– парабола симетрична відносно осі Oy.

В обидвох випадках **вершина** параболи, тобто точка $O(0,0)$, яка лежить на **осі симетрії** Ox (Oy), знаходиться в початку координат.

Парабола (4.12) має **фокус** $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ і **директрису** $x=-\frac{p}{2}$; **фокальний радіус-вектор точки** $M(x,y)$ параболи визначається рівністю $r=x+\frac{p}{2}$.

Парабола (4.13) має **фокус** $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$ і **директрису** $y=-\frac{p}{2}$; **фокальний радіус-вектор точки** $M(x,y)$ параболи визначається рівністю $r=y+\frac{p}{2}$.

Ексцентриситет параболи $\varepsilon=1$.

Дотична до параболи $y^2=2px$ у точці $M_0(x_0,y_0)$ визначається рівністю $yy_0=p(x+x_0)$.

Рівняння параболи з вершиною у точці $C_0(x_0,y_0)$ має вигляд $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

5. ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

5.1. Дійсні числа

Абсолютною величиною (модулем) дійсного числа x є невід'ємне число $|x|$, яке визначається за формулою

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{якщо}\quad x\geqslant 0,\\ -x, & \text{якщо}\quad x<0.\end{cases}\tag{5.1}$$

Властивості модуля дійсного числа:
1) $a=b\Rightarrow|a|=|b|$; 2) $|x|\geqslant x$; 3) $|x|=|-x|$;
4) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$; 5) $|x-y|\geqslant|x|-|y|$;
6) $|x\cdot y|=|x|+|y|$; 7) $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, y\neq 0$;
8) $|x|\leqslant a\Leftrightarrow -a\leqslant x\leqslant a$; 9) $|x|\geqslant a\Leftrightarrow x\geqslant a,\ x\leqslant -a$.

Під **множиною** розуміють сукупність (сімейство, набір, зібрання) деяких об'єктів, об'єднаних за певною ознакою чи властивістю. Об'єкти, з яких складається множина, є її **елементами**. Якщо елемент x належить множині X, то пишуть $x\in X$. Запис $x\bar{\in}X$ означає, що елемент x не належить множині X.

Множина, елементами якої є числа, називається **числовою**.

Множина, яка містить скінченну кількість елементів, є **скінченною**, а множина, яка містить нескінченну кількість елементів, є **нескінченною**. Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається $\varnothing$.

Множина C, яка містить елементи, кожен з яких належить множині A або B, є **об'єднанням (сумою) множин** A і B: $C=A\cup B$.

Множина D, що складається з елементів, кожний з яких належить одночасно множинам A і B, є **перерізом (добутком) множин** A і B: $D = A \cap B$.

Множина E, що складається з елементів, кожний з яких належить множині A і не належить множині B, є **різницею множин** A і B: $E = A \setminus B$.

5.2. Функція

5.2.1. Функція. Найпростіші властивості функції

Якщо кожному числу x з множини D за певним правилом поставлено у відповідність єдине число y, то y є функцією від x і позначається $y = f(x)$, $x \in D$.

Змінна x є **незалежною змінною** або **аргументом**, а змінна y – **залежною змінною**, або **функцією**.

Множина D значень x, для яких функція $y = f(x)$ має дійсний зміст, називається **областю визначення** цієї функції.

Множина E всіх чисел y, таких, що $y = f(x)$ для кожного $x \in D$, є **множиною значень** функції.

Функція $f(x)$ є **парною**, якщо $f(-x) = f(x)$, $x \in D$ і **непарною**, якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in D$.

Функція $f(x)$, яка визначена на всій числовій прямій, є **періодичною**, якщо $f(x + T) = f(x)$. Число T називається **періодом функції**. Якщо T – період функції, то її періодом також є числа kT, де $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Найменше з додатних чисел T є **основним періодом функції**.

Якщо функція $f(x)$ визначена на множині D і для двох довільних різних значень x_1 і x_2 аргументу з цієї множини при умові $x_1 < x_2$ маємо:

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то функція є **зростаючою**;
2) $f(x_1) > f(x_2)$, то функція є **спадною**;
3) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$, то функція є **неспадною**;
4) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то функція є **незростаючою**.

Зростаючі, незростаючі, спадні і неспадні функції на множині D називаються **монотонними** на цій множині.

Функція $f(x)$, визначена на множині D, є **обмеженою** на цій множині, якщо існує таке число $M > 0$, що для всіх $x \in D$ виконується умова $|f(x)| \leqslant M$.

Якщо для функцій $f(x)$ і $g(x)$, які визначені на множині D, існує таке число N, що для всіх $x \in D$ виконується нерівність $|f(x)| \leqslant N$ або $|g(x)| \geqslant N$, то $f(x)$ є **обмеженою зверху**, а $g(x)$ – **обмеженою знизу** функцією.

Якщо рівняння $F(x, y) = 0$, яке не розв'язане відносно y, визначає y як функцію x, то y є **неявною** функцією x.

Функція $x = \varphi(y)$ є **оберненою** до функції $y = f(x)$, якщо:

1) областю визначення функції φ є множина значень функції f;
2) множина значень функції φ є областю визначення функції f;
3) кожному значенню змінної $y \in E$ відповідає єдине значення змінної $x \in D$.

Функція $y = f(x)$, $x \in D$, $y \in E$ має обернену функцію $x = \varphi(y)$ тоді і тільки тоді, коли вона є строго монотонною в області D.

Задання функціональної залежності між x і y у вигляді двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ однієї незалежної змінної t, які визначенні на одному й тому самому проміжку, є параметричним заданням функцій; змінна t при цьому називається **параметром**.

Якщо функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$, то змінну y можна розглядати як складену функцію від x: $y = \varphi(\Phi(x))$.

Найпростішими **елементарними функціями** є:

1) степенева $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$;

2) показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометричні: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

5.3. Границя

5.3.1. Послідовність. Границя послідовності

Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$$

називають **числовою послідовністю** і позначають символом $\{x_n\}$, де x_1, x_2, ..., x_n – члени або елементи послідовності, x_n – загальний член послідовності.

Число x_0 є **границею послідовності** $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Якщо x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x_0.$$

Послідовність, яка має границю називається **збіжною**, в протилежному випадку – **розбіжною**.

5.3.2. Границя функції. Обчислення границь

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називається **границею функції** $f(x)$ **в точці** x_0 (пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$), якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує залежне від ε число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $0 < |x - x_0| < \delta$.

Аналогічно, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = A$, якщо для всякого числа $\varepsilon > 0$ існує залежне від ε число N таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

Якщо $x \to x_0$ і при цьому $x < x_0$, то пишуть $x \to x_0 - 0$; аналогічно, якщо $x \to x_0$ і при цьому $x > x_0$, то пишуть $x \to x_0 + 0$. Числа $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ і $f(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ називаються відповідно **границею зліва функції** $f(x)$ **в точці** x_0 і **границею справа функції** $f(x)$ **в точці** x_0. Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$. Замість $x \to 0 - 0$ і $x \to 0 + 0$ пишуть $x \to -0$ і $x \to +0$ відповідно.

Ліва і права границі функції називаються **односторонніми границями**.

Властивості границь.

1) Границя постійної рівна самій постійній: $\lim c = c$, $c = \text{const}$.

2) Якщо кожна з функцій $u(x)$ та $v(x)$ має скінченну границю при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$, то справедливі формули:

а) $\lim cu = c \lim u$;

б) $\lim(u \pm v) = \lim u \pm \lim v$;

в) $\lim(u \cdot v) = \lim u \cdot \lim v$;

г) $\lim \dfrac{u}{v} = \dfrac{\lim u}{\lim v}$, $\lim v \neq 0$.

Наслідки:

1) $\lim u^n = [\lim u]^n$, зокрема,

2) $\lim\limits_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in N$.

Якщо для будь-якого як завгодно великого числа N існує таке число $\delta(N)$, що при $0 < |x - x_0| < \delta(N)$ виконується нерівність $|f(x)| > N$, то функція $y = f(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \to x_0$ $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty)$. Аналогічно визначається нескінченно велика $f(x)$ при $x \to \infty$.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$, таке, що при $0 < |x - x_0| < \delta$ справедлива нерівність $|\alpha(x)| < \varepsilon$, то $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою функцією при** $x \to x_0$. Аналогічно визначається нескінченно мала $\alpha(x)$ при $x \to \infty$.

Деякі властивості нескінченно малих величин:

1) якщо при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ $\alpha(x)$ – нескінченно мала, а $f(x)$ – нескінченно велика величина, то при $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ і $\dfrac{1}{f(x)}$ – відповідно нескінченно велика і нескінченно мала величини;

2) сума скінченого числа нескінченно малих величин є нескінченно малою величиною;

3) добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою величиною;

4) частка від ділення нескінченно малої величини на функцію, яка має відмінну від нуля границю, є нескінченно малою величиною.

Порівняння нескінченно малих функцій.

Нехай при $x \to x_0$ $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ є нескінченно малими функціями. Тоді:

I. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = C$, $C \neq 0$, то α і β є **нескінченно малими одного порядку**; якщо $C = 0$, то α є **нескінченно малою вищого порядку ніж** β.

II. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta^k} = A \neq 0$, $A \in R$, то α називається **нескінченно малою k-го порядку відносно** β.

III. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$, то α і β називаються **еквівалентними нескінченно малими**. Еквівалентність записується так: $\alpha \sim \beta$.

Границя відношення нескінченно малих функцій $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to x_0$ рівна границі відношення еквівалентних їм нескінченно малих функцій $\alpha^*(x)$ і $\beta^*(x)$ при $x \to x_0$, тобто справедливі граничні рівності:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha^*}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta^*} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha^*}{\beta^*}.$$

Часто зустрічаються наступні еквівалентні нескінченно малі величини при $x \to 0$:

$$\begin{array}{ll}
\sin x \sim x; & e^x - 1 \sim x; \\
\operatorname{tg} x \sim x; & a^x - 1 \sim x \ln a; \\
\arcsin x \sim x; & \log_a(1+x) \sim x \log_a e; \\
\operatorname{arctg} x \sim x; & \ln(1+x) \sim x; \\
1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}; & (1+x)^k - 1 \sim kx, \ k > 0.
\end{array}$$

При обчисленні границь широко використовуються такі границі:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ – **перша важлива границя**. За її допомогою розкривають невизначеність виду $\dfrac{0}{0}$, задану виразами, що містять тригонометричні функції.

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{\alpha \to 0} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e \approx 2,71828\ldots$ – **друга важлива границя**, її використовують при розкритті невизначеності виду 1^∞.

5.3.3. Неперервність функції. Точки розриву

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0, якщо:

1) функція $f(x)$ визначена в точці x_0 і деякому її околі;

2) існує скінчена границя функції $f(x)$ в точці x_0: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$;