Низкоранговая аппроксимация тензоров

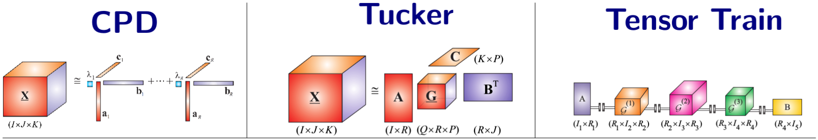
Александр Иванович Богданов

Московский физико-технический институт

Lab 405a

Курс: Прогнозирование временных рядов

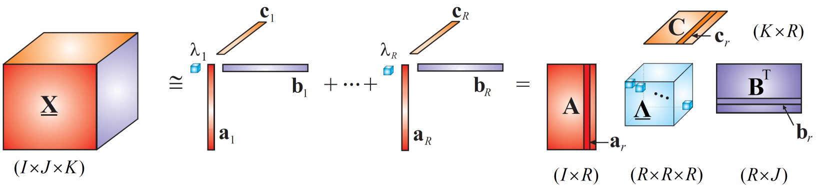
Задача: С помощью библиотеки Hottbox сравнить три метода декомпозиции: каноническое представление (CPD), представление Таккера (HOSVD, HOOI) и тензорный поезд (TTSVD) по трем метрикам: точность, вычислительная сложность и устойчивость.



storage complexity

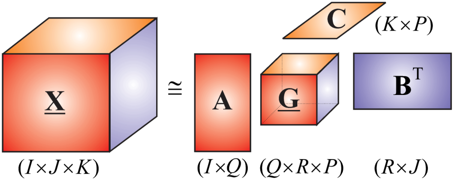
$\mathcal{O}(NIR)$	$\mathcal{O}(NIR + R^N)$	Depends on a choosen type

Каноническое представление (CPD)



$$\underline{\mathbf{X}} \simeq \sum_{r=1}^{R} \lambda_r \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r = \underline{\mathbf{\Lambda}} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3 \mathbf{C} = [\underline{\mathbf{\Lambda}}; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$$

Представление Таккера (HOSVD, HOOI)



$$\underline{\mathbf{X}} \simeq \sum_{q=1}^{Q}\sum_{r=1}^{R}\sum_{p=1}^{P} g_{qrp}\mathbf{a}_q \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_p = \underline{\mathbf{G}} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3 \mathbf{C} = [\underline{\mathbf{G}}; \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]$$

Представление Таккера (HOSVD, HOOI)

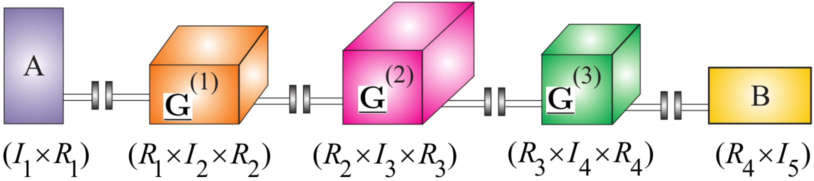
1. Разложение по сингулярным значениям высокого порядка (HOSVD)

$$\underline{\mathbf{X}} = \underline{\mathbf{G}} \times_1 \mathbf{A} \times_2 \mathbf{B} \times_3 \mathbf{C}$$
$$\mathbf{X}_{(1)} = \mathbf{U}_1 \mathbf{\Sigma}_1 \mathbf{V}_1^T \rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{U}_1[1:R_1]$$
$$\mathbf{X}_{(2)} = \mathbf{U}_2 \mathbf{\Sigma}_2 \mathbf{V}_2^T \rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{U}_2[1:R_2]$$
$$\mathbf{X}_{(3)} = \mathbf{U}_3 \mathbf{\Sigma}_3 \mathbf{V}_3^T \rightarrow \mathbf{C} = \mathbf{U}_3[1:R_3]$$
$$\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{X}} \times_1 \mathbf{A}^T \times_2 \mathbf{B}^T \times_3 \mathbf{C}^T$$

2. Ортогональная итерация высокого порядка (HOOI)

$$\underline{\mathbf{Y}} = \underline{\mathbf{X}} \times_1 \mathbf{A}^{(1)T} \times_2 \cdots \times_{n-1} \mathbf{A}^{(n-1)T} \times_{n+1} \mathbf{A}^{(n+1)} \times \cdots \times_N \mathbf{A}^{(N)}$$
$$\mathbf{A}^{(n)} \leftarrow R_n \text{ левые сингулярные вектора } \mathbf{Y}_{(n)}$$
$$\underline{\mathbf{G}} = \underline{\mathbf{X}} \times_1 \mathbf{A}^{(1)T} \times_2 \mathbf{A}^{(2)T} \times_3 \cdots \times_N \mathbf{A}^{(N)T}$$

Тензорный поезд (TTSVD)



$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \times_2^1 \underline{\mathbf{G}}^{(1)} \times_3^1 \underline{\mathbf{G}}^{(2)} \times_3^1 \cdots \times_3^1 \underline{\mathbf{G}}^{(N-1)} \times_3^1 \mathbf{B} \\ &= \left[\mathbf{A}, \underline{\mathbf{G}}^{(1)}, \underline{\mathbf{G}}^{(2)}, \cdots, \underline{\mathbf{G}}^{(N-1)}, \mathbf{B}\right]\end{aligned}$$

Эксперимент

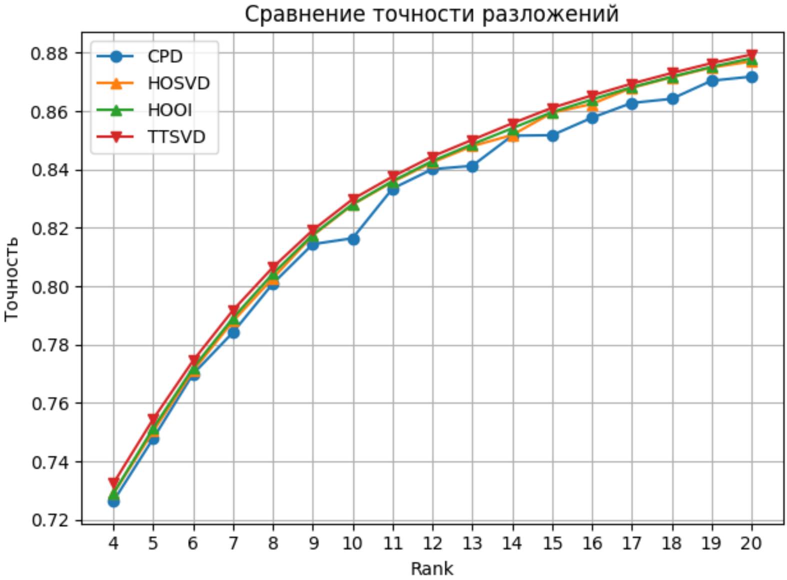
Необходимо исследовать в зависимости от разложения:

- Точность
- Вычислительную сложность
- Устойчивость

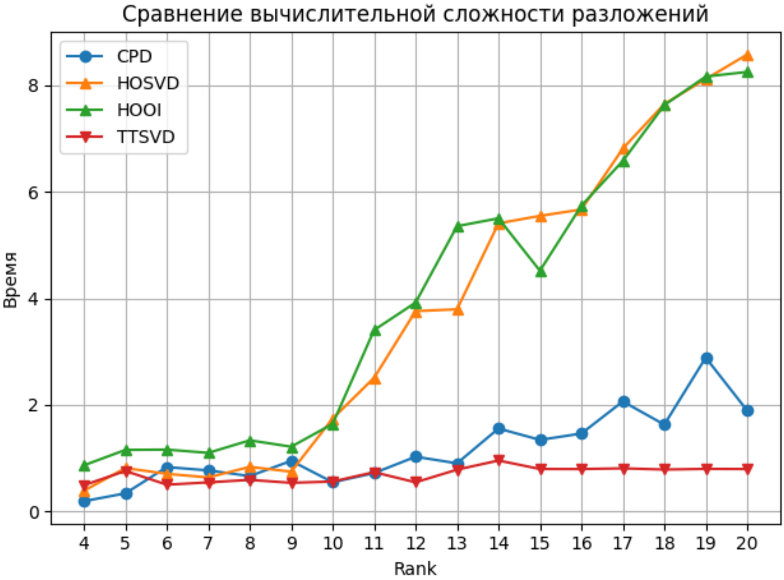
В качестве исследуемого тензора возьмем логотип TensorFlow:

.

Результат

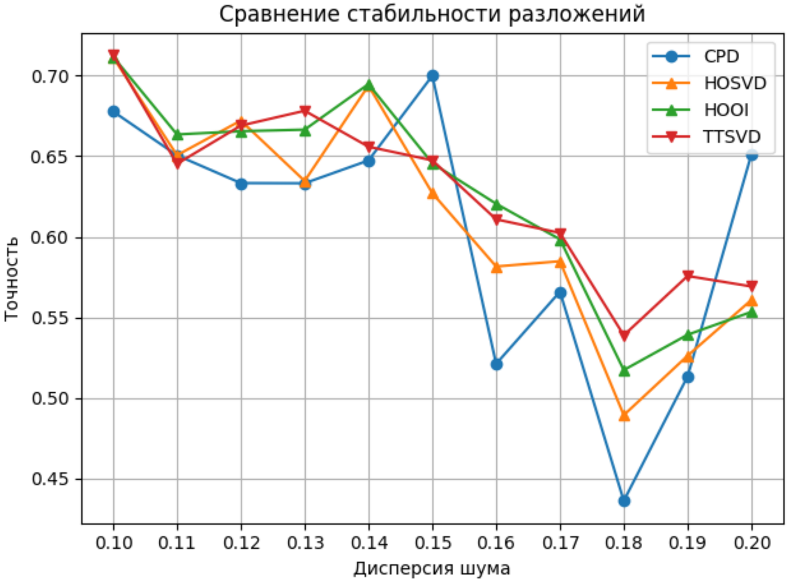

Сравнение точности разложений
CPD
HOSVD
HOOI
TTSVD
0.88
0.86
0.84
0.82
0.80
0.78
0.76
0.74
0.72
Точность
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
Rank

Результат



Сравнение вычислительной сложности разложений
CPD
HOSVD
HOOI
TTSVD
Время
Rank
0
2
4
6
8
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

Результат


Сравнение стабильности разложений
CPD
HOSVD
HOOI
TTSVD
0.70
0.65
0.60
0.55
0.50
0.45
Точность
0.10
0.11
0.12
0.13
0.14
0.15
0.16
0.17
0.18
0.19
0.20
Дисперсия шума

Выводы

- Были исследованы малоранговые разложения, для которых проведены вычислительные эксперименты, которые показали, что тензорный поезд показывает наилучшие результаты;
- Код `https://github.com/Dd0-s/Mathematical_forecasting_methods`

Литература

1. https://github.com/hottbox/hottbox;
2. https://github.com/hottbox/hottbox-tutorials.