якщо $A=\{a,b,c\}$, то є такі розбиття цієї множини на k непорожніх частин:

$k=1:\{\{a,b,c\}\}$ (одне розбиття);

$k=2:\{\{a,b\},\{c\}\},\{\{a,c\},\{b\}\},\{\{a\},\{b,c\}\}$ (три розбиття);

$k=3:\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$ (одне розбиття).

Позначимо як $\Phi(n,k)$ кількість розбиттів n-елементної множини A на k непорожніх частин, $n\geq 1$, $1\leq k\leq n$, як $\Phi(n)$ – кількість усіх розбиттів множини A на непорожні частини. Числа $\Phi(n,k)$ називають *числами Стірлінга другого роду,* а $\Phi(n)$ – *числами Белла.* Очевидно, що

$$\Phi(n)=\sum_{k=1}^{n}\Phi(n,k).$$

Для розглянутого прикладу $\Phi(3,1)=1;\quad \Phi(3,2)=3;\quad \Phi(3,3)=1;$

$\Phi(3) = 1 + 3 + 1 = 5$.

Довільне розбиття множини A на k непорожніх частин можна одержати так:

- із розбиття множини $A \setminus \{a_n\}$ на $(k-1)$ непорожню частину додаванням підмножини $\{a_n\}$;
- із розбиття множини $A \setminus \{a_n\}$ на k непорожніх частин додаванням до однієї з цих частин елемента a_n (це можна зробити k способами).

Звідси випливає тотожність $\Phi(n,k) = \Phi(n-1,k-1) + k\Phi(n-1,k)$. За її допомогою можна побудувати таблицю для чисел $\Phi(n,k)$, а, отже, і $\Phi(n)$.

Для чисел Белла існує проста рекурентна залежність $\Phi(n+1) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \Phi(i)$ (Тут вважаємо, що $\Phi(0) = 1$).

Таблиця

n \ k	1	2	3	4	5	6	…	
1	1						…	1
2	1	1					…	2
3	1	3	1				…	5
4	1	7	6	1			…	15
5	1	15	25	10	1		…	52
6	1	31	90	65	15	1	…	203
…	…	…	…	…	…	…	…	…

Зауважимо, що за фіксованого n послідовність $(\Phi(n,k))$, $k = 1, 2, \ldots, n$, унімодальна.

Генерування розбиттів множин

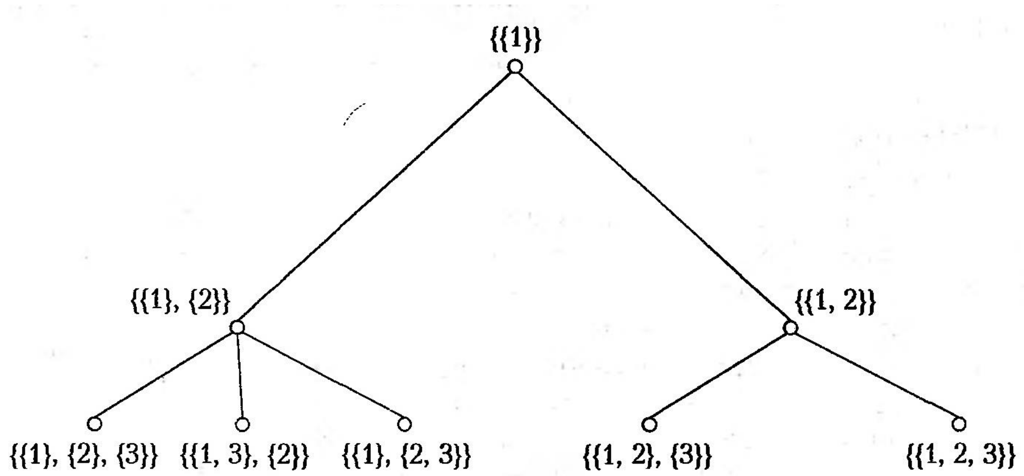
Опишемо алгоритм генерування всіх розбиттів множини. Ідею цього алгоритму найпростіше пояснити, сформулювавши його в рекурентній формі. Зазначимо спочатку, що кожне розбиття множини $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ однозначно задає розбиття множини $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, одержане після вилучення елемента a_n із відповідного блока (і вилучення порожнього блока, якщо елемент a_n утворював одноелементний блок).

Навпаки, якщо дано розбиття $\{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ множини $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$, то легко знайти всі розбиття множини $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$. Це такі розбиття:

$$\begin{array}{llllll}
\{B_1, & B_2, & \cdots, & B_k, & & \{a_n\}\} \\
\{B_1 \cup \{a_n\} & B_2, & \cdots, & B_k\} & & \\
\{B_1, & B_2 \cup \{a_n\}, & \cdots, & B_k\} & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
\{B_1, & B_2, & \cdots, & B_k \cup \{a_n\}\}. & &
\end{array}$$

Наведені міркування підказують простий рекурентний спосіб генерування всіх розбиттів. Якщо дано список L_{n-1} усіх розбиттів множини $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}\}$ то список L_n усіх розбиттів множини $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ утворюють заміною кожного розбиття в списку L_{n-1} на відповідну йому послідовність.

Приклад. На рисунку показано формування списку всіх розбиттів множини $\{1, 2, 3\}$. Усього розбиттів Ф(3) = 5, де Ф(n) – число Белла.



Задача про цілочислові розв'язки

Цю задачу формулюють так: знайти кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ у цілих невід'ємних числах, де k – ціле невід'ємне число. Узявши такі невід'ємні цілі числа $x_1, x_2, ..., x_n$ що $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$, можна одержати сполучення з повтореннями з n елементів по k, а саме: елементів першого типу – x_1 одиниць, другого – x_2, ... n-го – x_n. Навпаки, якщо є сполучення з повтореннями з r елементів по k, то кількості елементів кожного типу задовольняють рівнянню $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ у цілих невід'ємних числах. Отже, кількість цілих невід'ємних розв'язків цього рівняння дорівнює

$$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Приклад. Знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 = 11$. Безпосереднє використання попередньої формули дає

$$\tilde{C}_3^{11} = C_{3+11-1}^{11} = C_{13}^{11} = \frac{13!}{11!\cdot 2!} = \frac{12\cdot 13}{2} = 78.$$

Кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + ... + x_n = k$ цілих невід'ємних числах можна визначити й тоді, коли на змінні накладено певні обмеження.

Приклад. Знайдемо кількість невід'ємних цілих розв'язків рівняння $x_i + x_2 + x_3 = 11$ за умов $x_1 \ge 1, x_2 \ge 2, x_3 \ge 3$. Очевидно, що ця задача еквівалентна рівнянню $x_1 + x_2 + x_3 = 5$ без обмежень. Справді, потрібно взяти щонайменше один елемент першого типу, два елементи другого типу, три елементи третього – разом 1+2+3 = 6 елементів; отже, 11 – 6 = 5 елементів залишаться для довільного вибору,

$$\tilde{C}_3^5 = C_{3+5-1}^5 = C_7^5 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = \frac{6\cdot 7}{2} = 21.$$

Приклад. Визначимо кількість розв'язків нерівності $x_1 + x_2 + x_3 \le 11$ в невід'ємних цілих числах. Уведемо допоміжну змінну x_4, яка може набувати цілих невід'ємних значень, і перейдемо до еквівалентної задачі: визначити кількість розв'язків рівняння $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 11$ в невід'ємних цілих числах. Отже,

$$\tilde{C}_4^{11} = C_{4+11-1}^{11} = C_{14}^{11} = \frac{14!}{11!\cdot 3!} = 364.$$

Принцип коробок Діріхле

Принцип коробок Діріхле (англ. Pigeonhole principle) широко застосовують у теорії скінченних автоматів, теорії чисел та ін.

Теорема. (принцип коробок Діріхле). Якщо $k + 1$ або більше предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить два чи більше предметів.

Доведення. Припустимо, що жодна коробка не містить більше одного предмета. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільше k. Це суперечить тому, що є щонайменше $k + 1$ предмет.

Приклад. У будь-якій групі з 13 чоловік принаймні двоє народилися в один місяць.

Позначення:

$\lfloor x \rfloor$ - найбільше ціле, менше або рівне x (функція *floor*).

$\lceil x \rceil$ - найменше ціле, більше або рівне x (функція *ceil*).

$\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lceil 3.14 \rceil = 4$, $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$, $\lceil -3.14 \rceil = -3$.

Теорема. (узагальнений принцип коробок Діріхле). Якщо N предметів розкладено в k коробках, то існує принаймні одна коробка, яка містить щонайменше $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ предметів.

Доведення. Зазначимо, що справджується нерівність $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil < \frac{N}{k} + 1$. Припустимо, що жодна коробка не містить більше ніж $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ предметів. Тоді загальна кількість предметів становить щонайбільше

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left(\left(\frac{N}{k}+1\right)-1\right) = N\,/$$

Це суперечить умові теореми, що загальна кількість предметів дорівнює N.

Приклад. Серед 100 чоловік принаймні $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = \left\lceil 8\frac{1}{3} \right\rceil = 9$ народилися в одному місяці.

Приклад. Скільки потрібно взяти людей, щоб принаймні в 3-оє з них народилися в одному місяці?

Розв'язок. $\left\lceil \frac{N}{12} \right\rceil = 3$, $\left\lceil \frac{N}{12} \right\rceil < \frac{N}{12} + 1 \to 3 < \frac{N}{12} + 1 \to N > 24 = 25$.

Принцип включення-виключення

Цей принцип дає відповідь на запитання, як визначити кількість елементів у об'єднанні множин. Для двох множин правдива формула

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Приклад. Знайдемо кількість додатних цілих чисел, що не перевищують 1000 та діляться на 7 або на 11. Позначимо як A множину чисел, що діляться на 7, B - множину чисел, що діляться на 11. Тоді

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000}{7 \cdot 11} \right\rfloor = 142 + 90 - 12 = 220.$$

Цю ж задачу можна розв'язати за допомогою програми

```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;
int main()
{
	int a,b;
	a=7;
	b=11;
	int counter=0;
	for (int i=1;i<=1000;i++)
	{
		if ((i%a==0)||(i%b==0))counter++;
	}
	cout << "counter= " << counter<<endl;
	cout <<floor(1000.0/a)+floor(1000.0/b)-floor(1000.0/a/b)<<endl;
	return 0;
}
```

Для трьох множин формула для кількості елементів у їх об'єднанні ускладнюється:

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

Приклад. Одну з мов (англійську, німецьку, іспанську) вивчає 231 студент, причому:

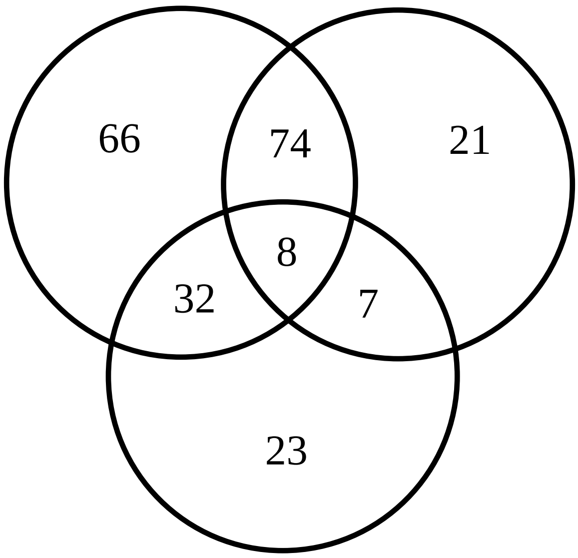
- англійську (і не тільки) вивчає $|E| = 180$ студентів.
- німецьку (і не тільки) вивчає $|D| = 110$ студентів
- французьку (і не тільки) вивчає $|F| = 70$ студентів
- англійську і німецьку $|E\cap D| = 82$ вивчає студенти
- англійську і французьку $|E\cap F| = 40$ вивчає студентів
- французьку і німецьку $|F\cap D| = 15$ вивчає студентів

Скільки студентів вивчає всі три мови?

Маємо

$$231 = 180 + 110 + 70 - 82 - 40 - 15 + |A\cap B\cap C|, \text{ звідки } |A\cap B\cap C| = 8$$

Цю задачу можна зобразити такою діаграмою Ейлера-Венна



Теорема. (принцип включення-виключення). Нехай $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - скінченні множини. Тоді

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots$$
$$+(-1)^{n+1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|$$

Доведення. Достатньо довести, що кожний елемент в об'єднанні множин враховано в правій частині рівності точно один раз. Припустимо, що елемент a належить рівно r множинам з $A_1, A_2, \ldots, A_n$, де $1 \le r \le n$. Тоді цей елемент враховано C_r^1 разів у $\sum |A_i|$, враховано C_r^2 разів у $\sum |A_i \cap A_j|$ і т.д. Загалом його враховано C_r^m разів під час сумування членів, які містять перетин m множин A_i. Отже, елемент a враховано точно $C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \ldots + (-1)^{r+1} C_r^r$ разів у виразі в правій частині рівності.

За властивістю біноміальних коефіцієнтів $C_r^0 - C_r^1 + C_r^2 - \ldots + (-1)^r C_r^r = 0$. Отже, $C_r^0 = C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \ldots + (-1)^{r+1} C_r^r$, але $C_r^0 = 1$, і тому $C_r^1 - C_r^2 + C_r^3 - \ldots + (-1)^{r+1} C_r^r = 1$. Це й означає, що кожний елемент об'єднання множин враховано в правій частині рівності точно один раз.

Зазначимо, що формула включення-виключення містить $2^n - 1$ доданків, по одному для кожної непорожньої підмножини з $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$.

Принцип включення-виключення в альтернативній формі

Ця форма принципу включення-виключення може бути корисною для розв'язування задач, у яких потрібно знайти кількість елементів заданої множини *A*, які не мають жодної з *n* властивостей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Уведемо такі позначення:

- $A_i \subset A$ -підмножина елементів, що мають властивість α_i;
- $N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ -кількість елементів множини *A*, які водночас мають властивості $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$;
- $N(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_n)$ - кількість елементів множини *A*, які не мають жодної з властивостей $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$;
- N -кількість елементів у заданій множині *A*.

Тоді, за принципом включення-виключення можна записати

$$N\left(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n\right)=N-\left|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n\right|=$$
$$=N-\sum_{1\le i\le n}N\left(\alpha_i\right)+\sum_{1\le i<j\le n}N\left(\alpha_i,\alpha_j\right)-\sum_{1\le i<j<k\le n}N\left(\alpha_i,\alpha_j,\alpha_k\right)+\ldots+\left(-1\right)^n N\left(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right)$$

Вищенаведена формула дає принцип включення-виключення в альтернативній формі.

Приклад. Знайдемо кількість розв'язків рівняння $x_1+x_2+x_3=11$ у невід'ємних цілих числах у разі обмежень $x_1\le 3, x_2\le 4, x_3\le 6$.

Позначимо ці обмеження як $\bar{\alpha}_1: x_1\le 3$, $\bar{\alpha}_2: x_2\le 4$, $\bar{\alpha}_3: x_1\le 6$. Альтернативні обмеження будуть мати вигляд $\alpha_1: x_1\ge 4$, $\alpha_2: x_2\ge 5$, $\alpha_3: x_1\ge 7$

Тоді, згідно принципом включення-виключення можна записати:

$$N\left(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3\right)=N-N\left(\alpha_1\right)-N\left(\alpha_2\right)-N\left(\alpha_3\right)+N\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+N\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+N\left(\alpha_1,\alpha_2\right)-$$
$$-N\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right),$$

де:

- $N=\tilde{C}_3^{11}=C_{13}^{11}=78$ - загальна кількість розв'язків;
- $N\left(\alpha_1\right)=\tilde{C}_3^{7}=C_9^7=36$ - кількість розв'язків, що задовольняють умову $x_1\ge 4$;
- $N\left(\alpha_2\right)=\tilde{C}_3^{6}=C_8^6=28$ - кількість розв'язків, що задовольняють умову $x_2\ge 5$;
- $N\left(\alpha_3\right)=\tilde{C}_3^{4}=C_6^4=15$ - кількість розв'язків, що задовольняють умову $x_3\ge 7$;
- $N\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=\tilde{C}_3^{2}=C_4^2=6$ - кількість розв'язків, що задовольняють умову $x_1\ge 4$ та $x_2\ge 5$;
- $N\left(\alpha_1,\alpha_3\right)=\tilde{C}_3^{0}=1$ - кількість розв'язків, що задовольняють умови $x_1\ge 4$ та $x_3\ge 7$;
- $N\left(\alpha_2,\alpha_3\right)=0$ - кількість розв'язків, що задовольняють умови $x_2\ge 5$ та $x_3\ge 7$;
- $N\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=0$ - кількість розв'язків, що задовольняють умови $x_1\ge 4$ та $x_2\ge 5$ та $x_3\ge 7$;

Отже, кількість розв'язків даного рівняння із зазначеними обмеженнями дорівнює

$$N\left(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\bar{\alpha}_3\right)=78-36-28+15+6+1+0-0=6.$$