

1 задание

а) Экспоненциальное семейство распределений, у которых плотность:

$$p(x|\theta) = \frac{1}{z(\theta)} h(x) \exp(\theta^T u(x))$$

Статистика $T(x)$ называется достаточной относительнопараметра θ , если $p(x|T(x)=t, \theta) = p(x|T(x)=t)$ б) x_1, \dots, x_n — НОЗ из $N(m, \sigma^2)$

$$p(x|\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{(x_1-m)^2}{2\sigma^2}\right) \dots \exp\left(-\frac{(x_n-m)^2}{2\sigma^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2} + \frac{m \sum x_i}{\sigma^2} - \frac{nm^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{z(\theta)} h(x) \exp(\theta^T u(x))$$

$$\theta = \left(\frac{m}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2}\right), u = \left(\sum x_i, \sum x_i^2\right) \quad \text{Достаточная статистика: } T(x) = \begin{pmatrix} \sum x_i \\ \sum x_i^2 \end{pmatrix} = u(x)$$

$$б) \xi \sim N(m, \sigma^2), p(x) = \frac{1}{z(\theta)} h(x) \exp(\theta^T u(x)), z(\theta) = \sqrt{-\frac{\pi}{\theta_2}} e^{4\theta_1^2}$$

 $u_1(x) = x, u_2(x) = x^2$ — естественные

$$E \ddot{u} \ddot{u}^T = D \nabla \log z(\theta) \Rightarrow E \ddot{u}_1^2 = D \xi^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta_2^2} \left(\frac{1}{2} \log\left(-\frac{\pi}{\theta_2}\right) - \frac{\theta_1^2}{4\theta_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\theta_2^2} - \frac{\theta_1^2}{2\theta_2^3} = 2\sigma^4 + 4m^2\sigma^2 \Rightarrow D \xi^2 = 2\sigma^4 + 4m^2\sigma^2$$

2 задание

$$p(y, w|x) = p(w)p(y|x, w)$$

$$p(y_{\text{test}}|x_{\text{test}}, x_{\text{train}}, y_{\text{train}}) = \int p(y_{\text{test}}, w|x_{\text{test}}, x_{\text{train}}, y_{\text{train}}) dw = \int p(y_{\text{test}}|\theta, x_{\text{test}}, x_{\text{train}}, y_{\text{train}}) dw$$

$$p(w|x_{\text{test}}, x_{\text{train}}, y_{\text{train}}) dw = \int p(y_{\text{test}}|w, x_{\text{test}}) dw$$

$$p(w|x_{\text{train}}, y_{\text{train}}) dw$$

или можно считать θ x_{test} не имеет смысла для y_{test}

Задача 3 $n_1 = 10$, $n_2 = 10000$
 $k_1 = 2$, $k_2 = 5100$

а) $q(p_1) = q(p_2) \sim N(0,5; 0,1^2)$ на промежутке $[0;1]$
тогда правдоподобие: $p_1^2 (1-p_2)^8 p_2^{5100} (1-p_2)^{4900}$