Получение фазовой траектории сопряженных маятников с помощью Neural ODE

Александр Иванович Богданов

Московский физико-технический институт

Lab 405a

Курс: Прогнозирование временных рядов

Цель работы

Задача: С помощью Neural ODE восстановить фазовую траекторию сопряженных маятников.

Литература

1. https://web.archive.org/web/20230516005825/https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mechanics)#Coupled_pendula;
2. https://github.com/intsystems/MathematicalForecastingMethods/blob/main/seminars/seminar8.ipynb.

Постановка задачи

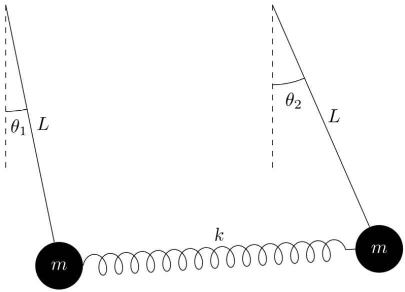

Рис.: Сопряженный маятник

Система состоит из двух математических маятников длины L, массы m, соединенные пружиной с жесткостью k. Обобщенные координаты - θ_1 и θ_2. Рассматриваемые начальные условия: $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = \theta_{10}$, $\theta_2(0) = \theta_{20}$.

Аналитическое решение

$$\mathrm{E}_k = \frac{1}{2} mL^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$\mathrm{E}_p = mgL(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) + \frac{1}{2} kL^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$L = \frac{1}{2} mL^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - mgL(2 - \cos\theta_1 - \cos\theta_2) - \frac{1}{2} kL^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

Воспользуемся уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{\theta}} - L_{\theta} = 0,\ \theta = \{\theta_1, \theta_2\}$$

Аналитическое решение

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{L}\sin\theta_1 + \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{L}\sin\theta_2 - \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

При малых углах получаем:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{L}(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 + (\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m})(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

В итоге получаем:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_1(0) + \theta_2(0))\cos(w_1 t) + \frac{1}{2}(\theta_1(0) - \theta_2(0))\cos(w_2 t) \\ \theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_1(0) + \theta_2(0))\cos(w_1 t) - \frac{1}{2}(\theta_1(0) - \theta_2(0))\cos(w_2 t) \end{cases}$$

где $w_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, $w_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m}}$.

Эксперимент

Преобразуем систему: $x_1 = \theta_1 + \theta_2$, $y_1 = \dot{x}_1$, $x_2 = \theta_1 - \theta_2$, $y_2 = \dot{x}_2$.

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{g}{L} x_1 \\ \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = -(\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m}) x_1 \\ \dot{x}_2 = y_2 \end{cases}$$

Начальные условия: $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$, $\theta_1(0) = 0.1$рад, $\theta_2(0) = 0.05$рад.
Параметры: $g = 9.81\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $L = 1$м, $m = 1$кг, $k = 40\frac{\text{Н}}{\text{м}}$.
Модель: Линейная + Тангенс + Линейная (как в семинаре).

Результат

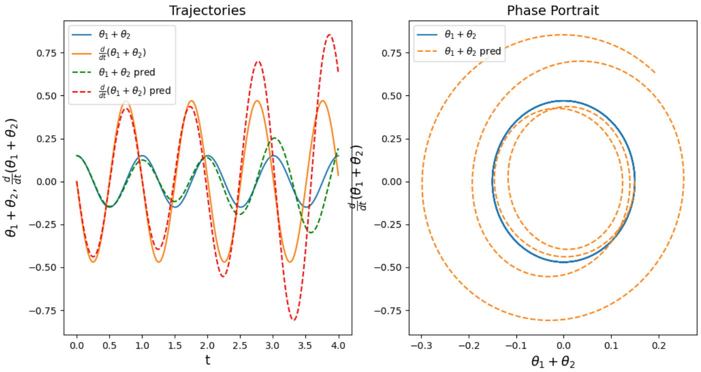

Рис.: $\theta_1 + \theta_2$

Результат

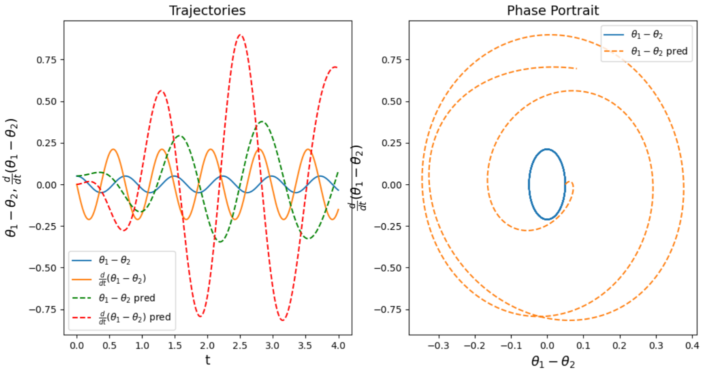

Рис.: $\theta_1 - \theta_2$

Результат

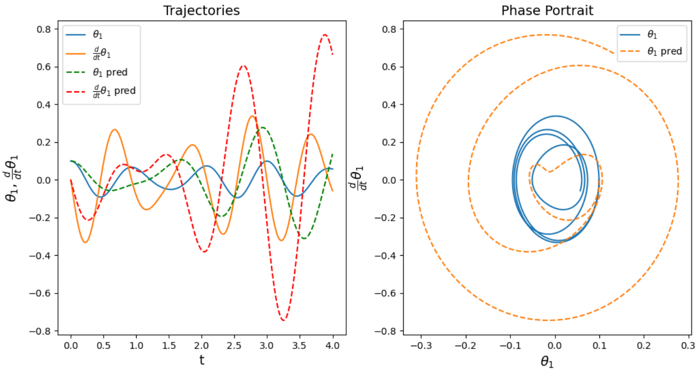

Рис.: θ_1

Результат

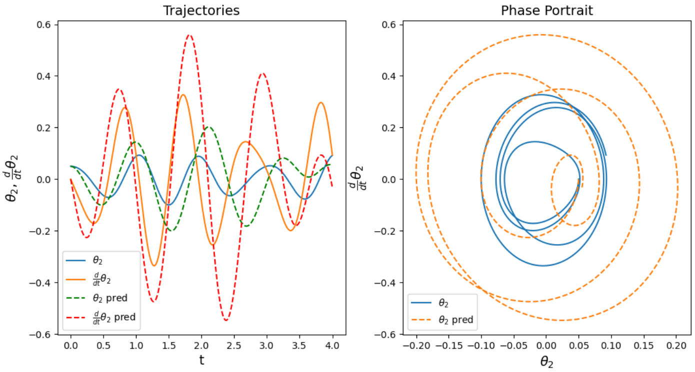

Рис.: θ_2

Выводы

- Модель может с хорошей точностью предсказывать только для случаев, когда осцилляции не очень большие и время не очень большое;
- SGD не работает, Adam работает, но очень тяжело подобрать шаг, так как либо модель находится в минимуме, либо вылетает на бесконечность;
- Код `https://github.com/Dd0-s/Mathematical_forecasting_methods`