ОСНОВИ ЛОГІКИ ВИСЛОВЛЮВАНЬ

Логіку як науку, створену Арістотелем (384-322 до н. є.), упродовж століть використовували для розвитку багатьох галузей знань, зокрема філософії та математики. По сутті, логіка – це наука про міркування, яка дає змогу визначити істинність або хибність математичного твердження, виходячи з первинних припущень, які називають аксіомами. Логіку також застосовують в інформатиці для побудови комп'ютерних програм і доведення їх коректності. Поняття, методи й засоби логіки покладено в основу сучасних інформаційних технологій. Теорія множин і математична логіка – універсальна мова подальших розділів книги.

Логіка висловлювань

Висловлюванням називають розповідне речення, про яке можна сказати, що воно чи істинне, чи хибне, але не одне й інше водночас. Розділ логіки, який вивчає висловлювання та їхні властивості, називають *пропозиційною логікою* або *логікою висловлювань*.

Приклад. Наведемо приклади речень.

1. Сніг білий.
2. Київ – столиця України.
3. $x + 1 = 3$.
4. Котра година?
5. Читай уважно!

Два перші речення – висловлювання, решта три – ні, бо третє речення набуває істинного чи хибного значення залежно від значення змінної x, четверте та п'яте речення – не розповідні.

Значення "істина" чи "хибність", яких набуває висловлювання, називають його *значенням істинності.* Значення "істина" позначають буквою T (від англ. "truth"), а "хибність" – буквою F (від "false"). Для позначення висловлювань використовують малі латинські букви з індексами чи без них. Символи, використовувані для позначення висловлювань, називають *атомарними формулами* чи *атомами.*

Приклад. Наведемо приклади висловлювань.

1. *p:* “Сніг білий”.
2. *q*: “Київ – столиця України”.

Тут символи p, q – атомарні формули.

Багато речень утворюють об’єднанням одного чи декількох висловлювань. Отримане висловлювання називають *складним.* Побудову складних висловлювань уперше розглянуто 1845 р. в книзі англійського математика Дж. Буля (G. Boole) “The Laws of Truth”. Складне висловлювання утворюють із наявних висловлювань за допомогою *логічних операцій.* У логіці висловлювань використовують п’ять логічних операцій:

- *заперечення* (читають “не” та позначають знаком “$\neg$”);
- *кон’юнкцію* (читають “і (та) ” й позначають знаком “$\wedge$”);
- *диз’юнкцію* (читають “або (чи) ” та позначають знаком “$\vee$”);
- *імплікацію* (читають “якщо..., то” та позначають знаком “$\to$”);
- *еквівалентність* (читають “тоді й лише тоді” та позначають знаком “~”).

Приклад. Наведемо приклади складних висловлювань.

1. Сніг білий, і небо теж біле.
2. Якщо погода хороша, то ми їдемо відпочивати.

У наведених прикладах логічні операції – це “і” та “якщо..., то”.

Приклад. Розглянемо такі висловлювання: *p:* “Вологість велика”, *q:* “Температура висока”, *r:* “Ми почуваємо себе добре”. Тоді речення “Якщо вологість велика та температура висока, то ми не почуваємо себе добре” можна записати складним висловлюванням $\left(\left(p \wedge q\right) \to \left(\neg r\right)\right)$.

У логіці висловлювань атом *p* чи складне висловлювання називають *правильно побудованою формулою* або *формулою.* Вивчаючи формули, розглядають два аспекти – синтаксис і семантику.

Синтаксис – це сукупність правил, які дають змогу будувати формули та розпізнавати правильні формули серед послідовностей символів. *Формули* в логіці висловлювань означають за такими правилами:

- атом – це формула;

- якщо p – формула, то $(\neg p)$ – також формула;
- якщо p та q – формули, то $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \to q)$, $(p \sim q)$ – формули;
- формули можуть бути породжені тільки скінченною кількістю застосувань указаних правил.

Формули, як і атоми, позначають малими латинськими буквами з індексами чи без них.

Приклад. Вирази $(p \to), (p \wedge), (p \neg), (\vee q)$ – не формули.

Часто заперечення висловлювання p позначають також $\overline{p}$. Такий спосіб запису заперечення не потребує дужок. Якщо не виникає непорозумінь, то зовнішні дужки у формулах можна випускати.

Приклад. Формули $(p \vee q), (p \to q)$ та $((p \wedge q) \to (\neg r))$ можна записати відповідно у вигляді $p \vee q,\ p \to q$ та $(p \wedge q) \to \overline{r}$.

Семантика – це сукупність правил, за якими формулам надають значення істинності. Нехай p та q – формули. Тоді значення істинності формул $(\neg p), (p \wedge q), (p \vee q), (p \to q)$ та $(p \sim q)$ так пов'язані зі значеннями істинності формул p та q.

1. Формула $(\neg p)$ істинна, коли p хибна, і хибна, коли формула p істинна. Формулу $(\neg p)$ читають "не p" чи "це не так, що p" та називають *запереченням формули p.*
2. Формула $(p \wedge q)$ істинна, якщо p та q водночас істинні. У всіх інших випадках формула $(p \wedge q)$ хибна. Формулу $(p \wedge q)$ читають "p і q" й називають *кон'юнкцією* формул p та q.
3. Формула $(p \vee q)$ хибна, якщо p та q водночас хибні. У всіх інших випадках $(p \vee q)$ істинна. Формулу $(p \vee q)$ читають "p або q" й називають *диз'юнкцією* формул p та q.
4. Формула $(p \to q)$ хибна, якщо формула р істинна, а q – хибна. У всіх інших випадках вона істинна. Формулу $(p \to q)$ називають *імплікацією,* атом р – *припущенням імплікації,* а q – її *висновком.* Оскільки імплікацію використовують у багатьох математичних міркуваннях, то існує багато

термінологічних варіантів для формули $(p \to q)$. Ось деякі з них: “якщо p, то q”, “з p випливає q”, “p лише тоді, коли q”, “p достатнє для q”, “ q, якщо p”, “q необхідне для p ”.

5. Формула $(p \sim q)$ істинна, якщо p та q мають однакові значення істинності. У всіх інших випадках формула $(p \sim q)$ хибна. Формулу $(p \sim q)$ читають “p тоді й лише тоді, коли q” чи “p еквівалентне q” та називають *еквівалентністю* формул p та q.

Семантику логічних операцій зручно задавати за допомогою таблиць, які містять значення істинності формул залежно від значень істинності їх атомів. Такі таблиці називають *таблицями істинності.* Семантику введених операцій у формі таблиць істинності наведено в таблиці.

Таблиця

p	q	$(\neg p)$	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \to q)$	$(p \sim q)$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Приклад. Знайдемо заперечення висловлювання “Сьогодні п’ятниця”. Воно має вигляд “Це не так, що сьогодні п’ятниця”. Це речення також можна сформулювати як “Сьогодні не п’ятниця” чи “П’ятниця не сьогодні”. Зазначимо, що речення, пов’язані з часовою змінною – не висловлювання доти, доки не визначено момент часу. Це стосується й змінних у реченнях, які характеризують місце чи особу. Ці речення – не висловлювання, якщо не зазначено відповідного місця чи конкретної особи.

Приклад. Знайдемо кон’юнкцію висловлювань p та q, де p – висловлювання “Сьогодні п’ятниця”, а q – “Сьогодні падає дощ”. Кон’юнкція цих висловлювань – “Сьогодні п’ятниця, і сьогодні падає дощ”. Воно істинне в дощову п’ятницю й хибне в інший день або в недощову п’ятницю.

Приклад. Що являє собою диз’юнкція висловлювань p та q з попереднього прикладу? Диз’юнкція висловлювань p та q – висловлювання “Сьогодні п’ятниця чи сьогодні падає дощ”. Воно істинне в будь-яку п’ятницю чи в будь-який дощовий день (зокрема, у дощову п’ятницю) і хибне тільки в недощові “не п’ятниці”.

Логічна операція “диз’юнкція” відповідає одному з двох способів уживання слова “чи (або)” в українській мові. Диз’юнкція істинна, якщо істинне принаймні одне з двох висловлювань. Розглянемо речення “Лекції з логіки можуть відвідувати студенти, які прослухали курси математичного аналізу чи дискретної математики”. Його зміст полягає в тому, що лекції можуть відвідувати як студенти, які прослухали обидва курси, так і ті, хто прослухав тільки один із них. Але є й інше, *альтернативне* “*чи* (*або*)”. Розглянемо речення “Лекції з логіки мають відвідувати студенти, які прослухали тільки один із двох курсів – математичного аналізу чи дискретної математики”. Зміст цього речення полягає в тому, що студенти, які прослухали обидва ці курси, уже не повинні слухати лекції з логіки. Аналогічно, якщо в меню зазначено “Закуску чи салат подають із першою стравою”, то це майже завжди означає, що з першою стравою буде подано чи закуску, чи салат, а не обидві страви. В останніх двох реченнях використано альтернативне “чи (або)”; його позначають знаком “⊕”. Значення істинності цієї операції наведено в таблиці.

Таблиця

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

Імплікацію як логічну операцію називають також *умовним реченням.* Щоб зрозуміти, чому імплікація набуває таких значень істинності, слід сприймати її як зв’язок обов’язкового й очікуваного. Наприклад, розглянемо звернення, адресоване студентам: “Якщо ви виконаєте всі завдання, то отримаєте відмінну оцінку”. Це означає, що в разі виконання студентами всіх завдань вони одержать відмінну оцінку. Якщо ж студенти не виконають усіх завдань, то вони можуть отримати оцінку “відмінно”, а можуть і не отримати її залежно від інших обставин. Однак якщо студенти зробили всі завдання, а викладач не поставив оцінку “відмінно”, то студенти відчуватимуть себе ображеними. Це відповідає ситуації, коли в імплікації $(p \to q)$ припущення p “Ви виконаєте всі завдання” істинне, а її висновок q “Ви отримаєте відмінну оцінку” хибний.

Розуміння імплікації в логіці дещо відрізняється від його розуміння в природній мові. Наприклад, “Якщо буде сонячно, то ми підемо на пляж” – умовне речення, уживане у звичайній мові. Воно залишається істинним до того моменту, коли настане сонячний день, а ми не підемо на пляж. За означенням імплікації умовне речення “Якщо сьогодні п’ятниця, то 2 + 3 = 5” істинне, бо висновок імплікації істинний. При цьому значення істинності припущення в імплікації тут не має відношення до висновку. Імплікація “Якщо сьогодні п’ятниця, то 2 + 3 = 6” істинна щодня, крім п’ятниці, хоча висловлювання 2 + 3 = 6 хибне. Останні дві імплікації ми не вживаємо в природній мові (хіба що як жарт), оскільки у кожному з відповідних умовних речень немає змістовного зв’язку між припущенням і висновком.

Конструкція “якщо p, то q”, використовувана у вигляді “if p then q” в алгоритмічних мовах, відрізняється за змістом від імплікації в логіці. Тут p – висловлювання, а q – програмний сегмент, який складається з одного чи багатьох операторів. Програмний сегмент q виконується, якщо висловлювання p істинне, і не виконується, якщо воно хибне.

Для знаходження значення істинності складного висловлювання потрібно надати значення істинності всім атомам, які містить відповідна формула. Набір значень істинності всіх атомів формули називають ЇЇ *інтерпретацією.* Для обчислення значень істинності формули, яка зображає складне висловлювання, потрібно знаходити значення логічних операцій, визначених в попередній таблиці. Послідовність обчислень задають парами дужок. Якщо формула має n атомів, то є 2^n способів надати значення істинності її атомам, тобто така формула має 2^n інтерпретацій, а всі її значення можна звести в таблицю істинності з 2^n рядками. Формулу, яка містить *n* атомів, називають *n-місною.*

Формулу f називають *виконанною,* якщо існує принаймні одна інтерпретація, у якій *f* набуває значення T. У такому разі говорять, що формула *f виконується* в цій інтерпретації.

Приклад. Розглянемо формулу $(p \wedge q) \rightarrow (p \sim \overline{r})$. Позаяк кожному з атомів *p, q* й *r* можна надати два значення – F або T, то задана формула має $2^3 = 8$ інтерпретацій. Обчислимо значення істинності заданої формули для значень істинності атомів *p, q* та *r,* що відповідно дорівнюють T, T й F. Цим задано одну з інтерпретацій формули. Тоді формула $(p \wedge q)$ має значення T; $\overline{r}$ має значення T, позаяк r хибне; формула $(p \sim \overline{r})$ істинна, бо p та $\overline{r}$ істинні; нарешті, формула $((p \wedge q) \rightarrow (p \sim \overline{r}))$ істинна, оскільки $(p \wedge q)$ та $(p \sim \overline{r})$ істинні. Отже, задана формула виконується в цій інтерпретації, позаяк вона набуває значення T. Значення істинності формули $(p \wedge q) \rightarrow (p \sim \overline{r})$ у всіх її інтерпретаціях наведено в таблиці.

Таблиця

p	q	r	$\overline{r}$	$(p \wedge q)$	$(p \sim \overline{r})$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \sim \overline{r})$
T	T	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	F	T

Формулу f логіки висловлювань називають *загальнозначущою* чи *тавтологією,* якщо вона виконується в усіх інтерпретаціях. Якщо формула f – тавтологія, то використовують позначення $\models f$. Формулу, хибну в усіх інтерпретаціях, називають *заперечуваною, невиконанною* чи *суперечністю.*

Оскільки кожна формула логіки висловлювань має скінченну кількість інтерпретацій, то завжди можна перевірити її загальнозначущість або заперечуваність, знайшовши значення істинності в усіх можливих інтерпретаціях.

Приклад. Розглянемо формулу $((p \to q) \wedge p) \to q$. Її атоми – p та q. Формула має $2^2 = 4$ інтерпретації. Значення істинності наведено в таблиці. Ця формула істинна в усіх інтерпретаціях, тобто являє собою тавтологію.

Таблиця

p	q	$(p \to q)$	$((p \to q) \wedge p)$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

Приклад. Розглянемо формулу $(p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q})$. З нижченаведеної таблиці доходимо висновку, що вона хибна в усіх інтерпретаціях, тобто заперечувана.

Таблиця

p	q	$(p \to q)$	$\overline{q}$	$(p \wedge \overline{q})$	$(p \to q) \wedge (p \wedge \overline{q})$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F

Комп'ютери відображають інформацію за допомогою бітів. *Біт* має два можливі значення – 0 (нуль) і 1 (одиниця). Його можна використовувати для подання значень істинності T й F. Зазвичай 1 використовують для зображення T й 0 – для зображення F. Змінну називають *булевою,* якщо її значення – T чи F. Отже, булеві змінні можна подати за допомогою бітів.

Комп'ютерні операції над бітами відповідають логічним операціям. Замінивши T на 1, а F – на 0 у таблицях істинності для логічних операцій

$\vee$, $\wedge$ та $\oplus$, отримаємо таблиці відповідних операцій над бітами. Ми будемо також використовувати нотацію OR, AND і XOR відповідно для логічних операцій $\vee$, $\wedge$ та $\oplus$, як у багатьох мовах програмування. Значення операцій OR, AND та XOR над бітами наведено в таблиці.

Таблиця

x	y	OR	AND	XOR
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Бітовим рядком називають скінченну послідовність бітів. Розглядають також рядок, який не містить жодного біта *(порожній рядок)*. *Довжиною* бітового рядка називають кількість бітів у ньому. Наприклад, 110010100 – бітовий рядок довжиною дев’ять.

Операції над бітами можна узагальнити на бітові рядки. Означимо *порозрядне* OR, *порозрядне* AND і *порозрядне* XOR двох бітових рядків з однією довжиною як бітовий рядок, який має таку саму довжину, а його біти – відповідно результати операцій OR, AND і XOR над відповідними бітами цих рядків.

Приклад. Знайдемо результати операцій порозрядного OR, порозрядного AND і порозрядного XOR бітових рядків 1011000011 і 1101010101. Одержимо

1011000011

$\underline{1101010101}$

1111010111 – порозрядне OR

1001000001 – порозрядне AND

0110010110 – порозрядне XOR

Закони логіки висловлювань

Формули f і g називають *еквівалентними, рівносильними* чи *тотожними* (позначають $f = g$), якщо значення їх істинності збігаються в усіх інтерпретаціях цих формул. Властивість еквівалентності формул f і g можна сформулювати у вигляді такого твердження.

Теорема. Формули f і g еквівалентні тоді й лише тоді, коли формула $(f \sim q)$ загальнозначуща, тобто $\models (f \sim q)$.

Приклад. За допомогою таблиці істинності доведемо, що $(p \to q) = \overline{p} \vee q$. Результати розв'язування задачі наведено далі в таблиці.

Таблиця

p	q	$p \to q$	$\overline{p}$	$\overline{p} \wedge q$	$(p \to q) \sim (\overline{p} \vee q)$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Приклад. За допомогою таблиці істинності доведемо, що $p \to q \neq q \to p$. Результати розв'язування задачі наведено далі в таблиці.

Таблиця

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \sim (q \to p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Розглянемо еквівалентні формули, які задають правила перетворень. Такі еквівалентності називають *законами логіки висловлювань.* Перетворення виконують заміною якоїсь формули в складі іншої формули на еквівалентну їй формулу. Цю процедуру повторюють доти, доки не буде отримано формулу в потрібній формі. Основні закони логіки висловлювань наведено в наступній таблиці.

Таблиця

Назва закону	Формулювання закону
1. Закони комутативності	*а)* $p \vee q = q \vee p$; *б)* $p \wedge q = q \wedge p$
2. Закони асоціативності	*а)* $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$; *б)* $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$
3. Закони дистрибутивності	*а)* $p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; *б)* $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
4. Закон суперечності	$p \wedge \overline{p} = \mathrm{F}$
5. Закон виключеного третього	$p \vee \overline{p} = \mathrm{T}$
6. Закон подвійного заперечення	$\overline{\overline{p}} = p$
7. Закони ідемпотентності	*а)* $p \vee p = p$; *б)* $p \wedge p = p$
8. Закони де Моргана	*а)* $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$; *б)* $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}$
9. Закони поглинання	*а)* $(p \vee q) \wedge p = p$; *б)* $(p \wedge q) \vee p = p$
10. Співвідношення для сталих	*а)* $p \vee \mathrm{T} = \mathrm{T}$; *б)* $p \wedge \mathrm{T} = p$; *в)* $p \vee \mathrm{F} = p$; *г)* $p \wedge \mathrm{F} = \mathrm{F}$
11. Виключення еквівалентності та імплікації	*а)* $p \sim q = (p \to q) \wedge (q \to p)$ *б)* $p \to q = \overline{p} \vee q$

Закони асоціативності дають змогу записувати багатомісні диз'юнкції та кон'юнкції без дужок.

За допомогою правил $p \to q = \overline{p} \vee q$ та $p \sim q = (p \to q) \wedge (q \to p)$ можна усувати логічні операції імплікації й еквівалентності з формул. Ці правила можна використовувати також для *введення* імплікації й еквівалентності.

Наведені еквівалентності можна перевірити, побудувавши таблиці істинності. Зокрема, у прикладі доведено еквівалентність $p \to q = \overline{p} \vee q$, а приклад показує, що імплікація не комутативна. Покажемо, як можна застосувати закони логіки висловлювань для доведення еквівалентності формул.

Приклад. Застосувавши закони логіки висловлювань, доведемо еквівалентність формул $p \to (q \wedge r)$ і $(p \to q) \wedge (p \to r)$. Запишемо послідовність перетворень і назви використаних законів і правил:

$$p \to (q \wedge r) = \overline{p} \vee (q \wedge r)$$

(за правилом усунення імплікації)

$$= (\overline{p} \vee q) \wedge (\overline{p} \vee r)$$

(за законом дистрибутивності 3*a*)

$$= (p \to q) \wedge (p \to r)$$

(за правилом уведення імплікації).

Приклад. За допомогою законів логіки висловлювань доведемо еквівалентність формул $p \to q$ та $\overline{q} \to \overline{p}$. Цю еквівалентність називають *правилом контрапозиції*.

$$p \to q = \overline{p} \vee q$$

(за правилом усунення імплікації)

$$= q \vee \overline{p}$$

(за законом комутативності 1*a*)

$$= \overline{\overline{q}} \vee \overline{p}$$

(за законом подвійного заперечення 6)

$$\overline{q} \to \overline{p}$$

(за правилом уведення імплікації).

Нормальні форми логіки висловлювань

Літералом називають атом або його заперечення. Приклади літералів - $p, \overline{q}, r$.

Літерал називають *позитивним*, якщо він не має знака заперечення, і *негативним*, якщо має. Пару літералів $\{p, \overline{p}\}$ називають *контрарною*.

Говорять, що формулу f записано в *кон'юнктивній нормальній формі*

(КНФ), якщо вона має вигляд $f = f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n; (n \geq 1)$, де кожна з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - літерал або диз'юнкція літералів і всі формули f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ різні.

Приклад. Нехай p, q й r - атоми. Тоді $f = (p \vee \overline{q} \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee q)$ - формула, записана в КНФ. У ній $f_1 = (p \vee \overline{q} \vee \overline{r})$ і $f_2 = (\overline{p} \vee q)$, тобто f_1 - диз'юнкція літералів p, $\overline{q}$ й r, а f_2 - диз'юнкція літералів $\overline{p}$ та q.

Говорять, що формулу f записано в *диз'юнктивній нормальній формі* (ДНФ), якщо вона має вигляд $f = f_1 \vee f_2 \vee \ldots \vee f_n; (n \geq 1)$, де кожна з формул $f_1, f_2, \ldots, f_n$ - літерал або кон'юнкція літералів і всі f_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ різні.

Приклад. Нехай p, q й r - атоми. Тоді $f = (\overline{p} \wedge q) \vee (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$ - формула, записана в ДНФ. У ній $f_1 = (\overline{p} \wedge q)$ й $f_2 = (p \wedge \overline{q} \wedge \overline{r})$; f_1 - кон'юнкція літералів $\overline{p}$ та q, а f_2 - кон'юнкція літералів p, $\overline{q}$ й $\overline{r}$.

Довільну формулу можна перетворити в одну з нормальних форм, застосувавши закони логіки висловлювань. Для побудови нормальних форм потрібно виконати таку послідовність еквівалентних перетворень.

Крок 1. Застосувати правила $f \to g = \overline{f} \vee g$ й $f \sim g = (f \to g) \wedge (g \to f)$ для усунення логічних операцій "$\to$" та "$\sim$".

Крок 2. Застосувати закон подвійного заперечення та закони де Моргана для перенесення знака заперечення безпосередньо до атомів.

Крок 3. Застосувати відповідні закони дистрибутивності для побудови нормальної форми. Щоб побудувати КНФ, потрібно використати дистрибутивний закон для диз'юнкції щодо кон'юнкції (закон 3*а*). Для побудови ДНФ слід застосувати дистрибутивний закон для кон'юнкції щодо диз'юнкції (закон 3*б*).

Приклад. Побудуємо ДНФ формули $((p \vee \overline{q}) \to r) \wedge (\overline{r} \to s)$. Наведемо послідовність кроків та зазначимо застосовані закони логіки висловлювань.

$$\left(\left(p \vee \bar{q}\right) \to r\right) \wedge \left(\bar{r} \to s\right) = \left(\overline{\left(p \vee \bar{q}\right)} \vee r\right) \wedge \left(\bar{\bar{r}} \vee s\right)$$

(усунення логічної операції "$\to$")

$$= \left(\left(\bar{p} \wedge \bar{\bar{q}}\right) \vee r\right) \wedge \left(r \vee s\right)$$

(закон де Моргана 8*а*)

$$= \left(\left(\bar{p} \wedge q\right) \vee r\right) \wedge \left(r \vee s\right)$$

(закон подвійного заперечення)

$$= \left(\left(\bar{p} \wedge q\right) \wedge \left(r \vee s\right)\right) \vee \left(r \wedge \left(r \vee s\right)\right)$$

(закон дистрибутивності 3*б*)

$$= \left(\left(\bar{p} \wedge q \wedge r\right) \vee \left(\bar{p} \wedge q \wedge s\right)\right) \vee \left(\left(r \wedge r\right) \vee \left(r \wedge s\right)\right)$$

(закон дистрибутивності 3*б*)

$$= \left(\bar{p} \wedge q \wedge r\right) \vee \left(\bar{p} \wedge q \wedge s\right) \vee \left(r \wedge r\right) \vee \left(r \wedge s\right)$$

(закон асоціативності 2*а*)

$$= \left(\bar{p} \wedge q \wedge r\right) \vee \left(\bar{p} \wedge q \wedge s\right) \vee r \vee \left(r \wedge s\right)$$

(закон ідемпотентності 7*б*).

Ми одержали ДНФ. Її можна спростити, якщо двічі використати закон поглинання 9*б*: диз'юнктивний член у поглинає члени $\left(\bar{p} \wedge q \wedge r\right)$ і $\left(r \wedge s\right)$. Отже, $\left(\bar{p} \wedge q \wedge s\right) \vee r$ – інша ДНФ заданої формули. Останні міркування свідчать, що ДНФ, загалом кажучи, не єдина.

Приклад. Побудуємо КНФ формули $\left(p \wedge \left(q \to r\right)\right) \to s$. Наведемо послідовність кроків і застосовані закони:

$$\left(p \wedge \left(q \to r\right)\right) \to s = \overline{\left(p \wedge \left(\bar{q} \vee r\right)\right)} \vee s$$

(усунення логічної операції "$\to$")

$$= \left(\bar{p} \vee \overline{\left(\bar{q} \vee r\right)}\right) \vee s$$

(за законом де Моргана 8*б*)

$$= \bar{p} \vee \overline{\left(\bar{q} \vee r\right)} \vee s$$

(за законом асоціативності 2*а*)

$$= \bar{p} \vee \left(\bar{\bar{q}} \wedge \bar{r}\right) \vee s$$

(за законом де Моргана 8*a*)

$$= \overline{p} \vee \left(q \wedge \overline{r} \right) \vee s$$

(за законом подвійного заперечення 6)

$$= \overline{p} \vee s \vee \left(q \wedge \overline{r} \right)$$

(за законом комутативності 1*a*)

$$= \left(\overline{p} \vee s \right) \vee \left(q \wedge \overline{r} \right)$$

(за законом асоціативності 2*a*)

$$= \left(\overline{p} \vee q \vee s \right) \wedge \left(\overline{p} \vee \overline{r} \vee s \right)$$

(за законом дистрибутивності 3*a*).

Ми одержали шукану КНФ.