Звідки знаходимо, що $x_1 = -17x_3/13$, $x_2 = 16x_3/13$. *Поклавши* $x_3 = 13k$, *де* k *– довільний коефіцієнт пропорційності, одержуємо розв'язок вихідної системи:* $x_1 = -17k$, $x_2 = 16k$, $x_3 = 13k$.

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

1) $\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$ 2) $\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$

3) $\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$

Відповідь: 1) $x_1 = -11k$, $x_2 = -k$, $x_3 = 7k$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; 3) $x_1 = 0$, $x_2 = -2k$, $x_3 = k$.

2. ЕЛЕМЕНТИ ВЕКТОРНОЇ АЛГЕБРИ

2.1. Вектори. Загальні поняття та означення

Вектором називають напрямлений відрізок AB з початком у точці A та кінцем у точці B (рис. 2.1).

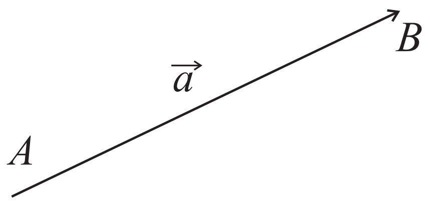


Рис. 2.1.

Довжиною вектора $\overrightarrow{AB}$ (або його модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ називають число, що дорівнює довжині відрізка AB, який зображає вектор.

Колінеарними називають вектори, які лежать на одній прямій (або на паралельних прямих).

Компланарними називають вектори, які лежать в одній площині або паралельні деякій площині.

Рівними називають вектори, які мають однакову довжину та однаковий напрямок.

Нульовим вектором (нуль-вектором) називають вектор, у якого початок і кінець збігаються. Позначають його $\vec{0}$, його довжина $|\vec{0}| = 0$, його напрямок невизначений.

Одиничним вектором називають вектор, довжина якого рівна одиниці. Одиничний вектор, напрям якого збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, називається **ортом вектора** $\vec{a}$ і позначається через $\vec{a}^0$. Тоді можна записати $\vec{a} = |\vec{a}|\,\vec{a}^0$.

Вільним називають вектор, який можна переміщати (переносити) у будь-яку точку простору за умови збереження його довжини та напрямку. Далі будемо розглядати тільки вільні вектори.

Добутком вектора $\vec{a}$ на число $\lambda \neq 0$ називають вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, який має довжину $|\vec{b}| = |\lambda\vec{a}|$, а його напрямок збігається з напрямком вектора $\vec{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний $\vec{a}$, якщо $\lambda < 0$ (якщо $\lambda = 0$, маємо нуль-вектор).

Протилежним вектором $-\vec{a}$ називають добуток вектора $\vec{a}$ на число (-1), тобто $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$.

Сумою векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають вектор $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець - з кінцем вектора $\vec{b}$ (за умови, що початок $\vec{b}$ збігається з кінцем $\vec{a}$ ("правило трикутника") (рис. 2.2 а).

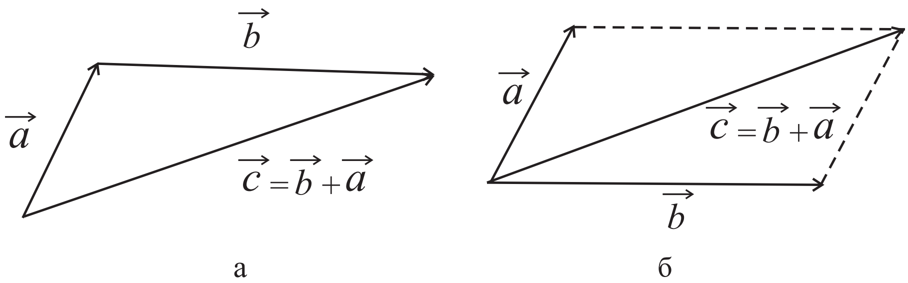


Рис. 2.2.

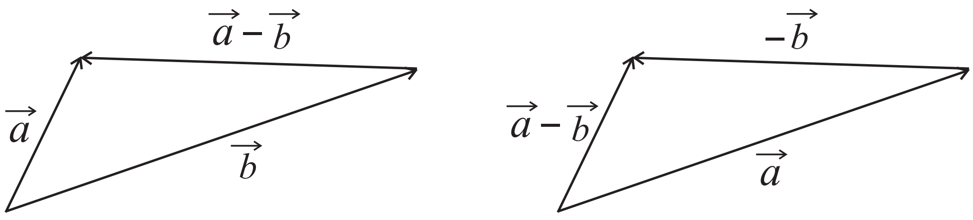
Якщо збігаються початки обох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, то їх сумою також буде вектор $\vec{c} = \vec{b} + \vec{a}$ ("правило паралелограма"), який є діагоналлю паралелограма, побудованого на $\vec{a}$ та $\vec{b}$, як на сторонах (рис. 2.2 б).

Різницею двох векторів $\vec{a}$ **та** $\vec{b}$ називають вектор, який починається в кінці вектора $\vec{b}$ і закінчується в кінці $\vec{a}$ (рис. 2.3 а). Або можна дати таке означення: **різницею двох векторів** $\vec{a}$ **та** $\vec{b}$ називають суму вектора $\vec{a}$ та вектора $-\vec{b}$, протилежного до $\vec{b}$ (рис. 2.3 б).

Приклад 2.1. *Вектори* $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$ *є сторонами трикутника* ABC *(рис. 2.4). Виразіть через* $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ *вектори* $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, *які співпадають з медіанами трикутника* ABC.

Розв'язок.

Для знаходження вектора $\overrightarrow{AM}$ *розглянемо трикутник* BAM *(рис. 2.4). Згідно "правила трикутника" додавання векторів маємо:* $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$.



а б

Рис. 2.3.

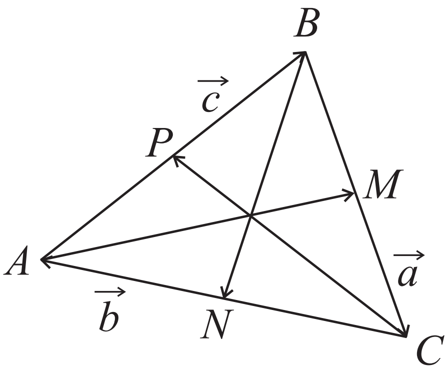


Рис. 2.4.

Оскільки $\overrightarrow{AM}$ *є медіаною сторони* $\overrightarrow{BC}$, *то ділить її пополам, тому* $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a}$. *Тоді згідно умови задачі* $\overrightarrow{AM} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$. *З іншого боку* $-\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$ *і* $\vec{a} = -(\vec{c} + \vec{b})$. *Підставивши одержаний результат у вираз для* $\overrightarrow{AM}$, *знаходимо* $\overrightarrow{AM} = \vec{c} - \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$.

Аналогічно знаходимо $\overrightarrow{BN} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ *або* $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{c})$; $\overrightarrow{CP} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$ *або* $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$.

Завдання для самостійної роботи

1. В трикутній піраміді $SABC$ відомі вектори $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Знайти вектор $\overrightarrow{SO}$, якщо точка O є центром мас трикутника ABC. *Відповідь*: $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^\circ$, $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Відповідь: $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129} \approx 11,4$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$.

2.2. Лінійна залежність і незалежність векторів. Розклад вектора за векторами базису. Базис n-вимірного простору

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називається **лінійно незалежною**, якщо рівність

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_m\vec{a}_m = 0 \tag{2.1}$$

виконується тільки при $k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0$. Якщо ж рівність (2.1) виконується при ненульових значеннях k_i ($i = 1, \ldots, m$), то система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ називається **лінійно залежною**. Наприклад, будь-які колінеарні вектори, три компланарні вектори, чотири і більше векторів в тривимірному просторі завжди є лінійно залежними.

Упорядкована трійка лінійно незалежних (некомпланарних) векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ в просторі називається його **базисом**. Довільний вектор $\vec{a}$ у просторі можна розкласти за базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$: $\vec{d} = \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3$, де α, β, γ – координати вектора $\vec{d}$ у цьому базисі: $\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$. Базис називається **ортонормованим** (позначають $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), якщо його вектори є взаємно перпендикулярними, а довжина кожного з них рівна одиниці.

Упорядкована множина n дійсних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ називається **n-вимірним вектором**:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{2.2}$$

Після введення операції множення вектора на число і додавання векторів можна розглядати n-вимірний векторний простір як сукупність усіх n-вимірних векторів.

Довільна система n лінійно незалежних векторів n-вимірного простору утворює **базис векторного простору**. Будь-який вектор n-вимірного простору розкладається за векторами базису.

Якщо кожен із заданих векторів (2.2) ($\vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})$ системи $a_1, a_2, \ldots, a_m$ та нульовий вектор $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ записати як матрицю стовпець, то векторну рівність (2.1) можна переписати у матричній формі:

$$k_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + k_n\begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdots \\ a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \ldots + a_{1m}k_m & = & 0, \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \ldots + a_{2m}k_m & = & 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}k_1 + a_{n2}k_2 + \ldots + a_{nm}k_m & = & 0. \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

Ми отримали лінійну однорідну систему рівнянь відносно невідомих k_i. Вектори $a_1, a_2, \ldots, a_m$ є лінійно незалежними, якщо система (2.3) має лише нульовий розв'язок, тобто, визначник системи відмінний від нуля.

Приклад 2.2. *В деякому базисі вектори задані координатами:* $\vec{a} = (1, 1, 2)$, $\vec{e}_1 = (2, 2, -1)$, $\vec{e}_2 = (0, 4, 8)$, $\vec{e}_3 = (-1, -1, 3)$. *Переконатися, що вектори* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *утворюють базис, і знайти в ньому координати вектора* $\vec{a}$.

Розв'язок.

Згідно (2.3), якщо визначник

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

складений з координат векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, *не рівний 0, то вектори* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *лінійно незалежні, а, отже, утворюють базис. Переконуємося, що* $D = 24 - 16 - 4 + 16 = 20 \neq 0$. *Таким чином, трійка* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *– базис.*

Позначимо координати вектора $\vec{a}$ *в базисі* $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ *через* x, y, z. *Тоді*

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Якщо координати кожного із заданих векторів $\vec{a}$, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ *та* $\vec{e}_3$ *записати як матрицю стовпець, то останню векторну рівність можна переписати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих* x, y, z:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - z & = & 1, \\ 2x + 4y - z & = & 1, \\ -x + 8y + 3z & = & 2. \end{array}\right\}$$

Розв'язуючи її, знаходимо $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$. *Отже,* $\vec{a} = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 = (1, 0, 1)$.

Завдання для самостійної роботи

Довести, що вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють базис, і знайти координати вектора $\vec{d}$ в цьому базисі.

1) $\vec{a} = (5, 4, 1)$, $\vec{b} = (-3, 5, 2)$, $\vec{c} = (2, -1, 3)$, $\vec{d} = (7, 23, 4)$.

2) $\vec{a} = (2, -1, 4)$, $\vec{b} = (-3, 0, -2)$, $\vec{c} = (4, 5, -3)$, $\vec{d} = (0, 11, -14)$.

3) $\vec{a} = (1, 3, 4)$, $\vec{b} = (-2, 5, 0)$, $\vec{c} = (3, -2, -4)$, $\vec{d} = (13, -5, -4)$.

Відповідь: 1) $(3, 2, -1)$. 2) $(-1, 2, 2)$. 3) $(2, -1, 3)$.

2.3. Проекція вектора на вісь. Розклад вектора за осями

Проекцією вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ на вісь l (пряму з напрямком) називають число

$$\vec{a}_l = \overrightarrow{AB}_l = |\vec{a}| \cos\varphi, \tag{2.4}$$

де φ – кут між додатним напрямком осі l та вектором $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, який змінюється в межах від 0 до π.

Геометричний зміст поняття: **проекція** вектора $\vec{a}$ на вісь l – це довжина відрізка $A_1B_1 = \overrightarrow{AB}_l = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi$, взята зі знаком "+", якщо $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$ та "−", якщо $\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ (рис. 2.5). При $\varphi = \pi/2$ відрізок A_1B_1 перетворюється в точку і $\vec{a}_l = 0$.

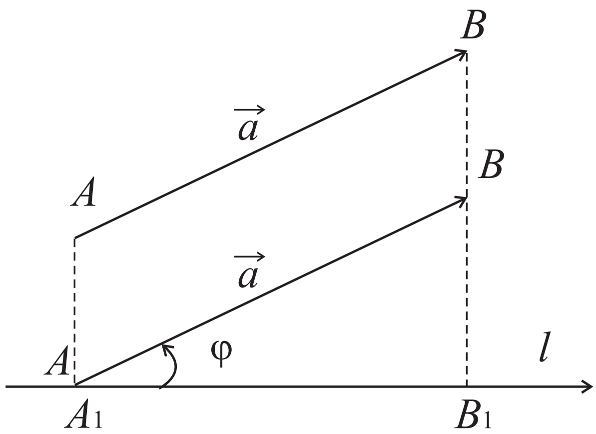


Рис. 2.5.

Властивості проекцій

1. Проекція суми кількох векторів на дану вісь дорівнює сумі їхніх проекцій на цю вісь, тобто

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})_l = \vec{a}_l + \vec{b}_l + \vec{c}_l. \tag{2.5}$$

2. При множенні вектора $\vec{a}$ на число λ його проекція також помножиться на це число:

$$(\lambda\vec{a})_l = \lambda\vec{a}_l. \tag{2.6}$$

Розклад вектора за координатними осями

Якщо в просторі зафіксовано точку O і базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, то кажуть, що в просторі задано **декартову систему координат** $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Точку O називають **початком координат**, а прямі Ox, Oy, Oz, які проходять через початок координат і є відповідно паралельними векторам $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – **осями координат**. Якщо базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ є ортономованим, то відповідну йому систему координат називають **прямокутною**.

Будь-який вектор $\vec{a}$ може бути розкладений за ортами координатних осей:

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{2.7}$$

Коефіцієнти такого розкладу називаються **координатами вектора** в даній системі координат і рівні проекціям вектора $\vec{a}$ на відповідні координатні осі: $x = \vec{a}_x$ – абсциса, $y = \vec{a}_y$ – ордината, $z = \vec{a}_z$ – апліката. Тому вектор можна записати у вигляді $\vec{a} = (x, y, z)$.

Радіус-вектором точки M називають вектор, початок якого збігається з початком координат, а кінець знаходиться в даній точці. Координати радіус-вектора т. M називають **координатами точки** $M(x, y, z)$ (рис. 2.6).

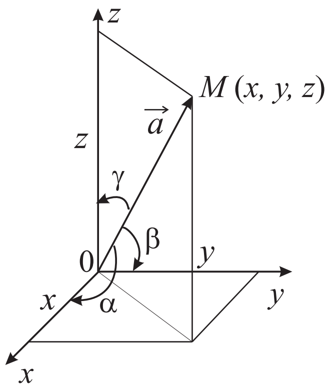


Рис. 2.6.

Приклад 2.3. *Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомі кути $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 120^\circ$, які він утворює з осями координат Ox, Oy, Oz, а його довжина $|\vec{a}| = 4$.*

Розв'язок.

Координати вектора $\vec{a}$ в даній системі координат рівні його проекціям на відповідні координатні осі. Тому згідно означення проекції (2.4) маємо:

$$\begin{aligned} x &= \vec{a}_x = |\vec{a}|\cos\alpha = 4\cos 45^\circ = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \\ y &= \vec{a}_y = |\vec{a}|\cos\beta = 4\cos 60^\circ = 4\cdot\frac{1}{2} = 2, \\ z &= \vec{a}_z = |\vec{a}|\cos\gamma = 4\cos 120^\circ = 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -2. \end{aligned}$$

Отже, $\vec{a} = (2\sqrt{2},\ 2,\ -2)$.

2.4. Операції з векторами

1. Добутком вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ на довільне число λ є вектор

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \tag{2.8}$$

2. Сумою двох векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ є вектор

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2). \tag{2.9}$$

3. Різницею двох векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ є вектор

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \tag{2.10}$$

4. Довжина вектора $\vec{a} = (x, y, z)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.11}$$

5. Вектори рівні, якщо вони мають однакові координати: для двох векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\vec{a} = \vec{b} \Longleftrightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2, z_1 = z_2. \tag{2.12}$$

6. Вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ колінеарні, якщо

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \tag{2.13}$$

Приклад 2.4. *Визначити модулі суми і різниці векторів* $\vec{a} = (3, -5, 8)$ *та* $\vec{b} = (-1, 1, -4)$.

Розв'язок.

Згідно правил додавання (2.9) та віднімання (2.10) векторів заданих координатами $\vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1), -5 + 1, 8 + (-4)) = (2, -4, 4)$ *і* $\vec{a} - \vec{b} = (3 - (-1), -5 - 1, 8 - (-4)) = (4, -6, 12)$. *Знаючи координати векторів, за правилом (2.11) знаходимо їх модулі:* $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ *та* $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 12^2} = \sqrt{196} = 14$.

Приклад 2.5. *Знайти проекцію вектора* $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ *на вектор* $\vec{e}$, *якщо кут між ними рівний* $\varphi = 60^\circ$.

Розв'язок.

За умовою задачі координати координати вектора $\vec{a}$ *відомі* $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} = (2, -2, 1)$, *тому можемо знайти його модуль* $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$. *Тоді за формулою (2.4) знаходимо проекцію вектора* $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{e}$

$$\vec{a}_e = |\vec{a}| \cos\varphi = 3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}.$$

Відстань між двома точками

Відстань між точками $A(x_1, y_1, z_1)$ та $B(x_2, y_2, z_2)$ можна розглядати як довжину вектора: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, тоді її можна знайти за формулою

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{2.14}$$

Приклад 2.6. *Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ та їхню довжину, якщо відомі координати точок $A(5, -1, 2)$ та $B(1, 2, 1)$.*

Розв'язок.

Для того, щоб знайти координати вектора необхідно від координат кінця вектора відняти відповідні координати початку. Зокрема: $\overrightarrow{AB} = (1 - 5, 2 - (-1), 1 - 2) = (-4, 3, -1)$ *та* $\overrightarrow{BA} = (5 - 1, -1 - 2, 2 - 1) = (4, -3, 1)$. *Знаючи координати векторів, легко знаходимо їх довжини* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} = 2\sqrt{6}$ *і* $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{26} = 2\sqrt{6}$. *Як видно вектори* $\overrightarrow{AB}$ *і* $\overrightarrow{BA}$ *мають однакову довжину, але протилежно напрямлені. Довжину вектора можна розглядати і як відстань між точками його початку і кінця.*

Напрямні косинуси вектора

Вектор $\vec{a}$ може бути заданий за допомогою модуля (2.11) та α, β, γ – кутів, які утворює цей вектор з осями координат (див. рис. 2.6). Косинуси кутів α, β, γ називаються **напрямними косинусами вектора** $\vec{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}. \tag{2.15}$$

Зв'язок між напрямними косинусами

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{2.16}$$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ збігаються з координатами його орта

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Приклад 2.7. *Знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(2, 3, 4)$, $B(3, 5, 6)$.*

Розв'язок.

Знаходимо координати вектора $\overrightarrow{AB} = (3-2, 5-3, 6-4) = (1,2,2)$ *та його модуль* $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$. *Тепер за формулами (2.15) знаходимо його напрямні косинуси*

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1}{3},\\ \cos\beta &= \frac{y}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3},\\ \cos\gamma &= \frac{z}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

1. Обчислити модуль вектора $\vec{a} = (3, -6, 2)$.

Відповідь: $|\vec{a}| = 7$.

2. Визначити початок вектора $\vec{a} = (2, -3, -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1, -1, 2)$.

Відповідь: $(-1, 2, 3)$.

3. Знайти напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (12, -15, -16)$.

Відповідь: $\cos\alpha = \frac{12}{25}$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\cos\gamma = -\frac{16}{25}$.

4. Задано проекції $F_x = 5$, $F_y = 5\sqrt{2}$, $F_z = -5$ сили $\vec{F}$ на координатні осі. Знайти величину сили і напрям її дії.

Відповідь: $|\vec{F}| = 10$, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 120°$.

2.5. Ділення відрізка в заданому співвідношенні

Точка A ділить відрізок A_1A_2 у співвідношенні $\lambda = \dfrac{A_1A}{AA_2}$. Нехай $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, λ – відомі, тоді координати точки A рівні:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{2.17}$$

Приклад 2.8. *Відрізок, обмежений точками* $A(2, -2, 4)$, $B(5, 4, 6)$, *поділено на три рівні частини. Знайти координати точок поділу.*

Розв'язок.

Нехай M *– перша точка поділу. Вона ділить відрізок* $\overrightarrow{AB}$ *у співвідношенні* $\lambda = \dfrac{AM}{MA} = \dfrac{1}{2}$. *Тому згідно (2.17) маємо*

$$x = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 5}{1+\frac{1}{2}} = 3, \quad y = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1+\frac{1}{2}} = 0, \quad z = \frac{4 + \frac{1}{2}\cdot 6}{1+\frac{1}{2}} = \frac{14}{3}.$$

Отже, $M\left(3, 0, \frac{14}{3}\right)$.

Друга точка N *ділить відрізок* $\overrightarrow{AB}$ *у співвідношенні* $\lambda = \dfrac{AN}{NA} = 2$ *і*

$$x = \frac{2 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = 4, \quad y = \frac{-2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = 2, \quad z = \frac{4 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = \frac{16}{3}.$$

Отже, $N\left(4, 2, \frac{16}{3}\right)$.

Завдання для самостійної роботи

1. Відрізок, обмежений точками $A(-1, 8, -3)$ і $B(9, -7, -2)$, поділено точками M_1, M_2, M_3, M_4 на п'ять рівних частин. Знайти координати точок M_1 і M_3.

Відповідь: $M_1(1, 5, -2)$, $M_3(5, -1, 0)$.

2. Визначити координати кінців A і B відрізка, розділеного точками $C(2, 0, 2)$ і $D(5, -2, 0)$ на три рівні частини.

Відповідь: $A(-1, 2, 4)$, $B(8, -4, -2)$.

2.6. Скалярний добуток двох векторів. Кут між векторами. Умови паралельності та перпендикулярності

Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними (рис. 2.7)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi. \tag{2.18}$$

Скалярний добуток двох векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ та $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, заданих координатами, дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \tag{2.19}$$

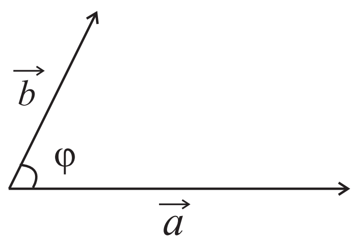


Рис. 2.7.

Властивості скалярного добутку:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
2. $\lambda\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

3. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

4. Скалярний добуток вектора $\vec{a}$ самого на себе рівний квадрату його модуля: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. З іншого боку $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

5. Проекція вектора $\vec{a}$ на напрямок вектора $\vec{b}$:

$$\vec{a}_{\vec{b}} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Кут між векторами

Кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ визначають за формулою

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \qquad (2.20)$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох векторів

1. Якщо вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ колінеарні (паралельні), то їх відповідні координати пропорційні

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (2.21)$$

2. Якщо вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ перпендикулярні ($\vec{a} \perp \vec{b}$), то $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Тоді скалярний добуток цих векторів рівний нулю:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \qquad (2.22)$$

Приклад 2.9. *Дано вектори* $\vec{a} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$ *і* $\vec{b} = 4\vec{m} - \vec{n}$, *де* $|\vec{m}| = 1$; $|\vec{n}| = 3$; $\varphi = (\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \pi$. *Знайти: а)* $(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + 4\vec{b})$; *б) проекцію вектора* $(-2\vec{a} + 4\vec{b})$ *на вектор* $\vec{b}$; *в)* $\cos(\widehat{\vec{a}, 4\vec{b}})$.

Розв'язок.

а) Обчислюємо

$$(3\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + 4\vec{b}) = (-6\vec{m} + 9\vec{n} + 8\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (4\vec{m} - 6\vec{n} + 16\vec{m} - 4\vec{n}) =$$
$$= 10 \cdot (2\vec{m} + 7\vec{n}) \cdot (2\vec{m} - \vec{n}) =$$
$$= 10 \cdot (4|\vec{m}|^2 + 12|\vec{m}||\vec{n}| \cos\varphi - 7|\vec{n}|^2) =$$
$$= 10 \cdot (4 \cdot 1 + 12 \cdot 1 \cdot 3 \cdot (-1) - 7 \cdot 9) = -950;$$

б) Нехай $c = (-2\vec{a} + 4\vec{b}) = (20\vec{m} - 10\vec{n})$. *Тоді*

$$\vec{c}_{\vec{b}} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$$

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 10 \cdot (2\vec{m} - \vec{n}) \cdot (4\vec{m} - \vec{n}) =$$
$$= 10 \cdot (8|\vec{m}|^2 - 6|\vec{m}||\vec{n}| \cos\pi + |\vec{n}|^2) = 350,$$
$$|\vec{b}| = \sqrt{|\vec{b}|^2} = \sqrt{(4\vec{m} - \vec{n})^2} =$$
$$= \sqrt{16|\vec{m}|^2 - 8|\vec{m}||\vec{n}| \cos\pi + |\vec{n}|^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Остаточно одержуємо

$$(-2\vec{a}+4\vec{b})_{\vec{b}}=\frac{350}{7}=50;$$

в) Нехай $\vec{d}=4\vec{b}$. *Тоді*

$$\cos(\vec{a},\widehat{\ }4\vec{b})=\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{d})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}||\vec{b}|},$$

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=4\cdot(-2\vec{m}+3\vec{n})\cdot(4\vec{m}-\vec{n})=$$

$$=4\cdot(-8|\vec{m}|^2+14|\vec{m}||\vec{n}|\cos\pi-3|\vec{n}|^2)=308,$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-2\vec{m}+3\vec{n})^2}=$$

$$=\sqrt{4|\vec{m}|^2-12|\vec{m}||\vec{n}|\cos\pi+9|\vec{n}|^2}=\sqrt{121}=11,$$

$$|\vec{d}|=4\cdot|\vec{b}|=4\cdot7=28.$$

В результаті маємо:

$$\cos(\vec{a},\widehat{\ }4\vec{b})=\frac{308}{11\cdot28}=1.$$

Приклад 2.10. *За координатами точок* $A(4,6,3)$, $B(-5,2,6)$ *і* $C(4,-4,-3)$ *знайти: а) скалярний добуток векторів* $\vec{a}=4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$ *і* $b=\overrightarrow{AB}$; *б) проекцію вектора* $c=\overrightarrow{CB}$ *на вектор* $d=\overrightarrow{AC}$; *в)* $\cos(\vec{a},\widehat{\ }\vec{d})$.

Розв'язок.

Послідовно знаходимо $\overrightarrow{AB}=(-9,-4,3)$, $\overrightarrow{AC}=(0,-10,-6)$, $\overrightarrow{CB}=(-9,6,9)$ *та* $4\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}=(-36,34,42)$.

а) Маємо $\vec{a}=(-36,34,42)$, $\vec{b}=(-9,-4,3)$. *Тоді*

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-36)\cdot(-9)+34\cdot(-4)+42\cdot3=314.$$

б) Так як

$$\vec{c}_{\vec{d}}=\frac{\vec{c}\cdot\vec{d}}{|\vec{d}|},\quad \vec{d}=(0,-10,-6),$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=0-60-54=-114,\quad |\vec{d}|=\sqrt{0+100+36}=\sqrt{136},$$

то

$$\vec{c}_{\vec{d}}=-\frac{54}{\sqrt{34}};$$

в) Оскільки

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{d}}{|\vec{a}||\vec{d}|}, \quad |\vec{a}| = \sqrt{1296+1156+1764} = \sqrt{4216},$$
$$\vec{a}\cdot\vec{d} = 0 - 340 - 252 = -592,$$

то

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = -\frac{592}{\sqrt{4216}\sqrt{136}} = -\frac{74}{17\sqrt{31}}.$$

Робота $\vec{A}$ сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки на шляху $|\vec{s}|$, вздовж вектора $\vec{s}$, обчислюється за формулою

$$A = \vec{F}\cdot\vec{s} = |\vec{F}||\vec{s}|\cos(\widehat{\vec{F},\vec{s}}).$$

Отже, робота дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор переміщення. В цьому суть **механічного змісту** скалярного добутку.

Приклад 2.11. *Обчислити роботу рівнодійної $\vec{F}$ сил $\vec{F_1} = (3,-4,5)$, $\vec{F_2} = (2,1,-4)$, $\vec{F_3} = (-1,6,2)$, прикладених до матеріальної точки, котра під їх дією переміщується прямолінійно з точки $M_1(4,2,-3)$ в точку $M_2(7,4,1)$.*

Розв'язок.

Так як $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} = (4,3,3)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{s} = (3,2,4)$, *то* $A = \vec{F}\cdot\vec{s} = 4\cdot3 + 3\cdot2 + 3\cdot4 = 30$.

Завдання для самостійної роботи

1. Дано вектори $\vec{a} = -3\vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} + 5\vec{n}$, де $|\vec{m}| = 3$; $|\vec{n}| = 6$; $\varphi = (\widehat{\vec{m},\vec{n}}) = 4\pi/3$. Знайти: а) $(-\vec{a}+2\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; б) проекцію вектора $(\vec{a}+\vec{b})$ на вектор $\vec{b}$; в) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Відповідь: а) 1287; б) $15\sqrt{\frac{13}{7}}$; в) $-\frac{2}{\sqrt{7}}$.

2. Дано вершини чотирикутника $A(1,-2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$. Визначити кут φ між його діагоналями.

Відповідь: $\varphi = 90°$.

3. Дано три сили $\vec{P} = (9,-3,4)$, $\vec{Q} = (5,6,-2)$, $\vec{R} = (-4,-2,7)$, прикладені до точки $A(-5,4,-2)$. Визначити роботу рівнодійної цих сил, коли точка до якої вони прикладені, рухаючись прямолінійно, переміщується в точку $B(4,6,-5)$.

Відповідь: 65.

2.7. Векторний добуток двох векторів.

Упорядкована трійка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарних векторів називається **правою** (рис. 2.8а), якщо з кінця третього вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від першого вектора $\vec{a}$ до другого вектора $\vec{b}$ здійснюється проти годинникової стрілки; в протилежному випадку трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається **лівою** (рис. 2.8б).

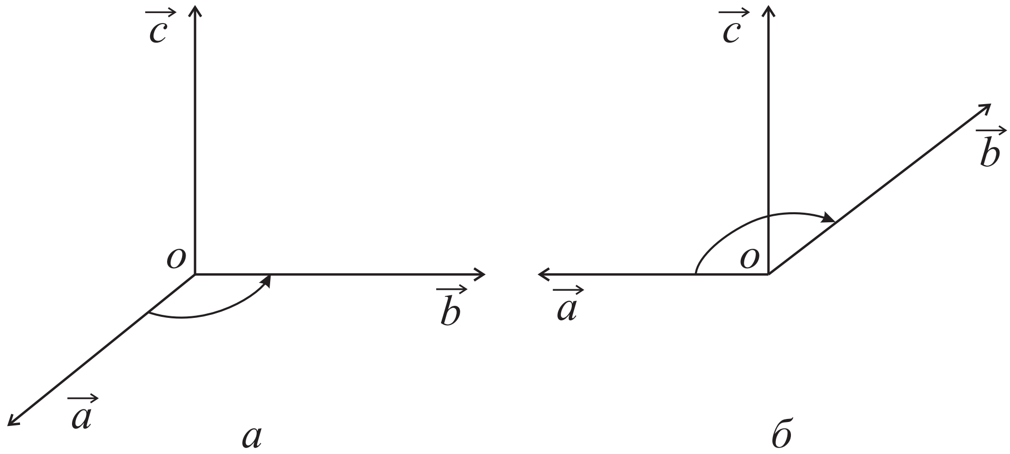


Рис. 2.8.

Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають третій вектор $\vec{c}$, який задовольняє наступні умови:

1) модуль вектора $\vec{c}$ рівний добутку довжин векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними (рис. 2.9а):

$$|\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi; \tag{2.23}$$

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярний як до вектора $\vec{a}$, так і до вектора $\vec{b}$;

3) якщо вектор $\vec{c}$ не нульовий, то він з векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворює праву трійку векторів (рис. 2.9а).

Алгебраїчні властивості векторного добутку:

1. $(\vec{a}\times\vec{b}) = -(\vec{b}\times\vec{a})$;
2. $\lambda\vec{a}\times\vec{b} = \vec{a}\times\lambda\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;
3. $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$.

Приклад 2.12. *Вектори* $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$ *взаємно перпендикулярні,* $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. *Обчислити* $|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})|$.

Розв'язок.

Обчислюємо

$$|(3\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b})| = |3(\vec{a}\times\vec{a}) - 6(\vec{a}\times\vec{b}) - \vec{b}\times\vec{a} + 2(\vec{b}\times\vec{b})| =$$
$$= |-5(\vec{a}\times\vec{b})| = 5\cdot|\vec{a}\times\vec{b}| = 5\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\tfrac{\pi}{2} = 5\cdot 3\cdot 4\cdot 1 = 60.$$

Геометричні властивості векторного добутку:

1) Векторний добуток двох ненульових векторів рівний нулю тоді і тільки тоді, коли вони колінеарні;

2) Модуль векторного добутку двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ чисельно рівний площі паралелограма, побудованого на них

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{2.24}$$

Відповідно площа трикутника рівна:

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|. \tag{2.25}$$

В цьому полягає **геометричний зміст** векторного добутку.

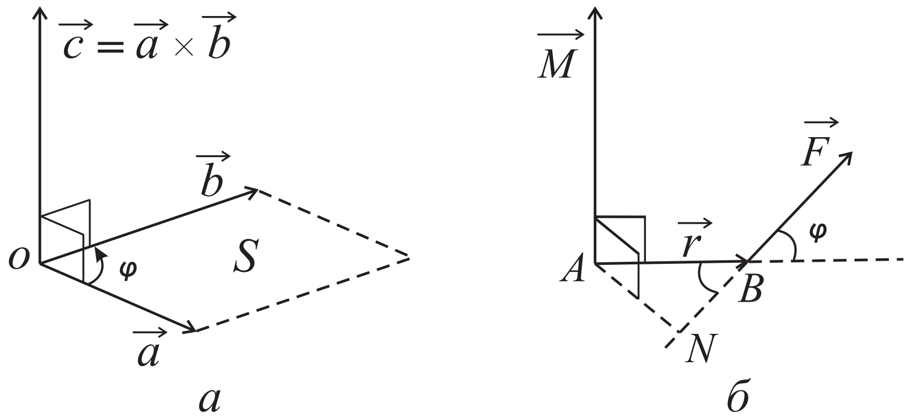


Рис. 2.9.

Векторний добуток векторів $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ заданих координатами рівний

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \tag{2.26}$$

Приклад 2.13. *Знайти площу трикутника ABC, якщо відомо, що: $A(1,2,0)$, $B(3,0,3)$ і $C(5,2,6)$.*

Розв'язок.

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Оскільки $\overrightarrow{AB} = (2,-2,3)$, $\overrightarrow{AC} = (4,0,6)$ то

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 0\vec{j} + 8\vec{k} = (-12, 0, 8).$$

Тоді площа
$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\sqrt{144+64} = 2\sqrt{13}.$$

Якщо обидва вектори лежать в одній координатній площині, наприклад в площині Oxy, то їх можна розглядати як вектори, аплікати яких рівні нулю і застосовувати до них вже відомі формули (2.24)–(2.26).

Приклад 2.14. *Знайти площу трикутника з вершинами* $A(-3,-1)$, $B(1,-5)$, $\mathrm{C}(9,3)$.

Розв'язок.

Точки A, B, C *лежать в площині* Oxy, *тому можна вважати, що в загальному випадку вони мають координати:* $A(x_1,y_1,0)$, $B(x_2,y_2,0)$, $\mathrm{C}(x_3,y_3,0)$. *Тоді векторний добуток векторів* $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, 0)$ *і* $\overrightarrow{AC} = (x_3-x_1, y_3-y_1, 0)$ *буде рівний*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + (x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2))\,\vec{k} = \\
&= (0, 0, x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)),
\end{aligned}$$

а площа трикутника ABC, *визначатиметься формулою*

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\,|x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)|\,. \qquad (2.27)$$

Підставивши координати точок A, B *і* C, *отримаємо:*

$$\begin{aligned}
S_{ABC} &= \frac{1}{2}\,|-3(-5-3) + 1(3-(-1)) + 9(-1-(-5))| = \frac{1}{2}\,(24+4+36) = \\
&= \frac{64}{2} = 32\,\textit{кв. од.}
\end{aligned}$$

За допомогою векторного добутку можна обчислити **обертаючий момент** $\vec{M}$ **сили** $\vec{F}$, прикладеної до точки B тіла, закріпленого в точці A (рис. 2.9б):
$$\vec{M} = \overrightarrow{AB}\times\vec{F}, \quad |\vec{M}| = |\vec{F}||\overrightarrow{AB}|\sin\varphi. \qquad (2.28)$$

Приклад 2.15. *Силу* $\vec{F} = (3,2,-4)$ *прикладено до точки* $A(2,-1,1)$. *Знайти обертаючий момент* $\vec{M}$ *цієї сили відносно початку координат* O.

Розв'язок.

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 11\vec{j} + 7\vec{k} = (2, 11, 7),$$

$$\vec{M} = \sqrt{4 + 121 + 49} = \sqrt{174}.$$

Завдання для самостійної роботи

1. Дано: $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$. Обчислити $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

Відповідь: $|\vec{a} \times \vec{b}| = 16$.

2. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Відповідь: $S = 3,5$.

3. Силу $\vec{F} = (2, 2, 9)$ прикладено до точки $A(4, 2, -3)$. Обчислити величину та напрямні косинуси моменту $\vec{M}$ цієї сили відносно точки $B(2, 4, 0)$.

Відповідь: $|\vec{M}| = 28$, $\cos\alpha = 3/7$, $\cos\beta = 6/7$, $\cos\gamma = -2/7$.

2.8. Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ впорядкованої трійки векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називається число, яке дорівнює векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{2.29}$$

Перерахуємо **основні властивості мішаного добутку векторів**:
1. $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$;
2. $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a} = \vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b} = -\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c} = -\vec{c}\,\vec{b}\,\vec{a} = -\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{b}$;
3. геометричний зміст мішаного добутку полягає в наступному:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \pm V, \tag{2.30}$$

де V – об'єм паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, взятий зі знаком "+", якщо трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – права, або зі знаком "$-$", якщо вона ліва (див. рис. 2.8); об'єм відповідної піраміди

$$V_{\text{пір}} = \pm\frac{1}{6}\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}; \tag{2.31}$$

4. необхідна і достатня умова компланарності або лінійної залежності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ виражається рівністю

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0. \tag{2.32}$$