

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра математической статистики

**Отчёт по выполнению задания курса «Суперкомпьютерное  
моделирование и технологии»**

Дуань Бихэ

магистратура второго курса 616

Москва, 2024

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Метод фиктивных областей</b>	<b>10</b>
<b>3</b>	<b>Разностная схема решения</b>	<b>12</b>
<b>4</b>	<b>Метод минимальных невязок</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Краткое описание проделанной работы</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Краткое описание работы ОМР</b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>Таблица</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>Рисунок</b>	<b>19</b>

# 1 Постановка задачи

Требуется приближенно решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в криволинейной области. Задание необходимо выполнить на ПВС Московского университета IBM Polus.

В области  $D \subset R^2$ , ограниченной контуром  $\gamma$ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона:

$$-\Delta u = 1 \tag{1}$$

с граничными условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, x \in \gamma \tag{2}$$

Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению 1 в области  $D$  и краевому условию 2 на ее границе.

## 2 Метод фиктивных областей

Пусть область  $D$  принадлежит прямоугольнику  $\Pi = \{(x, y) \mid A.x < x < B.x, A.y < y < C.y\}$ .

Обозначим границу прямоугольника  $\Pi$  как  $\Gamma$ .

Разность множеств  $\hat{D} = \Pi \setminus \bar{D}$  называется фиктивной областью.

В прямоугольнике  $\Pi$  рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F(x, y) \quad (3)$$

где  $v(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma$ ,

$k(x, y)$  - кусочно-постоянный коэффициент:

$$k(x, y) = \{ 1, (x, y) \in D, \frac{1}{\varepsilon}, (x, y) \in \hat{D}. \quad (4)$$

и правая часть:

$$F(x, y) = \{ 1, (x, y) \in D, 0, (x, y) \in \hat{D}. \quad (5)$$

Требуется найти непрерывную в  $\Pi$  функцию  $v(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению 3 всюду в  $\Pi \setminus \gamma$ , равную нулю на границе  $\Gamma$  прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока:

$$W(x, y) = -k(x, y) \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (6)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$ .

Последнее означает, что в каждой точке  $(x_0, y_0) \in \gamma \cap \Pi$  должно выполняться равенство:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \in D} \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0), (x, y) \in \hat{D}} \frac{\partial v}{\partial \nu}. \quad (7)$$

Известно, что функция  $v(x, y)$  равномерно приближает решение  $u(x, y)$  задачи 1 в области  $D$ , а именно,

$$\max_{(x, y) \in \bar{D}} \|v(x, y) - u(x, y)\| \leq C\varepsilon, \quad C > 0 \quad (8)$$

Таким образом, решение новой задачи 3 позволяет получить решение исходной задачи 1 с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon > 0$ , решая при этом задачу Дирихле с кусочно-постоянным коэффициентом  $k(x, y)$ , но в прямоугольнике  $\Pi$ , содержащем исходную область, что существенно упрощает вычисления.

### 3 Разностная схема решения

Для замыкания прямоугольной области  $\Pi$  определим равномерную прямоугольную сетку  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ , где:

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A.x + ih_1, i = 0, \dots, M\}, \quad h_1 = \frac{B.x - A.x}{M}, \quad (9)$$

$$\bar{\omega}_2 = \{y_j = A.y + jh_2, j = 0, \dots, N\}, \quad h_2 = \frac{C.y - A.y}{N}. \quad (10)$$

Обозначим множество внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h$  как  $\omega_h$ .

Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, определённых на сетке  $\omega_h$ . Пусть  $w_{ij}$  обозначает значение сеточной функции  $H$  в узле сетки  $(x_i, y_j) \in \omega_h$ . Определим скалярное произведение и норму в пространстве сеточных функций  $H$ :

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}. \quad (11)$$

Метод конечных разностей предполагает замену дифференциальной задачи математической физики на конечно-разностную задачу вида:

$$Aw = B, \quad (12)$$

где  $A : H \rightarrow H$ . Дифференциальное уравнение задачи 3 в каждой внутренней точке сетки аппроксимируется разностным уравнением:

$$-\frac{1}{h_1} \left( a_{i+1,j} \frac{\omega_{i+1,j} - \omega_{ij}}{h_1} - a_{i,j} \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1,j}}{h_1} \right) - \frac{1}{h_2} \left( b_{i,j+1} \frac{\omega_{i,j+1} - \omega_{ij}}{h_2} - b_{i,j} \frac{\omega_{ij} - \omega_{i,j-1}}{h_2} \right) = F_{ij}, \quad (13)$$

при  $i = 1, \dots, M$  и  $j = 1, \dots, N$ .

Коэффициенты рассчитываются следующим образом:

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_j-h_2/2}^{y_j+h_2/2} k(x_i, y) dy, \quad b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_i-h_1/2}^{x_i+h_1/2} k(x, y_j) dx. \quad (14)$$

Правая часть разностного уравнения определяется как:

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2 \Pi_{ij}} \int_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy, \quad (15)$$

где  $\Pi_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}\}$ ,  $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N - 1$ .

Краевые условия Дирихле для задачи 3 аппроксимируются равенством:

$$w_{ij} = w(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma. \quad (16)$$

Узлы вычисляются как  $x_{i\pm 1/2} = x_i \pm 0.5h_1, y_{j\pm 1/2} = y_j \pm 0.5h_2$ .

Полученная система является линейной по отношению к неизвестным величинам и может быть представлена в виде  $Aw = B$  с самосопряженным и положительно определённым оператором  $A$ . Разностная схема линейна и имеет единственное решение для любой правой части.

Интегралы  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  вычисляются аналитически:

$$a_{ij} = h_2^{-1}l_{ij} + (1 - h_2^{-1}l_{ij})/\varepsilon, b_{ij} = h_1^{-1}l_{ij} + (1 - h_1^{-1}l_{ij})/\varepsilon, \quad (17)$$

где  $l_{ij}$  — длина части отрезка  $[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ , принадлежащей области  $D$ .

Аналогично для  $b_{ij}$ , где  $l_{ij}$  — длина части отрезка  $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ , принадлежащей области  $D$ .

Для вычисления  $l_{ij}$  проверяется пересечение соответствующего отрезка интегрирования с прямой, проходящей через вершины трапеции  $CB$ .

Правую часть разностной схемы считаем как  $F_{ij} = \frac{s}{h_1 h_2}$ , где  $s$  — площадь части прямоугольника с центром  $(x_i, y_j)$  и сторонами  $h_1 h_2$ , принадлежащей области  $D$ .

## 4 Метод минимальных невязок

Приближенное решение разностной схемы предлагается вычислять методом наименьших невязок. Этот метод позволяет получить последовательность сеточных функций  $\omega^{(k)} \in H$ , где  $k = 1, 2, \dots$ , которая сходится по норме пространства  $H$  к решению разностной схемы:

$$\|\omega - \omega^{(k)}\| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Начальное приближение  $\omega^{(0)}$  выберем равным нулю во всех точках сетки, кроме одной, расположенной в центре. В центральной точке установим значение  $= 1$ .

Итерация  $\omega^{(k+1)}$  вычисляется по предыдущей итерации  $\omega^{(k)}$  по формуле:

$$\omega_{ij}^{(k+1)} = \omega_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}. \quad (19)$$

где невязка определяется как  $r^{(k)} = A\omega^{(k)} - B$ , а итерационный параметр рассчитывается по формуле:

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|^2}. \quad (20)$$

В качестве критерия останова используется условие:

$$\|r^{(k)}\| < \delta, \quad (21)$$

где  $\delta > 0$  — некоторая положительная константа, задающая точность приближенного решения.

Для вычислений была выбрана  $\delta = 10^{-6}$ .



## 5 Краткое описание проделанной работы

$$-\frac{1}{h_1} \left( a_{i+1,j} \frac{w_{i+1,j} - w_{i,j}}{h_1} - a_{i,j} \frac{w_{i,j} - w_{i-1,j}}{h_1} \right) - \frac{1}{h_2} \left( b_{i,j+1} \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j}}{h_2} - b_{i,j} \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1}}{h_2} \right) = F_{i,j}, \quad (22)$$

при  $i = 1, \dots, M-1, j = 1, \dots, N-1$ .

Нетрудно видеть, что если отрезок, соединяющий точки  $P_{ij} = (x_{i-1/2}, y_{j-1/2})$  и  $P_{ij+1} = (x_{i-1/2}, y_{j+1/2})$ , целиком расположен в области  $D$ , то  $a_{ij} = 1$ . Если же указанный отрезок находится в фиктивной области  $\hat{D}$ , то  $a_{ij} = \frac{1}{\varepsilon}$ . В противном случае

$$a_{ij} = h_2^{-1} l_{ij} + \frac{1 - h_2^{-1} l_{ij}}{\varepsilon},$$

где  $l_{ij}$  — длина той части отрезка  $[P_{ij}, P_{ij+1}]$ , которая принадлежит области  $D$ . Аналогичным образом вычисляются коэффициенты  $b_{ij}$ .

Очевидно, правая часть схемы  $F_{ij}$  равна нулю при всех  $(i, j) : \Pi_{ij} \subset \hat{D}$ . Если  $\Pi_{ij} \subset D$ , то правую часть предлагается приближенно заменить значением  $f(x_i, y_j)$ . В противном случае, когда прямоугольник  $\Pi_{ij}$  содержит точки оригинальной области  $D$  и фиктивной области  $\hat{D}$ , величина  $F_{ij}$  может быть вычислена приближенно как произведение

$$(h_1 h_2)^{-1} S_{ij} f(x_i^*, y_j^*),$$

где  $(x_i^*, y_j^*)$  — любая точка пересечения  $\Pi_{ij} \cap D$ ,  $S_{ij} = \text{mes}(\Pi_{ij} \cap D)$  — площадь пересечения областей, при вычислении которой криволинейную часть границы можно заменить отрезком прямой.

Метод приближенного решения в формате разностей с использованием итерации минимальных невязок:

Итерационный процесс:

Начальное приближение  $w^{(0)}$  может быть выбрано произвольно, например, задано нулевым. Формула итерации:

$$w_{ij}^{(k+1)} = w_{ij}^{(k)} - t_{k+1} \cdot r_{ij}^{(k)}$$

где  $r^{(k)} = Aw^{(k)} - B$  — невязка, показывающая ошибку текущего решения.

Итерационный параметр:

Итерационный параметр  $t_{k+1}$  рассчитывается по формуле:

$$t_{k+1} = \frac{(r^{(k)}, r^{(k)})}{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}$$

Этот параметр регулирует шаг, основываясь на текущем внутреннем произведении невязки, что обеспечивает эффективное обновление на каждом шаге.

Условие сходимости:

Процесс итерации завершается при выполнении условия:

$$\|w^{(k+1)} - w^{(k)}\|_E < \delta$$

где  $\delta$  — заданное положительное число, используемое для контроля точности итерационного метода, чтобы изменение в решении оставалось в допустимых пределах.

Сходимость:

Используя этот итерационный метод, последовательность  $w^{(k)}$  постепенно сходится к настоящему решению  $w$  в норме пространства  $H$ , то есть  $w - w^{(k)} \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Этот метод особенно эффективен для численного решения линейных систем при решении задач с ЧДУ (частными дифференциальными уравнениями).

## 6 Краткое описание работы OMP

В данной программе реализован метод итерационного решения для вычисления значений  $u_{ij}$  с использованием параллелизма OpenMP. Основные шаги работы заключаются в следующем:

1. **Инициализация переменных:** Создаются необходимые векторы для хранения значений  $r$  и  $Ar$ , а также переменные для хранения норм и коэффициентов.
2. **Параллельное вычисление:** Используется директива `pragma omp parallel` для распараллеливания циклов. Каждый поток выполняет вычисления в своем локальном контексте, что позволяет уменьшить время выполнения программы.
3. **Критическая секция:** Для сбора результатов, таких как локальные суммы  $R$  и  $AR$ , используется `pragma omp critical`, чтобы избежать конфликтов при одновременной записи в общие переменные.
4. **Обновление значений:** После завершения параллельных вычислений значения  $u$  обновляются на основе вычисленных ошибок  $r$ .
5. **Условие завершения:** Итерации продолжаются до тех пор, пока норма не станет меньше заданной точности.

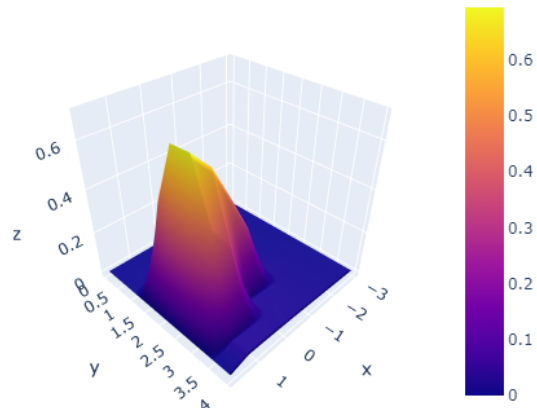
## 7 Таблица

Число итерации	Число нитей	Размер сетки	Время (s)	Ускорение
6335	Последовательный вариант	10 × 10	6	0
67735	Последовательный вариант	20 × 20	15	0
258732	Последовательный вариант	40 × 40	153	0
321942	4	40 × 40	87	0
327626	16	40 × 40	86	0
460124	Последовательный вариант	80 × 90	508	0
210720	2	80 × 90	357	0.70
212766	4	80 × 90	300	0.59
210494	8	80 × 90	249	0.490
207520	16	80 × 90	250	0.492
236473	Последовательный вариант	160 × 180	1498	0
199641	4	160 × 180	1381	0.92
187315	8	160 × 180	1241	0.82
205891	16	160 × 180	764	0.51
213329	32	160 × 180	776	0.518

Таблица 1: Таблица с результатами расчётов на разном числе нитей и размерах сетки.

## 8 Рисунок

Function  $w(x,y)$  - Transposed



Function  $w(x,y)$  - Transposed Heatmap

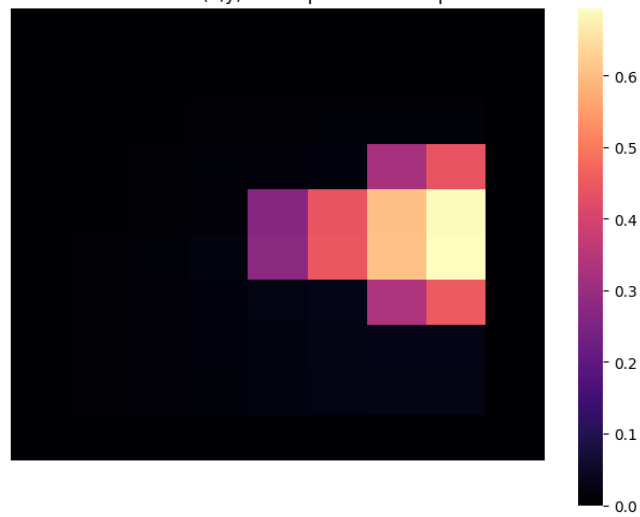
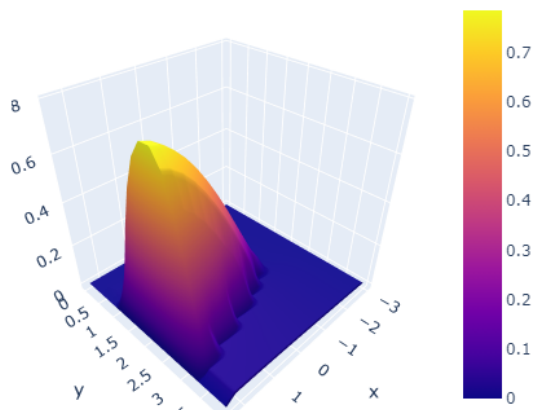


Рис. 1: 10\*10

Function  $w(x,y)$  - Transposed



Function  $w(x,y)$  - Transposed Heatmap

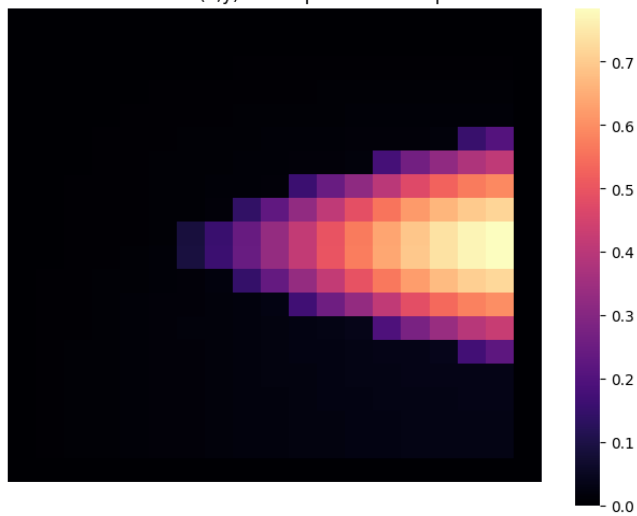
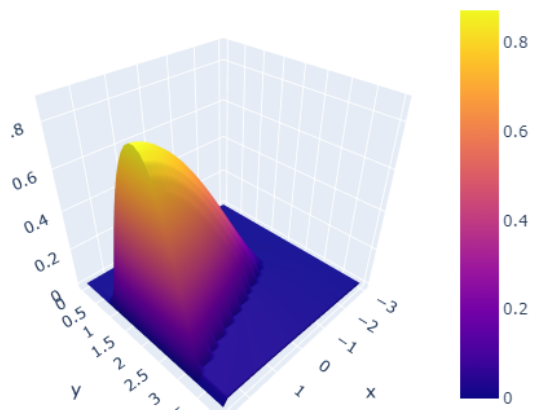


Рис. 2: 20\*20

Function  $w(x,y)$  - Transposed



Function  $w(x,y)$  - Transposed Heatmap

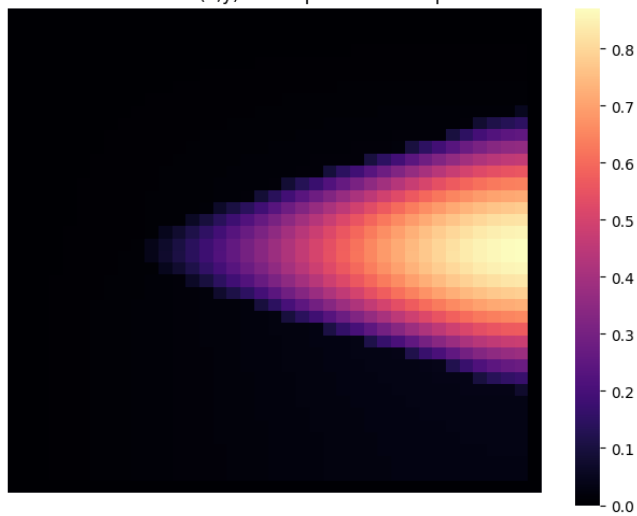
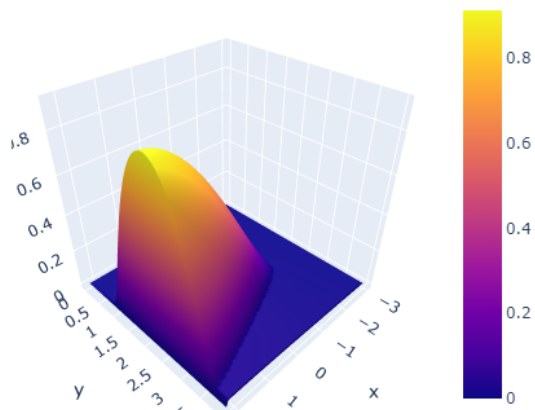


Рис. 3: 40\*40

Function  $w(x,y)$  - Transposed



Function  $w(x,y)$  - Transposed Heatmap

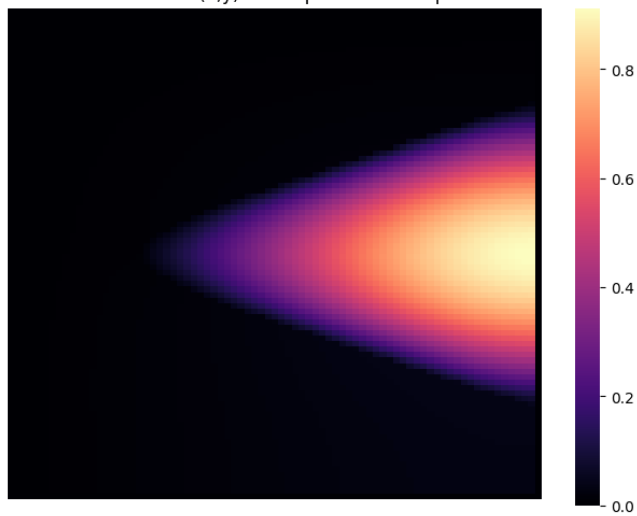
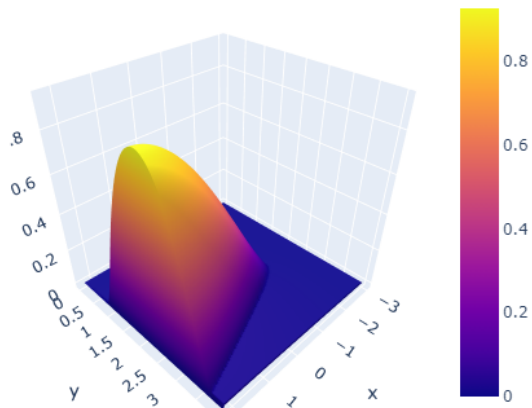


Рис. 4: 80\*90



Function  $w(x,y)$  - Transposed



Function  $w(x,y)$  - Transposed Heatmap

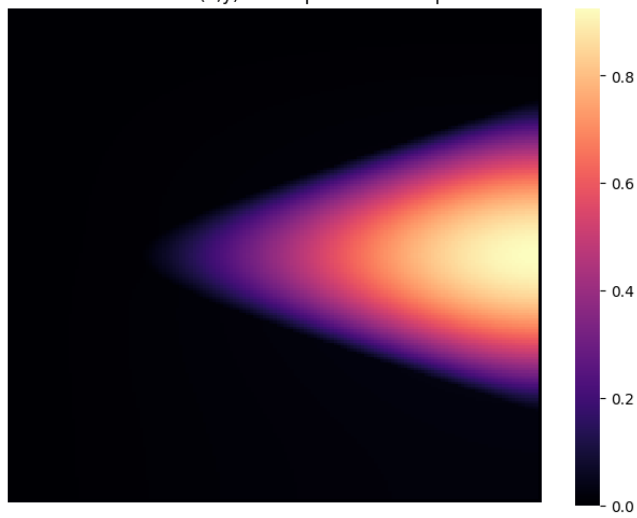


Рис. 5: 160\*180

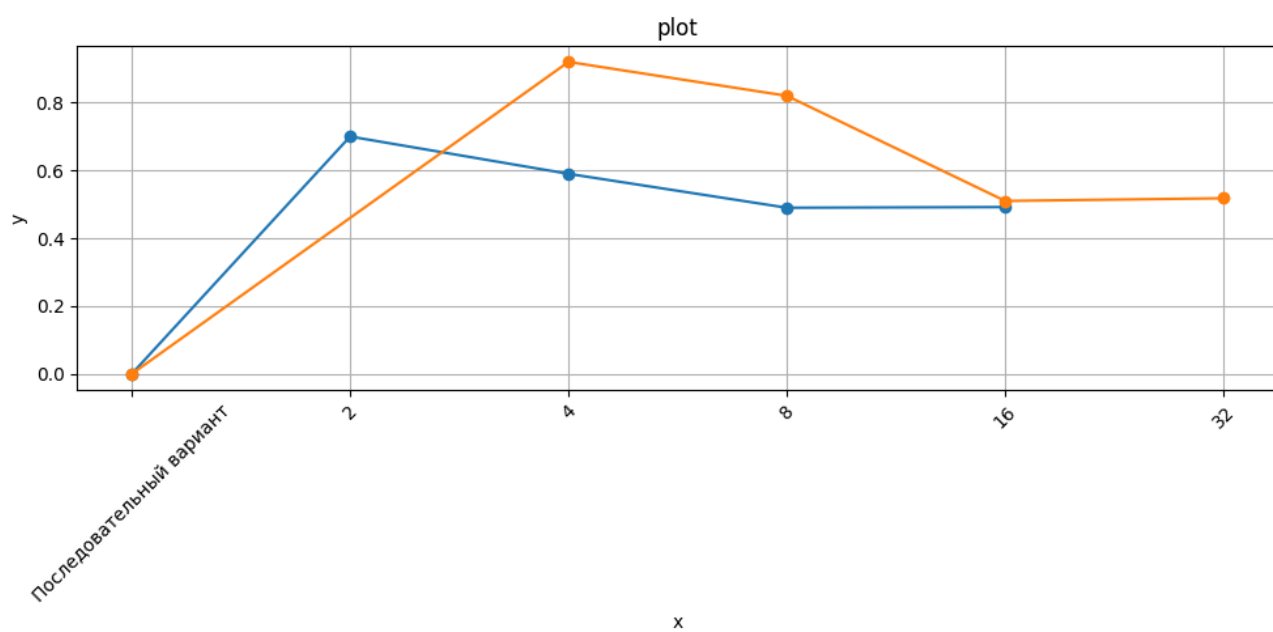


Рис. 6: ускорение