Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра интеллектуальных систем

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Математическая физика, компьютерные технологии и математическое моделирование в экономике

АППРОКСИМАЦИИ ГРАДИЕНТА С ПОМОЩЬЮ ОРАКУЛА НУЛЕВОГО ПОРЯДКА И ТЕХНИКИ ЗАПОМИНАНИЯ

(бакалаврская работа)

Студент:
Богданов Александр Иванович

(подпись студента)

Научный руководитель:
Безносиков Александр Николаевич,
канд. физ.-мат. наук

(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)***:**

(подпись консультанта)

Москва 2024

Аннотация

В данной работе рассматривается проблема оптимизации «черного ящика». В такой постановке задачи нет доступа к градиенту целевой функции, поэтому его необходимо каким-либо образом оценить. Предлагается новый способ аппроксимации градиента `JAGUAR`, который запоминает информацию из предыдущих итераций и требует $\mathcal{O}(1)$ обращений к оракулу. Эта аппроксимация адаптирована для алгоритма Франка-Вульфа, в частности доказана сходимость для выпуклой постановки задачи. Анализируются как детерминированная постановка задачи минимизации, так и стохастическая на выпуклом ограниченном множестве Q с шумом в оракуле нулевого порядка, такая постановка довольно непопулярна в литературе. Но было доказано, что `JAGUAR` является робастной и в таком случае. Проведенные эксперименты показывают, что `JAGUAR` превосходит уже известные в литературе методы оценки градиента.

Содержание

1 Введение

Методы без проекций, в частности метод условного градиента, известный как алгоритм Франка-Вульфа [1], широко используются для решения различных задач оптимизации. В последнее десятилетие методы условного градиента вызывают все больший интерес в сообществе машинного обучения, поскольку во многих случаях вычислительно дешевле решить линейную задачу минимизации на подходящем выпуклом множестве (например, на l_p-шарах или симплексе Δ_d), чем сделать проекцию на него [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

В оригинальной работе Франка-Вульфа [1] авторы использовали истинный градиент в своем алгоритме, однако современные задачи машинного обучения и искусственного интеллекта требуют использования различных оценок градиента, это связано со значительным увеличением размера датасетов и сложности современных моделей. Примерами таких градиентных оценок в алгоритмах типа Франка-Вульфа являются координатные методы [9, 10, 11] и стохастическая аппроксимация градиента по батчам [12, 13, 14].

Но иногда встречаются еще более сложные ситуации, когда нельзя вычислить градиент в общем случае, потому что он недоступен по разным причинам, например, целевая функция не дифференцируема или вычисление градиента вычислительно сложно [15, 16, 17, 18, 19]. Такая постановка называется оптимизацией «черного ящика» [20], и в этом случае необходимо использовать методы оценки градиента нулевого порядка через конечные разности целевой функции (иногда с дополнительным шумом) для аппроксимации градиента [21, 22].

За последние годы исследований по теме оптимизации «черного ящика» можно выделить два основных метода аппроксимации градиента с помощью конечных разностей. Первый оценивает градиент в m координатах [23, 24, 25]:

$$\frac{d}{m}\sum_{i\in I}\frac{f(x+\tau e_i)-f(x-\tau e_i)}{2\tau}e_i, \tag{1}$$

где $I \subset \overline{1,d} : |I| = m$, e_i – вектор из стандартного базиса в $\mathbb{R}^d$ и τ – параметр сглаживания. Эта конечная разность аппроксимирует градиент в m координатах и требует $\mathcal{O}(m)$ вызовов оракула. Если m мало, то такая оценка будет неточной, если m велико, то на каждой итерации нужно делать много обращений к оракулу нулевого порядка. В случае $m = d$ этот метод называется *полной аппроксимацией.*

Второй использует в конечной разности не стандартный базис, а случайные вектора e [17, 22, 26, 27]:

$$d\frac{f(x+\tau e) - f(x-\tau e)}{2\tau}e, \tag{2}$$

где e может быть равномерно распределено на l_p-сфере $RS_p^d(1)$, тогда эта схема называется *l_p-сглаживание.* В последних работах авторы обычно используют $p = 1$ [28, 29] или $p = 2$ [30, 31, 32]. Кроме того, e может быть взято из нормального распределения с нулевым средним и единичной ковариационной матрицей [17].

Аппроксимации (1) и (2) имеют очень большую дисперсию или требуют большого количества обращений к нулевому оракулу, поэтому возникает необходимость как-то уменьшить ошибку аппроксимации, не увеличивая при этом количество обращений к нулевому оракулу. В стохастической оптимизации довольно широко используется метод запоминания информации с предыдущих итераций, например, в SVRG [33], SAGA [34], SARAH [35] и SEGA [36] авторы предлагают запоминать градиент с предыдущих итераций для лучшей сходимости метода. В данной работе используется эта техника в задаче оптимизации «черного ящика» и запоминаются аппроксимации градиента из предыдущих итераций для уменьшения размера батча без существенной потери точности. Ставятся следующие вопросы:

- *Можно ли создать метод нулевого порядка, который будет использовать информацию из предыдущих итераций и аппроксимировать истинный градиент так же точно, как и полная аппроксимация* (1), *но потребует* $\mathcal{O}(1)$ *вызовов оракула нулевого порядка?*

- *Можно ли реализовать этот метод аппроксимации в алгоритме*

Франка-Вульфа для детерминированных и стохастических постановок задач минимизации?

- *Является ли оценка сходимости этого метода лучше, чем для разностных схем* (1) *и* (2)*?*

В более реалистичной постановке оракул нулевого порядка возвращает зашумленное значение целевой функции, то есть выдает не $f(x)$, а $f(x) + \delta(x)$. В литературе рассматриваются различные виды шума $\delta(\cdot)$: он может быть стохастическим [26, 32, 37, 38] или детерминированным [39, 40, 41, 42, 43, 44]. Поэтому возникает еще один исследовательский вопрос:

- *Как различные типы шума влияют на теоретические гарантии и практические результаты для предложенных подходов?*

В соответствии с вопросами исследования, вклад может быть обобщен следующим образом:

- Представлен метод `JAGUAR`, который аппроксимирует истинный градиент целевой функции $\nabla f(x)$ в точке x. Использование памяти предыдущих итераций позволяет достичь точности, близкой к полной аппроксимации (1), но `JAGUAR` требует не $\mathcal{O}(d)$, а $\mathcal{O}(1)$ обращений к оракулу нулевого порядка. l_p-сглаживание (2) также требует $\mathcal{O}(1)$ обращения к оракулу, но поскольку в нем нет техники памяти, этот метод имеет большую дисперсию и не является робастным. (см. раздел 3.1)

- Аппроксимация `JAGUAR` внедрена в алгоритм Франка-Вульфа для стохастических и детерминированных задач минимизации и доказана сходимость в обоих случаях (см. раздел 3.2).

- Проведены вычислительные эксперименты сравнения аппроксимации `JAGUAR` с *полной аппроксимаций* (1) и l_2-*сглаживанием* (2) на различных задачах минимизации (см. раздел 4).

В литераторе некоторые авторы считают координатные методы [9] тоже градиентной аппроксимаций, но эти методы используют истинный градиент целевой функции f, поэтому ее нельзя напрямую применить к оптимизации «черного ящика».

Метод l_p-сглаживания не требует дифференцируемости целевой функции, поскольку рассматривает сглаженную версию функции f вида $f_\gamma(x) = \mathbb{E}_e\left[f(x+\gamma e)\right]$. В общем случае метод l_p-сглаживания может аппроксимировать градиент с помощью $\mathcal{O}(1)$ вызовов оракула [43], но он может быть не робастным в постановке Франка-Вульфа, поскольку в [45] авторам приходится собирать большой батч направлений e для достижения сходимости. Отмечается, что в [45] рассматривается детерминированный шум.

Полная аппроксимация также используется в литературе [46, 47, 48], но на каждой итерации необходимо делать $\mathcal{O}(d)$ вызовов оракула, а поскольку в современных приложениях d огромно, это может быть проблемой. Также этот метод требует гладкости целевой функции f.

В Таблице 1 приведено сравнение постановок задач, методов аппроксимации и результатов для них.

Метод	Постановка		Шум		Размер батча	Аппроксимация
	Гладкая	Нулевой порядок	Стохастический	Детерминированный		
ZO-SCGS [45]	✗	✓	✗	✓	$\mathcal{O}\left(1/\varepsilon^2\right)$	*l_2-сглаживание* (2)
FZFW [47]	✓	✓	✗	✗	$\mathcal{O}\left(\sqrt{d}\right)$	*полная аппроксимация* (1)
DZOFW [46]	✓	✓	✗	✗	$\mathcal{O}(d)$	*полная аппроксимация* (1)
MOST-FW [48]	✓	✓	✗	✗	$\mathcal{O}(d)$	*полная аппроксимация* (1)
BCFW [9]	✓	✗	✗	✗	$\mathcal{O}(1)$	координатный
SSFW [49]	✓	✗	✗	✗	$\mathcal{O}(1)$	координатный
FW с `JAGUAR` (эта работа)	✓	✓	✓	✓	$\mathcal{O}(1)$	`JAGUAR` (Алгоритмы 1 и 2)

Таблица 1: Сравнение различных методов нулевого порядка и координатных методов алгоритма Франка-Вульфа.

2 Постановка задачи

В данной работе рассматривается оптимизационная задача:

$$f(x^*) := \min_{x \in Q} \ f(x), \text{ где } Q \subseteq \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

2.1 Детерминированный случай

Предполагается, что доступ есть только к оракулу нулевого порядка, и он возвращает зашумленное значение функции $f(x)$:

$$f_\delta(x) := f(x) + \delta(x).$$

На функцию и шум накладываются классические ограничения необходимые для анализа:

- Функция $f(x)$ L-гладкая на множестве Q, т.е.

$$\exists L > 0 : \forall x, y \in Q \hookrightarrow \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L \|x - y\|. \tag{4}$$

- Шум $\delta(x)$ оракула ограничен, т.е.

$$\exists \Delta > 0 : \forall x \in Q \hookrightarrow |\delta(x)|^2 \leq \Delta^2. \tag{5}$$

2.2 Стохастический случай

В этом разделе рассматривается стохастическая версия задачи (3):

$$f(x) := \mathbb{E}_{\xi \sim \pi} \left[f(x, \xi) \right], \tag{6}$$

где ξ – случайный вектор из обычно неизвестного распределения π.

Снова предполагается, что нет доступа к истинному значению градиента $\nabla f(x, \xi)$, и оракул нулевого порядка возвращает зашумленное значение функции $f(x, \xi)$:

$$f_\delta(x, \xi) := f(x, \xi) + \delta(x, \xi).$$

На функцию и шум также накладываются классические ограничения необходимые для анализа:

- Функция $f(x,\xi)$ $L(\xi)$-гладкая на множестве Q, т.е.

$$\forall x, y \in Q \hookrightarrow \|\nabla f(x,\xi) - \nabla f(y,\xi)\| \le L(\xi)\,\|x-y\|\,, \tag{7}$$

  где $L^2 := \mathbb{E}\left[L(\xi)^2\right]$.

  С учетом этого предположения, функция $f(x)$ является L-гладкой на множестве Q:

$$\begin{aligned}\forall x, y \in Q \hookrightarrow \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2 &= \|\mathbb{E}\left[\nabla f(x,\xi) - \nabla f(y,\xi)\right]\|^2 \\ &\le \mathbb{E}\left[\|\nabla f(x,\xi) - \nabla f(y,\xi)\|^2\right] \\ &\le L^2\,\|x-y\|^2\,.\end{aligned}$$

- Шум оракула ограничен некоторой константой $\Delta > 0$, т.е.

$$\exists \Delta > 0 : \forall x \in Q \hookrightarrow \mathbb{E}\left[|\delta(x,\xi)|^2\right] \le \Delta^2. \tag{8}$$

  С учетом этого предположения, если определить $\delta(x) := \mathbb{E}\left[\delta(x,\xi)\right]$, то $|\delta(x)|^2 \le \Delta^2$, так как $|\delta(x)|^2 = |\mathbb{E}\left[\delta(x,\xi)\right]|^2 \le \mathbb{E}\left[|\delta(x,\xi)|^2\right] \le \Delta^2$.

- Второй момент $\nabla f(x,\xi)$ ограничен, т.е.

$$\exists \sigma_\nabla \ge 0 : \forall x \in Q \hookrightarrow \mathbb{E}\left[\|\nabla f(x,\xi) - \nabla f(x)\|^2\right] \le \sigma_\nabla^2. \tag{9}$$

- Второй момент $f(x,\xi)$ ограничен, т.е.

$$\exists \sigma_f \ge 0 : \forall x \in Q \hookrightarrow \mathbb{E}\left[|f(x,\xi) - f(x)|^2\right] \le \sigma_f^2. \tag{10}$$

3 Основные результаты

3.1 Аппрокимация градиента JAGUAR

Выше были рассмотрены методы аппроксимации градиента с помощью конечных разностей (1) и (2). В этом разделе представлены новые методы оценки градиента `JAGUAR`: `JAGUAR-d` для детерминированной и `JAGUAR-s` для стохастической задач, основанные на уже исследованных методах и использующие память предыдущих итераций.

Идея метода `JAGUAR` схожа с известными методами уменьшения дисперсии, такими как SAGA [34] или SVRG [33], но эти методы используют данную технику к батчам. Однако при оптимизации нулевого порядка нужно аппроксимировать градиент, поэтому необходимо применить технику уменьшения дисперсии к координатам [36]. Метод `JAGUAR` использует память некоторых координат предыдущих градиентов, а не запоминает градиенты по батчам в прошлых точках. В литературе уже есть работы, сочетающие оптимизацию нулевого порядка и уменьшение дисперсии, но суть их в том, что они меняют вычисление градиента на безградиентную аппроксимацию (1) в пакетных алгоритмах с уменьшением дисперсии, таких как SVRG или SPIDER [50], а не используют технику уменьшения дисперсии для координат, как в алгоритме 1.

Для детерминированного алгоритма аппроксимации используется разностная схема:

$$\widetilde{\nabla}_i f_\delta(x) := \frac{f_\delta(x + \tau e_i) - f_\delta(x - \tau e_i)}{2\tau} e_i, \tag{11}$$

где e_i – вектор из стандартного базиса в $\mathbb{R}^d$. Также введем обозначение, которое потребуется для анализа:

$$\widetilde{\nabla} f_\delta(x) := \sum_{i=1}^{d} \frac{f_\delta(x + \tau e_i) - f_\delta(x - \tau e_i)}{2\tau} e_i.$$

Сам алгоритм аппроксимации градиента для детерминированной задачи `JAGUAR-d` в точке x выглядит следующим образом (алгоритм 1):

Алгоритм 1 `JAGUAR-d`

Вход: $x \in Q$; $h \in \mathbb{R}^d$; $\tau \in \mathbb{R}$

Сэмплируем $i \in \overline{1, d}$ равномерно и независимо

Считаем $\widetilde{\nabla}_i f_\delta(x) = \frac{f_\delta(x+\tau e_i) - f_\delta(x-\tau e_i)}{2\tau} e_i$

$h = h - \langle h, e_i \rangle e_i + \widetilde{\nabla}_i f_\delta(x)$

Выход: h

В стохастической постановке (3) + (6) есть две версии разностных схем (11). Первая называется двухточечной обратной связью (ДОС) [26, 31, 32, 51, 52], в данном случае аппроксимация градиента функции $f(x, \xi)$:

$$\widetilde{\nabla}_i f_\delta(x, \xi) := \frac{f_\delta(x + \tau e_i, \xi) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi)}{2\tau} e_i. \tag{12}$$

Вторая называется одноточечной обратной связью (ООС) [30, 38, 53, 54, 55], в этом случае аппроксимация градиента функции $f(x, \xi)$:

$$\widetilde{\nabla}_i f_\delta(x, \xi^\pm) := \frac{f_\delta(x + \tau e_i, \xi^+) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi^-)}{2\tau} e_i. \tag{13}$$

Для дальнейшего упрощения выкладок считается, что в случае двухточечной обратной связи (12) $\xi^+ = \xi^- = \xi$. Ключевое различие между приближениями (12) и (13) заключается в том, что схема (12) более точна, но ее сложно реализовать на практике, так как для этого необходимо получить одну и ту же реализацию ξ в двух разных точках $x + \tau e$ и $x - \tau e$, поэтому схема (13) более интересна с практической точки зрения. Введем обозначение, которое потребуется для дальнейшего анализа:

$$\widetilde{\nabla} f_\delta \left(x, \xi^\pm_{\overline{1,d}} \right) := \sum_{i=1}^{d} \frac{f_\delta(x + \tau e_i, \xi_i^+) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi_i^-)}{2\tau} e_i.$$

Алгоритм аппроксимации градиента для стохастической задачи `JAGUAR-s` в точке x представлен ниже (алгоритм 2):

Алгоритм 2 `JAGUAR-s`

1: **Вход:** $x \in Q$; $h, g \in \mathbb{R}^d$; $\tau \in \mathbb{R}$; $\eta \in [0, 1]$

2: Сэмплируем $i \in \overline{1, d}$ равномерно и независимо

3: Сэмплируем ξ: ξ^+ и ξ^- независимо (в случае ДОС $\xi^+ = \xi^-$)

4: Считаем $\widetilde{\nabla}_i f_\delta(x, \xi^\pm) = \frac{f_\delta(x+\tau e_i, \xi^+) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi^-)}{2\tau} e_i$

5: $\rho = h - d \cdot \langle h, e_i \rangle e_i + d \cdot \widetilde{\nabla}_i f_\delta(x, \xi^+, \xi^-)$

6: $h = h - \langle h, e_i \rangle e_i + \widetilde{\nabla}_i f_\delta(x, \xi^+, \xi^-)$

7: $g = (1 - \eta) g + \eta \rho$

8: **Выход:** g, h

Алгоритм `JAGUAR-s` (алгоритм 2) аналогичен `JAGUAR-d` (алгоритм 1), но в строках 5 и 7 используются части SEGA [36] и моментума [56] для сходимости в стохастическом случае.

В `JAGUAR-s` необходима часть SEGA [36] ρ, поскольку важно свойство «несмещенности» (см. доказательство Леммы 4). Ее использование ухудшает оценки в d раз по сравнению с использованием h в качестве градиентной аппроксимации (см. Леммы 2 и 3).

В `JAGUAR-s` необходим моментум [56] η, поскольку при оценке выражения $\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla} f_\delta(x, \xi^\pm_{\overline{1,d}}) - \nabla f(x)\right\|^2\right]$ в стохастическом случае появляются выражения, содержащие σ^2_∇ и σ^2_f, и они мешают сходимости (см. Лемму 1).

3.1.1 Использование `JAGUAR`

Алгоритм аппроксимации градиента `JAGUAR-d` может быть использован с любыми итерационными схемами, которые на каждом шаге k возвращают новую точку x^k. Используя эти точки, получается последовательность h^k, которая в некотором смысле служит памятью компонент градиента из прошлых моментов. Поэтому в методах инкрементальной оптимизации имеет смысл использовать h^k в качестве оценки истинного градиента $\nabla f(x^k)$. Используя следующую унифицированную схему, можно описать такой итерационный алгоритм, решающий задачу (3) (алгоритм 3):

Алгоритм 3 Итерационный алгоритм с использованием `JAGUAR-d`

Вход: `Proc`; $x^0 \in Q$; $h^0 \in \mathbb{R}^d$; $\tau \in \mathbb{R}$
for $k = 0, 1, 2, ..., N$ **do**
    $h^{k+1} = \texttt{JAGUAR-d}(x^k, h^k, \tau)$
    $x^{k+1} = \texttt{Proc}(x^k, \texttt{grad\_est} = h^{k+1})$
end for
Выход: x^{N+1}

Использование алгоритма аппроксимации `JAGUAR-s` похоже на использование алгоритма `JAGUAR-d`, но в качестве оценки градиента используется g^k. Итерационный алгоритм, решающий задачу (3) + (6) представлен ниже (алгоритм 4):

Алгоритм 4 Итерационный алгоритм с использованием `JAGUAR-s`

Вход: `Proc`; $x^0 \in Q$; $h^0, g^0 \in \mathbb{R}^d$; $\tau \in \mathbb{R}$; $\eta_k \in [0, 1]$
for $k = 0, 1, 2, ..., N$ **do**
    $h^{k+1}, g^{k+1} = \texttt{JAGUAR-s}(x^k, h^k, g^k, \tau, \eta_k)$
    $x^{k+1} = \texttt{Proc}(x^k, \texttt{grad\_est} = g^{k+1})$
end for
Выход: x^{N+1}

В алгоритмах 3 и 4, $\texttt{Proc}(x^k, \texttt{grad\_est})$ – это некоторая последовательность действий, которая переводит x^k в x^{k+1}, используя `grad_est` в качестве истинного градиента. В следующем разделе приведен анализ аппроксимации градиента `JAGUAR`.

3.1.2 Анализ аппроксимаций `JAGUAR`

В данном параграфе приведены леммы для анализа аппроксимаций градиента `JAGUAR`. Леммы 1 и 2 нужны и для детерминированного случая, и для стохастического. Чтобы применить эти леммы в случае двухточечной обратной связи (12), не нужно предположение 10. В этом случае $\sigma_f = 0$. Чтобы применить эти леммы для детерминированного случая, предположения 9 и 10 не нужны. А вместо предположений 7 и 8 нужно использовать аналогичные предположения для детерминированного случая 4 и 5. Помимо этого нужно сделать замену $\widetilde{\nabla} f_\delta \left(x, \xi^{\pm}_{\overline{1,d}}\right)$ на $\widetilde{\nabla} f_\delta(x)$. В этом случае $\sigma_\nabla = \sigma_f = 0$. Кроме этого в доказательствах лемм встретится сокращение:

$$\widetilde{\nabla} f_\delta \left(x, \xi^{\pm}\right) := \sum_{i=1}^{d} \frac{f_\delta(x + \tau e_i, \xi^+) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi^-)}{2\tau} e_i.$$

Лемма 1. *При предположениях 7, 8, 9 и 10 в случае одноточечной обратной связи* (13) *выполняется следующее неравенство:*

$$\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla} f_\delta \left(x, \xi^{\pm}_{\overline{1,d}}\right) - \nabla f(x)\right\|^2\right] \leq d\left(L^2\tau^2 + \frac{8\sigma_f^2}{\tau^2} + 2\sigma_\nabla^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

Доказательство приведено в Приложении B.1.

Лемма 2. *При предположениях 7, 8, 9 и 10 в случае одноточечной обратной связи* (13) *выполняется следующее неравенство:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\|h^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \leq & \left(1 - \frac{1}{2d}\right)\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] \\ & + 2dL^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2\right] \\ & + L^2\tau^2 + \frac{8\sigma_f^2}{\tau^2} + 2\sigma_\nabla^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}.\end{aligned}$$

Доказательство приведено в Приложении B.2.

Леммы 3 и 4 нужны только для стохастического случая. Чтобы применить эти леммы в случае двухточечной обратной связи (12), не нужно предположение 10. В этом случае $\sigma_f = 0$.

Лемма 3. *При предположениях 7, 8, 9 и 10 в случае одноточечной обратной связи* (13) *выполняется следующее неравенство:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\|\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \leq & 4d\mathbb{E}\left[\left\|h^k-\nabla f(x^k)\right\|^2\right] \\ & + 2dL^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2\right] \\ & + 4d^2\left(L^2\tau^2+\frac{8\sigma_f^2}{\tau^2}+2\sigma_\nabla^2+\frac{2\Delta^2}{\tau^2}\right).\end{aligned}$$

Доказательство приведено в Приложении B.3.

Лемма 4. *При предположениях 7, 8, 9 и 10 в случае одноточечной обратной связи* (13) *выполняется следующее неравенство:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\|g^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \leq & (1-\eta_k)\,\mathbb{E}\left[\left\|g^k-\nabla f(x^k)\right\|^2\right] \\ & + \eta_k^2\mathbb{E}\left[\left\|\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \\ & + \frac{4L^2}{\eta_k}\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2\right] \\ & + 3\eta_k d\left(L^2\tau^2+\frac{2\Delta^2}{\tau^2}\right).\end{aligned}$$

Доказательство приведено в Приложении B.4.

3.2 Применение `JAGUAR` в алгоритме Франка-Вульфа

В данном разделе рассматривается применение алгоритма аппроксимации к алгоритму Франка-Вульфа (алгоритм 5):

Алгоритм 5 Алгоритм Франка-Вульфа

1: **Вход:** $x_0 \in Q$, γ_k

2: **for** k = 0, 1, 2, ... , N **do**

3: $\quad s^k = \underset{s\in Q}{\arg\min}\left\langle s, \nabla f(x^k)\right\rangle$

4: $\quad x^{k+1} = x^k + \gamma_k(s^k - x^k)$

5: **end for**

6: **Выход:** x^{N+1}

На множество Q накладываются необходимые ограничения, без которых алгоритм Франка-Вульфа не работает:

- Множество Q – компактное, т.е.

$$\exists D > 0 : \forall x, y \in Q \hookrightarrow \|x - y\| \leq D \tag{14}$$

- Множество Q – выпуклое, т.е.

$$\forall 0 \leq \alpha \leq 1, \forall x, y \in Q \hookrightarrow \alpha x + (1 - \alpha) y \in Q \tag{15}$$

Анализ применения `JAGUAR` в алгоритме Франка-Вульфа проводится для случая выпуклой на множестве Q функции $f(x)$, т.е.

$$\forall x, y \in Q \hookrightarrow f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle . \tag{16}$$

В следующих разделах рассмотрены детерминированные и стохастические алгоритмы Франка-Вульфа с использованием аппроксимации градиента `JAGUAR`.

3.2.1 Детерминированный случай

В этом разделе представляется алгоритм Франка-Вульфа, который решает задачу (3) с помощью аппроксимации градиента `JAGUAR` (алгоритм 6).

Алгоритм 6 Детерминированный алгоритм Франка-Вульфа с `JAGUAR`

1: **Вход:** $x^0 \in Q$, $h^0 = \widetilde{\nabla} f_\delta(x^0)$, γ_k, τ
2: **for** $k = 0, 1, 2, ..., N$ **do**
3: $\quad h^{k+1} = \texttt{JAGUAR-d}\left(x^k, h^k, \tau\right)$
4: $\quad s^k = \arg\min\limits_{x \in Q} \left\langle s, h^{k+1} \right\rangle$
5: $\quad x^{k+1} = x^k + \gamma_k (s^k - x^k)$
6: **end for**
7: **Выход:** x^{N+1}

Используя заданную форму функции `Proc` в алгоритме 6, можно нужным образом подобрать шаг γ_k.

Теорема 1 (Богданов А., Подбор шага для детерминированного алгоритма Франка-Вульфа с `JAGUAR`). *При предположениях 4, 5 и 14 для h^k, полученного алгоритмом 6, можно взять*

$$\gamma_k = \frac{4}{k+8d},$$

тогда выполняется следующая оценка:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{d^2 \max\left\{L^2D^2, \left\|h^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right\}}{(k+8d)^2} + dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

Если дополнительно $h^0 = \widetilde{\nabla} f_\delta(x^0)$, то можно упростить:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{d^2L^2D^2}{(k+8d)^2} + dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

Доказательство приведено в Приложении C.1.

Теорема 2 (Богданов А., Скорость сходимости детерминированного алгоритма Франка-Вульфа с `JAGUAR`). *При предположениях 4, 5, 14, 15, и 16 можно взять*

$$\gamma_k = \frac{4}{k+8d},$$

тогда алгоритм Франка-Вульфа с `JAGUAR` (алгоритм 6) имеет следующую скорость сходимости:

$$\mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] = \mathcal{O}\left(\frac{d\max\{LD^2, f(x^0) - f(x^*)\}}{k+8d} + \sqrt{d}LD\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta D}{\tau}\right).$$

Доказательство приведено в Приложении C.2.

Следствие 1. *В соответствии с условиями теоремы 2, выбирая γ_k, τ, Δ как*

$$\gamma_k = \frac{4}{k+8d},\ \tau = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}LD}\right),\ \Delta = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{dLD^2}\right),$$

чтобы получить ε-приближенное решение ($\mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] \leq \varepsilon$) *необходимо*

$$\mathcal{O}\left(\frac{d \max\{LD^2, f(x^0) - f(x^*)\}}{\varepsilon}\right) \text{ итераций.}$$

Результаты Теоремы 2 совпадают с результатами [1, 57], в которых авторы использовали истинный градиент и получили результат вида $\mathbb{E}\left[f(x^N) - f(x^*)\right] = \mathcal{O}\left(\max\{LD^2; f(x^0) - f(x^*)\}/N\right)$. В случае нулевого порядка неизбежно появляются члены вида $\mathcal{O}\left(\text{poly}(\tau) + \text{poly}(\Delta/\tau)\right)$, поскольку они имеют решающее значение для аппроксимации истинного градиента и всегда влияют на сходимость методов нулевого порядка [39, 41, 58, 59]. Фактор d, который появляется в теоретических оценках по сравнению с результатом первого порядка, связан со структурой метода нулевого порядка.

3.2.2 Стохастический случай

В этом разделе рассматривается алгоритм Франка-Вульфа, который решает задачу (3) + (6) с помощью аппроксимации градиента `JAGUAR` (алгоритм 2).

Алгоритм 7 Стохастический алгоритм Франка-Вульфа с `JAGUAR`

Вход: $x^0 \in Q$, $h^0 = g^0 = \widetilde{\nabla} f_\delta(x^0)$, γ_k, η_k, τ
for $k = 0, 1, 2, ..., N$ **do**
  $g^{k+1}, h^{k+1} =$ `JAGUAR-s` $\left(x^k, h^k, g^k, \tau, \eta_k\right)$
  $s^k = \underset{x \in Q}{\arg\min} \left\langle s, g^{k+1} \right\rangle$
  $x^{k+1} = x^k + \gamma_k (s^k - x^k)$
end for
Выход: x^{N+1}

Можно получить теорему, аналогичную Теореме 1, если нужным образом подобрать шаг γ_k и шаг моментума η_k.

Теорема 3 (Богданов А., Подбор шага для стохастического алгоритма Франка–Вульфа с `JAGUAR`)**.** *При предположениях 7, 8, 9, 10 и 14 в случае одноточечной обратной связи для* g^k*, полученного алгоритмом 7, можно взять*

$$\gamma_k = \frac{4}{k + 8d^{3/2}} \quad \text{и} \quad \eta_k = \frac{4}{(k + 8d^{3/2})^{2/3}},$$

тогда выполняется следующая оценка:

$$\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\Bigg(\frac{\max\left\{L^2D^2 + d^2\sigma_f^2/\tau^2 + d^2\sigma_\nabla^2, d\mathbb{E}\left[\left\|g^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right]\right\}}{(k + 8d^{3/2})^{2/3}} + \frac{d^4\mathbb{E}\left[\left\|h^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right]}{(k + 8d^{3/2})^{8/3}} + dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\Bigg).$$

Если дополнительно $h^0 = g^0 = \widetilde{\nabla} f_\delta\left(x^0, \xi^{\pm}_{\overline{1,d}}\right)$*, то можно упростить:*

$$\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{L^2D^2 + d^2\sigma_f^2/\tau^2 + d^2\sigma_\nabla^2}{(k + 8d^{3/2})^{2/3}} + dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

В случае двухточечной обратной связи не нужно предположение 10 и $\sigma_f = 0$*.*

Доказательство приведено в Приложении C.3.

Полученная оценка хуже по сравнению с детерминированным случаем в Теореме 1, поскольку рассматривается более сложная постановка.

Теорема 4 (Богданов А., Скорость сходимости стохастического алгоритма Франка-Вульфа с `JAGUAR`)**.** *При предположениях 7, 8, 9, 10, 14, 15 и 16 в случае одноточечной обратной связи можно взять:*

$$\gamma_k = \frac{4}{k + 8d^{3/2}} \quad \text{и} \quad \eta_k = \frac{4}{(k + 8d^{3/2})^{2/3}},$$

тогда алгоритм Франка-Вульфа с `JAGUAR` (Алгоритм 7) имеет следующую скорость сходимости:

$$\mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] = \mathcal{O}\Bigg(\frac{\max\{LD^2 + d\sigma_f D/\tau + d\sigma_\nabla D, \sqrt{d}(f(x^0) - f(x^*))\}}{(k + 8d^{3/2})^{1/3}} + \sqrt{d}LD\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta D}{\tau}\Bigg).$$

В случае двухточечной обратной связи не нужно предположение 10 и $\sigma_f = 0$. *Доказательство приведено в Приложении C.4.*

Следствие 2. *В соответствии с условиями теоремы 4, выбирая* $\gamma_k, \eta_k, \tau, \Delta$ *как*

$$\gamma_k = \frac{4}{k + 8d^{3/2}}, \ \eta_k = \frac{4}{(k + 8d^{3/2})^{2/3}}, \ \tau = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{d}LD}\right), \ \Delta = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{dLD^2}\right),$$

чтобы получить ε*-приближенное решение* ($\mathbb{E}\left[f(x^N) - f(x^*)\right] \leq \varepsilon$) *необходимо*

$$\mathcal{O}\left(\max\left\{ \left[\frac{\max\{LD^2 + d\sigma_\nabla D, \sqrt{d}(f(x^0) - f(x^*))\}}{\varepsilon}\right]^3; \frac{d^{9/2}\sigma_f^3 L^3 D^6}{\varepsilon^6} \right\}\right)$$

итераций.

В случае двухточечной обратной связи $\sigma_f = 0$ *последнее выражение принимает вид*

$$\mathcal{O}\left(\left[\frac{\max\{LD^2 + d\sigma_\nabla D, \sqrt{d}(f(x^0) - f(x^*))\}}{\varepsilon}\right]^3\right) \ \textit{итераций.}$$

Поскольку в алгоритме аппроксимации `JAGUAR-s` (алгоритм 2) использовались части SEGA и импульса, то не получается той же скорости сходимости, что и в теоремах 1 и 2 даже при переходе от стохастических к детерминированным настройкам, т.е, при задании $\sigma_\Delta = \sigma_f = 0$ в теоремах 1 и 2. Те же проблемы возникают и в случае первого порядка [13, 56], это связано с трудностями реализации стохастического градиента в алгоритмах типа Франка-Вульфа.

Можно применить `JAGUAR-d` (алгоритм 1) к стохастической задаче (3) + (6) и получить те же оценки, что и в Теоремах 1 и 2, только сглаженный член вида $\mathcal{O}\left(\text{poly}(\tau) + \text{poly}(\Delta/\tau)\right)$ будет содержать слагаемые вида $\mathcal{O}(\text{poly}(\sigma_\Delta^2)$ $+\text{poly}(\sigma_f^2/\tau))$. Поэтому, если $\sigma_\Delta^2, \sigma_f^2 \sim \Delta$, то детерминированный алгоритм 1 подходит для стохастической задачи (3) + (6). Однако это означает, что нужно использовать большие батчи, поэтому необходимо использовать SEGA и импульсные части в `JAGUAR-s` аппроксимации.

4 Вычислительный эксперимент

В этом разделе представлены результаты экспериментов по применению аппроксимации нулевого порядка `JAGUAR` к различным задачам оптимизации «черного ящика». Результаты включают детерминированный и стохастический случаи алгоритма Франка-Вульфа.

4.1 Постановка эксперимента

Рассматривается модель LogReg на множестве Q вида:

$$\min_{w \in Q} \left\{ f(w) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \log\left(1 + \exp\left[-y_k (Xw)_k\right]\right) + \frac{1}{2C} \|w\|^2 \right\}.$$

Также рассматривается модель SVM на множестве Q вида:

$$\min_{w \in Q, b \in \mathbb{R}} \left\{ f(w, b) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \left(1 - y_k [(Xw)_k - b]\right)_+ + \frac{1}{2C} \|w\|^2 \right\}.$$

А также рассматривается модель Reg на множестве Q вида:

$$\min_{w \in Q} \left\{ f(w) = w^T A w + b^T w + c \right\}.$$

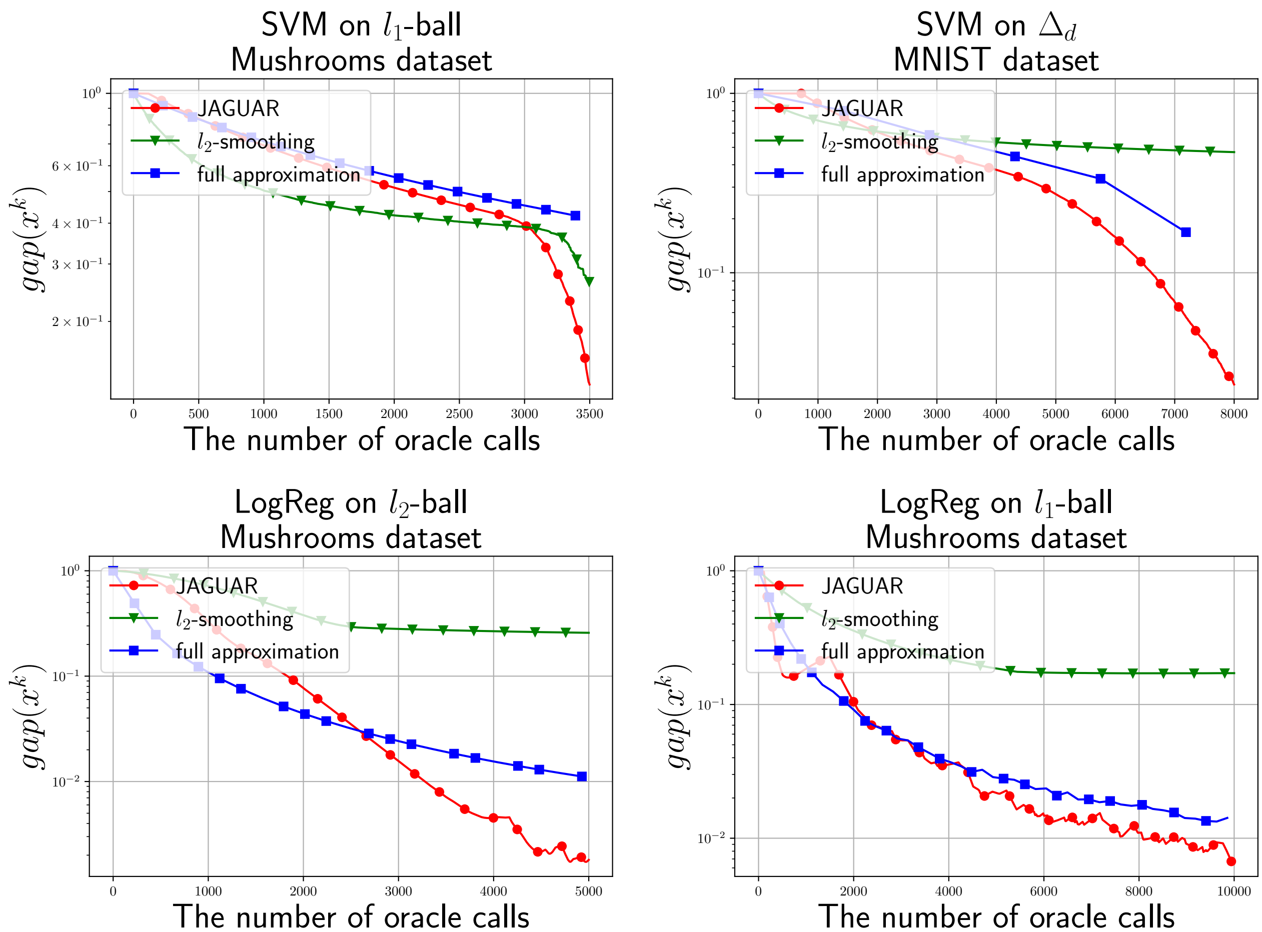
В задачах LogReg и SVM используются классические датасеты MNIST [60] и Mushrooms [61] и $C = 10$, а в задаче Reg используются синтетически сгенерированные данные. В качестве минимизирующего множества Q рассматриваются симплекс Δ_d, l_1-шар и l_2-шар. Метрикой качества будет значение $gap(x^k)$, которое обычно используется для алгоритма Франка-Вульфа:

$$gap(x^k) = \max_{y \in Q} \langle \nabla f(x^k), x^k - y \rangle$$

В эксперименте сравниваются различные методы аппроксимации. В качестве базовых оценок градиента рассматриваются l_2-*сглаживание* (2) и *полная аппроксимация* (1). Показывается, что алгоритмы, использующие аппроксимацию `JAGUAR` (алгоритмы 1 и 2), работает лучше всего.

4.2 Детерминированный алгоритм Франка-Вульфа

В этом разделе рассматривается детерминированный шум вида $f_\delta(x) = \text{round}(f(x), 5)$, т.е. округление значения функции f до пятого знака после запятой. На Рисунке 1 показана сходимость детерминированного алгоритма Франка-Вульфа с аппроксимацией нулевого порядка. У алгоритм Франка-Вульфа с `JAGUAR` (алгоритм 6) результаты лучше, чем у базовых алгоритмов. Это наблюдение подтверждают теоретические выводы.



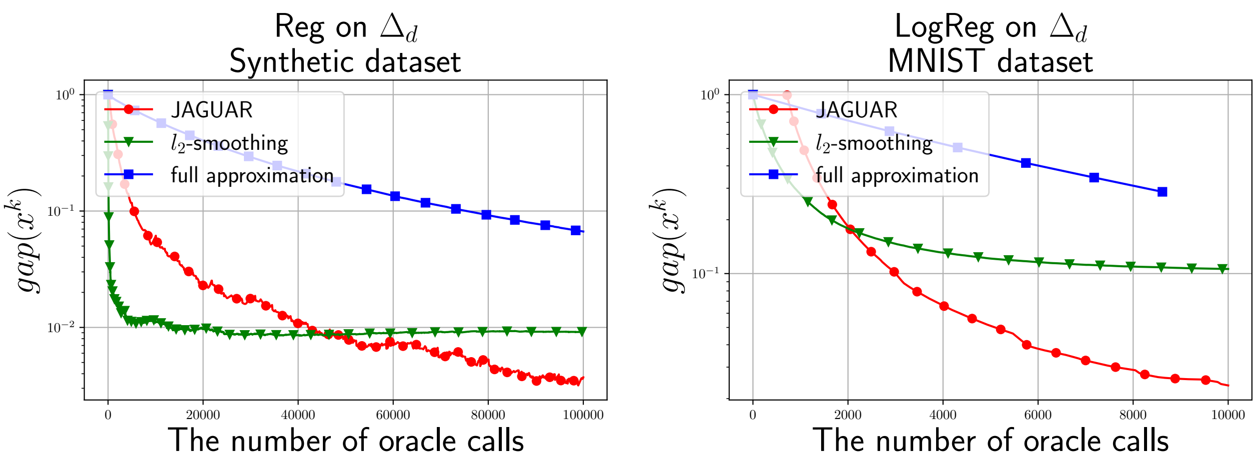


Рис. 1: Детерминированный алгоритм Франка-Вульфа.

4.3 Стохастический алгоритм Франка-Вульфа

В этом разделе рассматривается стохастический шум вида $f_\delta(x, \xi) = f(x) + \xi^T x; \xi_i = clip(\tilde{\xi}_i, -1, 1), \tilde{\xi}_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$, т. е. случайная величина сначала генерируется из стандартного нормального распределения, затем обрезается. На Рисунке 2 показана сходимость стохастического алгоритма Франка-Вульфа с аппроксимацией нулевого порядка в случае одноточечной обратной связи, а на Рисунке 3 в случае двухточечной обратной связи. Теоретические выводы подтверждаются наблюдениями. Алгоритм Франка-Вульфа с `JAGUAR` (алгоритм 7) устойчив к шуму и превосходит базовые алгоритмы.

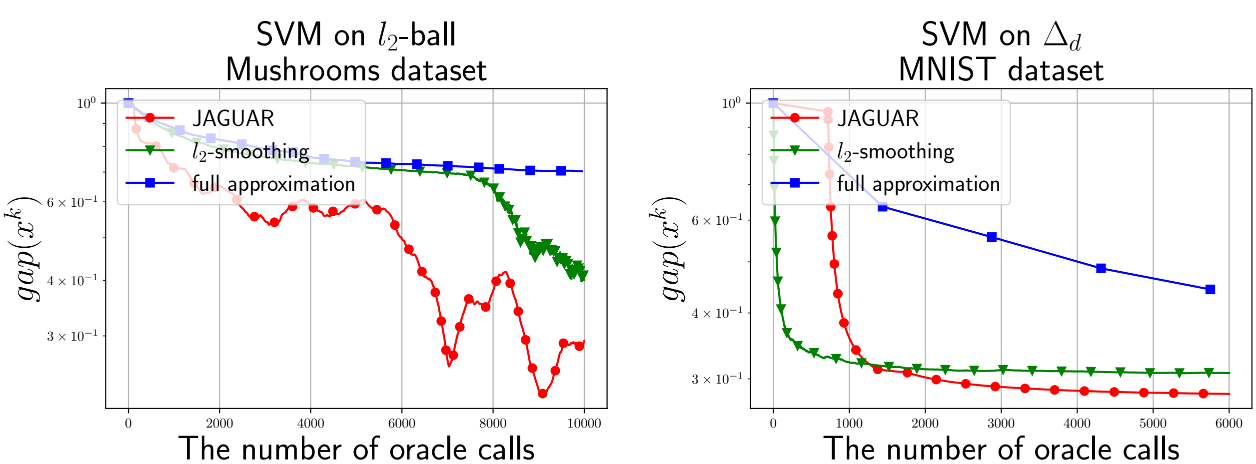


Рис. 2: Стохастический алгоритм (OOC) Франка-Вульфа.

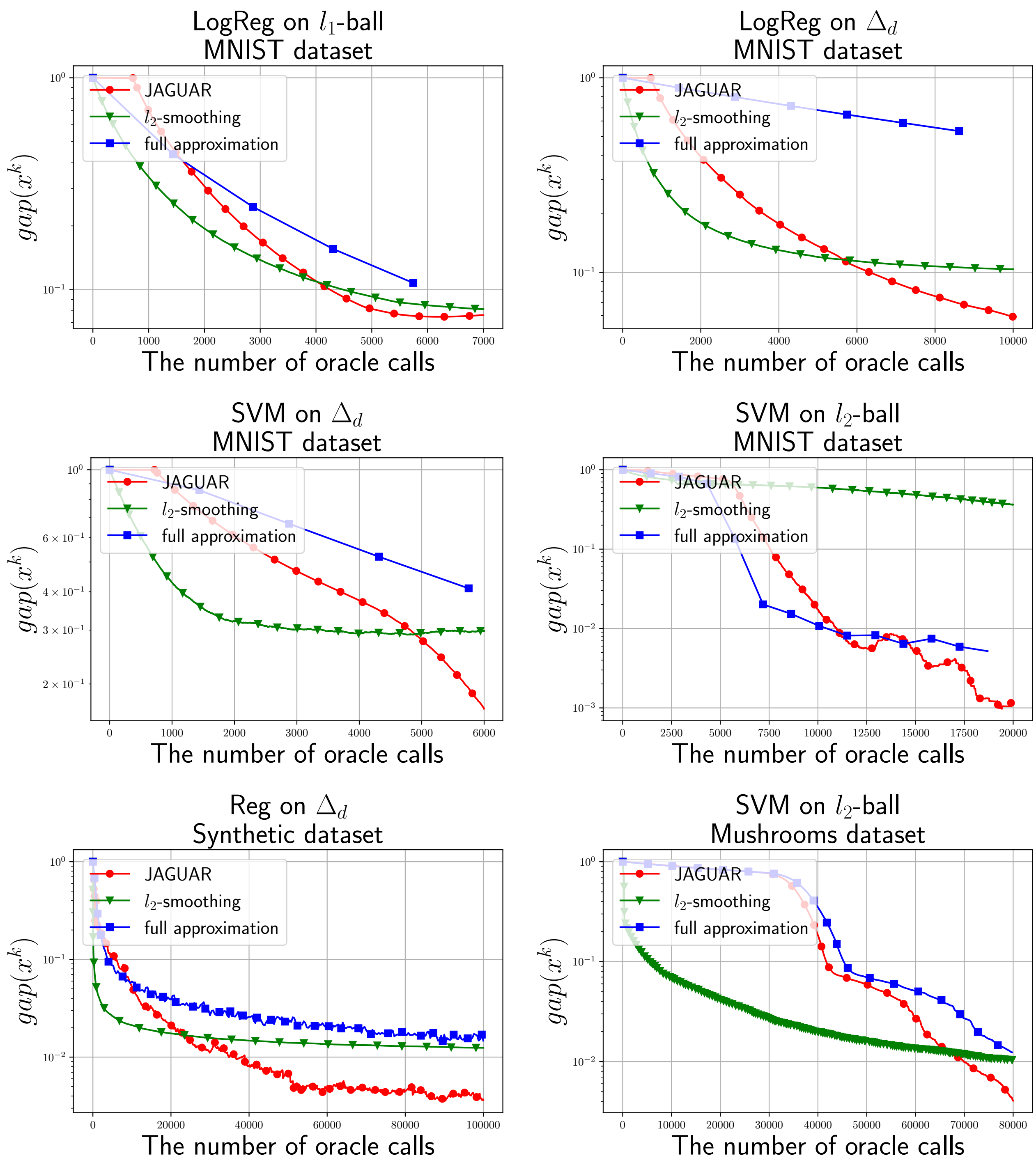


Рис. 3: Стохастический алгоритм (ДОС) Франка-Вульфа.

Код экспериментов можно посмотреть по репозитории https://github.com/intsystems/Bogdanov-BS-Thesis/tree/main.

Дополнительные эксперименты можно посмотреть в Приложении C.5.

5 Заключение

В данной работе представлен алгоритм `JAGUAR` - новый метод аппроксимации градиента, разработанный для решения задач оптимизации «черного ящика», использующий память о предыдущих итерациях для оценки истинного градиента с высокой точностью, требуя при этом всего $\mathcal{O}(1)$ вызовов оракула. Исследование содержит строгие теоретические доказательства и обширную экспериментальную проверку, демонстрируя превосходную производительность алгоритма `JAGUAR` как в детерминированных, так и в стохастических условиях. Ключевым вкладом является доказательство теорем для алгоритма Франка-Вульфа устанавливающих скорость сходимости. Экспериментальные результаты показывают, что `JAGUAR` превосходит базовые методы в задачах оптимизации SVM, LogReg и Reg. Полученные результаты подчеркивают эффективность и точность `JAGUAR`, что делает его перспективным подходом для будущих исследований и приложений в области оптимизации нулевого порядка.

Список литературы

[1] Marguerite Frank and Philip Wolfe. An algorithm for quadratic programming. *Naval research logistics quarterly*, 3(1-2):95–110, 1956.

[2] Larry J LeBlanc, Richard V Helgason, and David E Boyce. Improved efficiency of the frank-wolfe algorithm for convex network programs. *Transportation Science*, 19(4):445–462, 1985.

[3] Martin Jaggi. Sparse convex optimization methods for machine learning. 2011.

[4] Sébastien Bubeck et al. Convex optimization: Algorithms and complexity. *Foundations and Trends® in Machine Learning*, 8(3-4):231–357, 2015.

[5] Elad Hazan et al. Introduction to online convex optimization. *Foundations and Trends® in Optimization*, 2(3-4):157–325, 2016.

[6] Donald Goldfarb, Garud Iyengar, and Chaoxu Zhou. Linear convergence of stochastic frank wolfe variants. In *Artificial Intelligence and Statistics*, pages 1066–1074. PMLR, 2017.

[7] Ali Dadras, Karthik Prakhya, and Alp Yurtsever. Federated frank-wolfe algorithm. In *Workshop on Federated Learning: Recent Advances and New Challenges (in Conjunction with NeurIPS 2022)*, 2022.

[8] Robert M Freund, Paul Grigas, and Rahul Mazumder. An extended frank–wolfe method with “in-face” directions, and its application to low-rank matrix completion. *SIAM Journal on optimization*, 27(1):319–346, 2017.

[9] Simon Lacoste-Julien, Martin Jaggi, Mark Schmidt, and Patrick Pletscher. Block-coordinate frank-wolfe optimization for structural svms. In *International Conference on Machine Learning*, pages 53–61. PMLR, 2013.

[10] Yu-Xiang Wang, Veeranjaneyulu Sadhanala, Wei Dai, Willie Neiswanger, Suvrit Sra, and Eric Xing. Parallel and distributed block-coordinate frank-

wolfe algorithms. In *International Conference on Machine Learning*, pages 1548–1557. PMLR, 2016.

[11] Anton Osokin, Jean-Baptiste Alayrac, Isabella Lukasewitz, Puneet Dokania, and Simon Lacoste-Julien. Minding the gaps for block frank-wolfe optimization of structured svms. In *international conference on machine learning*, pages 593–602. PMLR, 2016.

[12] Sashank J Reddi, Suvrit Sra, Barnabás Póczos, and Alex Smola. Stochastic frank-wolfe methods for nonconvex optimization. In *2016 54th annual Allerton conference on communication, control, and computing (Allerton)*, pages 1244–1251. IEEE, 2016.

[13] Mingrui Zhang, Zebang Shen, Aryan Mokhtari, Hamed Hassani, and Amin Karbasi. One sample stochastic frank-wolfe. In *International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, pages 4012–4023. PMLR, 2020.

[14] Haihao Lu and Robert M Freund. Generalized stochastic frank–wolfe algorithm with stochastic "substitute" gradient for structured convex optimization. *Mathematical Programming*, 187(1):317–349, 2021.

[15] Ben Taskar, Vassil Chatalbashev, Daphne Koller, and Carlos Guestrin. Learning structured prediction models: A large margin approach. In *Proceedings of the 22nd international conference on Machine learning*, pages 896–903, 2005.

[16] Pin-Yu Chen, Huan Zhang, Yash Sharma, Jinfeng Yi, and Cho-Jui Hsieh. Zoo: Zeroth order optimization based black-box attacks to deep neural networks without training substitute models. In *Proceedings of the 10th ACM workshop on artificial intelligence and security*, pages 15–26, 2017.

[17] Yurii Nesterov and Vladimir Spokoiny. Random gradient-free minimization of convex functions. *Foundations of Computational Mathematics*, 17:527–566, 2017.

[18] Krzysztof Choromanski, Mark Rowland, Vikas Sindhwani, Richard Turner, and Adrian Weller. Structured evolution with compact architectures for scalable policy optimization. In *International Conference on Machine Learning*, pages 970–978. PMLR, 2018.

[19] Maryam Fazel, Rong Ge, Sham Kakade, and Mehran Mesbahi. Global convergence of policy gradient methods for the linear quadratic regulator. In *International conference on machine learning*, pages 1467–1476. PMLR, 2018.

[20] Xiangru Lian, Yijun Huang, Yuncheng Li, and Ji Liu. Asynchronous parallel stochastic gradient for nonconvex optimization. *Advances in neural information processing systems*, 28, 2015.

[21] Yu. Nesterov. Efficiency of coordinate descent methods on huge-scale optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 22(2):341–362, 2012. doi:10.1137/100802001. URL https://doi.org/10.1137/100802001.

[22] John C Duchi, Peter L Bartlett, and Martin J Wainwright. Randomized smoothing for stochastic optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 22(2): 674–701, 2012.

[23] Peter Richtárik and Martin Takáč. Iteration complexity of randomized block-coordinate descent methods for minimizing a composite function. *Mathematical Programming*, 144(1):1–38, 2014.

[24] Stephen J Wright. Coordinate descent algorithms. *Mathematical programming*, 151(1):3–34, 2015.

[25] Yurii Nesterov and Sebastian U. Stich. Efficiency of the accelerated coordinate descent method on structured optimization problems. *SIAM Journal on Optimization*, 27(1):110–123, 2017. doi:10.1137/16M1060182. URL https://doi.org/10.1137/16M1060182.

[26] Alexander Gasnikov, Anton Novitskii, Vasilii Novitskii, Farshed Abdukhakimov, Dmitry Kamzolov, Aleksandr Beznosikov, Martin Takac,

Pavel Dvurechensky, and Bin Gu. The power of first-order smooth optimization for black-box non-smooth problems. In *International Conference on Machine Learning*, pages 7241–7265. PMLR, 2022.

[27] Alexander Gasnikov, Darina Dvinskikh, Pavel Dvurechensky, Eduard Gorbunov, Aleksander Beznosikov, and Alexander Lobanov. Randomized gradient-free methods in convex optimization. *arXiv preprint arXiv:2211.13566*, 2022.

[28] Alexander Gasnikov, Anastasia Lagunovskaya, Ilnura Usmanova, and Fedor Fedorenko. Gradient-free proximal methods with inexact oracle for convex stochastic nonsmooth optimization problems on the simplex. *Automation and Remote Control*, 77:2018–2034, 2016.

[29] Arya Akhavan, Evgenii Chzhen, Massimiliano Pontil, and Alexandre Tsybakov. A gradient estimator via l1-randomization for online zero-order optimization with two point feedback. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 35:7685–7696, 2022.

[30] Arkadij Semenovič Nemirovskij and David Borisovich Yudin. Problem complexity and method efficiency in optimization. 1983.

[31] Ohad Shamir. An optimal algorithm for bandit and zero-order convex optimization with two-point feedback. *The Journal of Machine Learning Research*, 18(1):1703–1713, 2017.

[32] Eduard Gorbunov, Pavel Dvurechensky, and Alexander Gasnikov. An accelerated method for derivative-free smooth stochastic convex optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 32(2):1210–1238, 2022. doi:10.1137/19M1259225. URL https://doi.org/10.1137/19M1259225.

[33] Rie Johnson and Tong Zhang. Accelerating stochastic gradient descent using predictive variance reduction. *Advances in neural information processing systems*, 26, 2013.

[34] Aaron Defazio, Francis Bach, and Simon Lacoste-Julien. Saga: A fast incremental gradient method with support for non-strongly convex composite objectives. *Advances in neural information processing systems*, 27, 2014.

[35] Lam M Nguyen, Jie Liu, Katya Scheinberg, and Martin Takáč. Sarah: A novel method for machine learning problems using stochastic recursive gradient. In *International conference on machine learning*, pages 2613–2621. PMLR, 2017.

[36] Filip Hanzely, Konstantin Mishchenko, and Peter Richtárik. Sega: Variance reduction via gradient sketching. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 31, 2018.

[37] Francis Bach and Vianney Perchet. Highly-smooth zero-th order online optimization. In *Conference on Learning Theory*, pages 257–283. PMLR, 2016.

[38] Arya Akhavan, Massimiliano Pontil, and Alexandre Tsybakov. Exploiting higher order smoothness in derivative-free optimization and continuous bandits. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 33:9017–9027, 2020.

[39] Andrej Risteski and Yuanzhi Li. Algorithms and matching lower bounds for approximately-convex optimization. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 29, 2016.

[40] Lev Bogolubsky, Pavel Dvurechenskii, Alexander Gasnikov, Gleb Gusev, Yurii Nesterov, Andrei M Raigorodskii, Aleksey Tikhonov, and Maksim Zhukovskii. Learning supervised pagerank with gradient-based and gradient-free optimization methods. *Advances in neural information processing systems*, 29, 2016.

[41] Anit Kumar Sahu, Dusan Jakovetic, Dragana Bajovic, and Soummya Kar. Distributed zeroth order optimization over random networks: A kiefer-wolfowitz stochastic approximation approach. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4951–4958. IEEE, 2018.

[42] Anastasia Sergeevna Bayandina, Alexander V Gasnikov, and Anastasia A Lagunovskaya. Gradient-free two-point methods for solving stochastic nonsmooth convex optimization problems with small non-random noises. *Automation and Remote Control*, 79:1399–1408, 2018.

[43] Darina Dvinskikh, Vladislav Tominin, Iaroslav Tominin, and Alexander Gasnikov. Noisy zeroth-order optimization for non-smooth saddle point problems. In *International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, pages 18–33. Springer, 2022.

[44] Aleksandr Lobanov, Andrew Veprikov, Georgiy Konin, Aleksandr Beznosikov, Alexander Gasnikov, and Dmitry Kovalev. Non-smooth setting of stochastic decentralized convex optimization problem over time-varying graphs. *Computational Management Science*, 20(1):48, 2023.

[45] Aleksandr Lobanov, Anton Anikin, Alexander Gasnikov, Alexander Gornov, and Sergey Chukanov. Zero-order stochastic conditional gradient sliding method for non-smooth convex optimization. *arXiv preprint arXiv:2303.02778*, 2023.

[46] Anit Kumar Sahu, Manzil Zaheer, and Soummya Kar. Towards gradient free and projection free stochastic optimization. In *The 22nd International Conference on Artificial Intelligence and Statistics*, pages 3468–3477. PMLR, 2019.

[47] Hongchang Gao and Heng Huang. Can stochastic zeroth-order frank-wolfe method converge faster for non-convex problems? In *International conference on machine learning*, pages 3377–3386. PMLR, 2020.

[48] Zeeshan Akhtar and Ketan Rajawat. Zeroth and first order stochastic frank-wolfe algorithms for constrained optimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 70:2119–2135, 2022.

[49] Aleksandr Beznosikov, David Dobre, and Gauthier Gidel. Sarah frank-wolfe:

Methods for constrained optimization with best rates and practical features. *arXiv preprint arXiv:2304.11737*, 2023.

[50] Kaiyi Ji, Zhe Wang, Yi Zhou, and Yingbin Liang. Improved zeroth-order variance reduced algorithms and analysis for nonconvex optimization. In *International conference on machine learning*, pages 3100–3109. PMLR, 2019.

[51] John C Duchi, Michael I Jordan, Martin J Wainwright, and Andre Wibisono. Optimal rates for zero-order convex optimization: The power of two function evaluations. *IEEE Transactions on Information Theory*, 61(5):2788–2806, 2015.

[52] Aleksandr Beznosikov, Abdurakhmon Sadiev, and Alexander Gasnikov. Gradient-free methods with inexact oracle for convex-concave stochastic saddle-point problem. In *International Conference on Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, pages 105–119. Springer, 2020.

[53] Abraham D Flaxman, Adam Tauman Kalai, and H Brendan McMahan. Online convex optimization in the bandit setting: gradient descent without a gradient. *arXiv preprint cs/0408007*, 2004.

[54] Alexander V Gasnikov, Ekaterina A Krymova, Anastasia A Lagunovskaya, Ilnura N Usmanova, and Fedor A Fedorenko. Stochastic online optimization. single-point and multi-point non-linear multi-armed bandits. convex and strongly-convex case. *Automation and remote control*, 78:224–234, 2017.

[55] Aleksandr Beznosikov, Vasilii Novitskii, and Alexander Gasnikov. One-point gradient-free methods for smooth and non-smooth saddle-point problems. In *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: 20th International Conference, MOTOR 2021, Irkutsk, Russia, July 5–10, 2021, Proceedings 20*, pages 144–158. Springer, 2021.

[56] Aryan Mokhtari, Hamed Hassani, and Amin Karbasi. Stochastic conditional gradient methods: From convex minimization to submodular maximization. *The Journal of Machine Learning Research*, 21(1):4232–4280, 2020.

[57] Martin Jaggi. Revisiting frank-wolfe: Projection-free sparse convex optimization. In *International conference on machine learning*, pages 427–435. PMLR, 2013.

[58] Sijia Liu, Bhavya Kailkhura, Pin-Yu Chen, Paishun Ting, Shiyu Chang, and Lisa Amini. Zeroth-order stochastic variance reduction for nonconvex optimization. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 31, 2018.

[59] Aleksandr Beznosikov, Eduard Gorbunov, and Alexander Gasnikov. Derivative-free method for composite optimization with applications to decentralized distributed optimization. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):4038–4043, 2020.

[60] Li Deng. The mnist database of handwritten digit images for machine learning research. *IEEE Signal Processing Magazine*, 29(6):141–142, 2012.

[61] Chih-Chung Chang and Chih-Jen Lin. Libsvm: a library for support vector machines. *ACM transactions on intelligent systems and technology (TIST)*, 2 (3):1–27, 2011.

Приложение

A Вспомогательные леммы и факты

A.1 Квадрат нормы суммы

Для всех $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \{2, 4\}$:

$$\|x_1 + x_2 + \cdots + x_n\|^2 \leq n \|x_1\|^2 + \cdots + n \|x_n\|^2.$$

A.2 Неравенство Коши-Шварца

Для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\langle x, y \rangle \leq \|x\| \|y\|.$$

A.3 Неравенства Юнга-Фенхеля

Для всех $x, y \in \mathbb{R}^d$ и $\beta > 0$:

$$2 \langle x, y \rangle \leq \beta^{-1}\|x\|^2 + \beta\|y\|^2.$$

A.4 Лемма о рекурсии

Лемма 5 (Вспомогательная лемма)**.** *Для всех $x \in [0; 1)$ рассматривается функция*

$$\phi(x) := 1 - (1 - x)^\alpha - \max\{1, \alpha\}x.$$

Тогда $\phi(x) \leq 0$ для всех $0 \leq x < 1$ и $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда $\alpha \notin (0; 1)$. Тогда для всех $x < 1$ можно выписать неравенство Бернулли:

$$(1 - x)^\alpha \geq 1 - \alpha x.$$

Поэтому для $0 \leq x < 1$:

$$\phi(x) = 1 - (1-x)^{\alpha} - \max\{1, \alpha\}x \leq 1 - (1-x)^{\alpha} - \alpha x \leq 0.$$

Теперь рассмотрим случай $0 < \alpha < 1$, тогда $\phi(x)$ принимает вид:

$$\phi(x) = 1 - (1-x)^{\alpha} - x.$$

Обратим внимание, что:

$$\phi''(x) = \alpha(1-\alpha)(1-x)^{\alpha-2} > 0.$$

Поэтому $\phi(x)$ выпукла на отрезке $[0;1]$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$, что означает, что $\phi(x) \leq 0$ для всех $x \in [0;1)$.
На этом доказательство закончено.

$\square$

Лемма 6 (Лемма о рекурсии)**.** *Предположим, что есть следующее рекуррентное соотношение для переменных* $\{r_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$*:*

$$r_{k+1} \leq \left(1 - \frac{\beta_0}{(k+k_0)^{\alpha_0}}\right) r_k + \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{(k+k_0)^{\alpha_i}}, \tag{17}$$

где

- $\beta_i \in \mathbb{R}_+, \alpha_i \in \mathbb{R}\ \forall i \in \overline{1,m}$
- $0 \leq \alpha_0 \leq 1$, *причем:*
  - *Если* $\alpha_0 = 0$, *то:*

$$0 < \beta_0 \leq 1 \text{ и } k_0 \geq \frac{2}{\beta_0}\max\{1, \max\{\alpha_i\}\};$$

  - *Если* $0 < \alpha_0 < 1$, *то:*

$$\beta_0 > 0 \text{ и } k_0 \geq \max\left\{\left(\frac{2}{\beta_0}\max\{1, \max\{\alpha_i\} - \alpha_0\}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}}, \beta_0^{\frac{1}{\alpha_0}}\right\};$$

– *Если* $\alpha_0 = 1$, *то:*

$$k_0 \geq \beta_0 \geq 2\max\{1, \max\{\alpha_i\} - 1\}.$$

Пусть $Q_{i^*} = \max\{\beta_{i^*}/\beta_0, r_0 k_0^{\alpha_{i^*}-\alpha_0}\}$ *и* $Q_{i\neq i^*} = \beta_i/\beta_0$, *а* i^* *можно выбрать произвольно из множества* $\overline{1,m}$. *Тогда можно оценить сходимость последовательности* $\{r_k\}_{k=0}^{\infty}$ *к нулю:*

$$r_k \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{(k+k_0)^{\alpha_i - \alpha_0}}, \tag{18}$$

Доказательство. Докажем утверждение (18) по индукции. Во-первых, заметим, что:

$$r_0 = r_0 \cdot \left(\frac{k_0}{0+k_0}\right)^{\alpha_{i^*}-\alpha_0} \leq \frac{Q_{i^*}}{(0+k_0)^{\alpha_{i^*}-\alpha_0}} \leq 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{(0+k_0)^{\alpha_i-\alpha_0}},$$

следовательно, нулевой шаг индукции верен.

Теперь предположим, что условие в (18) выполняется для какого-то k, покажем, что это условие будет выполняться для $k+1$. Начнем с того, что впишем (18) в исходное рекуррентное соотношение (17) и воспользуемся тем, что $\beta_i \leq Q_i\beta_0$, а также будем предполагать, что $\beta_0 \leq k_0^{\alpha_0}$:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &\leq \left(1 - \frac{\beta_0}{(k+k_0)^{\alpha_0}}\right) \cdot \left(2\sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{(k+k_0)^{\alpha_i-\alpha_0}}\right) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\beta_i}{(k+k_0)^{\alpha_i}} \\ &\leq 2\sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i}{(k+k_0)^{\alpha_i-\alpha_0}} - \sum_{i=1}^{m} \frac{Q_i\beta_0}{(k+k_0)^{\alpha_i}} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{2Q_i}{(k+k_0)^{\alpha_i-\alpha_0}} - \frac{Q_i\beta_0}{(k+k_0)^{\alpha_i}}\right). \end{aligned}$$

Необходимо показать, что для всех $i \in \overline{1,m}$ имеет место:

$$\frac{2Q_i}{(k+k_0)^{\alpha_i-\alpha_0}} - \frac{Q_i\beta_0}{(k+k_0)^{\alpha_i}} \leq \frac{2Q_i}{(k+k_0+1)^{\alpha_i-\alpha_0}}. \tag{19}$$

Перепишем это неравенство так, чтобы оно приняло более удобный вид:

$$\frac{2}{\beta_0} \underbrace{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{k+k_0+1}\right)^{\alpha_i-\alpha_0}\right]}_{①} \leq \left(\frac{1}{k+k_0}\right)^{\alpha_0}.$$

Используя лемму 5 с $x = (k+k_0+1)^{-1} \in [0;1)$ и $\alpha = \alpha_i - \alpha_0$ можно получить:

$$① \leq \max\{1, \alpha_i - \alpha_0\} \frac{1}{k+k_0+1} \leq \max\{1, \alpha_i - \alpha_0\} \frac{1}{k+k_0}.$$

Тогда неравенство (19) принимает вид:

$$\frac{2}{\beta_0} \max\{1, \alpha_i - \alpha_0\} \frac{1}{k+k_0} \leq \left(\frac{1}{k+k_0}\right)^{\alpha_0}.$$

Снова перепишем его в более удобной форме:

$$\frac{2}{\beta_0} \max\{1, \alpha_i - \alpha_0\} \leq (k+k_0)^{1-\alpha_0}. \tag{20}$$

Теперь рассмотрим два случая:

- Если $0 \leq \alpha_0 < 1$, то в этом случае $(k+k_0)^{1-\alpha_0} \geq k_0^{1-\alpha_0}$. Если взять:

  $$k_0 \geq \left(\frac{2}{\beta_0} \max\{1, \max\{\alpha_i\} - \alpha_0\}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}},$$

  тогда согласно (20) желаемое неравенство (19) будет выполнено для всех $i \in \overline{1,m}$. Также надо учесть, что $\beta_0 \leq k_0^{\alpha_0}$, поэтому, если $\alpha_0 = 0$, получаем:

  $$0 < \beta_0 \leq 1 \text{ и } k_0 \geq \frac{2}{\beta_0} \max\{1, \max\{\alpha_i\}\}$$

  А если $0 < \alpha_0 < 1$, то получаем:

  $$\beta_0 > 0 \text{ и } k_0 \geq \max\left\{\left(\frac{2}{\beta_0} \max\{1, \max\{\alpha_i\} - \alpha_0\}\right)^{\frac{1}{1-\alpha_0}}, \beta_0^{\frac{1}{\alpha_0}}\right\};$$

- Если $\alpha_0 = 1$, то тогда неравенство (20) примет форму:

  $$\frac{2}{\beta_0} \max\{1, \alpha_i - 1\} \leq 1.$$

  Поэтому если взять

  $$\beta_0 \geq 2 \max\{1, \max\{\alpha_i\} - 1\},$$

тогда снова согласно (20) желаемое неравенство (19) будет выполнено для всех $i \in \overline{1, m}$. Также надо учесть, что $\beta_0 \leq k_0^{\alpha_0}$:

$$k_0 \geq \beta_0 \geq 2 \max\{1, \max\{\alpha_i\} - 1\}.$$

На этом доказательство закончено.

$\square$

B Доказательство сходимости JAGUAR

B.1 Доказательство Леммы 1

Доказательство. Начнем расписывать $\widetilde{\nabla} f_\delta \left(x, \xi^{\pm}_{\overline{1,d}}\right)$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla} f_\delta \left(x, \xi^{\pm}_{\overline{1,d}}\right) - \nabla f(x)\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{d} \frac{f_\delta(x + \tau e_i, \xi_i^+) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi_i^-)}{2\tau} e_i - \nabla f(x)\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\sum_{i=1}^{d} \left(\frac{f_\delta(x + \tau e_i, \xi_i^+) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi_i^-)}{2\tau} - \langle \nabla f(x), e_i \rangle\right) e_i\right\|^2\right] \\
&\overset{(\star)}{=} \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left[\left\|\left(\frac{f_\delta(x + \tau e_i, \xi_i^+) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi_i^-)}{2\tau} - \langle \nabla f(x), e_i \rangle\right) e_i\right\|^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}\left[\left|\frac{f_\delta(x + \tau e_i, \xi_i^+) - f_\delta(x - \tau e_i, \xi_i^-)}{2\tau} - \langle \nabla f(x), e_i \rangle\right|^2\right].
\end{aligned}$$

Равенство $(\star)$ выполняется, так как $\langle e_i, e_j \rangle = 0$, если $i \neq j$. Теперь оценим значение члена суммы:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|\frac{f_\delta(x+\tau e_i,\xi_i^+)-f_\delta(x-\tau e_i,\xi_i^-)}{2\tau}-\langle\nabla f(x),e_i\rangle\right|^2\right]\\
=&\mathbb{E}\left[\left|\frac{f(x+\tau e_i,\xi_i^+)-f(x-\tau e_i,\xi_i^-)}{2\tau}-\langle\nabla f(x),e_i\rangle\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{\delta(x+\tau e_i,\xi_i^+)-\delta(x-\tau e_i,\xi_i^-)}{2\tau}\right|^2\right]\\
\overset{A.1}{\leq}&\frac{1}{2\tau^2}\underbrace{\mathbb{E}\left[\left|f(x+\tau e_i,\xi_i^+)-f(x-\tau e_i,\xi_i^-)-2\left\langle\nabla f(x),\tau e_i\right\rangle\right|^2\right]}_{①}+\frac{2\Delta^2}{\tau^2}.
\end{aligned}$$

Последнее неравенство выполняется, так как шум ограничен (8). Рассмотрим ①. Используя A.1 с $n=4$, получим:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|f(x+\tau e_i,\xi_i^+)-f(x-\tau e_i,\xi_i^-)-\langle\nabla f(x),2\tau e_i\rangle\right|^2\right]\\
\leq&4\mathbb{E}\left[\left|f(x+\tau e_i,\xi_i^+)-f(x,\xi_i^+)-\left\langle\nabla f(x,\xi_i^+),\tau e_i\right\rangle\right|^2\right]\\
&+4\mathbb{E}\left[\left|-f(x-\tau e_i,\xi_i^-)+f(x,\xi_i^-)+\left\langle\nabla f(x,\xi_i^-),-\tau e_i\right\rangle\right|^2\right]\\
&+4\mathbb{E}\left[\left|f(x,\xi_i^+)-f(x,\xi_i^-)\right|^2\right]\\
&+4\mathbb{E}\left[\left|\left\langle\nabla f(x,\xi_i^+)+\nabla f(x,\xi_i^-)-2\nabla f(x),\tau e_i\right\rangle\right|^2\right].
\end{aligned}\tag{21}$$

Оценим все эти четыре компоненты по отдельности. Поскольку функции $f(x,\xi_i^+)$ и $f(x,\xi_i^-)$ являются $L(\xi_i^\pm)$-гладкими (7), то уже есть оценки для первой и второй:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left|f(x+\tau e_i,\xi_i^+)-f(x,\xi_i^+)-\left\langle\nabla f(x,\xi_i^+),\tau e_i\right\rangle\right|^2\right]\leq\frac{L^2\tau^2}{4},\\
&\mathbb{E}\left[\left|-f(x-\tau e_i,\xi_i^-)+f(x,\xi_i^-)+\left\langle\nabla f(x,\xi_i^-),-\tau e_i\right\rangle\right|^2\right]\leq\frac{L^2\tau^2}{4}.
\end{aligned}\tag{22}$$

Если рассматривать приближение ДОС (12), то третий член в (21) равен нулю, так как $\xi_i^+=\xi_i^-$, если рассматривать случай ООС (13), то можно воспользоваться A.1 с $n = 2$ и (10):

$$\mathbb{E}\left[\left|f(x,\xi_i^+) - f(x,\xi_i^-)\right|^2\right] \leq 2\mathbb{E}\left[\left|f(x,\xi_i^+) - f(x)\right|^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left|f(x,\xi_i^-) - f(x)\right|^2\right] \leq 4\sigma_f^2. \tag{23}$$

Рассмотрим последнюю компоненту в (21) и, используя неравенство Коши-Шварца A.2 и (9), получим:

$$\mathbb{E}\left[\left|\left\langle \nabla f(x,\xi_i^+) - \nabla f(x), \tau e_i\right\rangle\right|^2\right] \leq \mathbb{E}\left[\left\|\nabla f(x,\xi_i^+) - \nabla f(x)\right\|^2\right]\tau^2 \leq \sigma_\nabla^2\tau^2. \tag{24}$$

Используя (22), (23) и (24), получаем:

$$\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla} f_\delta\left(x,\xi_{\overline{1,d}}^\pm\right) - \nabla f(x)\right\|^2\right] \leq d\left(L^2\tau^2 + \frac{8\sigma_f^2}{\tau^2} + 2\sigma_\nabla^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

В случае двухточечной обратной связи $\sigma_f = 0$, а в детерминированном случае $\sigma_\nabla = \sigma_f = 0$.

На этом доказательство закончено.

□

B.2 Доказательство Леммы 2

Доказательство. Начнем расписывать h^{k+1}:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|h^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left\|h^k + \widetilde{\nabla}_i f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm) - \left\langle h^k, e_i\right\rangle e_i - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \\
&= \mathbb{E}\Bigg[\Bigg\| \left(I - e_ie_i^T\right)\left(h^k - \nabla f(x^k)\right) + e_ie_i^T\left(\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm) - \nabla f(x^{k+1})\right) \\
&\quad + \left(I - e_ie_i^T\right)\left(\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k+1})\right)\Bigg\|^2\Bigg] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|\left(I - e_ie_i^T\right)\left(h^k - \nabla f(x^k)\right)\right\|^2\right]}_{①} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|e_ie_i^T\left(\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm) - \nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right]}_{②} \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|\left(I - e_ie_i^T\right)\left(\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right]}_{③} \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{E}\left[2\left\langle\left(I - e_ie_i^T\right)\left(h^k - \nabla f(x^k)\right), \left(I - e_ie_i^T\right)\left(\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)\right)\right\rangle\right]}_{④}.
\end{aligned}$$

В последнем равенстве два оставшихся скалярных произведения равны нулю, так как $e_i e_i^T \left(I - e_i e_i^T\right) = e_i e_i^T - e_i e_i^T = 0$. Рассмотрим ①. Используя обозначение $v := h^k - \nabla f(x^k)$, получим:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\left(I - e_i e_i^T\right)\left(h^k - \nabla f(x^k)\right)\right\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[v^T\left(I - e_i e_i^T\right)^T\left(I - e_i e_i^T\right)v\right] \\
&= \mathbb{E}\left[v^T\left(I - e_i e_i^T\right)v\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_k\left[v^T\left(I - e_i e_i^T\right)v\right]\right],
\end{aligned}
$$

где $\mathbb{E}_k[\cdot]$ – условное математическое ожидание с фиксированной случайностью всех шагов до k. Поскольку на шаге k векторы e_i генерируются независимо, получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_k\left[v^T\left(I - e_i e_i^T\right)v\right]\right] &= \mathbb{E}\left[v^T \mathbb{E}_k\left[\left(I - e_i e_i^T\right)\right]v\right] \\
&= \left(1 - \frac{1}{d}\right)\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right].
\end{aligned}
$$

Рассмотрим ②. Поскольку i генерируются независимо, x^k не зависит от e_i, сгенерированных на шаге k, то можно применить ту же технику, что и в оценке ①:

$$
\mathbb{E}\left[\left\|e_i e_i^T\left(\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1}, \xi^\pm) - \nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right] = \frac{1}{d}\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1}, \xi^\pm) - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right].
$$

Рассмотрим ③. Используем ту же технику, что и при оценке ①, а также (7):

$$
\mathbb{E}\left[\left\|\left(I - e_i e_i^T\right)\left(\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right] \le \left(1 - \frac{1}{d}\right) L^2 \mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2\right].
$$

Рассмотрим ④. Используя неравенство Юнга-Фенхеля A.3 с $\beta = 2d$ и (7), получаем:

$$
④ \le \left(1 - \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{2d}\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] + 2dL^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2\right]\right).
$$

Используя лемму 1 и оценки на слагаемые получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|h^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \le &\left(1 - \frac{1}{2d}\right)\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] \\
&+ 2dL^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2\right] \\
&+ L^2\tau^2 + \frac{8\sigma_f^2}{\tau^2} + 2\sigma_\nabla^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}.
\end{aligned}
$$

На этом доказательство закончено.

□

B.3 Доказательство Леммы 3

Доказательство. Начнем расписывать ρ^{k+1}:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left\|h^k + d\widetilde{\nabla}_i f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm) - d\left\langle h^k, e_i\right\rangle e_i - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \\
=&\mathbb{E}\left[\left\|(I-de_ie_i^T)\left(h^k-\nabla f(x^k)\right) + de_ie_i^T\left(\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm)-\nabla f(x^{k+1})\right)\right.\right. \\
&\left.\left. + (I-de_ie_i^T)\left(\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right] \\
=&\underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|\left(I-de_ie_i^T\right)\left(h^k-\nabla f(x^k)\right)\right\|^2\right]}_{①} + \underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|de_ie_i^T\left(\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm)-\nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right]}_{②} \\
&+\underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|\left(I-de_ie_i^T\right)\left(\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right]}_{③} \\
&+\underbrace{\mathbb{E}\left[2\left\langle\left(I-de_ie_i^T\right)\left(h^k-\nabla f(x^k)\right), \left(I-de_ie_i^T\right)\left(\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})\right)\right\rangle\right]}_{④} \\
&+\underbrace{\mathbb{E}\left[2\left\langle de_ie_i^T\left(\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm)-\nabla f(x^{k+1})\right), \left(I-de_ie_i^T\right)\left(h^k-\nabla f(x^k)\right)\right\rangle\right]}_{⑤} \\
&+\underbrace{\mathbb{E}\left[2\left\langle\left(I-de_ie_i^T\right)\left(\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})\right), de_ie_i^T\left(\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm)-\nabla f(x^{k+1})\right)\right\rangle\right]}_{⑥}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим ①. Используя обозначение $v := h^k - \nabla f(x^k)$, получим:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|\left(I-de_ie_i^T\right)\left(h^k-\nabla f(x^k)\right)\right\|^2\right] &= \mathbb{E}\left[v^T\left(I-de_ie_i^T\right)^T\left(I-de_ie_i^T\right)v\right] \\
&= \mathbb{E}\left[v^T\left(I-(2d-d^2)e_ie_i^T\right)v\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}_k\left[v^T\left(I-(2d-d^2)e_ie_i^T\right)v\right]\right],
\end{aligned}
$$

где $\mathbb{E}_k[\cdot]$ – условное математическое ожидание с фиксированной случайностью всех шагов до k. Поскольку на шаге k векторы e_i генерируются независимо, получаем:

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}_k\left[v^T\left(I-(2d-d^2)e_ie_i^T\right)v\right]\right]=\mathbb{E}\left[v^T\mathbb{E}_k\left[I-(2d-d^2)e_ie_i^T\right]v\right]$$
$$=(d-1)\,\mathbb{E}\left[\left\|h^k-\nabla f(x^k)\right\|^2\right].$$

Рассмотрим ②. Поскольку i генерируются независимо, x^k не зависит от e_i, сгенерированных на шаге k, то можно применить ту же технику, что и в оценке ①:

$$\mathbb{E}\left[\left\|de_ie_i^T\left(\widetilde{\nabla}f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm)-\nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right]=d\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla}f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm)-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right].$$

Рассмотрим ③. Используем ту же технику, что и при оценке ①, а также (7):

$$\mathbb{E}\left[\left\|\left(I-de_ie_i^T\right)\left(\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})\right)\right\|^2\right]\le(d-1)\,L^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2\right].$$

Рассмотрим ④, ⑤, ⑥. Используя неравенство Юнга-Фенхеля А.3 с $\beta=2$, $\beta=1$, $\beta=\frac{1}{2}$ и (7), получаем:

$$④\le(d-1)\left(2\mathbb{E}\left[\left\|h^k-\nabla f(x^k)\right\|^2\right]+\frac{1}{2}L^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2\right]\right);$$
$$⑤\le(d-1)\left(\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla}f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm)-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right]+\mathbb{E}\left[\left\|h^k-\nabla f(x^k)\right\|^2\right]\right);$$
$$⑥\le(d-1)\left(\frac{1}{2}L^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2\right]+2\mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla}f_\delta(x^{k+1},\xi^\pm)-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right]\right).$$

Используя лемму 1 и оценки на слагаемые получаем:

$$\mathbb{E}\left[\left\|\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right]\le 4d\mathbb{E}\left[\left\|h^k-\nabla f(x^k)\right\|^2\right]$$
$$+2dL^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2\right]$$
$$+4d^2\left(L^2\tau^2+\frac{8\sigma_f^2}{\tau^2}+2\sigma_\nabla^2+\frac{2\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

На этом доказательство закончено.

□

B.4 Доказательство Леммы 4

Доказательство. Начнем расписывать g^{k+1}:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\left\|g^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \\
=&\mathbb{E}\left[\left\|g^k-\nabla f(x^k)+\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})+(g^{k+1}-g^k)\right\|^2\right] \\
=&\mathbb{E}\left[\left\|g^k-\nabla f(x^k)+\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})+\eta_k(\rho^{k+1}-g^k)\right\|^2\right] \\
=&\mathbb{E}\Bigg[\Bigg\|(1-\eta_k)(g^k-\nabla f(x^k))+(1-\eta_k)(\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})) \\
&\quad+\eta_k\left(\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right)\Bigg\|^2\Bigg] \\
=&(1-\eta_k)^2\mathbb{E}\left[\left\|g^k-\nabla f(x^k)\right\|^2\right]+\eta_k^2\mathbb{E}\left[\left\|\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \\
&\quad+(1-\eta_k)^2\underbrace{\mathbb{E}\left[\left\|\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right]}_{①} \\
&\quad+(1-\eta_k)^2\underbrace{\mathbb{E}\left[2\left\langle g^k-\nabla f(x^k),\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1})\right\rangle\right]}_{②} \\
&\quad+\eta_k(1-\eta_k)\underbrace{\mathbb{E}\left[2\left\langle\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1}),g^k-\nabla f(x^k)\right\rangle\right]}_{③} \\
&\quad+\eta_k(1-\eta_k)\underbrace{\mathbb{E}\left[2\left\langle\nabla f(x^k)-\nabla f(x^{k+1}),\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right\rangle\right]}_{④}.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим ①. Используя (7), получаем:

$$
① \leq L^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2\right].
$$

Рассмотрим ②. Используя неравенство Юнга-Фенхеля A.3 с $\beta=\frac{2}{\eta_k}$ и (7), получается:

$$
② \leq \frac{\eta_k}{2}\mathbb{E}\left[\left\|g^k-\nabla f(x^k)\right\|^2\right]+\frac{2}{\eta_k}L^2\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1}-x^k\right\|^2\right].
$$

Рассмотрим ③. Так как ξ^+ и ξ^- генерируются независимо, то получается:

$$
③ = \mathbb{E}\left[\left\langle\mathbb{E}_k\left[\rho^{k+1}-\nabla f(x^{k+1})\right],\nabla g^k-f(x^k)\right\rangle\right],
$$

где $\mathbb{E}_k[\cdot]$ – условное ожидание с фиксированной случайностью всех шагов до k. Упростим ③:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_k\left[\rho^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right] = \mathbb{E}_k\Big[&(I - d e_i e_i^T)\left(h^k - \nabla f(x^k)\right) \\
&+ d e_i e_i^T\left(\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1}, \xi^{\pm}) - \nabla f(x^{k+1})\right) \\
&+ (I - d e_i e_i^T)\left(\nabla f(x^k) - \nabla f(x^{k+1})\right)\Big] \\
=&\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1}) - \nabla f(x^{k+1}).
\end{aligned}
$$

Используя неравенство Юнга-Фенхеля A.3 с $\beta = \frac{1}{2}$, получается:

$$
\begin{aligned}
③ \leq 2\mathbb{E}&\left[\left\|\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1}) - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \\
&+ \frac{1}{2}\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right].
\end{aligned}
$$

Рассмотрим ④. Используя неравенство Юнга-Фенхеля A.3 с $\beta = \eta_k^2$ и (7), получается:

$$
\begin{aligned}
④ \leq \frac{1}{\eta_k^2} L^2 \mathbb{E}&\left[\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2\right] \\
&+ \eta_k^2 \mathbb{E}\left[\left\|\widetilde{\nabla} f_\delta(x^{k+1}) - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right].
\end{aligned}
$$

Используя лемму 1 и оценки на слагаемые получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|g^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \leq& (1 - \eta_k)\,\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] \\
&+ \eta_k^2 \mathbb{E}\left[\left\|\rho^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \\
&+ \frac{4L^2}{\eta_k}\mathbb{E}\left[\left\|x^{k+1} - x^k\right\|^2\right] \\
&+ 3\eta_k d\left(L^2\tau^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}\right).
\end{aligned}
$$

На этом доказательство закончено.

$\square$

C Доказательство сходимости алгоритма Франка-Вульфа с JAGUAR

C.1 Доказательство Теоремы 1

Доказательство. Начнем с того, что выпишем результат из Леммы 2 с $\sigma_f = \sigma_\nabla = 0$ и подставим $\gamma_k = \frac{4}{k+8d}$:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \leq \left(1 - \frac{1}{2d}\right)\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] + \frac{32dL^2D^2}{(k+8d)^2} + L^2\tau^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}.$$

Теперь используем Лемму 6 с $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1/2d, k_0 = 8d$; $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 32dL^2D^2$; $\alpha_2 = 0, \beta_2 = L^2\tau^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}$ и $i^* = 1$:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{d^2 \max\left\{L^2D^2, \left\|h^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right\}}{(k+8d)^2} + dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

Если $h^0 = \widetilde{\nabla} f_\delta(x^0)$, то получим:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{d^2L^2D^2}{(k+8d)^2} + dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

На этом доказательство закончено.

□

C.2 Доказательство Теоремы 2

Доказательство. Начнем с того, что запишем результат Леммы 2 из [56]. При предположениях 4, 14, 15 и 16 выполняется следующее неравенство:

$$\mathbb{E}\left[f(x^{k+1}) - f(x^*)\right] \leq (1-\gamma_k)\mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] + \gamma_k D\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|\right] + \frac{LD^2\gamma_k^2}{2}.$$

Для оценки $\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|\right]$, используется неравенство Йенсена:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right]}.$$

Тогда получается:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|\right] = \mathcal{O}\left(\frac{dLD}{k+8d} + \sqrt{d}L\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta}{\tau}\right).$$

Подставим $\gamma_k = \frac{4}{k+8d}$, тогда рекуррентное соотношение будет выглядеть:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[f(x^{k+1}) - f(x^*)\right] \leq & \left(1 - \frac{4}{k+8d}\right)\mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] \\ & + \frac{1}{(k+8d)^2}\mathcal{O}\left(dLD^2\right) \\ & + \frac{1}{k+8d}\mathcal{O}\left(\sqrt{d}LD\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta D}{\tau}\right).\end{aligned}$$

Теперь используем Лемму 6 с $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 4, k_0 = 8d$; $\alpha_1 = 2, \beta_1 = dLD^2$; $\alpha_2 = 1, \beta_2 = \sqrt{d}L\tau D + \frac{\sqrt{d}\Delta D}{\tau}$ и $i^* = 1$, получаем:

$$\mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] = \mathcal{O}\left(\frac{d\max\{LD^2, f(x^0) - f(x^*)\}}{k+8d} + \sqrt{d}LD\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta D}{\tau}\right).$$

На этом доказательство закончено.

□

C.3 Доказательство Теоремы 3

Доказательство. Начнем с того, что выпишем результат из Леммы 2 и подставим $\gamma_k = \frac{4}{k+8d^{3/2}}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left\|h^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] \leq & \left(1 - \frac{1}{2d}\right)\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] \\ & + \frac{32dL^2D^2}{(k+8d^{3/2})^2} + L^2\tau^2 + \frac{8\sigma_f^2}{\tau^2} + 2\sigma_\nabla^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}.\end{aligned}$$

Теперь используем лемму 6 с $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1/2d, k_0 = 8d^{3/2}$; $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 32dL^2D^2$; $\alpha_2 = 0, \beta_2 = L^2\tau^2 + \frac{8\sigma_f^2}{\tau^2} + 2\sigma_\nabla^2 + \frac{2\Delta^2}{\tau^2}$ и $i^* = 1$:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\Bigg(\frac{d^2 \max\left\{L^2D^2, d\mathbb{E}\left[\left\|h^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right]\right\}}{(k+8d^{3/2})^2} + dL^2\tau^2 + \frac{d\sigma_f^2}{\tau^2} + d\sigma_\nabla^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\Bigg).$$

Если $h^0 = \widetilde{\nabla} f_\delta\left(x^0, \xi^{\pm}_{\overline{1,d}}\right))$, то получим:

$$\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{d^2L^2D^2}{(k+8d^{3/2})^2} + dL^2\tau^2 + \frac{d\sigma_f^2}{\tau^2} + d\sigma_\nabla^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

Выпишем результат из Леммы 3 и подставим $\gamma_k = \frac{4}{k+8d^{3/2}}$:

$$\mathbb{E}\left[\left\|\rho^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\Bigg(\frac{d^3 \max\left\{L^2D^2, d\mathbb{E}\left[\left\|h^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right]\right\}}{(k+8d^{3/2})^2} + d^2L^2\tau^2 + \frac{d^2\sigma_f^2}{\tau^2} + d^2\sigma_\nabla^2 + \frac{d^2\Delta^2}{\tau^2}\Bigg).$$

Выпишем результат из Леммы 4 и подставим $\gamma_k = \frac{4}{k+8d^{3/2}}$ и $\eta_k = \frac{4}{(k+8d^{3/2})^{2/3}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left\|g^{k+1} - \nabla f(x^{k+1})\right\|^2\right] &\le \left(1 - \frac{4}{(k+8d^{3/2})^{2/3}}\right)\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] \\
&+ \frac{1}{(k+8d^{3/2})^{10/3}}\mathcal{O}\left(d^3 \max\left\{L^2D^2, d\mathbb{E}\left[\left\|h^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right]\right\}\right) \\
&+ \frac{1}{(k+8d^{3/2})^{4/3}}\mathcal{O}\left(L^2D^2 + d^2L^2\tau^2 + \frac{d^2\sigma_f^2}{\tau^2} + d^2\sigma_\nabla^2 + \frac{d^2\Delta^2}{\tau^2}\right) \\
&+ \frac{1}{(k+8d^{3/2})^{2/3}}\left(dL^2\tau^2 + \frac{2d\Delta^2}{\tau^2}\right).
\end{aligned}$$

Используя Лемму 6 с $\alpha_0 = 2/3, \beta_0 = 4, k_0 = 8d^{3/2}$; $\alpha_1 = 10/3, \beta_1 = d^3 \max\Big\{L^2D^2,$ $d\mathbb{E}\left[\left\|h^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right]\Big\}$; $\alpha_2 = 4/3, \beta_2 = L^2D^2 + d^2L^2\tau^2 + \frac{d^2\sigma_f^2}{\tau^2} + d^2\sigma_\nabla^2 + \frac{d^2\Delta^2}{\tau^2}$;

$\alpha_3 = 2/3$, $\beta_3 = dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}$ и $i^* = 2$ получаем:

$$\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\Bigg(\frac{\max\left\{L^2D^2 + d^2\sigma_f^2/\tau^2 + d^2\sigma_\nabla^2, d\mathbb{E}\left[\left\|g^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right]\right\}}{(k+8d^{3/2})^{2/3}} + \frac{d^4\mathbb{E}\left[\left\|h^0 - \nabla f(x^0)\right\|^2\right]}{(k+8d^{3/2})^{8/3}} + dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\Bigg).$$

Если $h^0 = g^0 = \widetilde{\nabla} f_\delta\left(x^0, \xi^{\pm}_{\overline{1,d}}\right)$, то получим:

$$\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{L^2D^2 + d^2\sigma_f^2/\tau^2 + d^2\sigma_\nabla^2}{(k+8d^{3/2})^{2/3}} + dL^2\tau^2 + \frac{d\Delta^2}{\tau^2}\right).$$

На этом доказательство закончено.

$\square$

C.4 Доказательство Теоремы 4

Доказательство. Начнем с того, что запишем результат Леммы 2 из [56]. При предположениях 7, 14, 15, 16 выполняется следующее неравенство:

$$\mathbb{E}\left[f(x^{k+1}) - f(x^*)\right] \leq (1-\gamma_k)\mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] + \gamma_k D\mathbb{E}\left[\left\|h^k - \nabla f(x^k)\right\|\right] + \frac{LD^2\gamma_k^2}{2}.$$

Для оценки $\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|\right]$, используется неравенство Йенсена:

$$\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|\right] \leq \sqrt{\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right]}.$$

Тогда получается:

$$\mathbb{E}\left[\left\|g^k - \nabla f(x^k)\right\|^2\right] = \mathcal{O}\left(\frac{LD + d\sigma_f/\tau + d\sigma_\nabla}{(k+8d^{3/2})^{1/3}} + \sqrt{d}L\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta}{\tau}\right).$$

Подставим $\gamma_k = \frac{4}{k+8d^{3/2}}$, тогда рекуррентное соотношение будет выглядеть:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(x^{k+1}) - f(x^*)\right] \leq \left(1 - \frac{4}{k+8d^{3/2}}\right) \mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] \\
+ \frac{8LD^2}{(k+8d^{3/2})^2} \\
+ \frac{1}{(k+8d^{3/2})^{4/3}} \mathcal{O}\left(LD^2 + d\sigma_f D/\tau + d\sigma_\nabla D\right) \\
+ \frac{1}{k+8d^{3/2}} \mathcal{O}\left(\sqrt{d}LD\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta D}{\tau}\right).
\end{aligned}
$$

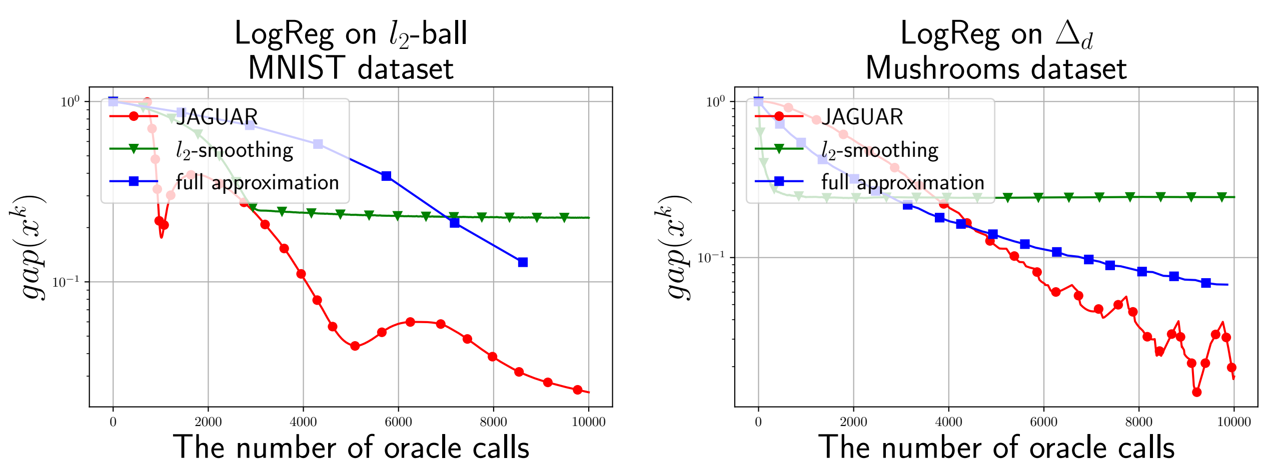
Используя Лемму 6 с $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 4, k_0 = 8d^{3/2}$; $\alpha_1 = 2, \beta_1 = 8LD^2$; $\alpha_2 = 4/3$; $\beta_2 = LD^2 + d\sigma_f D/\tau + d\sigma_\nabla D$; $\alpha_3 = 1, \beta_3 = \sqrt{d}LD\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta D}{\tau}$ и $i^* = 2$, получаем:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[f(x^k) - f(x^*)\right] = \mathcal{O}\Bigg(\frac{\max\{LD^2 + d\sigma_f D/\tau + d\sigma_\nabla D, \sqrt{d}(f(x^0) - f(x^*))\}}{(k+8d^{3/2})^{1/3}} \\
+ \sqrt{d}LD\tau + \frac{\sqrt{d}\Delta D}{\tau} \Bigg).
\end{aligned}
$$

На этом доказательство закончено.

$\square$

C.5 Дополнительные эксперименты



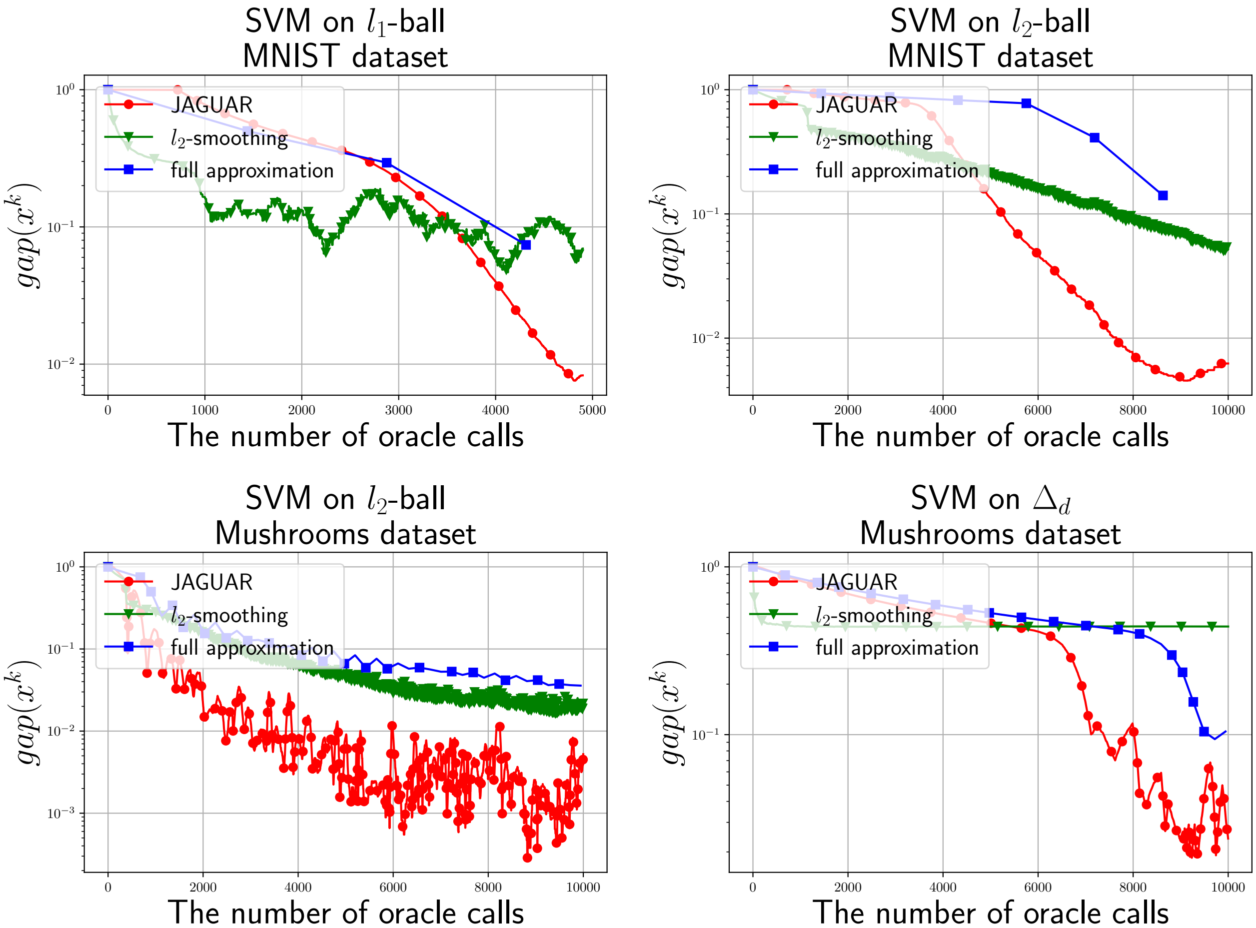


Рис. 4: Детерминированный алгоритм Франка-Вульфа.

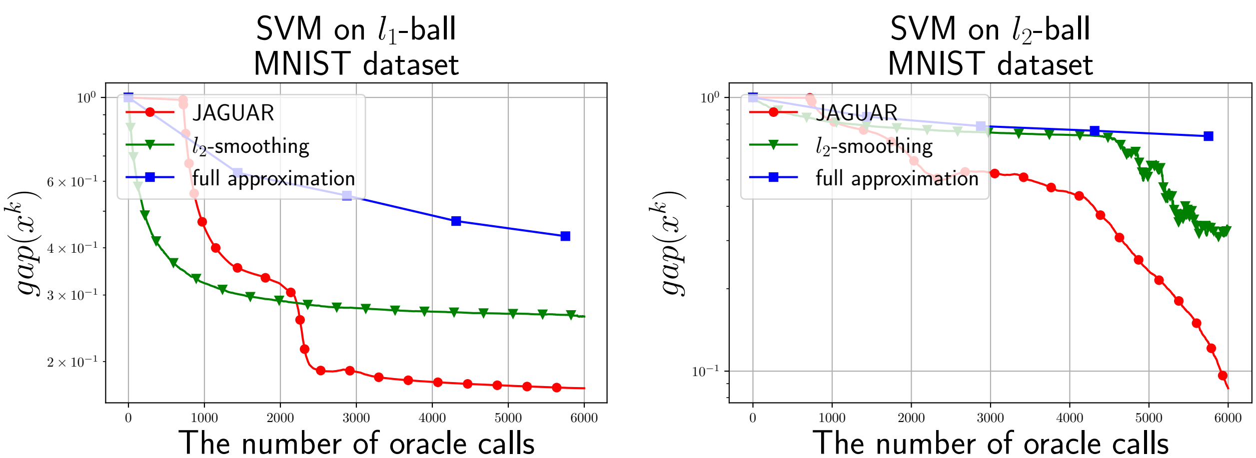


Рис. 5: Стохастический алгоритм (OOC) Франка-Вульфа.

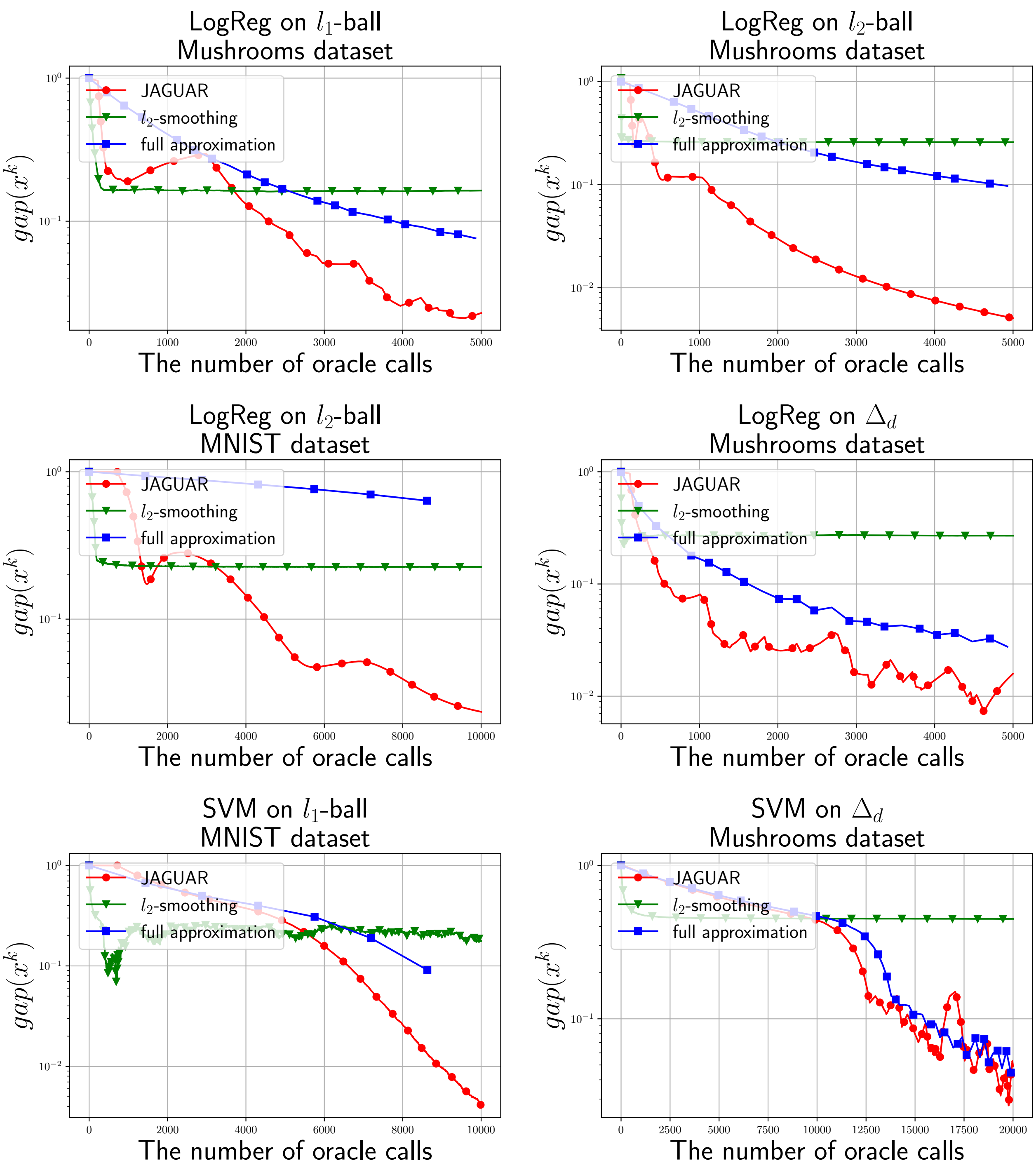


Рис. 6: Стохастический алгоритм (ДОС) Франка-Вульфа.