4. ЛІНІЇ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Лінією (кривою) другого порядку називають множину M точок площини, декартові координати x, y яких задовольняють алгебраїчне рівняння другої степені

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + a_0 = 0, \tag{4.1}$$

де a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – постійні дійсні числа, причому хоча б одне з чисел a_1, a_2, a_3 відмінне від нуля. Рівняння (4.1) називають **загальним рівнянням лінії другого порядку**. Зокрема, до ліній другого порядку належать такі лінії: коло, еліпс, гіпербола і парабола.

4.1. Коло

Колом називають множину точок площини, відстані яких від заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Рівняння

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{4.2}$$

визначає коло (див. рис. 4.1) з центром в точці $C(x_0, y_0)$ і радіусом R. Зокрема, якщо центром кола є початок координат ($x_0 = 0, y_0 = 0$), то рів-

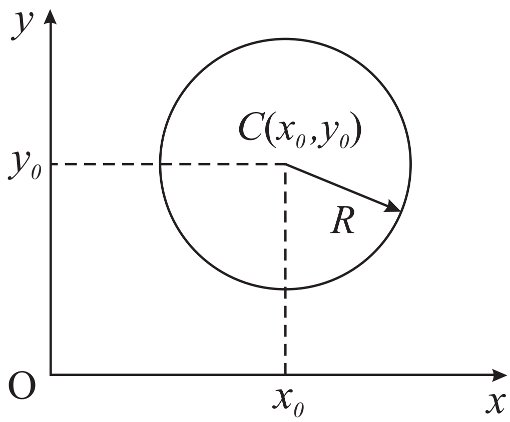

Рис. 4.1.

няння кола має вигляд

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{4.3}$$

Якщо в рівнянні (4.2) розкрити дужки, то воно набуває вигляду

$$x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0, \tag{4.4}$$

де $m = -2x_0$, $n = -2y_0$ та $p = x_0^2 + y_0^2 - R^2$ і називається **загальним рівнянням кола**.

Для того щоб від рівняння (4.4) знову перейти до рівняння (4.2), потрібно в лівій частині (4.4) виділити повні квадрати:

$$\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{n}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} - p. \tag{4.5}$$

Приклад 4.1. *Скласти рівняння кола з центром в точці* $C(-3, 4)$ *і радіусом* $R = 5$.

Розв'язок.

Підставляючи в рівняння (4.2) *значення* $x_0 = -3$, $y_0 = 4$ *та* $R = 5$, *зразу одержимо:*

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Приклад 4.2. *Знайти центр і радіус кола* $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Розв'язок.

Згрупуємо доданки із змінною x *та змінною* y *та доповнимо одержані вирази до повних квадратів:*

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y - 3 = 0,$$

або

$$(x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 + 6y + 9) - 9 - 3 = 0,$$

звідки

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16.$$

Отже, точка $(2, -3)$ *– центр кола, а* $R = 4$ *– його радіус.*

Приклад 4.3. *Скласти рівняння кола, що проходить через точки* $A(7, 7)$, $B(-2, 4)$, *а його центр лежить на прямій* $2x - y - 4 = 0$. *Зробити малюнок.*

Розв'язок.

Якщо коло проходить через точки $A(7, 7)$ *і* $B(-2, 4)$, *то координати цих точок повинні задовольняти рівнянню кола* (4.2). *Таким чином отримуємо два рівняння:*

$$(7 - x_0)^2 + (7 - y_0)^2 = R^2,$$
$$(-2 - x_0)^2 + (4 - y_0)^2 = R^2.$$

Якщо центр кола лежить на прямій $2x - y - 4 = 0$, *то його координати повинні задовольняти рівняння цієї прямої. Одержуємо третє рівняння:*

$$2x_0 - y_0 - 4 = 0.$$

Для знаходження x_0, y_0 та R розв'яжемо систему рівнянь

$$\left.\begin{array}{l}(7-x_0)^2+(7-y_0)^2=R^2,\\(-2-x_0)^2+(4-y_0)^2=R^2,\\2x_0-y_0-4=0,\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}98-14x_0-14y_0+x_0^2+y_0^2=R^2,\\20+4x_0-8y_0+x_0^2+y_0^2=R^2,\\2x_0-y_0-4=0.\end{array}\right\}$$

Віднімемо від першого рівняння друге і одержимо систему

$$\left.\begin{array}{l}3x_0+y_0-13=0,\\2x_0-y_0-4=0.\end{array}\right\}$$

Тепер до першого рівняння додамо друге і знайдемо x_0:

$$5x_0=17,\quad x_0=17/5.$$

Підставивши отримане значення $x_0=17/5$ в рівняння $2x_0-y_0-4=0$, одержимо значення $y_0=14/5$. Таким чином, координати центра кола знайдено: $C\left(\frac{17}{5},\frac{14}{5}\right)$.

З першого рівняння вихідної системи знаходимо R^2:

$$R^2=(7-x_0)^2+(7-y_0)^2=\left(7-\frac{17}{5}\right)^2+\left(7-\frac{14}{5}\right)^2=\frac{153}{5}.$$

Отже, шукане рівняння кола має вигляд:

$$\left(x-\frac{17}{5}\right)^2+\left(y-\frac{14}{5}\right)^2=\frac{153}{5},$$

а саме коло зображено на рис. 4.2.

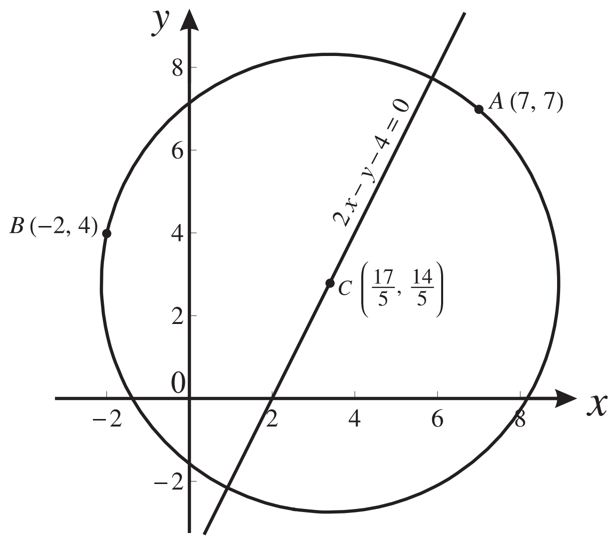

Рис. 4.2.

Завдання для самостійної роботи

Скласти рівняння кола в кожному з таких випадків:

1) центром кола є точка $C(2,-3)$, радіус $R=7$;

Відповідь: $(x-2)^2+(y+3)^2=49$.

2) центром кола є точка $C(6,-8)$ і коло проходить через початок координат;

Відповідь: $(x-6)^2+(y+8)^2=100$.

3) точки $A(3,2)$ і $B(-1,6)$ є кінцями одного з діаметрів кола;

Відповідь: $(x-1)^2+(y-4)^2=8$.

4) центром кола є точка $C(1,-1)$, а пряма $5x-12y+9=0$ є дотичною до кола;

Відповідь: $(x-1)^2+(y+1)^2=4$.

5) коло проходить через точки $A(3,1)$ і $B(-1,3)$, центр лежить на прямій $3x-y-2=0$;

Відповідь: $(x-2)^2+(y-4)^2=10$.

6) коло проходить через три точки: $M_1(-1,5)$, $M_2(-2,-2)$ і $M_3(5,5)$;

Відповідь: $(x-2)^2+(y-1)^2=25$.

7) коло проходить через точку $M(1,2)$ і дотикається до координатних осей;

Відповідь: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ або $(x-5)^2+(y-5)^2=25$.

4.2. Еліпс

Еліпсом називають геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала $2a$ $(a>b)$, більша за F_1F_2.

Канонічне рівняння еліпса з півосями a і b, центром в початку координат і вершинами A_1, A_2, B_1, B_2, розташованими на осях координат має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{4.6}$$

Відстані між вершинами називаються осями еліпса: $A_1A_2=2a$ – **велика (фокальна)** вісь і $B_1B_2=2b$ – **мала** вісь для еліпса у котрого $a>b$ (див. рис. 4.3,*а*) і навпаки $A_1A_2=2a$ – **мала** вісь, а $B_1B_2=2b$ – **велика** вісь для еліпса у котрого $b>a$ (див. рис. 4.3,*б*). Точки F_1 і F_2 називаються **фокусами**, а $F_1F_2=2c$ – відстань між фокусами. Відповідно до означення будь-яка точка M еліпса задовольняє умові $F_1M+F_2M=2a$ і $b^2=a^2-c^2$ у випадку $a>b$ або $F_1M+F_2M=2b$ і $a^2=b^2-c^2$ у випадку $b>a$.

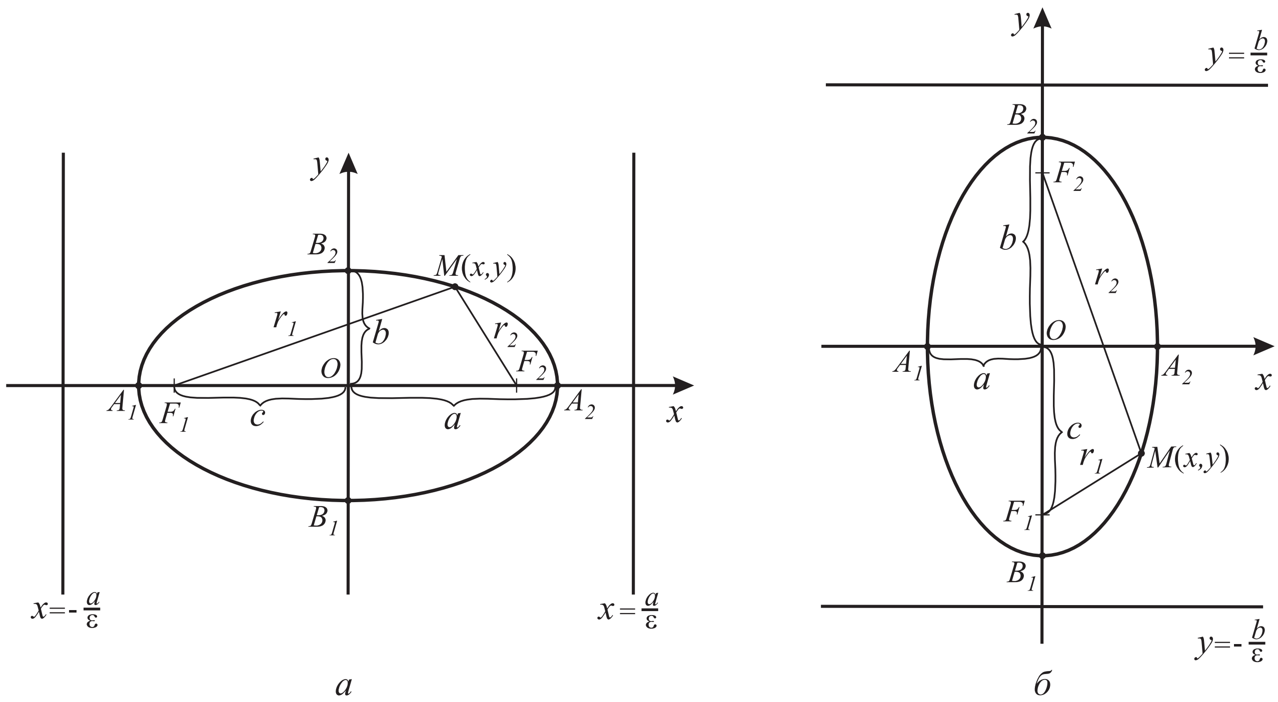

Рис. 4.3.

Число ε, рівне відношення відстані між фокусами F_1F_2 до довжини великої осі, називається **ексцентриситетом еліпса**:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} \quad (a > b) \quad \text{і} \quad \varepsilon = \frac{c}{b} \quad (b > a).$$

В будь-якому випадку $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

З вище приведених формул для відношення осей дістаємо

$$\text{якщо} \quad a > b, \quad \text{то} \quad \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a^2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

$$\text{якщо} \quad b > a, \quad \text{то} \quad \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - c^2}}{b^2} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{b^2}} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Отже, якщо $\varepsilon = 0$, то $b = a$, тобто еліпс перетворюється в коло; якщо $\varepsilon \to 1$, то відношення осей b/a (a/b) зменшується, тобто еліпс все більше розтягується вздовж осі Ox (Oy).

Відстані $F_1M = r_1$ та $F_2M = r_2$ точки $M = (x, y)$ еліпса до його фокусів називаються **фокальними радіусами точки** M і визначаються за формулами:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \qquad r_2 = a - \varepsilon x \qquad \text{при} \qquad a > b,$$
$$r_1 = b + \varepsilon y, \qquad r_2 = b - \varepsilon y \qquad \text{при} \qquad b > a.$$

Прямі паралельні до малої осі еліпса, називаються **директрисами еліпса**; їх рівняння мають вигляд

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{a^2}{c},$$

якщо $a > b$, або

$$y = \pm\frac{b}{\varepsilon} = \pm\frac{b^2}{c},$$

якщо $a < b$ (див. рис. 4.3). Осі координат є осями симетрії еліпса.

Рівняння дотичної до еліпса $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ у точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Еліпс з центром у точці $C_0(x_0, y_0)$ задається рівнянням

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{4.7}$$

Приклад 4.4. *Задано рівняння еліпса* $25x^2 + 169y^2 = 4225$. *Знайти довжину осей, координати його фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис та координати точок еліпса, відстань від яких до лівого фокуса* F_1 *дорівнює 14. Зробити малюнок.*

Розв'язок.

Приведемо задане рівняння еліпса до кононічного виду (4.6), *розділивши обидві його частини на 4225*

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \textit{або} \quad \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1.$$

Звідти одержуємо, що $a = 13$, $2a = 26$; $b = 5$, $2b = 10$. *Знаючи* a *і* b, *із співвідношення* $b^2 = a^2 - c^2$ *знаходимо* c:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 169 - 25 = 144, \quad c = \sqrt{144} = 12.$$

Тоді координати фокусів будуть: $F_1(-12, 0)$ *і* $F_2(12, 0)$ *(див. рис. 4.4).*

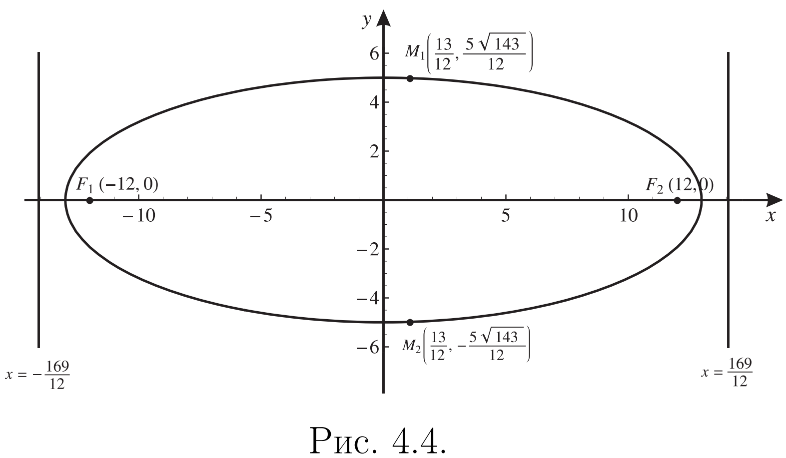

Рис. 4.4.

Обчислюємо ексцентриситет еліпса $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{13}$ *та записуємо рівняння директрис* $x = \pm\dfrac{a^2}{c} = \pm\dfrac{169}{12}$.

З рівняння $r_1 = a + \varepsilon x$ *знаходимо абсцису точок еліпса, що знаходяться на відстані 14 від лівого фокуса* F_1

$$x = \frac{r_1 - a}{\varepsilon} = \frac{14 - 13}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{12}.$$

Підставивши її значення в канонічне рівняння еліпса, знайдемо ординати цих точок

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2), \quad y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \pm\frac{5}{13}\sqrt{169 - \frac{169}{144}} = \pm\frac{5\sqrt{143}}{12}.$$

Таким чином отримуємо координати шуканих точок: $M_1\left(\frac{13}{12}, \frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$ *та* $M_2\left(\frac{13}{12}, -\frac{5\sqrt{143}}{12}\right)$.

Приклад 4.5. *Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:*

1) його мала вісь рівна 24, а відстань між фокусами рівна 10;

2) відстань між фокусами рівна 6, ексцентриситет рівний 3/5;

3) відстань між фокусами рівна 4, відстань між директрисами рівна 5;

4) відстань між директрисами рівна 32, ексцентриситет рівний 0,5;

Розв'язок.

Для того щоб скласти рівняння еліпса необхідно знати його півосі a та b.

1. За умовою задачі $2b = 24$, $b = 12$; $2c = 10$, $c = 5$. *Велику піввісь a знайдемо із співвідношення* $b^2 = a^2 - c^2$. *Таким чином,* $a^2 = b^2 + c^2 = 12^2 + 5^2 = 169$. *Тоді одержуємо рівняння еліпса:*

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

2. Згідно умови $2c = 6$, $c = 3$; $\varepsilon = \frac{3}{5}$. *Велику піввісь a знайдемо з формули* $\varepsilon = \frac{c}{a}$, *а малу піввісь b – із співвідношення* $b^2 = a^2 - c^2$:

$$a = \frac{c}{\varepsilon}, \quad a = \frac{3}{3/5} = 5; \quad b^2 = 5^2 - 3^2 = 16.$$

Таким чином, шукане рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

3. За умовою $2c = 4$, $c = 2$. Нехай $d = 5$ – відстань між директрисами. Тоді їх рівняння має вигляд: $x = \pm\frac{d}{2} = \pm\frac{5}{2}$. З іншого боку $x = \pm\frac{a^2}{c}$. З цих двох рівнянь знаходимо квадрат великої півосі: $a^2 = \frac{c\,d}{2} = \frac{2\cdot 5}{2} = 5$ і аналогічно до попередніх випадків $b^2 = 5-4 = 1$. Одержуємо наступне рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{1} = 1.$$

4. Нам відома відстань між директрисами $d = 32$ та ексцентриситет еліпса $\varepsilon = 0,5$. З рівнянь директрис $x = \pm\frac{d}{2}$ і $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ знаходимо велику піввісь: $a = \frac{\varepsilon\,d}{2} = \frac{0,5\cdot 32}{2} = 8$. Підставляючи значення $a = 8$ у формулу $\varepsilon = \frac{c}{a}$, знаходимо $c = \varepsilon\,a = 0,5\cdot 8 = 4$, а знаючи його, легко обчислюємо значення малої півосі: $b^2 = a^2 - c^2 = 8^2 - 4^2 = 48$. В цьому випадку рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано еліпс, канонічне рівняння якого має вигляд $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Знайти координати його фокусів, ексцентриситет та рівняння директрис. Зробити малюнок.

Відповідь: $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$, $\varepsilon = 0,8$, $x = \pm 25/4$.

2. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо:
а) його півосі відповідно дорівнюють 4 і 2;
б) відстань між фокусами рівна $2c = 6$, а більша вісь $2a = 10$;
в) більша вісь $2a = 20$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,8$;
г) менша вісь $2b = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = \sqrt{2}/2$;
д) сума осей дорівнює 16, а відстань між фокусами $2c = 8$;
е) відстань між фокусами $2c = 6$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

Відповідь: а) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$, б) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, в) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, г) $\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, д) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, е) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

3. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{2y^2}{5} = 1$, паралельних прямій $3x + 2y + 7 = 0$.

Відповідь: $3x + 2y - 10 = 0$ і $3x + 2y + 10 = 0$.

4.3. Гіпербола

Гіперболою називають геометричне місце точок, різниця відстаней від кожної з яких до двох фіксованих точок F_1 і F_2 (фокусів) є величина стала

$2a$ $(0 < 2a < F_1F_2)$. Тобто, для будь-якої точки M виконується умова $|F_1M - F_2M| = 2a$.

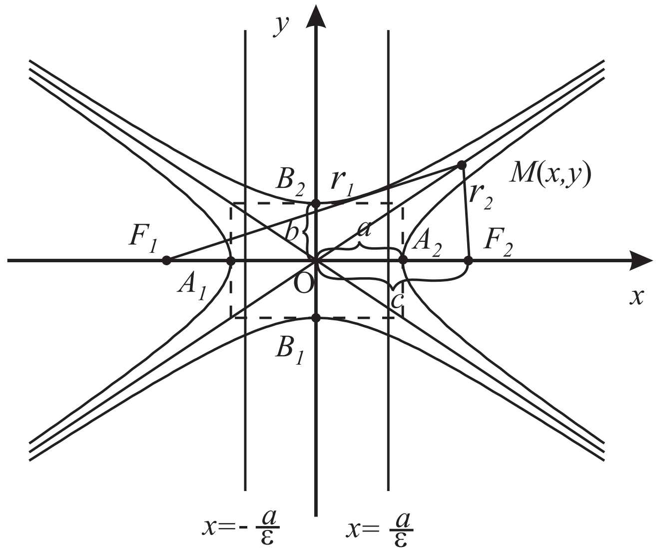

Рис. 4.5.

Канонічне рівняння гіперболи (див. рис. 4.5) має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0. \tag{4.8}$$

Параметри $2a$, $2b$ – називаються **дійсною і уявною осями гіперболи** (4.8); a, b – її півосі; точки $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ – **вершини**, Ox і Oy – **дійсна і уявна** осі симетрії, $O(0, 0)$ – **центр гіперболи**.

Прямі $y = \pm\dfrac{b}{a}\,x$ називаються **асимптотами гіперболи**.

Точки $F_1(-c, 0)$ і $F_2(c, 0)$, де $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, – **фокуси гіперболи**. Відстань між фокусами дорівнює $2c$. Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \sqrt{1 + b^2/a^2}$ називається **ексцентриситет гіперболи** $(1 < \varepsilon < \infty)$. Відстані r_1 та r_2 від точки $M(x, y)$ гіперболи до її фокусів називаються **фокальними радіусами цієї точки** і визначаються за формулами:

$$r_1 = ex - a, \quad r_2 = ex + a,$$

за умови, що точка $M(x, y)$ лежить на правій вітці гіперболи.

Прямі $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ називаються **директрисами гіперболи**.

Гіпербола, для якої $a = b$, називається **рівносторонньою**, її рівняння $x^2 - y^2 = a^2$, а рівняння асимптот має вигляд $y = \pm x$.

Гіпербола, рівняння якої має вигляд

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, \tag{4.9}$$

називаються **спряженою з гіперболою** (4.8). Її вершини знаходяться в точках $B_1(0,-b)$ і $B_2(0,b)$ на осі Oy, асимптоти співпадають з асимптотами гіперболи (4.8), $\varepsilon = c/b$ (див. рис. 4.5).

Дотична до гіперболи (4.8) у точці $M_0(x_0,y_0)$ визначається рівнянням

$$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}=1.$$

Рівняння гіперболи з центром у точці $C_0(x_0,y_0)$ має вигляд

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1, \tag{4.10}$$

а рівняння її асимптот

$$y-y_0=\pm\frac{b}{a}(x-x_0). \tag{4.11}$$

4.4. Парабола

Параболою називають геометричне місце точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від даної точки (фокуса) і даної прямої (директриси).

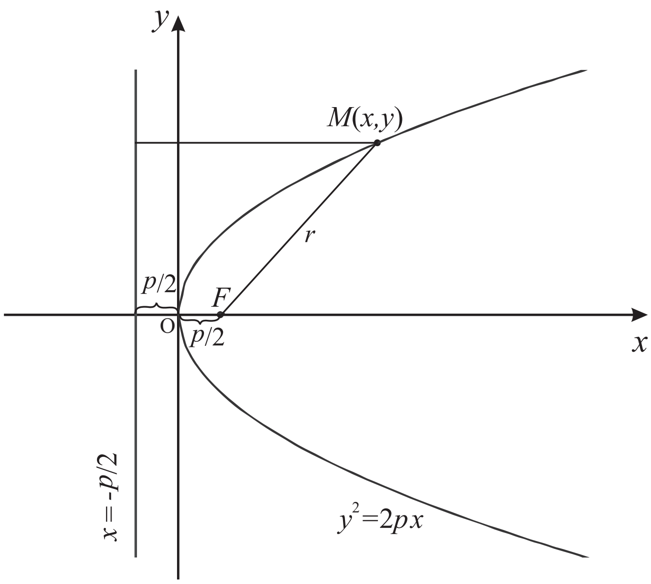

Рис. 4.6.

Є два вигляди **канонічного** рівняння параболи:

$$y^2=2px \tag{4.12}$$

– парабола симетрична відносно осі Ox (рис. 4.6), $p>0$ – параметр параболи;

$$x^2=2py \tag{4.13}$$