ОСНОВИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

Поняття множини

Теорію множин, основи якої викладено в цьому розділі, у математиці називають наївною. Є й інші варіанти побудови теорії множин, наприклад конструктивний і формалістський, у яких поняття множини вводять інакше (у конструктивній теорії множин - означають). У нас поняття множини первісне, тобто неозначуване. Опишемо це поняття так: множиною називають будь-який набір певних відмінних один від одного об'єктів нашої інтуїції чи інтелекту, розглядуваних як єдине ціле. Відповідно до цього опису вивчають не окремі об'єкти, а їх сукупності як певні утворення.

У математиці застосовують і такі синоніми терміна „множина": система, клас, область, сукупність. Використовують також поняття „сім'я", але ми вживатимемо його в іншому значенні.

Об'єкти, які утворюють множину, називають її елементами. Про множину говорять, що вона містить ці елементи. Якщо об'єкт a - елемент множини A, то пишемо $a \in A$, а ні, то $a \notin A$.

Множину можна задати, навівши її елементи у фігурних дужках. Наприклад, множина $A = \{a, e, i, o, u\}$ містить елементи a, e, i, o, u й лише ці елементи. Множина не може містити двох однакових елементів, а порядок її елементів не фіксують.

Для часто використовуваних множин є спеціальні позначення:

- $\varnothing$ - *порожня* множина, яка не містить жодного елемента;
- Z - множина *цілих чисел*, $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$;
- R - множина *дійсних чисел*;
- N - множина *натуральних чисел*, $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
- N_0 - множина *натуральних чисел із числом* 0, $N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Можна задати множину, зазначивши спільну властивість всіх її елементів. Тоді множину A задають за допомогою позначення $A = \{x \mid P(x)\}$, яке читають так: „A - це множина об'єктів x, які мають властивість $P(x)$". Наприклад,

$A = \{x \mid x \in N_0, x < 7\}$ - це множина $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$. Іноді замість вертикальної риски використовують дві крапки, тобто $A = \{x : x \in N_0, x < 7\}$.

Дві множини *A* та *B* називають *рівними*, якщо вони складаються з одних і тих самих елементів. Рівність множин *A* та *B* записують як $A = B$.

Множину *A* називають *підмножиною* множини *B*, якщо кожний елемент множини *A* належить *B*. У такому разі пишуть $A \subset B$, причому може бути $A = B$. Якщо $A = B$ чи $A = \varnothing$, то *A* називають *невласною* підмножиною множини *B*, а ні, то *власною*. Для будь-якої множини *A* правдиве включення $\varnothing \subset A$.

Множини бувають скінченними й нескінченними. *Скінченною* називають множину, для якої існує натуральне число, що дорівнює кількості її елементів. Множину, яка не є скінченною, називають *нескінченною*. Кількість елементів скінченної множини *A* позначають як $|A|$ і називають *потужністю*. Поняття потужності вводять і для нескінченних множин, але ми не будемо розглядати його.

Часто всі досліджувані множини являють собою підмножини якоїсь множини, називаної *універсальною множиною*, чи *універсумом*. Універсальну множину позначають як *U*.

Множини можна зображати графічно за допомогою *діаграм Венна*, які запровадив 1881 р. англійський математик Дж. Венн (J. Venn). Універсальну множину позначають прямокутником, а всі інші множини - кругами в ньому.

Для заданої множини *A* можна розглянути множину всіх її підмножин, зокрема порожню множину $\varnothing$ і саму множину *A*. Цю множину позначають 2^A чи $P(A)$ й називають *множиною-степенем*, чи *булеаном* множини *A*. Для скінченної множини *A* множина 2^A містить $2^{|A|}$ елементів.

Приклад. Нехай $A = \{0,1,2\}$. Тоді

$2^A = \{\{\varnothing\},\{0\},\{1\},\{2\},\{0,1\},\{0,2\},\{1,2\},\{0,1,2\}\}$. Ця множина містить $2^3 = 8$ елементів.

Кортеж. Декартів добуток множин

Кортеж - це впорядкований набір елементів. Це не означення кортежу, бо не пояснено, що таке впорядкований набір. Уважатимемо поняття „кортеж" (*вектор, рядок, ланцюжок*), як і поняття множини, первісним, неозначуваним. Елементи, що утворюють кортеж, називають його *компонентами*. Компоненти нумерують, кількість компонент називають *довжиною* (*розмірністю*) кортежу. Нескінченні кортежі не розглядатимемо.

На відміну від елементів множини, компоненти кортежу можуть повторюватись. Кортеж записують у круглих дужках, наприклад (a,b,c,a,d) - кортеж довжиною 5. Іноді дужки й навіть коми не пишуть, наприклад 011001. Кортежі довжиною 2 часто називають *парами*, довжиною 3 - *трійками*, довжиною n - n-ками („енками”).

Два кортежі рівні, якщо вони мають однакову довжину та відповідні їх компоненти рівні. Інакше кажучи, кортежі $(a_1,\ldots,a_m)$ і $(b_1,\ldots,b_n)$ рівні, якщо $m = n$ та $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ldots,a_m = b_n$.

Декартовим добутком множин A та B (позначають $A\times B$) називають множину всіх таких пар (a,b), що $a\in A,\ b\in B$. Зокрема, якщо $A=B$, то обидві компоненти належать A. Такий добуток позначають як A^2 та називають *декартовим квадратом* множини A. Аналогічно, декартовим добутком n множин $A_1,\ldots,A_n$ (позначають $A_1\times\ldots\times A_n$) називають множину всіх таких кортежів $(a_1,\ldots,a_n)$ довжиною n, що $a_1\in A_1,\ldots,a_n\in A_n$. Частковий випадок $A\times\ldots\times A$ позначають як A^n і називають n-м степенем множини A.

Приклад. Нехай $A=\{1,2\}$, $B=\{a,b,c\}$. Тоді

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\},$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}.$$

Зрозуміло, що загалом $A\times B\neq B\times A$.

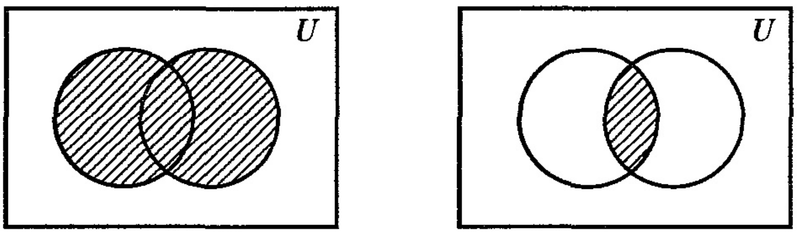
Для скінченних множин потужність (кількість елементів) декартового добутку дорівнює добутку потужностей цих множин: $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Операції над множинами. Доведення рівностей з множинами

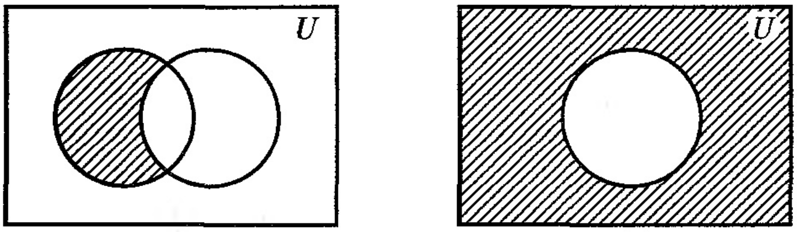
Будемо вважати, що всі розглядувані множини - підмножини якогось універсуму *U*. Для довільних множин *A* та *B* можна побудувати нові множини за допомогою *теоретико-множинних операцій*:

- *об'єднанням множин A* та *B* називають множину $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$;
- *перетином множин A* та *B* називають множину $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$;
- *різницею множин A* та *B* називають множину $A \setminus B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$;
- *доповненням множини A* називають множину $\bar{A} = U \setminus A$, де *U* - універсальна множина.

На рисунку подано діаграми Венна, які ілюструють операції над множинами.



$A \cup B$ $A \cap B$



$A \setminus B$ $\bar{A}$

Теоретико-множинні операції задовольняють законам, наведеним у таблиці.

Таблиця

Назва закону	Формулювання закону
1. Закони комутативності	*а)* $A\cup B=B\cup A$ *б)* $A\cap B=B\cap A$
2. Закони асоціативності	*а)* $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ *б)* $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
3. Закони дистрибутивності	*а)* $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ *б)* $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
4. Закон подвійного доповнення	$\overline{\overline{A}}=A$
5. Закони ідемпотентності	*а)* $A\cap A=A$ *б)* $A\cup A=A$
6. Закони де Моргана	*а)* $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$ *б)* $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$
7. Закони поглинання	*а)* $A\cap(A\cup B)=A$ *б)* $A\cup(A\cap B)=A$
8. Закони тотожності	*а)* $A\cup\varnothing=A$ *б)* $A\cap U=A$
9. Закони домінування	*а)* $A\cup U=U$ *б)* $A\cap\varnothing=\varnothing$

Говорять, що дві множини *A* та *B* не перетинаються, якщо вони не мають спільних елементів, тобто якщо $A\cap B=\varnothing$.

Для будь-яких скінченних множин *A* та *B* правдива рівність $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ - частинний випадок принципу включення-виключення, докладно розгляненого в розділі „Комбінаторний аналіз”.

Систему $S=\{A_i\}$ ($i\in I$, це I — множина індексів) підмножин множини *A* називають *розбиттям* множини *A* за таких умов.

1. $A_i\neq\varnothing$ для $i\in I$;
2. $A_i\cap A_j=\varnothing, i\neq j$;
3. $\bigcup\limits_{i\in I}A_i=A$.

Інакше кажучи, система *S* непорожніх підмножин множини *A* являє собою розбиття цієї множини, якщо будь-який елемент $a\in A$ належить точно одній множині A_i із системи *S*.

Доводити рівності з множинами можна різними способами. Нижче наведено приклади, що ілюструють способи доведення.

Спосіб 1. Цей спосіб ґрунтується на такій теоремі.

Теорема. Множини *A* та *B* рівні тоді й лише тоді, коли $A \subset B$ та $B \subset A$.

Приклад. Доведемо рівність множин, яка являє собою формулювання закону де Моргана $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Припустимо, що $x \in \overline{A \cap B}$. Тоді $x \notin A \cap B$, звідки випливає, що $x \notin A$ чи $x \notin B$. Отже, $x \in \overline{A}$ чи $x \in \overline{B}$, а це означає, що $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Ми довели, що $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Навпаки, нехай $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Тоді $x \in \overline{A}$ чи $x \in \overline{B}$, звідки випливає, що $x \notin A$ чи $x \notin B$. Це означає, що $x \notin A \cap B$, тобто $x \in \overline{A \cap B}$. Отже, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Спосіб 2. Доведення рівності множин за допомогою законів логіки.

Приклад. Доведемо рівність $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Послідовно перевіримо рівності

$$\begin{aligned}
&\overline{A \cap B} = \{x \mid x \notin A \cap B\} = \left\{x \mid \overline{(x \in A \cap B)}\right\} = \\
&= \left\{x \mid \overline{(x \in A) \wedge (x \in B)}\right\} = \left\{x \mid (x \notin A) \vee (x \notin B)\right\} =. \\
&= \left\{x \mid (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})\right\} = \left\{x \mid x \in \overline{A} \cup \overline{B}\right\} = \overline{A} \cup \overline{B}
\end{aligned}$$

Спосіб 3. Доведення рівності множин за допомогою *таблиць належності*, які містять усі можливі комбінації належності елементів множинам (1 - елемент належить множині, 0 - не належить).

Приклад. Доведемо цим способом рівність $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Доведення подано в таблиці

Таблиця

A	B	$A\cap B$	$\overline{A\cap B}$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A}\cup\bar{B}$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Стовпчики, які в таблиці6 відповідають значенням $\overline{A\cap B}$ та $\bar{A}\cup\bar{B}$, одинакові, отже $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

Спосіб 4. Доведення рівності множин за допомогою основних законів теорії множин (див. таблицю).

Приклад. Довести тотожність $\overline{A\cup\left(B\cap C\right)}=\left(\bar{C}\cup\bar{B}\right)\cap\bar{A}$

Використовуючи закони де Моргана та комутативні (див. таблицю), можна записати таку послідовність рівних множин:

$\overline{A\cup\left(B\cap C\right)}=\bar{A}\cap\overline{\left(B\cap C\right)}$ за законом де Моргана *а*)

$=\bar{A}\cap\left(\bar{B}\cup\bar{C}\right)$ за законом де Моргана *б*)

$=\left(\bar{B}\cup\bar{C}\right)\cap\bar{A}$ за законом комутативності *б*)

$=\left(\bar{C}\cup\bar{B}\right)\cap\bar{A}$ за законом комутативності *а*)

Комп'ютерне зображення множин

У комп'ютері можна подавати множини різними способами. Один зі способів - зберігати невпорядковані елементи множини. Проте в такому разі операції з множинами займатимуть багато часу через те, що потрібно щоразу переглядати елементи. Тому розглянемо інші способи.

Одним із найпоширеніших і найпростіших способів - подання множин за допомогою бітових рядків. Упорядкуємо довільним способом елементи універсальної множини. Нехай універсальна множина U містить n елементів, тоді $U=\left\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n\right\}$.

Множину $A \subset U$ подають у комп'ютері рядком із 0 і 1 довжиною *n* так: якщо $a_i \in U$, то *i*-й біт дорівнює 1, а ні, то 0.

Приклад. Нехай $U = \{a,b,c,d,e,f,m,n,p,q\}$, $A = \{b,m,n,q\}$, $B = \{a,b,f,m,q\}$. Тоді множину *A* подають рядком 0100001101, а множину *B* - рядком 1100011001.

Тепер на комп'ютері легко виконати операції над множинами *A* та *B*. Неважко переконатись, що об'єднанню множин відповідає порозрядне OR над бітовими рядками, які подають множини *A* та *B*, а перетину множин - порозрядне AND над відповідними бітовими рядками.

Приклад. Використаємо бітові рядки, які подають множини *A* та *B* з попереднього прикладу. Бітовий рядок, який відповідає об'єднанню цих множин $A \cup B = \{a,b,f,m,n,q\}$, знаходимо як результат виконання операції порозрядного OR:

$$\begin{array}{l} 0100001101 \\ \underline{1100011001} \\ 1100011101 \end{array}$$

Бітовий рядок, який відповідає перетину множин $A \cap B = \{b,m,q\}$, знаходимо як результат виконання операції порозрядного AND:

$$\begin{array}{l} 0100001101 \\ \underline{1100011001} \\ 0100001001 \end{array}$$

Якщо універсальна множина *U* має велику потужність, а її підмножини не дуже потужні, то подання за допомогою бітових рядків неефективне щодо витрат пам'яті. У такому разі доцільно використовувати інші структури даних - зазвичай зв'язані списки та хеш-таблиці. У певних задачах потрібні спеціальні методи подання множин, які ґрунтуються на використанні дерев.

Розмиті (нечіткі) множини

У 1965 р. у журналі "Information and Control" з'явилась відома праця Л. Заде (L. Zadeh) "Fuzzy sets". Виникнення теорії розмитих множин було спричинено необхідністю опису понять і явищ, які мають багатозначний і неточний характер. Математичні методи які використовують класичні теорію множин і логіку, не дозволяють розв'язувати проблеми такого типу.

За допомогою розмитих множин можна формально визначити такі неточні або багатозначні поняття як "висока температура", "молода людина", "середній зріст", "велике місто" тощо. Розмиту множину визначають на певному *універсумі*, який не є розмитою множиною.

Розмитою множиною X з деякого універсуму A ($A \neq \varnothing$) називають множину пар $X = \{(a, \mu_X(a)) \mid a \in A\}$, що записують як $X \subset A$. Функцію $\mu_X : A \to [0,1]$ називають функцією належності розмитої множини *X*. Ця функція приписує кожному елементу $a \in A$ ступінь його належності розмитій множині *X*. Розглядають три випадки:

- $\mu_X(a) = 1$, що означає повну належність елемента *a* розмитій множині *X* ($a \in X$);
- $\mu_X(a) = 0$, що означає відсутність належності елемента *a* розмитій множині *X* ($a \notin X$);
- $0 < \mu_X(a) < 1$, що означає часткову належність елемента а розмитій множині X.

Використовують спеціальний запис розмитих множин: якщо $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ є універсумом зі скінченною кількістю елементів, то розмиту множину $X \subset A$ записують так:

$$X = \frac{\mu_X(a_1)}{a_1} + \frac{\mu_X(a_2)}{a_2} + \ldots + \frac{\mu_X(a_n)}{a_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_X(a_i)}{a_i}$$

Зображення елементів розмитої множини у вигляді простих дробів, у яких під лінією записують елемент універсуму, а над лінією - його ступінь належності, визначає зв'язки між елементами $a_1,\ldots,a_n$ і відповідними ступенями належності $\mu_X\left(a_1\right),\ldots,\mu_X\left(a_n\right)$. Знак "+" має інтерпретацію множини елементів. Зауважимо, що у такій нотації можна записувати й множини, які не є розмитими. Наприклад, множину оцінок можна записати $D=\{1,2,3,4,5\}$, або $D=1+2+3+4+5$. Якщо ж A є нескінченною множиною, то розмиту множину $X\subset A$ записують так:

$$X=\int_A \frac{\mu_X\left(a\right)}{a}$$

Приклад. Нехай $A = N$ — множина натуральних чисел. Уведемо поняття натуральних чисел "близьких до числа 7". Це поняття можна ввести за допомогою розмитої множини $X\subset N$, записаної у вигляді

$$X=\frac{0.2}{4}+\frac{0.5}{5}+\frac{0.8}{6}+\frac{1}{7}+\frac{0.8}{8}+\frac{0.5}{9}+\frac{0.2}{10}$$

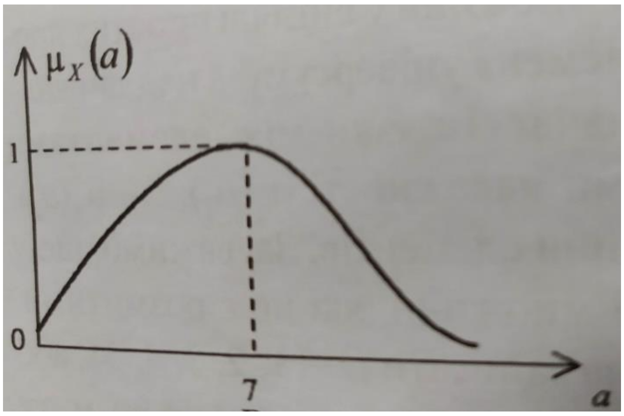
Приклад. Якщо $A = R$, де R - множина дійсних чисел, то числа "близькі до числа 7" визначимо функцією належності $\mu_X\left(a\right)=\dfrac{1}{1+\left(a-7\right)^2}$, а розмиту множину дійсних чисел "близьких до числа 7" запишемо так:

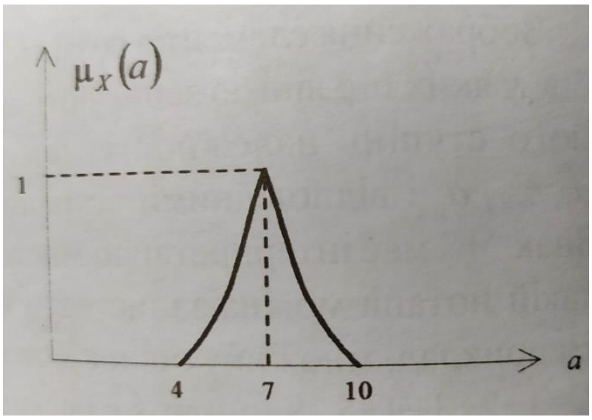
$$X=\int_A \frac{\left(1+\left(a-7\right)^2\right)^{-1}}{a}$$

Розмиті множини натуральних або дійсних чисел, які "близькі до числа 7", можна записати різними способами. Наприклад, функцію $\mu_X\left(a\right)$ ще можна задати так:

$$\mu_X\left(a\right)=\begin{cases}1-\sqrt{\dfrac{\left|a-7\right|}{3}}, \text{якщо } 4\le a\le 10;\\ 0, \text{у всіх інших випадках}\end{cases}$$

На рисунках зображені функції належності розмитої множини $X\subset A$ для введеного поняття дійсних чисел, які "близькі до числа 7".





Приклад. Сформулюємо розмите поняття "приємна температура води у морі". Визначимо універсум множиною $A=\{15^{\circ},\dots,29^{\circ}\}$. Тоді приємна температура води у 21° з позиції першого відпочиваючого може бути визначена такою розмитою множиною

$$X=\frac{0.1}{16}+\frac{0.3}{17}+\frac{0.5}{18}+\frac{0.8}{19}+\frac{0.95}{20}+\frac{1}{21}+\frac{0.9}{22}+\frac{0.8}{23}+\frac{0.75}{24}+\frac{0.7}{25}$$

Вода з температурою від 24° до 26° з позиції другого відпочиваючого може бути визначена розмитою множиною

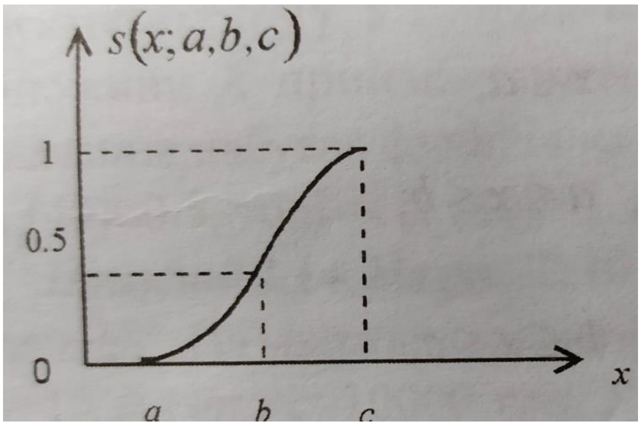
$$Y=\frac{0.1}{19}+\frac{0.2}{20}+\frac{0.4}{21}+\frac{0.7}{22}+\frac{0.9}{23}+\frac{1}{24}+\frac{1}{25}+\frac{1}{26}+\frac{0.8}{27}+\frac{0.75}{28}+\frac{0.7}{29}.$$

Розглянемо типові функції належності.

1. Функція належності типу *s*:

$$s(x;a,b,c)=\begin{cases}0,\ x\le a;\\ 2\left(\dfrac{x-a}{c-a}\right)^2,\ a\le x\le b;\\ 1-2\left(\dfrac{x-c}{c-a}\right)^2,\ b\le x\le c;\\ 1,\ x\ge c\end{cases},$$

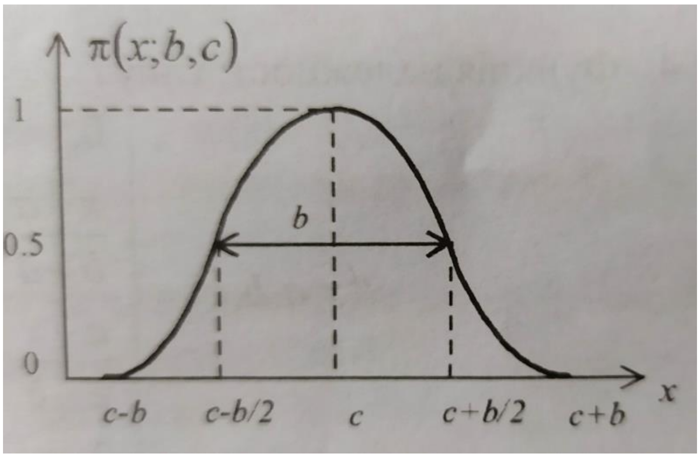
де $b=(a+c)/2$. Графік функції типу *s* наведено на рисунку. Форму кривої визначає набір параметрів *a*, *b*, *c*. У разі $b=(a+c)/2$ функція приймає значення 0.5.



2. Функція належності типу π:

$$\pi(x;b,c)=\begin{cases} s(x;c-b,c-b/2,c),\ x\le c; \\ 1-s(x;c,c+b/2,c+b),\ x\ge c. \end{cases}$$

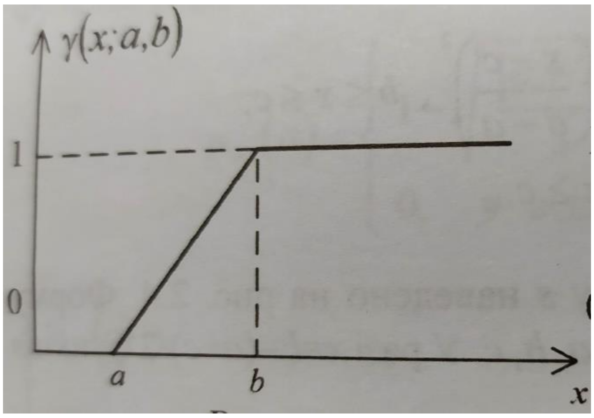
Форму кривої визначають параметри b та c. Ця функція дорівнює нулю при $x\ge c+b$ та $x\le c-b$, а при $x=c\pm b/2$ вона приймає значення 0.5. Графік функції π типу показано на рисунку.



3. Функція належності типу γ:

$$\gamma(x;a,b)=\begin{cases} 0,\ x\le a; \\ \dfrac{x-a}{b-a},\ a\le x\le b; \\ 1,\ x\ge b. \end{cases}$$

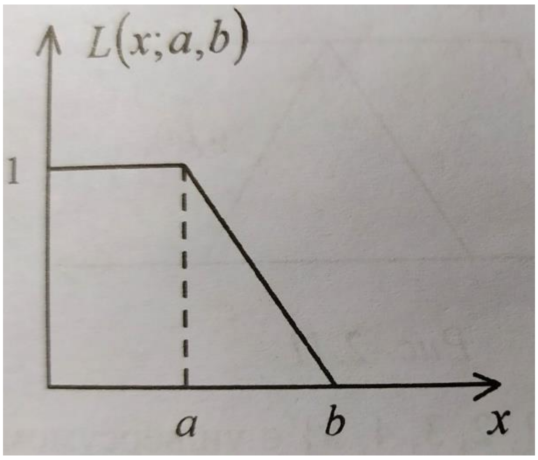
Форму кривої визначають параметри a та b. Графік функції типу γ наведено на рисунку.



4. Функція належності типу L:

$$L(x;a,b)=\begin{cases}1, \ x\le a;\\ \dfrac{b-x}{b-a}, \ a\le x\le b;\\ 0, \ x\ge b.\end{cases}$$

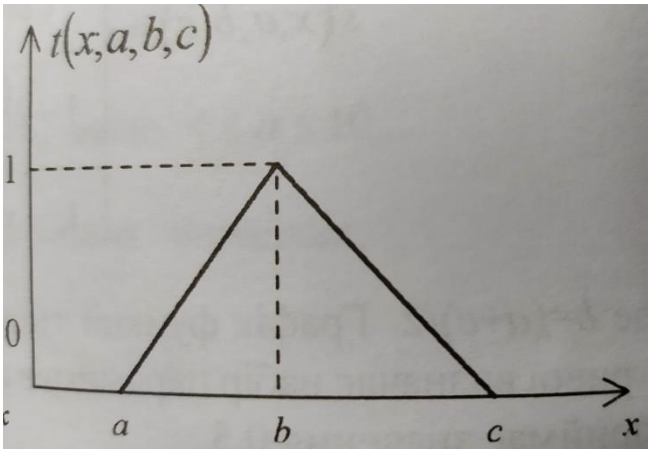
Форму кривої визначають параметри a та b. Графік функції типу L наведено на рисунку.



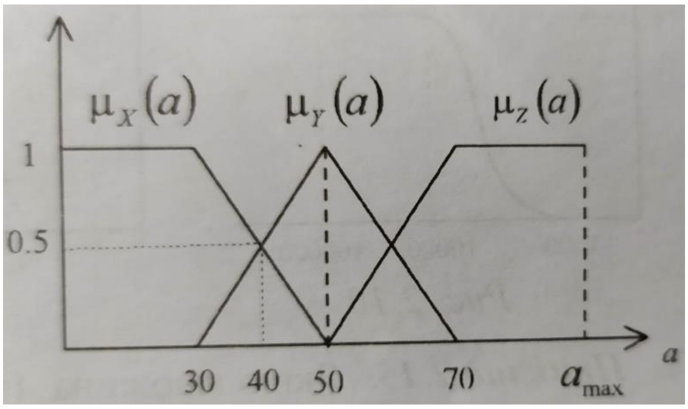
5. Функція належності типу t:

$$t(x;a,b,c)=\begin{cases}0, \ x\le a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, \ a\le x\le b;\\ \dfrac{c-x}{c-b}, \ b\le x\le c;\\ 1, \ x\ge c.\end{cases}$$

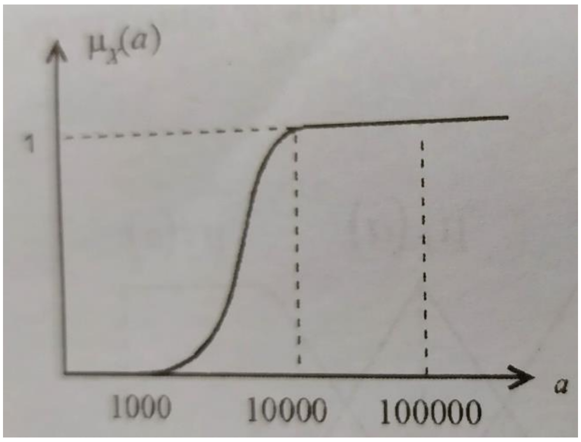
Форму кривої визначають параметри a, b та c. Графік функції типу t наведено на рисунку. Функція типу t є альтернативою функції типу π.



Приклад. Уведемо означення розмитих множин $X =$ "мала швидкість автомобіля", $Y =$ "середня швидкість автомобіля", $Z =$ "велика швидкість автомобіля". Як універсум візьмемо відрізок $A = [0, a_{\max}]$, де $a_{\max}$ – можлива максимальна швидкість автомобіля. На рисунку подано графіки функцій належності, що визначають уведені розмиті множини. Зауважимо, що множина X задана функцією типу L, множина Y - функцією типу t, а множина Z - функцією типу γ. У точці $a = 40$ км/год функція належності розмитої множини X приймає значення 0.5, тобто $\mu_X(40) = 0.5$. Таке ж значення набуває функція належності розмитої множини Y, тобто $\mu_Y(40) = 0.5$, тоді як $\mu_Z(40) = 0$.



Приклад. На рисунку показана розмита множина $N =$ "багато грошей". Ця множина задана функцією типу s, де $A = [0,\ 1000000$ грн.$]$, $a = 1000$ грн., $c = 10000$ грн. Якщо вважати, що суми до 1000 грн. невеликі, то значення функції належності для таких сум дорівнює 0. Якщо суми, більші від 10000 грн. вважати великими, то значення функції належності завжди дорівнює одиниці. Зрозуміло, що таке визначення розмитої множини "багато грошей" є суб'єктивним і кожен може самостійно визначити її підбором параметрів *a* та *c* відповідної функції класу *s*.



Множину елементів універсуму *A*, для яких $\mu_X(a) > 0$, називають *носієм* розмитої множини *X* і позначають $\sup X = \{a \in A \mid \mu_X(a) > 0\}$.

Висотою розмитої множини *X* називають число $h(X) = \max\limits_{a \in A} \mu_X(a)$.

Приклад. Якщо множина $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ є універсумом розмитої множини $X = \frac{0.2}{1} + \frac{0.4}{2} + \frac{0.7}{4}$, то $\sup X = \{1, 2, 4\}$, а $h(X) = 0.7$.

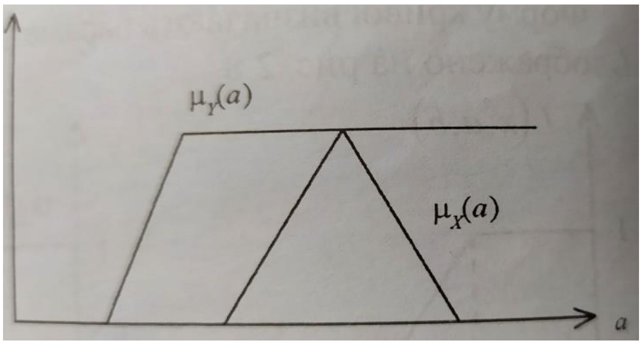
Розмиту множину *X* називають *нормальною*, якщо $h(X) = 1$. Якщо розмита множина *X* не є нормальною, то нормалізацією множини *X* можна побудувати нормальну множину X_N за правилом $\mu_{X_N}(a) = \frac{\mu_X(a)}{h(X)}$, де $h(X)$ - висота множини *X*.

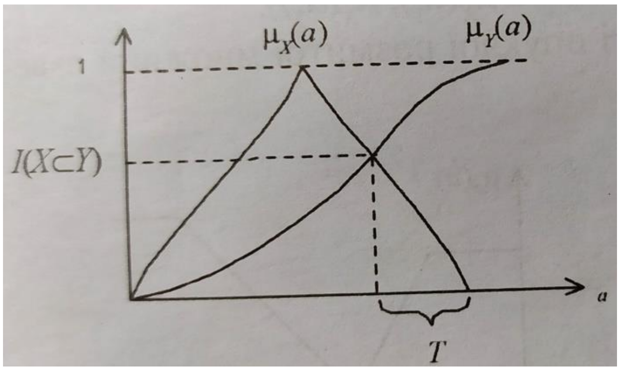
Приклад. Розмита множина $X = \frac{0.1}{2} + \frac{0.5}{4} + \frac{0.3}{6}$ з висотою $h(X) = 0.5$ нормалізацією перетворимо у множину $X_N = \frac{0.2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{0.6}{6}$.

Розмиту множину $X \subset A$ називають *порожньою* та позначають $X = \varnothing$, якщо $\mu_X(a) = 0$ для всіх $a \in A$. Множину $X \subset A$ називають підмножиною множини $Y \subset A$, якщо для кожного $a \in A$ виконана нерівність $\mu_X(a) \le \mu_Y(a)$. У такому разі розмита множина X *включена* в розмиту множину Y, що записують $X \subset Y$. На рисунку множина X включена в множину Y. Для розмитих множин X та Y, зображених на рисунку, нерівність $\mu_X(a) \le \mu_Y(a)$ для кожного $a \in A$ не виконана, тому, уведене означення підмножини незастосовне. Тому використовують поняття *ступеня включення* розмитих множин. Розмиту множину X називають *підмножиною ступеня I розмитої множини Y*, якщо

$$I(X \subset Y) = \min_{a \in T} \mu_Y(a), \text{ де } T = \{a \in A \mid \mu_X(a) < \mu_Y(a), \mu_X(a) > 0\}.$$

На рисунку зображено включення зі ступенем $I < 1$. Для множин, наведених на рисунку, ступінь включення дорівнює 1.





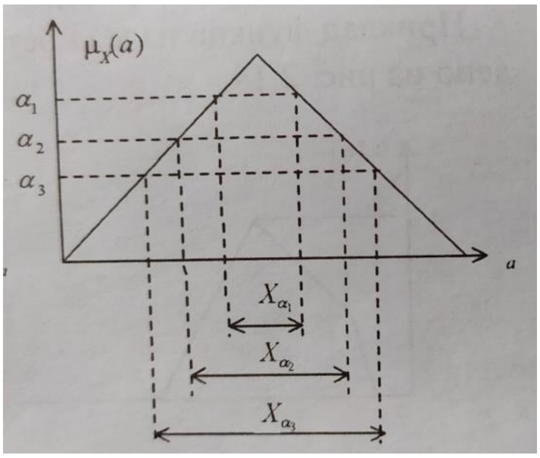
Розмиті множини $X \subset A$ та $Y \subset A$ називають *рівними*, якщо $\mu_X(a) = \mu_Y(a)$ для всіх $a \in A$, записують $X = Y$. Це означення не універсальне, оскільки не враховує ситуації, коли значення $\mu_X(a)$ та $\mu_Y(a)$ мало відрізняються між собою. Тому вводять поняття *ступеня рівності* розмитих множин X та Y, яке визначають співвідношенням

$$E(X = Y) = 1 - \max_{a \in T} \left| \mu_X(a) - \mu_Y(a) \right|, \text{ де } T = \{a \in A \mid \mu_X(a) \ne \mu_Y(a)\}$$

Множину $X_\alpha = \{a \in A \mid \mu_X(a) \ge \alpha\}$, $\alpha \in [0,1]$ називають *α*-перерізом розмитої множини $X \subset A$. Цю множину також задають характеристичною функцією

$$\chi_{X_\alpha}(a) = \begin{cases} 1, \mu_X(a) \ge \alpha, \\ 0, \mu_X(a) < \alpha \end{cases}$$

Множина X_α не розмита. Множина X_α для різних значень α показана на рисунку. Зазначимо, що якщо $\alpha_1 < \alpha_2$, то $X_{\alpha_1} \subset X_{\alpha_2}$.

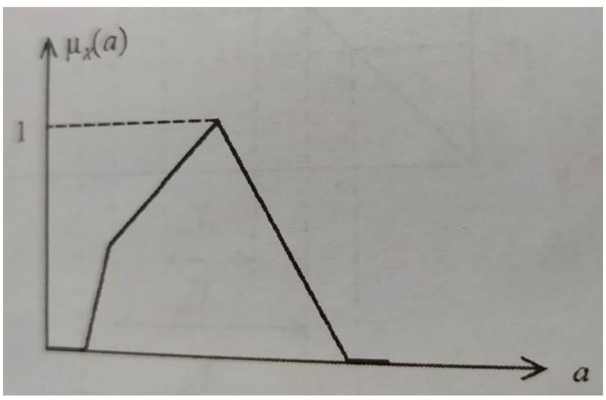


Приклад. Нехай розмита множина $X = \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.8}{8} + \frac{1}{10}$, $X \subset A$ для $A = \{1, \ldots, 10\}$. Тоді множини $X_0 = A = \{1, \ldots, 10\}$, $X_{0.1} = \{2, 4, 5, 8, 10\}$, $X_{0.3} = \{4, 5, 8, 10\}$, $X_{0.7} = \{5, 8, 10\}$, $X_{0.8} = \{8, 10\}$, $X_1 = \{10\}$,

Розмиту множину $X \subset R$ (R - множина дійсних чисел) називають *опуклою*, якщо для довільних $a_1, a_2 \in R$ та $\lambda \in [0,1]$ виконана нерівність

$$\mu_X\left(\lambda a_1 + (1-\lambda) a_2\right) \geq \min\left(\mu_X(a_1), \mu_X(a_2)\right)$$

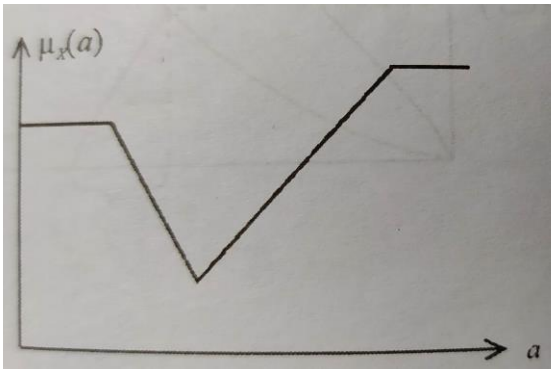
Приклад функції належності опуклої розмитої множини наведено на рисунку.



Розмиту множину $X \subset R$ називають *вгнутою*, якщо для довільних $a_1, a_2 \in R$ та $\lambda \in [0,1]$ виконана нерівність

$$\mu_X\left(\lambda a_1+(1-\lambda)a_2\right)\le \max\left(\mu_X(a_1),\mu_X(a_2)\right)$$

Приклад функції належності вгнутої розмитої множини наведено на рисунку.

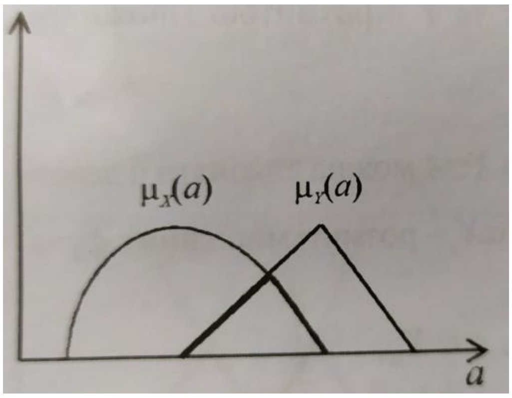


Операції на розмитих множинах

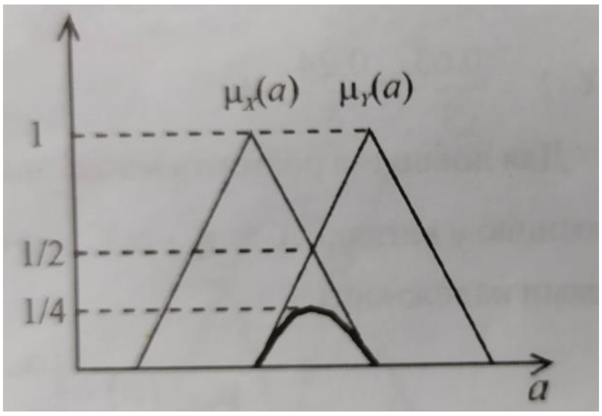
Перетин розмитих множин $X\subset A$ та $Y\subset A$ - це розмита множина $X\cap Y$ з функцією належності $\mu_{X\cap Y}(a)=\min\left(\mu_X(a),\mu_Y(a)\right)$, визначеною для всіх $a\in A$.

На рисунку графік функції належності перетину розмитих множин показано потовщеною лінією.

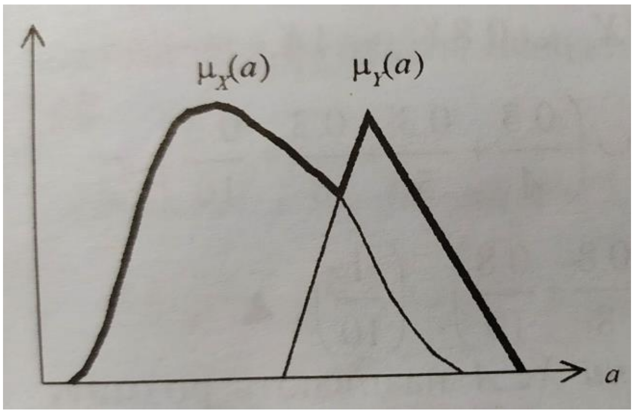
Перетин розмитих множин $X_1,X_2,\ldots,X_n\subset A$ задають функцією належності $\mu_{X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_n}(a)=\min\left(\mu_{X_1}(a),\mu_{X_2}(a),\ldots,\mu_{X_n}(a)\right)$, визначеною для всіх $a\in A$.



Алгебричним добутком розмитих множин $X \subset A$ та $Y \subset A$ називають розмиту множину $Z = X \cdot Y$, яку визначають як $Z = \{(a, \mu_X(a) \cdot \mu_Y(a)) \mid a \in A\}$. Алгебричний добуток множин *X* та *Y* показано потовщеною лінією на рисунку.



Об'єднанням розмитих множин $X \subset A$ та $Y \subset A$ називають розмиту множину $X \cup Y$ з функцією належності $\mu_{X \cup Y}(a) = \max(\mu_X(a), \mu_Y(a))$, визначеною для всіх $a \in A$. Результат виконання цієї операції зображено потовщеною лінією на рисунку.



Об'єднання розмитих множин $X_1, X_2, \ldots, X_n \subset A$ задають функцією належності $\mu_{X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n}(a) = \max(\mu_{X_1}(a), \mu_{X_2}(a), \ldots, \mu_{X_n}(a))$, визначеною для всіх $a \in A$.

Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ та $X = \frac{0.9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.6}{6}$, $Y = \frac{0.7}{3} + \frac{1}{5} + \frac{0.4}{6}$. За означенням перетину множин $X \cap Y = \frac{0.7}{3} + \frac{0.4}{6}$, а за означенням їхнього об'єднання - $X \cup Y = \frac{0.9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{0.6}{6}$. Алгебричний добуток множин X та Y є розмитою множиною $X \cdot Y = \frac{0.63}{3} + \frac{0.24}{6}$.

Для довільної розмитої множини $X \subset A$ можна виконати її декомпозицію у вигляді $X = \bigcup\limits_{\alpha \in [0,1]} \alpha X_\alpha$, де αX_α – розмиті множини з функціями належності

$$\mu_{\alpha X_\alpha}(a) = \begin{cases} \alpha, x \in X_\alpha, \\ 0, x \notin X_\alpha. \end{cases}$$

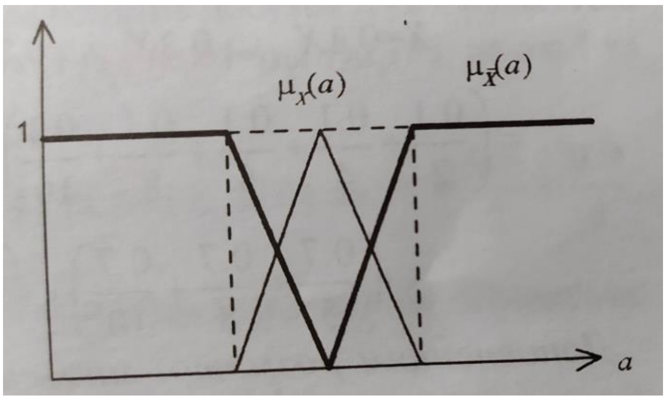
Приклад. Виконаємо декомпозицію розмитої множини

$$X = \frac{0.1}{2} + \frac{0.3}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.8}{8} + \frac{1}{10},$$

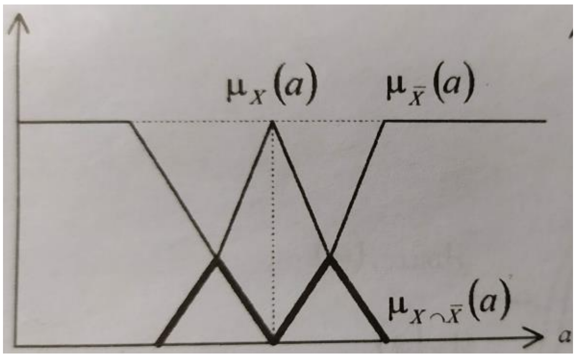
де $A = \{1, \ldots, 10\}$. Отримаємо

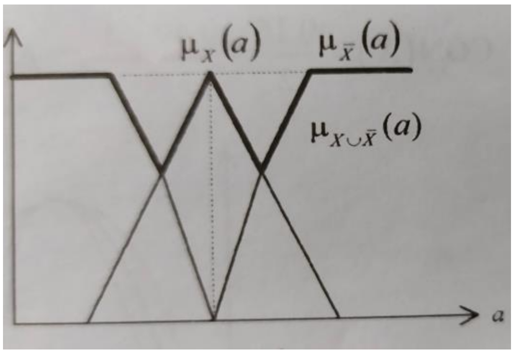
$$\begin{aligned} X &= 0.1X_{0.1} \cup 0.3X_{0.3} \cup 0.7X_{0.7} \cup 0.8X_{0.8} \cup 1X_{1.0} = \\ &= \left(\frac{0.1}{2} + \frac{0.1}{4} + \frac{0.1}{5} + \frac{0.1}{8} + \frac{0.1}{10}\right) \cup \left(\frac{0.3}{4} + \frac{0.3}{5} + \frac{0.3}{8} + \frac{0.3}{10}\right) \cup . \\ &\cup \left(\frac{0.7}{5} + \frac{0.7}{8} + \frac{0.7}{10}\right) \cup \left(\frac{0.8}{8} + \frac{0.8}{10}\right) \cup \left(\frac{1}{10}\right) \end{aligned}$$

Доповненням розмитої множини $X \subset A$ називають розмиту множину $\bar{X}$ з функцією належності $\mu_{\bar{X}}(a) = 1 - \mu_X(a)$, для кожного $a \in A$. Потовщеною лінією на рисунку показано функцію належності $\mu_{\bar{X}}(a)$ доповнення розмитої множини X.



Приклад. Нехай $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ та $X=\frac{0.3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.9}{6}$. За означенням $\overline{X}=\frac{1}{1}+\frac{0.7}{2}+\frac{1}{4}+\frac{0.3}{5}+\frac{0.1}{6}$. Зауважимо, що $X\cap\overline{X}=\frac{0.3}{2}+\frac{0.3}{5}+\frac{0.1}{6}\neq\varnothing$ та $X\cup\overline{X}=\frac{1}{1}+\frac{0.7}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{0.7}{5}+\frac{0.9}{6}$. Це показано потовщеними лініями на рисунку.





Декартовим добутком $X\times Y$ двох розмитих множин $X\subset A$ та $Y\subset B$ називають розмиту множину, визначену на парах елементів універсумів A та B з функцією належності $\mu_{X\times Y}(a,b)=\min\left(\mu_X(a),\mu_Y(b)\right)$, де $a\in A$ та $b\in B$. За іншим означенням декартів добуток $X\times Y$ є розмитою множиною з функцією належності $\mu_{X\times Y}(a,b)=\mu_X(a)\cdot\mu_Y(b)$, де $a\in A$ та $b\in B$.

Приклад. Нехай $A=\{2,4\}$ та $B=\{2,4,6\}$ та $X=\frac{0.5}{2}+\frac{0.9}{4}$, $Y=\frac{0.3}{2}+\frac{0.7}{4}+\frac{0.1}{6}$. Тоді, згідно з першим означенням отримуємо,

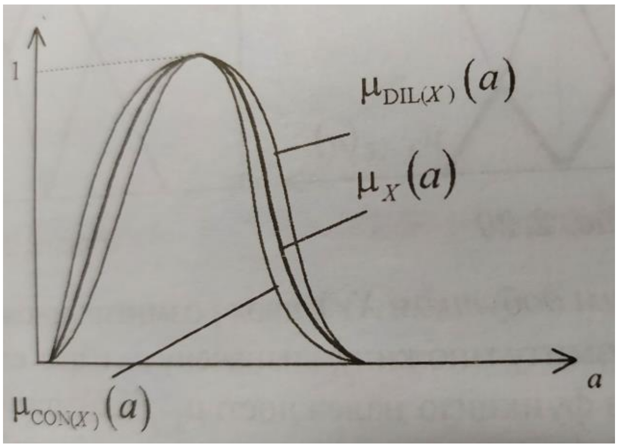
$$X\times Y=\frac{0.3}{(2,2)}+\frac{0.5}{(2,4)}+\frac{0.1}{(2,6)}+\frac{0.3}{(4,2)}+\frac{0.7}{(4,4)}+\frac{0.1}{(4,6)},$$

а згідно з другим

$$X\times Y=\frac{0.15}{(2,2)}+\frac{0.35}{(2,4)}+\frac{0.05}{(2,6)}+\frac{0.27}{(4,2)}+\frac{0.63}{(4,4)}+\frac{0.09}{(4,6)}.$$

Концентрацією розмитої множини $X \subset A$ (позначають CON(X)) задають функцією належності $\mu_{\mathrm{CON}(X)} = \left(\mu_X(a)\right)^2$, визначеною для всіх $a \in A$.

Розтягуванням розмитої множини $X \subset A$ (позначають DIL(X)) задають функцією належності $\mu_{\mathrm{DIL}(X)} = \sqrt{\mu_X(a)}$, визначеною для всіх $a \in A$. Функції належності концентрації та розтягування показані на рисунку.



Приклад. Нехай $A = \{1, 2, 3, 4\}$ та $X = \frac{0.4}{2} + \frac{0.7}{3} + \frac{1}{4}$. Тоді $\mathrm{CON}(X) = \frac{0.16}{2} + \frac{0.49}{3} + \frac{1}{4}$.