Esame 16 Luglio 2019

1.1

$$\sigma = (153)(2476) \qquad \tau = (3485)$$

- Ordine e parità di σ, τ, del prodotto $\sigma\tau$. Calcolare $(\sigma\tau)^{20}$

Ordine σ = $mcm(3,4) = 12$, Parità = pari · dispari = dispari
Ordine τ = $m.cm(4) = 4$, Parità = dispari

$$\sigma\tau = \sigma \text{ dopo } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (15)(248376)$$

Ordine $\sigma\tau$ = $mcm(6,2) = 6$, Parità = dispari · dispari = pari

$$(\sigma\tau)^{20} = (\sigma\tau)^{20 \bmod 6} \Rightarrow (\sigma\tau)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(\sigma t)^{20} = (\sigma t)^2 = (287)(364)$$

1.2

Risolvere il sistema di congruenze

$$\begin{cases} 4x \equiv 6 \mod 14 \\ 15x \equiv 10 \mod 25 \end{cases}$$

- $4x \equiv 6 \mod 14$

$MCD(14,4) = 2$
$14 = 3 \cdot 4 + 2$
$4 = 2 \cdot 2 + 0$

$MCD \neq 1$, controllo se, dato $a \equiv b \mod n$, $MCD(a,n)$ divide "b". Si, lo divide quindi:

- $2x \equiv 3 \mod 7$

Inverso moltiplicativo di 2 in $\mathbb{Z}/7 = 4$

- $x \equiv 12 \mod 7 \Rightarrow x \equiv 5 \mod 7$

$$\boxed{x = 5 + 7t}$$

$$MCD(25,15) = 5$$
$$25 = 1 \cdot 15 + 10$$
$$15 = 1 \cdot 10 + 5$$
$$10 = 2 \cdot 5 + 0$$

- $15x \equiv 10 \mod 25$

$MCD(25,15)$ divide 10

- $3x \equiv 2 \mod 5$

Inverso molt di 3 in $\mathbb{Z}/5 = 2$

- $x \equiv 4 \mod 5 \Rightarrow x = 4 + 5t$

Sostituiamo la x nella ~~prima~~ seconda congruenza

~~$4+5t$~~
- $5 + 7t \equiv 4 \mod 5$
- $7t \equiv -1 \mod 5$
- $7t \equiv 4 \mod 5$

Inverso moltiplicativo di 7 in $\mathbb{Z}/5 = 3$

- $t \equiv 12 \mod 5$
- $t \equiv 2 \mod 5$

$t = 2 + 5s$

Andiamo a sostituire nella prima congruenza

$$x = 5 + 7(2 + 5s) \Rightarrow x = 5 + 14 + 35s$$

$\boxed{x \equiv 19 \mod 35}$ = Soluzione

Esercizio 2.1 Si consideri al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$, il sistema lineare:

$$\begin{cases} 4x + 2y + az = 4 \\ x - y - 2z = 3 \\ 2x + 4y + 3z = 2 \end{cases}$$

i) Scrivere la matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ dei coefficienti e la matrice $A' \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ completa del sistema; determinare, al variare di a, il rango di A e il rango di A'.

$$A=\begin{pmatrix}4&2&a\\1&-1&-2\\2&4&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\2&4&3\\4&2&a\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&6&7\\0&6&a+8\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2\\0&6&7\\0&0&a+1\end{pmatrix}$$

$$A'=\begin{pmatrix}4&2&a&4\\1&-1&-2&3\\2&4&3&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2&3\\2&4&3&2\\4&2&a&4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2&3\\0&6&7&-4\\0&6&a+8&-8\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&-1&-2&3\\0&6&7&-4\\0&0&a+1&-4\end{pmatrix}$$

- Con $a=-1$ $\quad rk(A)=2 \quad rk(A')=3$
- Con $a\neq-1$ $\quad rk(A)=3 \quad rk(A')=3$

ii) Stabilire per quali valori del parametro a il sistema ammette soluzioni e per tali valori determinare tutte le soluzioni.

Secondo il Teorema di Rouché-Capelli

- Se $rk(A)\neq rk(A')$ $\Rightarrow$ Non abbiamo soluzioni
- Se $rk(A)=rk(A')=n$ $\Rightarrow$ Abbiamo un'unica soluzione
- Se $rk(A)=rk(A')=m<n$ $\Rightarrow$ Abbiamo $\infty^{n-rk(A)}$ soluzioni che dipendono da $n-rk(A)$ parametri.

Quindi: con $a=-1$ non abbiamo soluzioni
con $a\neq-1$ abbiamo un'unica soluzione data dal sistema:

$$\begin{cases}x-y-2z=3\\6y+7z=-4\\(a+1)z=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y-2z=3\\6y-\frac{28}{a+1}=-4\\z=-\frac{4}{a+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y-2z=3\\y=\frac{-4a+24}{6(a+1)}\\z=\frac{-4}{a+1}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y-2z=3\\y=\frac{2(6-a)}{3(a+1)}\\z=\frac{-4}{a+1}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3+\frac{2(6-a)}{3(a+1)}-\frac{8}{a+1}\\y=\frac{2(6-a)}{3(a+1)}\\z=\frac{-4}{a+1}\end{cases}$$

La soluzione è data da:

- $x=\frac{7a-3}{3(a+1)}$
- $y=\frac{2(6-a)}{3(a+1)}$
- $z=-\frac{4}{a+1}$

$$x=\frac{9a+9+12-2a-24}{3(a+1)}=\frac{7a-3}{3(a+1)}$$

2.2 Sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ il cui autospazio relativo all'autovalore 0 è il sottospazio W di $\mathbb{R}^3$ di equazioni:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Tale che: $T(0,1,1) = (1,0,2)$ $T(1,1,1) = (1,0,1)$

Determinare la matrice A associata a T rispetto alla base canonica.

Autospazio = insieme di tutti gli autovettori rispetto ad un autovalore.
Stiamo parlando dell'autovalore ϕ quindi gli autovettori nell'autospazio sono della forma $\phi \cdot v = (0,0,0)$

poiché il sottospazio che lo genera è composto dalle equazioni: $x = 0$, $y = 0$

significa che $T(0,0,1) = (0,0,0)$

$$T(0,1,0) = T(0,1,1) - T(0,0,1) = (1,0,2)$$

$$T(1,0,0) = T(1,1,1) - T(0,1,0) - \underbrace{T(0,0,1)}_{0} = (0,0,-1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A e C sono simili?

- Due matrici sono simili se hanno gli stessi autovalori, rango, determinante e traccia. Non vale il contrario.

$Tr(A) = 0$ $tr(C) = -1$ Non sono simili.

Traccia = Somma dei valori sulla diagonale principale.

Esame 24 Giugno 2013

1.1 Data un'equazione in $\mathbb{Z}\backslash n$ $a \equiv b \bmod k$, sappiamo che questa ammette soluzioni se:
- $MCD(a,k) = 1$

oppure

- $MCD(a,k) > 1$ e $MCD(a,k)$ divide b

Abbiamo $d = MCD(c,m)$ e $ac \equiv bc \bmod m$ se e solo se $a \equiv b \bmod k$, dove $m = kd$

Sia c = una quantità $s \cdot d$ (dato che d è il suo MCD)

Abbiamo qui che $a \equiv b \bmod k$, allora $a-b = rk$, di conseguenza $(a-b)c = rck$ ma c era uguale a sd quindi $rck = rsdk$, dato $m = kd$, $rsdk = rsm$

rsm ritradotto in congruenze con $(a-b)c$ =

$ac \equiv bc \bmod m$

1.2 Calcoliamo gli inversi:

91 Non Invertibile visto che $MCD \neq 1$
57 Non Invertibile visto che $MCD \neq 1$
43 Invertibile visto che $MCD = 1$

$MCD(105, 91) = 7$
$105 = 1 \cdot 91 + 14$
$91 = 6 \cdot 14 + 7$
$14 = 2 \cdot 7 + 0$

$MCD(105, 57) = 3$
$105 = 1 \cdot 57 + 48$
$57 = 1 \cdot 48 + 9$
$48 = 5 \cdot 9 + 3$
$9 = 3 \cdot 3 + 0$

$MCD(105, 43) = 1$
$105 = 2 \cdot 43 + 19$
$43 = 2 \cdot 19 + 5$
$19 = 3 \cdot 5 + 4$
$5 = 1 \cdot 4 + 1$
$4 = 4 \cdot 1 + 0$

Bezout su 43

$1 = 5 - 4 = (43 - 2 \cdot 19) - (19 - 3 \cdot 5)$
$= 4 \cdot 5 - 19 \Rightarrow 4 \cdot (43 - 2 \cdot 19) - 19 =$
$4 \cdot 43 - 9 \cdot 19 \Rightarrow 4 \cdot 43 - 9 \cdot (105 - 2 \cdot 43)$
$= 22 \cdot 43 - 9 \cdot 105 = 1$

22 è l'inverso di 43 in $\mathbb{Z}/5$

$O(43) = 4 \Rightarrow 43^4 \equiv 1 \bmod 5$

Scanned by CamScanner

2.1 Uguale a quello nell'esame precedente

2.2 Uguale a quello nell'esame precedente

Esame 30 Gennaio 2019

1.1
$$\begin{cases} 72x \equiv 2 \mod 25 \\ 15x \equiv 23 \mod 22 \end{cases}$$

$72 \cdot 8 \cdot x \equiv 2 \cdot 8 \mod 25$

$$\begin{cases} x \equiv 16 \mod 25 \\ x \equiv 3 \mod 22 \end{cases}$$

$x = 16 + 25t$

Sostituisco a quella sotto

$16 + 25t \equiv 3 \mod 22$

$25t \equiv 3 - 13 \mod 22$

$25t \equiv 9 \mod 22$

$t \equiv 3 \mod 22$

$t \equiv 3 \mod 22 \Rightarrow t = 3 + 22s$

Risostituisco sopra

$x = 16 + 25(3 + 22s) = 91 + 550s$

$x \equiv 91 \mod 550$

MCD$(72, 25) = 1$

$72 = 2 \cdot 25 + 22$

$25 = 1 \cdot 22 + 3$

$22 = 7 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

Inverso di $72 = 8$

$1 = 22 - 7 \cdot 3$

$1 = 22 - 7 \cdot (25 - 1 \cdot 22)$

$1 = 8 \cdot 22 - 7 \cdot 25$

$1 = 8 \cdot (72 - 2 \cdot 25) - 7 \cdot 25$

$1 = 8 \cdot 72 - 23 \cdot 25$

Inverso di $15 = 3$

~~Inverso di 25 = 3~~

Inverso di $25 = 15$

MCD$(25, 22) = 1$

$25 = 1 \cdot 22 + 3$

$22 = 7 \cdot 3 + 1$

$3 = 3 \cdot 1 + 0$

$1 = 22 - 7 \cdot 3$

$1 = 22 - 7 \cdot (25 - 1 \cdot 22)$

$1 = 8 \cdot 22 - 7 \cdot 25$

1.2

$\sigma = 6\,1\,2\,8\,5\,4\,7\,3$
$\tau = 1\,2\,3\,5\,4\,8$ $\Big\} S_8$

$O(\sigma) = MCM(8,1) = 8$ $\qquad$ $O(\tau) = mcm(6,1) = 6$

$P(\sigma) =$ Dispari $\qquad$ $P(\tau) =$ Dispari

$$\tau\sigma = \begin{matrix} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 8 & 6 & 7 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 8 & 2 & 5 & 4 \end{matrix} = (1\,3\,6\,2)(4\,7\,5\,8)$$

$O(\tau\sigma) = mcm(4,4) = 4$ $\qquad$ $P(\tau\sigma) =$ dispari $\cdot$ dispari $=$ pari

$66 \equiv 2 \mod 4$

$(\tau\sigma)^{66} = (\tau\sigma)^{66 \mod 4} = (\tau\sigma)^2$

$(\tau\sigma)^2 = (1\,6)(2\,3)(4\,5)(7\,8)$

2.1 → Non sono sicuro al 100% che questo esercizio sia corretto

$U = \langle (1,1,0,-1), (1,2,3,0), (2,3,3,-1) \rangle$

$W = \langle (1,2,2,-2), (2,3,2,-3), (1,3,4,-3) \rangle$

$$\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango 2 ⇒ 2 Vettori Linearmente Indipendenti ⇒ V_1 e V_2

$B(U) = \{(1,1,0,-1), (1,2,3,0)\}$

$$\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango 2 ⇒ 2 Vettori Linearmente Indipendenti ⇒ V_1 e V_2

$B(W) = \{(1,2,2,-2), (2,3,2,-3)\}$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rango 3 = 3 vettori linearmente indipendenti = v_1, v_2, v_3

$B(U+W) = \{(1,1,0,-1), (1,2,3,0), (1,2,2,-2)\}$

Intersezione, ogni $v \in U$ e $v \in W$

quindi prendiamo 4 scalari a_1, a_2, b_1, b_2 tali che

$v = a_1(1,1,0,-1) + a_2(1,2,3,0) =$

$(a_1+a_2, a_1+2a_2, 3a_2, -a_1)$

Ma v deve essere anche uguale a

$v = b_1(1,2,2,-2) + b_2(2,3,2,-3) =$

$(b_1+2b_2, 2b_1+3b_2, 2b_1+2b_2, -2b_1-3b_2)$

Perciò

$$\begin{cases} a_1+a_2 = b_1+2b_2 \\ a_1+2a_2 = 2b_1+3b_2 \\ 3a_2 = 2b_1+2b_2 \\ -a_1 = -2b_1-3b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = b_1+2b_2-2b_1-3b_2 \\ 2b_1 = a_1+2a_2-3b_2 \\ 2b_2 = 3a_2-2b_1 \\ a_1 = 2b_1+3b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -b_1-b_2 \\ 2b_1 = \cancel{2b_1}+\cancel{3b_2}-\cancel{2b_1}-2b_2-\cancel{3b_2} \\ 2b_2 = -3b_1-3b_2-2b_1 \\ a_1 = 2b_1+3b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -b_1-b_2 \\ 2b_1 = -2b_2 \\ 2b_2 = -5b_1-3b_2 \\ a_1 = 2b_1+3b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -b_1-b_2 \\ b_1 = -b_2 \\ b_2 = -b_1 \Rightarrow b_1 = -b_2 \\ a_1 = 2b_1+3b_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_2 = -b_1 - b_2 \\ a_1 = 2b_1 + 3b_2 \\ b_1 = -b_2 \end{cases}$$

Il sistema ammette infinite soluzioni poiché b_2 deve essere espresso come parametro.

Sostituiamo

$$\begin{cases} a_2 = a - a = 0 \\ a_1 = -2a + 3a = a \\ b_1 = -a \\ b_2 = a \end{cases}$$

Andiamo a sostituire in $V = a_1(1,1,0,-1) + a_2(1,2,3,0)$

Otteniamo

$0 + (a, a, 0, -a) =$

$a(1,1,0,-1)$

Dunque

$B(U \cap W) = \{(1,1,0,-1)\}$

Oppure lasciamo $b_1 = -b_2$ e $b_2 = -b_1$

In tal caso

$$\begin{cases} a_1 = 2b_1 + 3b_2 \\ a_2 = -b_1 - b_2 \\ b_1 = -b_2 \\ b_2 = -b_1 \end{cases}$$

$V = \underbrace{(2b_1 + 3b_2)}_{a_1} \cdot (1,1,0,-1) + \underbrace{(-b_1 - b_2)}_{a_2} \cdot (1,2,3,0) =$

$(2b_1 + 3b_2, 2b_1 + 3b_2, 0, -2b_1 - 3b_2) + (-b_1 - b_2, -2b_1 - 2b_2, -3b_1 - 3b_2, 0) =$

$(b_1 + 2b_2, b_2, -3b_1 - 3b_2, -2b_1 - 3b_2)$

$\Downarrow$

$V = b_1(1,0,-3,-2) + b_2(2,1,-3,-3)$

Dunque

$B(U \cap W) = \{(1,0,-3,-2), (2,1,-3,-3)\}$

Non so quale delle 2 soluzioni sia corretta. Magari sono corrette entrambe, con la sola differenza che questa è più minimale dell'altra.

UPDATE: Soluzione corretta a sinistra!

2.2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Nucleo e Immagine dell'endomorfismo L_A di $\mathbb{R}^3$ associato ad A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -27 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice ha rango 2, quindi abbiamo 2 vettori linearmente indipendenti.

Di conseguenza $\dim(Im(A)) = 2$, per il teorema della dimensione avremo quindi che $\dim(Ker(A)) = 3 - 2 = 1$

Una base dell'immagine è quindi data dai vettori linearmente indipendenti: $Im(A) = \{(1,1,-1), (14,-13,4)\}$ *

Per il Nucleo, dopo aver portato la matrice a gradini, basta risolvere il sistema omogeneo.

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ -27y + 18z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ -27y = -18z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ 27y = 18z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ y = \frac{18}{27}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3}z + z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases}$$

Diamo a z un parametro variabile t

Abbiamo: $Ker(A) = \left(\frac{1}{3}t, \frac{2}{3}t, t\right) =$

$Ker(A) = \left\{t\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)\right\}$

* Se presi per colonna, la quale credo sia più corretta, i vettori L.I. per colonna sono $(1,1,14), (1,1,-13)$

quindi $Im(A) = \{(1,1,14), (1,1,-13)\}$

Risposta Corretta

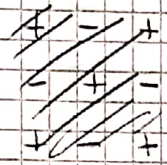
UPDATE =

b) Gli autovalori di $\mathcal{L}(A)$ e una base per ogni autospazio.

Autovalori.

$$P(\lambda) = \det[A - \lambda Id] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 14 & -13 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

~~Segni per il calcolo del determinante =~~



Calcolo del det tramite Sarrus

$$\begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ 14 & -13 & 4-\lambda & 14 & -13 & 4-\lambda \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ Troppo lungo con questa matrice

Calcolo del determinante con metodo classico:

$$(1-\lambda)(4-\lambda-4\lambda+\lambda^2-13) - 1(4-\lambda+14) - 1(-13-14+14\lambda) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-5\lambda-9) - 1(-\lambda+18) - 1(-27+14\lambda) =$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 9 - \lambda^3 + 5\lambda^2 + 9\lambda + \lambda - 18 + 27 - 14\lambda =$$

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = 0$$

$\Rightarrow \lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow \dfrac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

Autovalori = $\lambda_1 = 0$ $\quad$ $\lambda_2 = 3$

Autospazio $\lambda_1 = 0$ $\quad (A - \lambda_1 I) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ 14x - 13y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 14x - 13y + 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ +13y = +14x + 4z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -y + z \\ 13y = -14y + 14z + 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y + z \\ 27y = 18z \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}z \\ y = \frac{2}{3}z \end{cases}$$

$z = t \qquad x = \frac{1}{3}t \;,\; y = \frac{2}{3}t \;,\; z = t$

Autospazio relativo a $\lambda_1 = \left(\frac{1}{3}t, \frac{2}{3}t, t\right) \; \forall t \in \mathbb{R}$

$= t\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right) =$ **Base** che coincide con il Nucleo

Autospazio $\lambda_2 = 3$ $\quad (A - \lambda_2 I) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 14 & -13 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 14 & -13 & +1 \end{pmatrix}$$

Possiamo anche farla con Gauss. È lo stesso.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 14 & -13 & +1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 14 & -13 & +1 & 0 \end{array}\right)} \Rightarrow \cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 15 & -13 & 0 \end{array}\right)} \Rightarrow \cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)}$$

$0 \quad 0 \quad 28 \quad 0$

$\Downarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 14 & -13 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 15 & -13 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -28 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = 0 \\ -3y - 3z = 0 \\ -23z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -3y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}$$

Autospazio relativo a $\lambda_2 = 3$ $\{(0,0,0)\}$

$B(\lambda_2) = \{(0,0,0)\}$

Verificare se L_A è diagonalizzabile

$Ma(\lambda_1) = 1$ $\qquad Mg = 3 - \underbrace{rk(A - \lambda_1 Id)}_{2} = 1$

$Ma(\lambda_2) = 2$ $\qquad Mg = 3 - \underbrace{rk(A - \lambda_2 Id)}_{3} = 0$

Moltiplicità Algebrica

Moltiplicità Geometrica

perché $\underset{2}{Ma(\lambda_2)} \neq \underset{0}{Mg(\lambda_2)}$, A non è diagonalizzabile

11 Gennaio 2019

1.1 $m = 7007$ e $n = 1991$

a) MCD (7007, 1991) tramite Euclide

$7007 = 3 \cdot 1991 + 1034$
$1991 = 1 \cdot 1034 + 957$
$1034 = 1 \cdot 957 + 77$
$957 = 12 \cdot 77 + 33$
$77 = 2 \cdot 33 + 11$
$33 = 3 \cdot 11 + 0$

MCD = **11**

b) Una Identità di Bezout

$11 = 1 \cdot 77 - 2 \cdot 33$
$11 = 1 \cdot 77 - 2 \cdot (957 - 12 \cdot 77)$
$11 = 25 \cdot 77 - 2 \cdot 957$
$11 = 25 \cdot (1034 - 957) - 2 \cdot 957$
$11 = 25 \cdot 1034 - 27 \cdot 957$
$11 = 25 \cdot 1034 - 27 \cdot (1991 - 1034)$
$11 = 52 \cdot 1034 - 27 \cdot 1991$
$11 = 52 \cdot (7007 - 3 \cdot 1991) - 27 \cdot 1991$

$11 = 52 \cdot 7007 - 183 \cdot 1991$

c) Le soluzioni, se possibile, dell'equazione in $\mathbb{Z}_{7007}$

$1991x = 44 \mod 7007$

MCD (1991, 7007) = 11 ≠ 1 ma $44/11 = 4$ quindi abbiamo

$181x = 4 \mod 637$

$181^{-1} = -183 = 454$

⇓

$x = 1816 \mod 637$

MCD(637, 181) = 1
$637 = 3 \cdot 181 + 94$
$181 = 1 \cdot 94 + 87$
$94 = 1 \cdot 87 + 7$
$87 = 12 \cdot 7 + 3$
$7 = 2 \cdot 3 + 1$
$3 = 3 \cdot 1 + 0$

$1 = 7 - 2 \cdot 3$
$1 = 7 - 2 \cdot (87 - 12 \cdot 7)$
$1 = 25 \cdot 7 - 2 \cdot 87$
$1 = 25 \cdot (94 - 87) - 2 \cdot 87$
$1 = 25 \cdot 94 - 27 \cdot 87$

$1 = 25 \cdot 94 - 27 (181 - 94)$
$1 = 52 \cdot 94 - 27 \cdot 181$
$1 = 52 \cdot (637 - 3 \cdot 181) - 27 \cdot 181$
$1 = 52 \cdot 637 - 183 \cdot 181$

$x = $ **542** $\mod 637$

Le soluzioni sono quindi: 542, $542+637$, $542+637\cdot 2$, $542+637\cdot 3$, $\dots\dots$, $542+637\cdot 10$

Esercizio 1.2 $U(n)$ = gruppo degli elementi invertibili in $\mathbb{Z}/n$

$U(7)=\{1,2,3,4,5,6\}$ $U(14)=\{1,3,5,9,11,13\}$

$U(15)=\{1,2,4,7,8,11,13\}$ $U(18)=\{1,5,7,11,13,17\}$

$U(15)$ ha 7 elementi $\Rightarrow$ Isomorfismo = Corrispondenza biunivoca, quindi $U(15)$ non è isomorfo a nessuno degli altri che hanno 6 elementi

$U(7)$, $U(14)$, $U(18)$ sono ciclici visto che hanno come generatore rispettivamente 3, 5 e 5 quindi tutti isomorfi al gruppo $(\mathbb{Z}/6,+)$.

Esercizio 2.1 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}_3[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado ≤ 3. Sia

$$W=\{(a+bx+cx^2+dx^3)\in\mathbb{R}_3[x]\ :\ a+d=0 \text{ e } a-b+2c=0\}$$

(a) Dimostrare che W è un sottospazio

1. Il vettore nullo appartiene all'insieme

   Prendo $w\in W$ come $(0,0,0,0)$ e $0+0=0$ e $0-0+2\cdot 0=0$

2. W è chiuso rispetto alla somma

   prendo 2 vettori $w=(a+bx+cx^2+dx^3)$ e $v=(e+fx+gx^2+hx^3)$

   $w+u=(a+e,\ bx+fx,\ cx^2+gx^2,\ dx^3+hx^3)$

   - Consideriamo ora $(a+e)+(dx^3+hx^3)\Rightarrow a+dx^3+e+hx^3$ ma sappiamo che $a+d=0$ quindi $a+dx^3=0$, $e+hx^3=0$
   - Consideriamo ora $(a+e)-(bx+fx)+2(cx^2+gx^2)\Rightarrow a-b+2c+e-f+2g$ ma sappiamo che $a-b+2c=0$ quindi anche $e-f+2g=0$

3. W é chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare

Prendo $r \in \mathbb{R}$, $r(a+bx+cx^2+dx^3) = (ra, rbx, rcx^2, rdx^3)$
con $(ra+rd)=0$ e $(ra-rb+2rc)=0$

W é un sottospazio

b) Determinare una base di W e quindi la sua dimensione.

$$\begin{cases} a+d=0 \\ a-b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-d \\ +b=+a+2c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-d \\ b=-d+2c \end{cases}$$

assegnamo a c ed d ~~valori~~ parametri liberi

$c=t$ e $d=s$

Scrivo l'elemento generico del sottospazio

$(-s, -s+2t, t, s)$

e lo esprimo come combinazione lineare

$s(-1,-1,0,1) + t(0,2,1,0)$

$B(W) = \{(-1,-1,0,1), (0,2,1,0)\}$ di dimensione 2.

c) Determinare un sottospazio U tale che $W+U = \mathbb{R}_3[x]$ e $W \cap U = \{0\}$

Facile. Basta estendere la base di W affinche possa generare tutto $\mathbb{R}_3[x]$, avendo B(W) come vettori mancanti, quelli per c e d, basta aggiungere i vettori rispetto alla base canonica di uno spazio vettoriale di dimensione 4, per c e d, dunque

$U = \{(0,0,1,0)$ e $(0,0,0,1)\}$ grazie a questo abbiamo

$U+W = \mathbb{R}_3[x]$ e $U \cap W = \{0\}$

d) No non lo è, in quanto anche il sottospazio $U = \{(0,0,1,0),(0,0,1,1)\}$ è corretto, insieme a molti altri.

2.2 $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismo definito da:

$L(1,0,0) = (1,-2,-2) \quad L(1,1,0) = (1,3,-2)$

$L(0,0,1) = (0,0,5)$

ⓐ Matrice A associata ad L rispetto alla base canonica.

$L(1,0,0) = (1,-2,-2)$

$L(0,1,0) = L(1,1,0) - L(1,0,0) = (0,5,0)$

$L(0,0,1) = (0,0,5)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

ⓑ Gli autovalori di L e una base per ogni autospazio.

$$P(\lambda) = \det[A - \lambda Id] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 5-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix}$$

$\det = (1-\lambda)((5-\lambda)\cdot(5-\lambda))$ Quando la λ si annulla?

si annulla quando $\lambda = 1$ oppure $\lambda = 5$ e $\lambda = 5$

Quindi, Autovalori $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $= 1$

$\lambda_2 = 5$ con molteplicità algebrica $= 2$

Autospazio per $\lambda_1 = 1$ $\quad (A - \lambda_1 Id) = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 4z = 0 \\ 4y - 4z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 4z \\ 4y = +4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = +z \end{cases}$$

assegnamo a z il parametro libero t, $x = 2t$ e $y = +t$

L'Autospazio di λ_1 è generato da $x = 2t$, $y = +t$, $z = t$ $\forall t \in \mathbb{R}$, Combinazione lineare $= t(2, +1, 1)$

Una **Base** di $\lambda_1 = \{(2, +1, +1)\}$

Autospazio per $\lambda_2 = 5$ $\quad (A - \lambda_2 Id) = 0$

$$(A - \lambda_2 Id) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da qui possiamo subito capire che la matrice ha Rango 1 con valore di $x = 0$ e 2 parametri liberi.

L'Autospazio di λ_2 è generato da tutti i vettori (x, y, z) t.c. $x = 0$, $y = t$, $z = s$ $\forall t, s \in \mathbb{R}$

Combinazione lineare $= (0, t, s) = t(0,1,0) + s(0,0,1)$

Base di $\lambda_2 = \{(0,1,0), (0,0,1)\}$

La matrice A è diagonalizzabile?

dim. dello spazio vettoriale

Molt. algebr. $(\lambda_1) = 1$ $\quad$ Molt. geometrica $= 3 - rk(A - \lambda_1 Id) = 1$

Molt. algebr. $(\lambda_2) = 2$ $\quad$ Molt. geometrica $= 3 - rk(A - \lambda_2 Id) = 2$

Scanned by CamScanner

Poiché le molteplicità algebriche coincidono con le geometriche, la matrice é diagonalizzabile.

Ricordiamo che $D = P^{-1} A P$ però la richiesta qua é $\Delta = P^{-1} D P$

Matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Per trovare la matrice ~~diagonalizzante~~ P^{-1} calcoliamo gli autovettori di $\lambda 1$ e $\lambda 2$

$V1 =$ Con $t = 1$ $= (2, -1, -1)$

$V2 =$, $V3 =$ Con $t = 1$ e $s = 1$ $\begin{cases} (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{cases}$

$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ora, non ci resta che calcolare l'inversa di P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{GAUSS} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{GAUSS} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

portiamo fuori $\frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Il vero metodo per calcolare l'inversa sta scritto in un esempio dopo, oppure leggetelo su YOUMATH, tramite il calcolo dei cofattori. Questa é solo un'abbreviazione che usa D'Andrea ma non so bene come funziona.

Esame 25 - 01 - 2016

1.1 Anagrammi della parola SOLLAZZO $= \frac{8!}{2!2!2!}$

Quanti contengono SOL? (SOL, LAZZO) $\to = \frac{6!}{2!}$

Quanti con OLA? (OLA, SLZZO) $\to = \frac{6!}{2!}$

Quanti con ZOL? (ZOL, SOLAZ) $\to 6!$

Es. di esami vecchi, non so se è corretto!

2.1

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & k+3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

~~• Con $k = 2$ $\Rightarrow$ $6 \, Det(A) = 6 \cdot ((1 \cdot 2) - (4 \cdot 0))$~~

$det(A) = k-2((4 \cdot 1) - \underbrace{((k+3) \cdot -2)}_{-2k-6}) + 6 \cdot (2) =$

$k-2(4+2k+6) + 12 \Rightarrow (k-2)(2k+10) + 12 \Rightarrow 2k^2 - 4k + 10k - 20 + 12$

$\Rightarrow 2k^2 + 6k - 8$ • Determinante

• Quando è uguale a 0?

$$\frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{4} = \frac{-6 \pm 10}{4} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-6+10}{4} = \frac{4}{4} = 1 \\ \frac{-6-10}{4} = \frac{-16}{4} = -4 \end{cases}$$

Quando $k = 1$ o $k = -4$, $Det(A) = 0$ e quindi non esiste matrice inversa.

Per valori diversi da quelli avremo che la matrice dei cofattori è:

Scanned by CamScanner

$Cof_{11} = +1 \cdot (1 \cdot 1) - (k+3 \cdot 2) = 4 - (2k+6) = 2k+10$

$Cof_{12} = -1 \cdot (-1 \cdot 1) = 1$

$Cof_{13} = 1 \cdot (-1 \cdot 2) = 2$

$Cof_{21} = -1 \cdot (6 \cdot -2) = 12$

$Cof_{22} = 1 \cdot (k-2) = k-2$

$Cof_{23} = -1 \cdot 0 = 0$

$Cof_{31} = 1 \cdot (0 - 24) = -24$

$Cof_{32} = -1 \cdot (k^2 + k - 6 - (-6)) = -1 (k^2 + k) = -k^2 - k$

$Cof_{33} = 1 \cdot (4k - 8) = 4k - 8$

Matrice dei cof

$$\begin{matrix} 2k+10 & 1 & 2 \\ 12 & k-2 & 0 \\ -24 & -k^2-k & 4k-8 \end{matrix} \xrightarrow{\text{Trasposta}} \begin{matrix} 2k+10 & 12 & -24 \\ 1 & k-2 & -k^2-k \\ 2 & 0 & 4k-8 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2k^2+6k-8} \cdot$$

! Non so se questo esercizio è stato svolto correttamente, l'ho fatto di fretta.

25 Ottobre 2019

1.1 Determinare l'insieme H di tutte le permutazioni di S_6 che commutano con la trasposizione $\tau = (12)$ e la sua cardinalità. H è un sottogruppo di S_6? Motivare

1.2
$$\begin{cases} 6x \equiv 9 \mod 21 \\ 15x \equiv 10 \mod 25 \end{cases}$$

$6 = 3 \cdot 2$
$21 = 3 \cdot 7$
$MCD(6,21) = 3$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} 2x \equiv 3 \mod 7 \\ 3x \equiv 2 \mod 5 \end{cases}$$

$15 = 3 \cdot 5$
$25 = 5 \cdot 5$
$MCD(15,25) = 5$

Inverso di 2 in $\mathbb{Z}/7 = 4$
Inverso di 3 in $\mathbb{Z}/5 = 2$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x \equiv 12 \mod 7 \Rightarrow x \equiv 5 \mod 7 \Rightarrow x = 5 + 7t \\ x \equiv 4 \mod 5 \end{cases}$$

$\Downarrow$

$5 + 7t \equiv 4 \mod 5 \Rightarrow 7t \equiv 4 \mod 5$

Inverso di 7 in $\mathbb{Z}/5 = 3$

$\Downarrow$

$t \equiv 12 \mod 5 \Rightarrow t \equiv 2 \mod 5 \Rightarrow t = 2 + 5S$

Sostituiamo alla x sopra

$x = 5 + 7(2 + 5S) \Rightarrow x = 19 + 35S$

$\Downarrow$

Sol: $x \equiv 19 \mod 35$

2.1 $\mathbb{R}_n[x]$ lo spazio Vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado $\leq n$ $\quad F: \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definita da:

$$F(p(x)) = p(x+1) - p(x-1) - p(1) \quad \text{per ogni } p(x) \text{ in } \mathbb{R}_3[x]$$

$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \in \mathbb{R}_3[x]$ ......

$p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$

Non l'ho svolto!

2.2 T Endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ rappresentato rispetto alla base canonica dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1) Autovalori di T e una base per ogni autospazio

$$P(\lambda) = \det[A - \lambda Id] = \qquad A - \lambda Id = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det = (1-\lambda)\cdot((-\lambda \cdot 2-\lambda) - \cancel{(2\cdot 0)}) + 2\cdot(\cancel{(1\cdot 0)} - (-\lambda \cdot 1))$$

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$(1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda) + 2\cdot(0 - (-\lambda)) \Rightarrow +2\cdot\lambda$$

$$(1-\lambda)\cdot(\lambda^2 - 2\lambda) + 2\lambda \Rightarrow \lambda^2 \cancel{-2\lambda} - \lambda^3 + 2\lambda^2 \cancel{+2\lambda}$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 \Rightarrow \lambda(-\lambda^2 + 3\lambda) = 0$$

1 $\lambda = 0$

2 $-\lambda^2 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \dfrac{-3 \pm \sqrt{9}}{-2} = \dfrac{-3+3}{-2} = \dfrac{0}{-2} = 0 \qquad \dfrac{-3-3}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3$

$\lambda_1 = 0$ con $Ma(\lambda_1) = 2$

$\lambda_2 = 3$ con $Ma(\lambda_2) = 1$

Autospazio di $\lambda 1 = 0$

$$A - \lambda_1 Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Gauss} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$x + 2z = 0 \Rightarrow x = -2z$, assegniamo a $y = t$ ed a $z = s$

L'autospazio di $\lambda 1$ è generato da, $x = -2s$, $y = t$, $z = s$

$s(-2, 0, 1) + t(0, 1, 0)$

$B(\lambda 1) = \{(-2, 0, 1), (0, 1, 0)\}$

Autospazio di $\lambda 2 = 3$

$$A - \lambda_2 Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Gauss}$$

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z \\ \frac{\cancel{3}y}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{3}z}{\cancel{3}} \\ z = t \end{cases}$$

L'autospazio di $\lambda 2$ è generato da, $x = t$, $y = t$, $z = t$

$t(1, 1, 1)$

$B(\lambda_2) = \{(1, 1, 1)\}$

2) Una matrice Diagonale D e una matrice P tale che $A = PDP^{-1}$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

$$\text{Det } P^{-1} = -2 \cdot \big((1 \cdot 1) - (0 \cdot 1)\big) + 1 \cdot \big((0 \cdot 0) - (1 \cdot 1)\big)$$

$$-2 \cdot (1) + 1 \cdot (-1) = -2 - 1 = -3$$

$\text{Cof}\,11 = + (1 \cdot 1) - (1 \cdot 0) = 1$

$\text{Cof}\,12 = - (0 \cdot 1) - (1 \cdot 1) = -(-1) = 1$

$\text{Cof}\,13 = + (0 \cdot 0) - (1 \cdot 1) = -1$

$\text{Cof}\,21 = - (0 \cdot 1) - (1 \cdot 0) = 0$

$\text{Cof}\,22 = + (-2 \cdot 1) - (1 \cdot 1) = -2 - 1 = -3$

$\text{Cof}\,23 = - (-2 \cdot 0) - (0 \cdot 1) = 0$

$\text{Cof}\,31 = + (0 \cdot 1) - (1 \cdot 1) = -1$

$\text{Cof}\,32 = - (-2 \cdot 1) - (1 \cdot 1) = -(-2 - 1) = -(-3) = 3$

$\text{Cof}\,33 = + (-2 \cdot 1) - (0 \cdot 0) = -2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Scambio Colonne/Righe} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Definizioni Prima Parte

Anello: È un insieme A sul quale sono definite due operazioni:

- La somma $(a,b) \mapsto a+b$
- Il prodotto $(a,b) \mapsto a \cdot b$

Entrambe commutative e associative $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n, \mathbb{Q}, \mathbb{R} ..)$

Gruppo Abeliano: È un anello che rispetto ad un operazione (somma ~~prodotto~~ ..) deve:

- Possedere un elemento neutro $a+0=0+a=a \quad \forall a \in A$
- Per ogni A il suo inverso $a+(-a)=(-a)+a=0 \quad \forall a \in A$

Inoltre l'operazione di prodotto deve distribuire rispetto alla somma $a(b+c)=ab+ac$

Sottogruppo: È un sottoinsieme $H \subset G$, che è a sua volta un gruppo rispetto all'operazione di G:

- $1 \in H$
- $h \in H \Rightarrow h^{-1} \in H$
- $h_1, h_2 \in H \Rightarrow h_1h_2 \in H$

G e $\{1\}$ sono sempre sottogruppi di G

Si scrive $H < G$

Omomorfismo: Se G e H sono gruppi, un'applicazione $f: G \to H$ si dice Omomorfismo di gruppi se

- $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b) \quad \forall a,b \in G$

Nucleo e Immagine

Se $\phi: G \to H$ è un omomorfismo di gruppi, allora

- $\operatorname{Ker}\phi = \{g \in G \mid \phi(g)=1\}$ è il Nucleo di ϕ
- $\operatorname{Im}\phi = \{\phi(g) \in H \mid g \in G\}$ è l'immagine di ϕ

▶ $\operatorname{Ker}\phi < G$ ▶ $\operatorname{Im}\phi < H$

Teoria Seconda Parte

- Un'applicazione $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ è lineare se $T(x+y) = T(x) + T(y)$ e $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ $\forall$ $x, y \in \mathbb{R}^m$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- Identità: Applicazione lineare che associa ad ogni n-upla di numeri reali se stessa:

$Id: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\quad Id(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$, ed è lineare

La matrice identità si ottiene scrivendo sulle colonne le immagini che Id assume su $(1,0,0 \dots, 0), \dots, (0,0, \dots, 1)$

- Date 2 applicazioni lineari $T: \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^b$, $S: \mathbb{R}^b \to \mathbb{R}^c$, allora la composizione $S \circ T: \mathbb{R}^a \to \mathbb{R}^c$ è sempre lineare.

- Sia K un campo. Si dice K-Spazio Vettoriale un insieme V dotato di:
  - un'operazione $+: V \times V \to V$ di SOMMA tra vettori che lo renda **gruppo Abeliano.**
  - un'operazione $\cdot: K \times V \to V$ di prodotto per uno scalare che soddisfa:
    - $1 \cdot v = v$
    - $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda v + \mu v$
    - $(\lambda \mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$
    - $\lambda(\mu + v) = \lambda\mu + \lambda v$

Gli elementi di V sono i vettori, gli elementi di K sono gli scalari.

Proprietà 1: $0 \cdot v = 0$

Scalare $\qquad$ Vettore

Proprietà 2: $(-1) \cdot v = -v$

Inverso additivo di 1 nel campo K.

Inverso additivo di v nel gruppo abeliano V.

- Se V è uno spazio vettoriale, un sottoinsieme **non vuoto** $W \subset V$ si dice Sottospazio Vettoriale se è uno spazio vettoriale rispetto alle operazioni di V. (deve quindi contenere elem. neutro, inverso additivo e somma tra 2 valori, multiplo per uno scalare)

I sottoinsieme $\{0\}$ e V sono detti sottospazi vettoriali banali di V.

- Ogni applicazione lineare $T: U \to V$ tra spazi vettoriali (sullo stesso campo K) sono un Omomorfismo di gruppi. Deve quindi mandare l'identità nell'Identità e l'inverso nell'inverso.
- Se U, V sono spazi vettoriali e $T: U \to V$ è lineare allora:
  - $\ker T = \{u \in U \mid T(u) = 0\}$ è il Nucleo di T.
  - $\operatorname{im} T = \{v \in V \mid v = T(u)$ per qualche $u \in U\}$ è l'immagine di T.

Il nucleo è un sottospazio vettoriale di U.
L'immagine è un sottospazio vettoriale di V.

- Per calcolare esplicitamente un nucleo basta risolvere il sistema di equazioni lineari omogeneo rispetto ad una applicazione lineare. + Gauss
- Stessa cosa per calcolare tutti gli elementi che hanno una certa Immagine (utilizzando il sistema non omogeneo con i valori della fibra). + Gauss
- Se $u_1, \dots, u_n$ sono elementi di uno spazio vettoriale V, allora ogni elemento della forma: $a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$ è detto Combinazione lineare di $u_1, \dots, u_n$.
- Il sottospazio vettoriale generato da X ($\langle X \rangle$) è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene X. Con X sottoinsieme di V.
- L'Immagine di T è il sottospazio vettoriale generato dai vettori $T(1, 0, \dots, 0), \dots, T(0, \dots, 0, 1)$
- Sia V uno spazio vettoriale (su campo K). Degli elementi $v_1, v_2, \dots, v_n$ di V si dicono linearmente indipendenti se $\boxed{\text{l'unico}}$ modo di avere $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0$ è quello di scegliere tutti gli scalari $= 0$!

Riformulazione: Dei vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se nessuno di essi è combinazione lineare degli altri. Per verificare che dei vettori siano linearmente indipendenti si deve risolvere il sistema omogeneo della matrice con gauss, se ottengo un pivot per ogni colonna allora sono linearmente indipendenti. Altrimenti il sistema omogeneo avrà altre soluzioni oltre a quella nulla → Dipendenti.

Regola: Se ho m righe e n colonne con $n > m$, allora non potrò mai avere 1 pivot per ogni colonna di conseguenza non saranno mai linearmente Indipendenti.

Basi

- Il numero di elementi di una base (finita) di V è detto **Dimensione** di V.

- Se V ha una base composta da n elementi, ogni insieme linearmente indipendente di elementi di V ha al più n elementi.

- Data una matrice A, **Im**(A) è uguale all'insieme dei vettori linearmente indipendenti, della matrice sulle colonne dove ci sono i pivot.

- La **dimensione** della Base del nucleo **KerA** è uguale alla differenza tra il numero di colonne di A e il numero di pivot al termine del procedimento di eliminazione.

- Di conseguenza **DimImA** è uguale al numero dei pivot.

Continua, Dopo...

Definizioni Algebra Seconda parte

Endomorfismo: É un morfismo che va dalla una struttura in se stessa, per morfismo si intende il processo astratto che trasforma una struttura in un'altra mantenendo alcune caratteristiche strutturali della prima.

Matrici e Spazi Vettoriali: Uno spazio vettoriale é una struttura algebrica composta da: un Campo (Scalari) e, un insieme di elementi (Vettori) e due operazioni binarie dette Somma e moltiplicazione per scalare. Si utilizza la rappresentazione con matrici poiché una matrice può essere vista come un insieme di vettori e le matrici supportano operazioni come addizione e moltiplicazione, più in generale la trasformazione di vettori é fondamentale, con le matrici possiamo effettuare delle trasformazioni da un insieme di vettori ad un altro.

Base: É un insieme di vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio, ogni elemento dello Spazio Vettoriale può essere scritto in modo unico come combinazione lineare dei vettori appartenenti alla base. La **Base Canonica** di $\mathbb{R}^n$ é costituita da esattamente n vettori, ciascuno dei quali ha una sola componente non nulla, il vettore e_i ha infatti un 1 in posizione i-esima e le altre componenti nulle ne deduciamo che un qualsiasi vettore lungo n può essere espresso come combinazione lineare della base canonica

Auto Valori - Vettori - Spazio: Premesso che si studi una matrice quadrata, si dice che lo scalare $\lambda_0 \in K$ é un autovalore se esiste un vettore non nullo $v \in K^n$ tale che $Av = \lambda_0 v$, il vettore v é detto autovettore relativo all'autovalore λ_0. Gli autovettori relativi a uno stesso autovalore λ_0 insieme al vettore nullo formano un sottospazio vettoriale che prende il nome di autospazio relativo all'autovalore λ_0

Polinomio Caratteristico: Il polinomio caratteristico corrisponde al polinomio generato dal $\det(A - \lambda Id)$ con Id matrice Identità, e si indica con $P(\lambda)$, per trovare gli autovalori dobbiamo trovare i valori per i quali λ annulla il polinomio.

Determinante: Esiste solamente per matrici quadrate, questo numero ne esprime alcune proprietà algebriche e geometriche, $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, determinante dell'inversa $\frac{1}{\det(A)}$, una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso determinante. $\det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$

Matrice Identità: È una matrice quadrata in cui tutti gli elementi della diagonale principale sono costituiti dal numero 1, i restanti sono $\emptyset$.

Matrice Diagonale: È una matrice quadrata in cui gli elementi che non appartengono alla diagonale principale sono tutti nulli.

Diagonalizzabilità: Affinché una matrice sia diagonalizzabile la molteplicità geometrica di ciascun autovalore deve coincidere con la relativa molteplicità algebrica.

Molt. algebrica: numero di volte che trovo l'autovalore dal $P(\lambda)$

Molt. geometrica: Dim. dello spazio $-$ $rk(A - \lambda Id)$

Matrice Invertibile: Una matrice quadrata A è detta invertibile se esiste una matrice quadrata dello stesso ordine indicata con A^{-1} tale che il prodotto riga per colonna tra le due matrici restituisce la matrice identità. A^{-1} è la **matrice inversa** di A. A è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

RANGO = Il rango di una matrice si indica con rk(A) ed è un numero intero non negativo che ha le seguenti definizioni:

- Numero di righe / colonne linearmente indipendenti di A.
- La dimensione dell'immagine dell'applicazione lineare.

Mancano le dimostrazioni !

E Anche le definizioni e i concetti Teorici non so se li ho inseriti tutti. Alcuni non li ho riscritti poiché li ho utilizzati in alcuni esercizi ad esempio il Teorema di Rouché-Capelli.

Io ho preso 30 allo scritto e all'esame mi ha chiesto il Teorema di Rouché - Capelli, e la sua dimostrazione (che ovviamente non ho fatto), mi ha chiesto dei morfismi tra gruppi in particolare Omomorfismo (I morfismi sono una domanda ricorrente quindi studiateli tutti !), Altre domande sulla teoria dei Gruppi, delle quali non tutte ho saputo rispondere. Se prendete meno di 30 in genere vi fa correggere gli esercizi che avete sbagliato.

Cristian Sordi