

# Получение фазовой траектории сопряженных маятников с помощью Neural ODE

Александр Иванович Богданов

Московский физико-технический институт

**Lab 405a**

*Курс:* Прогнозирование временных рядов

**Задача:** С помощью Neural ODE восстановить фазовую траекторию сопряженных маятников.

1. [https://web.archive.org/web/20230516005825/https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum\\_\(mechanics\)#Coupled\\_pendula](https://web.archive.org/web/20230516005825/https://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mechanics)#Coupled_pendula);
2. <https://github.com/intsystems/MathematicalForecastingMethods/blob/main/seminars/seminar8.ipynb>.

## Постановка задачи

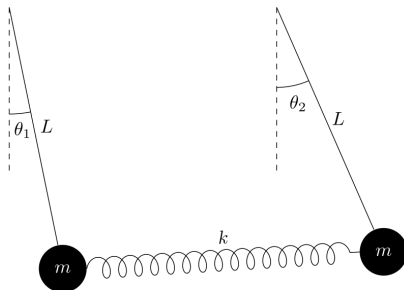


Рис.: Сопряженный маятник

Система состоит из двух математических маятников длины  $L$ , массы  $m$ , соединенные пружиной с жесткостью  $k$ . Обобщенные координаты -  $\theta_1$  и  $\theta_2$ . Рассматриваемые начальные условия:  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ ,  $\theta_1(0) = \theta_{10}$ ,  $\theta_2(0) = \theta_{20}$ .

## Аналитическое решение

$$E_k = \frac{1}{2}mL^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2)$$

$$E_p = mgL(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) + \frac{1}{2}kL^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$L = \frac{1}{2}mL^2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - mgL(2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) - \frac{1}{2}kL^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

Воспользуемся уравнением Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}L_{\dot{\theta}} - L_{\theta} = 0, \quad \theta = \{\theta_1, \theta_2\}$$

## Аналитическое решение

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{L} \sin \theta_1 + \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{L} \sin \theta_2 - \frac{k}{m}(\theta_1 - \theta_2) \end{cases}$$

При малых углах получаем:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 + \frac{g}{L}(\theta_1 + \theta_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2 + (\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m})(\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

В итоге получаем:

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2}(\theta_1(0) + \theta_2(0)) \cos(w_1 t) + \frac{1}{2}(\theta_1(0) - \theta_2(0)) \cos(w_2 t) \\ \theta_2 = \frac{1}{2}(\theta_1(0) + \theta_2(0)) \cos(w_1 t) - \frac{1}{2}(\theta_1(0) - \theta_2(0)) \cos(w_2 t) \end{cases}$$

где  $w_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ ,  $w_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m}}$ .

Преобразуем систему:  $x_1 = \theta_1 + \theta_2$ ,  $y_1 = \dot{x}_1$ ,  $x_2 = \theta_1 - \theta_2$ ,  
 $y_2 = \dot{x}_2$ .

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\frac{g}{L}x_1 \\ \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_2 = -(\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m})x_1 \\ \dot{x}_2 = y_2 \end{cases}$$

**Начальные условия:**  $\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0$ ,  $\theta_1(0) = 0.1\text{рад}$ ,  
 $\theta_2(0) = 0.05\text{рад}$ .

**Параметры:**  $g = 9.81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ ,  $L = 1\text{м}$ ,  $m = 1\text{кг}$ ,  $k = \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

**Модель:** Линейная + Тангенс + Линейная (как в семинаре).

# Результат

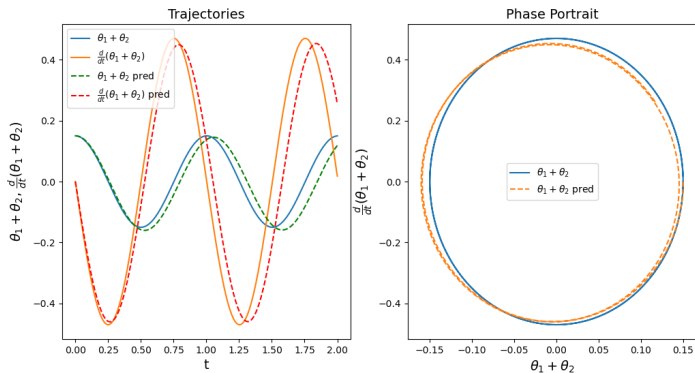


Рис.:  $\theta_1 + \theta_2$



- ▶ Модель с хорошей точностью предсказывает фазовую траекторию сопряженного маятника;
- ▶ Удалось аппроксимировать ДУ небольшой архитектурой;
- ▶ Код [https://github.com/Dd0-s/Mathematical\\_forecasting\\_methods](https://github.com/Dd0-s/Mathematical_forecasting_methods)