1. ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

1.1. Матриці та дії над ними

Матрицею називається прямокутна таблиця чисел a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, яка має m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Коротко матрицю позначають так: $A = (a_{ij})$, де a_{ij} – **елементи матриці**, запис $m \times n$ означає її розмір.

Якщо $m = n$, матриця називається **квадратною**. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її **порядком**. Дві матриці $A = (a_{ij})$ та $B = (b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$. Елементи a_{ii}, $i = 1, 2, \ldots, n$ утворюють **головну діагональ** квадратної матриці. Квадратна матриця називається **діагональною**, якщо всі її елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю. **Одинична** матриця E – це діагональна матриця, у якій елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці. Якщо $i = 1$, то отримуємо **матрицю-рядок**; якщо $j = 1$, дістаємо **матрицю-стовпець**.

Якщо елементи i-го рядка матриці записати в i-й стовпець ($i = 1, 2, \ldots, m$), дістанемо **транспоновану матрицю** A^T.

Перерахуємо **основні операції над матрицями**.

1. **Множення матриці на число**. **Добутком матриці**A **і числа** λ, називається матриця $B = \lambda A$ тієї ж розмірності, елементи якої рівні $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, де a_{ij} – елементи матриці A, тобто при множенні матриці на число необхідно всі елементи матриці помножити на це число.

Приклад 1.1. *Нехай*

$$\lambda = -2, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$B = \lambda A = -2 \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ -14 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. **Додавання і віднімання матриць**. Ці операції визначені тільки для матриць однакового розміру. **Сумою (різницею) матриць** A **і** B, що позначається $A + B\,(A - B)$, називається матриця C, елементи якої рівні $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$, де a_{ij} і b_{ij} – відповідно елементи матриць A і B.

Приклад 1.2. *Нехай*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

3. **Множення матриць**. Операцію множення матриць можна виконати, лише для узгоджених матриць. Матриця A називається **узгодженою з матрицею** B, якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B. **Добутком матриць** $A_{m\times n} = (a_{ij})$ **і** $B_{n\times p} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m\times p} = A \cdot B$, елемент c_{ij} котрої дорівнює сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj},$$
$$i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = 1, 2, \ldots, p.$$

З існування добутку AB не слідує існування добутку BA. У випадку його існування, як правило $AB \neq BA$. Якщо $AB = BA$, то матриці A і B називаються **переставними** (або **комутуючими**). Відомо, що завжди $(AB)C = A(BC)$.

Приклад 1.3. *Знайти AB і BA, якщо:*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

Знаходимо добуток AB:

$$AB = C_{2\times 2} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

де $c_{11} = 4(-1) + (-5)(-2) + 8 \cdot 3 = 30$; $c_{12} = 4 \cdot 5 + (-5)(-3) + 8 \cdot 4 = 67$; $c_{21} = 1(-1) + 3(-2) + (-1)3 = -10$; $c_{22} = 1 \cdot 5 + 3(-3) + (-1) \cdot 4 = -8$.

В результаті $AB = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$.

Далі знаходимо

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$.

Приклад 1.4. *Знайти* $(AB)C$ *і* $A(BC)$, *якщо:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad (AB)C = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(BC) = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix},$$

тобто, $(AB)C = A(BC)$.

Квадратна матриця A^2 – це результат множення матриці A самої на себе $A \cdot A$. Аналогічно вводиться поняття n-го степеня матриці A, тобто

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\,\text{разів}}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Знайти ті добутки AB, BA, AC, CA, BC, CB, які мають зміст.

$$\textit{Відповідь}:\quad BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad AC = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Для матриць

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

обчислити $4A - 3B + C$, $A^T + B^T$, AB, BA, $BC + A^2$.

$$\textit{Відповідь}: 4A - 3B + C = \begin{pmatrix} 7 & 24 & 11 \\ -2 & -3 & 0 \\ 9 & -5 & 25 \end{pmatrix}, A^T + B^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 15 \\ -2 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 15 \\ -2 & 4 & -2 \\ 10 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$BC + A^2 = \begin{pmatrix} 27 & 29 & 25 \\ 6 & -3 & -3 \\ 18 & -6 & 57 \end{pmatrix}.$$

1.2. Визначники. Обчислення визначників

Для квадратних матриць вводиться поняття **визначника**. Це число, яке знаходять за відповідними правилами. **Визначник другого порядку** обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.2}$$

Схема обчислень полягає у відшуканні різниці добутку елементів головної діагоналі та добутку елементів побічної діагоналі.

Визначник третього порядку обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1.3)$$

Обчислення виконуються за **правилом трикутників**: зі знаком "+" беруться добутки елементів головної діагоналі, а також елементів, розміщених на прямих, паралельних головній діагоналі, та елемента, розміщеного у відповідному протилежному куті визначника. Зі знаком "−" беруться добутки елементів, побудовані за таким самим правилом відносно побічної діагоналі визначника.

Для обчислення визначників третього порядку використовують також **правило Саррюса**. За цим правилом у початковому визначнику за третім стовпцем запишемо ще раз перший і другий стовпці:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

Для знаходження визначника треба утворити зі знаком "+" алгебраїчну суму добутків елементів, розміщених на головній діагоналі визначника, і на діагоналях, паралельних їй, а зі знаком "мінус" – добутків елементів, розміщених на побічній діагоналі, та на діагоналях, паралельних їй.

Мінором M_{ij} **елемента** a_{ij} називається визначник $n-1$-го порядку, який утворюється з визначника n-го порядку викреслюванням i-го рядка та j-го стовпця (рядка і стовпця в яких знаходиться даний елемент a_{ij}).

Алгебраїчним доповненням A_{ij} **елемента** a_{ij} називається його мінор, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \qquad (1.4)$$

Приклад 1.5. *Якщо* $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$*, то* $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1.$

Теорема 1.1. *Визначник (довільного порядку n) дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Наприклад, розклад визначника за елементами першого рядка дається формулою

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}. \qquad (1.5)$$

Теорема 1.2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

Приклад 1.6.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3)2 = 10;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 8 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 8 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 8 \cdot 1 - (-1)1 \cdot 1-$$

$$-3 \cdot 2 \cdot 2 = -16 + 3 + 4 - 16 + 1 - 12 = -36;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \\ -4 & -6 & 0 \end{vmatrix} + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 5 & 9 \\ 0 & 3 & 7 \\ -2 & -6 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 7 \\ -2 & -4 & 0 \end{vmatrix} + 4(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-140 + 108 + 84) - 2(-70 + 54) + 3(-28) - 4(-12) =$$

$$= 52 + 32 - 84 + 48 = 48.$$

Перерахуємо **основні властивості визначників**:

1) значення визначника не змінюється при заміні всіх його рядків на відповідні стовпці, і навпаки ($det\, A = det\, A^T$);

2) якщо поміняти місцями два паралельні рядки (стовпці) визначника, то він змінить знак на протилежний;

3) визначник з двома однаковими рядками (стовпцями) рівний нулю;

4) якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника. Звідси випливає, що якщо елементи якого-небудь рядка (стовпця) домножити на число λ, то визначник Δ множиться на це ж число λ;

5) якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) рівні нулю, то визначник також рівний нулю;

6) визначник, у котрого елементи двох паралельних рядків (стовпців) відповідно пропорційні, рівний нулю;

7) якщо кожний елемент деякого рядка визначники є сумою двох доданків, то такий визначник рівний сумі визначників, в першому з котрих відповідний рядок складається з перших доданків, а у другому – із других доданків:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

8) визначник не зміниться, якщо до всіх елементів деякого рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого паралельного рядка (стовпця), помножені на одне і те ж довільне число λ. Наприклад, для стовпців визначника ця властивість виражається рівністю

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+\lambda\, a_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+\lambda\, a_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+\lambda\, a_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Розглянемо **основні методи обчислення визначників**.

1. **Метод ефективного пониження порядку**. Згідно теореми 1.1 обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення n визначників $(n-1)$-го порядку. Такий метод обчислення є неефективним. Використовуючи основні властивості визначників, зокрема властивість 8, визначник n-го порядку завжди можна звести до обчислення одного визначника $(n-1)$-го порядку, зробивши в якому-небудь рядку (стовпці) всі елементи, крім одного, рівними нулю. Покажемо це на прикладі.

Приклад 1.7. *Обчислити визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 30 & -10 & 120 & 80 \\ -5 & 3 & -34 & -23 \\ 1 & 1 & 3 & -7 \\ -9 & 2 & 8 & -15 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок.

За властивістю 4 визначників із першого рядка винесемо множник 10, а потім будемо послідовно домножати отриманий рядок на 3, 1, 2 і додавати відповідно до другого, третього та четвертого рядка. Тоді, відповідно до властивості 8, маємо:

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 & 8 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 15 & 1 \\ -3 & 0 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

На основі теореми 1.1 отриманий визначник можна розкласти за елементами другого стовпця. Тоді

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & 15 & 1 \\ -3 & 32 & 1 \end{vmatrix}.$$

В результаті ми отримали визначник третього порядку, котрий можна обчислити за допомогою правила Саррюса або ж подібним прийомом звести до обчислення одного визначника другого порядку. Дійсно, віднімаючи від другого і третього рядка даного визначника перший рядок і розкладаючи визначник за елементами третього стовпця, отримаємо

$$\Delta = 10 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 13 & 0 \\ -7 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 0 & 13 \\ -7 & 30 \end{vmatrix} = 10 \cdot 7 \cdot 13 = 910.$$

2. **Зведення визначника до трикутного вигляду**. Визначник, у котрого всі елементи, що розташовані вище або нижче головної діагоналі, рівні нулю, називається **визначником трикутного вигляду**. Очевидно, що в цьому випадку визначник рівний добутку елементів його головної діагоналі. Будь-який визначник можна звести до трикутного вигляду.

Приклад 1.8. *Обчислити визначник*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язок.

Виконаємо наступні операції. Поміняємо місцями перший і четвертий стовпці, а потім – другий і третій. Четвертий стовпець отриманого визначника помножимо на 4 і віднімемо від першого, цей же стовпець, помножений на 3, – від другого, на 2 – від третього стовпця. В результаті отримаємо визначник трикутного вигляду, який рівний вихідному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20.$$

Зведення визначника до трикутного вигляду буде використовуватися в подальшому при розв'язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.

Завдання для самостійної роботи

Обчислити визначники.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. (*Відповідь*: 54.) 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. (*Відповідь*: 160.)

3. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -3 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 2 & -5 \\ 1 & 4 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. (*Відповідь*: 27.)

1.3. Обернена матриця. Знаходження оберненої матриці

Якщо A – квадратна матриця, а її визначник $D = |A| \neq 0$, то для неї існує **обернена матриця** A^{-1}, така що: $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця.

Обернена матриця A^{-1} – це транспонована матриця алгебраїчних доповнень елементів матриці A, поділених на визначник матриці A:

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1.6)$$

Приклад 1.9. *Дано матрицю* $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *Знайти обернену її матрицю* A^{-1} *та перевірити виконання рівностей* $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

Розв'язок.

Обчислюємо $\det A = -10 \neq 0$ *та алгебраїчні доповнення* $A_{11} = -5$, $A_{12} = 2$, $A_{13} = 3$, $A_{21} = 5$, $A_{22} = 0$, $A_{23} = -5$, $A_{31} = -5$, $A_{32} = -4$, $A_{33} = -1$. *Тоді маємо*

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 5 & -5 \\ 2 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, \quad AA^{-1} = A^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти матрицю A^{-1}, обернену до даної матриці A, якщо:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix};\ 2)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{pmatrix};\ 3)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) $A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & -9 & 14 \\ 13 & 12 & -17 \\ -4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1}=\dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix}$;

3) $A^{-1}=\dfrac{1}{15}\begin{pmatrix} -7 & 3 & -13 & 41 \\ -13 & -3 & 8 & -16 \\ 18 & 3 & -3 & 6 \\ -3 & -3 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

1.4. Ранг матриці

Розглянемо матрицю A розміром $m\times n$. Виберемо в ній довільним чином k рядків та k стовпців. На їх перетині дістанемо визначник k-го порядку, який називається мінором **k-го порядку даної матриці**.

Рангом матриці A (позначається $r(A)$) називається найвищий порядок її мінора, відмінного від нуля.

Існує два методи обчислення рангу матриці.

1. **Метод обвідних мінорів**. Якщо знайдений мінор k-го порядку матриці відмінний від нуля, а всі її мінори $(k+1)$-го порядку, які містять даний мінор k-го порядку, дорівнюють нулю, то ранг матриці дорівнює k.

Приклад 1.10. *Знайти ранг матриці*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

A – матриця третього порядку, отже, її ранг не може бути більшим трьох. Визначник третього порядку дорівнює нулю:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}=0,$$

але існує мінор другого порядку $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}=14$, *відмінний від нуля. Отже, ранг матриці A дорівнює двом,* $r(A)=2$.

2. **Метод елементарних перетворень**. Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці. До них належать:

а) перестановка місцями двох рядків або стовпців матриці;

б) множення всіх елементів рядка або стовпця на відмінне від нуля число;

в) додавання до елементів деякого рядка або стовпця відповідних елементів іншого рядка або стовпця, помножених на відмінне від нуля число.

Дві матриці називаються **еквівалентними**, якщо одна матриця одержується з іншої за допомогою елементарних перетворень. Еквівалентність матриць A і B позначають $A \sim B$. За допомогою елементарних перетворень вихідну матрицю зводять еквівалентної матриці, в кожному рядку та кожному стовпці якої залишається не більш одного, відмінного від нуля, елемента. Тоді ранг матриці дорівнює кількості відмінних від нуля елементів.

Приклад 1.11. *Знайти ранг матриці*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок.

Поділимо третій стовпець матриці A на 2. Далі, отриманий перший рядок помножимо на 2 і віднімемо його від четвертого рядка. Тепер третій стовпець містить три нулі і одиницю (в першому рядку). Тому легко робимо нулі в першому рядку на першій, другій, четвертій та п'ятій позиції і маємо

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тепер четвертий рядок останньої матриці додаємо до другого і третього і отримуємо два нулі у другому стовпці, після чого робимо нулі в четвертому рядку всюди, крім одиниці на перетині четвертого рядка і другого стовпця. В результаті цих елементарних перетворень маємо:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ми отримали три одиниці. Отже, $r(A) = 3$.

Завдання для самостійної роботи

Знайти ранг матриці A за допомогою елементарних перетворень або методом обвідних мінорів, якщо:

$$1)\ A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -7 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & -4 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$3)\ A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: 1) 2; 2) 2; 3) 3.

1.5. Розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими

Нехай дано систему n лінійних рівнянь з n невідомими $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nj}x_j + \ldots + a_{nn}x_n & = & b_n. \end{array}\right\} \tag{1.7}$$

Якщо визначник D, складений з коефіцієнтів a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ системи (1.7)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{1.8}$$

то система має єдиний розв'язок, який можна одержати за **формулами Крамера**:

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.9}$$

де D_i – **допоміжний** визначник, який дістаємо заміною у **основному** визначнику D i-го стовпця, стовпцем складеним з вільних членів b_1, b_2, ..., b_n. Якщо $D = 0$, а $D_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то система (1.7) не має розв'язків, тобто є несумісною. Якщо ж $D = D_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, тоді система (1.7) має безліч розв'язків, тобто є невизначеною.

Приклад 1.12. *Розв'язати систему рівнянь за допомогою формул Крамера:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - x_3 &=& 0, \\ 3x_2 + 4x_3 &=& -6, \\ x_1 + x_3 &=& 1. \end{array}\right\}$$

Розв'язок.

Обчислимо основний визначник системи

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 4 + 3 = 13.$$

Послідовно замінивши в D перший, другий та третій стовпці стовпцем із вільних членів, отримаємо:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -6 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 13, \quad x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{13}{13} = 1,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -26, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-26}{13} = -2,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{0}{13} = 0.$$

Систему (1.7) можна представити у **матричному вигляді**:

$$AX = B, \tag{1.10}$$

де A – матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих, X – з невідомих, B – з вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тоді розв'язок системи лінійних рівнянь (1.7) можна знайти за формулою:

$$X = A^{-1}B, \tag{1.11}$$

де A^{-1} – матриця обернена до A.

Приклад 1.13. *Розв'язати систему рівнянь матричним методом:*

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 1, \\ x_2 - x_3 & = & -3. \end{array}\right\}$$

Розв'язок.

Маємо:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \det A = -11.$$

Обернена матриця рівна

$$A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Тоді знаходимо

$$X = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 - 5 \cdot (-3) \\ 1 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + 6 \cdot (-3) \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} -11 \\ 11 \\ -22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

тобто, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ *– розв'язок даної системи.*

1.6. Розв'язування довільних систем лінійних рівнянь

Нехай маємо систему лінійних рівнянь, представлену у вигляді матричного рівняння $AX = B$, в якій матриця A має розмір $m \times n$. Така система є **сумісною**, якщо ранг $r(A)$ основної матриці A дорівнює рангу розширеної матриці $r(\bar{A})$. Розширену матрицю дістанемо, доповнивши матрицю A стовпцем з вільних членів. В цьому полягає **критерій сумісності Кронекера-Капеллі**.

У разі, коли система сумісна і ранг матриці $r(A)$ дорівнює кількості невідомих n, система має єдиний розв'язок. Якщо ж у сумісній системі ранг r менший за кількість невідомих, то система має безліч розв'язків. Щоб знайти розв'язки системи, беремо r рівнянь, у лівій частині яких залишаємо r невідомих. Рівняння та невідомі вибираємо так, щоб мінор, складений з коефіцієнтів зазначених рівнянь, був відмінний від нуля. Невідомі, залишені в лівій частині, називаються **базисними**. Решту невідомих переносимо у праву частину рівняння. Ці невідомі називаються **вільними**.

Загальний розв'язок системи дістаємо, розв'язуючи систему відносно базисних невідомих. Їх значення виражаються через вільні члени і вільні невідомі. **Частинні розв'язки** дістаємо, надаючи вільним невідомим певних числових значень. **Базисний розв'язок** системи маємо, якщо всі вільні невідомі дорівнюють нулю.

Приклад 1.14. *Дослідити систему і розв'язати її, якщо вона сумісна.*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 & = & 5. \end{array}\right\}$$

Розв'язок.

Складаємо основну матрицю системи A і методом обвідних мінорів знаходимо її ранг:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

оскільки,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0,$$

то $r(A) = 2$. Аналогічно знаходимо ранг розширеної матриці:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad r(\bar{A}) = 2.$$

Отже, $r(A) = r(\bar{A}) = 2 < n = 3$. Тому згідно критерію Кронекера–Капеллі система сумісна, має безліч розв'язків та містить два незалежних рівняння. За ці два рівняння можна прийняти перші два рівняння системи, оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В якості базисних змінних приймаємо x_1 та x_2, а x_3 – вільний невідомий параметр. Тоді

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 &=& 3 - x_3, \\ x_1 + 3x_2 &=& 1 + x_3, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} x_2 &=& \dfrac{2}{5}(x_3 - 1), \\ x_1 &=& \dfrac{1}{5}(11 - x_3). \end{array}$$

Таким чином, $x_1 = \dfrac{1}{5}(11 - x_3)$, $x_2 = \dfrac{2}{5}(x_3 - 1)$ *– загальний розв'язок системи.*

Довільні системи лінійних рівнянь розв'язуються за **методом Гаусса** (метод послідовного виключення невідомих). Він полягає у тому, що за допомогою елементарних перетворень система зводиться до рівносильної системи східчастого або трикутного вигляду, з якої послідовно, починаючи з останніх за номером невідомих, знаходимо всі інші невідомі.

Метод Гаусса зручно використовувати, працюючи з розширеною матрицею системи замість самих рівнянь. Розширену матрицю у цьому випадку записують з вертикальною прямою рискою, яка відділяє коефіцієнти біля невідомих від вільних членів. Стовпець вільних членів міняти місцями з іншими стовпцями розширеної матриці не можна.

Виконуючи над рядками розширеної матриці елементарні перетворення, після певної кількості кроків, отримаємо один з можливих випадків. Перший випадок:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n &=& b_1, \\ a''_{22}x_2 + a''_{23}x_3 + \ldots + a''_{2j}x_j + \ldots + a''_{2n}x_n &=& b''_2, \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3j}x_j + \ldots + a''_{3n}x_n &=& b''_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots& \ldots \\ 0 &=& b''_i, \\ \ldots\ldots &\ldots& \ldots \\ 0 &=& b''_m. \end{array}\right\} \qquad (1.12)$$

Система східчастого вигляду (1.12) вказує на два можливі випадки:

1) якщо будь-яке $b_i \neq 0$ тоді, коли ліва частина рівняння дорівнює нулю, то вихідна система розв'язку не має.

2) якщо усі $b_i = 0$ (коли ліві частини відповідних рівняння дорівнюють нулю), маємо тотожності, і ці нульові рядки можна відкинути. Тоді матимемо один з двох випадків:

а) кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих – система має єдиний розв'язок;

б) кількість рівнянь менша за кількості невідомих – система має безліч розв'зків.

Другий випадок ($r = n$):

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2j}x_j + \ldots + a'_{2n}x_n & = & b'_2, \\ a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3j}x_j + \ldots + a'_{3n}x_n & = & b'_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{ii}x_i + \ldots + a'_{in}x_n & = & b'_i, \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a'_{nn}x_n & = & b'_n. \end{array}\right\}. \quad (1.13)$$

Якщо отримано систему трикутного вигляду (1.13), то це вказує на те, що початкова система $AX = B$ має єдиний розв'язок.

Приклад 1.15. *За допомогою методу послідовного виключення невідомих Гаусса дослідити систему на сумісність і у випадку сумісності розв'язати її.*

$$\left.\begin{array}{rcr} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 & = & 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 & = & 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 & = & -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & -3. \end{array}\right\}$$

Розв'язок.

Складемо розширену матрицю B і проведемо необхідні елементарні перетворення рядків:

$$B = \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array}\right) \sim -\frac{1}{2}\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Останній матриці відповідає система, еквівалентна вихідній:

$$\left.\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 & = & 1, \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 0, \\ x_3 - x_4 & = & 2, \\ x_4 & = & -1. \end{array}\right\}$$

З неї, рухаючись знизу вверх, послідовно знаходимо: $x_4 = -1$, $x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1$, $x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0$, $x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2$.

Отже, система сумісна, визначена, тобто, вона має єдиний розв'язок $(r = n = 4)$*:* $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

Завдання для самостійної роботи

Перевірити сумісність системи рівнянь і у випадку сумісності знайти її розв'язки: а) за допомогою формул Крамера; б) матричним методом; в) методом Гаусса.

1) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 7,\\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1,\\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 6. \end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + x_3 &= 12,\\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6,\\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 &= -4,\\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2,\\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 &= -5. \end{aligned}\right\}$

Відповідь: 1) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = -7$, $x_3 = 5$; 3) $x_1 = 1$, $x_2 = 6$, $x_3 = 5$.

1.7. Однорідна система лінійних рівнянь

Нехай задано однорідну систему m лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= 0,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= 0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &\ \ldots\ \ldots\\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

Ця система завжди має нульовий розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$, тому що підстановка нулів замість невідомих в кожне з рівнянь (1.14) перетворює їх в тотожності. Ненульові розв'язки (якщо вони існують) системи (1.14) можна знайти методом Гаусса.

Однорідна система n рівнянь з n невідомими має єдиний нульовий розв'язок, якщо визначник системи D (див. формулу (1.8)) відмінний від нуля $D \neq 0$. Якщо $D = 0$, то система має безліч розв'язків. Розглянемо два типові випадки.

Приклад 1.16. *Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь*

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 0,\\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0,\\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$