Nemlineáris, egyismeretlenes egyenletek megoldása

Drig Dávid
Martinák Mátyás

Miskolci Egyetem

2022. november 17.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós, folytonos függvény. Az $f(x) = 0$ egyenlet pontos x^* megoldását keressük az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez az x^*-hoz konvergáló x_k sorozatot kell megkonstruálni melyre különböző módszerek vannak.

Bevezetés

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós, folytonos függvény. Az $f(x) = 0$ egyenlet pontos x^* megoldását keressük az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez az x^*-hoz konvergáló x_k sorozatot kell megkonstruálni melyre különböző módszerek vannak.

Példa: $\ln(x) = \sin(x) \to \ln(x) - \sin(x) = 0$

Bevezetés

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós, folytonos függvény. Az $f(x) = 0$ egyenlet pontos x^* megoldását keressük az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez az x^*-hoz konvergáló x_k sorozatot kell megkonstruálni melyre különböző módszerek vannak.

Példa: $\ln(x) = \sin(x) \to \ln(x) - \sin(x) = 0$
Módszerek:

Bevezetés

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós, folytonos függvény. Az $f(x) = 0$ egyenlet pontos x^* megoldását keressük az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez az x^*-hoz konvergáló x_k sorozatot kell megkonstruálni melyre különböző módszerek vannak.

Példa: $\ln(x) = \sin(x) \to \ln(x) - \sin(x) = 0$
Módszerek:

1. Intervallumfelező eljárás

Bevezetés

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós, folytonos függvény. Az $f(x) = 0$ egyenlet pontos x^* megoldását keressük az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez az x^*-hoz konvergáló x_k sorozatot kell megkonstruálni melyre különböző módszerek vannak.

Példa: $\ln(x) = \sin(x) \to \ln(x) - \sin(x) = 0$
Módszerek:

1. Intervallumfelező eljárás
2. Newton-módszer

Bevezetés

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós, folytonos függvény. Az $f(x) = 0$ egyenlet pontos x^* megoldását keressük az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez az x^*-hoz konvergáló x_k sorozatot kell megkonstruálni melyre különböző módszerek vannak.

Példa: $\ln(x) = \sin(x) \to \ln(x) - \sin(x) = 0$

Módszerek:

1. Intervallumfelező eljárás
2. Newton-módszer
3. Fixpontiteráió

Bevezetés

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós, folytonos függvény. Az $f(x) = 0$ egyenlet pontos x^* megoldását keressük az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez az x^*-hoz konvergáló x_k sorozatot kell megkonstruálni melyre különböző módszerek vannak.

Példa: $\ln(x) = \sin(x) \to \ln(x) - \sin(x) = 0$

Módszerek:

1. Intervallumfelező eljárás
2. Newton-módszer
3. Fixpontiteráió
    - Kontrakció

Bevezetés

Definíció

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egyváltozós, folytonos függvény. Az $f(x) = 0$ egyenlet pontos x^* megoldását keressük az $[a, b]$ intervallumon. Ehhez az x^*-hoz konvergáló x_k sorozatot kell megkonstruálni melyre különböző módszerek vannak.

Példa: $\ln(x) = \sin(x) \to \ln(x) - \sin(x) = 0$

Módszerek:

1. Intervallumfelező eljárás
2. Newton-módszer
3. Fixpontiteráió
   - Kontrakció
   - Kontrakció eldöntésre

Intervallumfelező eljárás

Intervallumfelező eljárás

Feltétel: Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és legyenek $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek $\rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$.

Intervallumfelező eljárás

Feltétel: Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és legyenek $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek $\to f(a) \cdot f(b) < 0$.
Kiindulás: Legyen $[a_1, b_1] = [a, b]$, valamint $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Ha $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, akkor az $[a, x_1]$ intervallumon folytatjuk a keresést, különben $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, és ekkor az $[x_1, b]$ intervallumon folytatjuk a keresést. Egy egymásba skatulyázott intervallumsorozatot kapunk, melyek ráhúzódnak az egyenlet $[a, b]$ intervallumbeli x^* gyökére $[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$.

Intervallumfelező eljárás

Feltétel: Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és legyenek $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek $\rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$.
Kiindulás: Legyen $[a_1, b_1] = [a, b]$, valamint $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Ha $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, akkor az $[a, x_1]$ intervallumon folytatjuk a keresést, különben $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, és ekkor az $[x_1, b]$ intervallumon folytatjuk a keresést. Egy egymásba skatulyázott intervallumsorozatot kapunk, melyek ráhúzódnak az egyenlet $[a, b]$ intervallumbeli x^* gyökére $[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$.
Iteráció: Tegyük fel, hogy x_k adott. Legyen

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, x_k], & \text{ha } f(a_k) \cdot f(x_k) < 0, \\ [x_k, b_k] & \text{ha } f(x_k) \cdot f(b_k) < 0. \end{cases}$$

Intervallumfelező eljárás

Feltétel: Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és legyenek $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek $\rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$.

Kiindulás: Legyen $[a_1, b_1] = [a, b]$, valamint $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Ha $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, akkor az $[a, x_1]$ intervallumon folytatjuk a keresést, különben $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, és ekkor az $[x_1, b]$ intervallumon folytatjuk a keresést. Egy egymásba skatulyázott intervallumsorozatot kapunk, melyek ráhúzódnak az egyenlet $[a, b]$ intervallumbeli x^* gyökére $[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$.

Iteráció: Tegyük fel, hogy x_k adott. Legyen

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, x_k], & \text{ha } f(a_k) \cdot f(x_k) < 0, \\ [x_k, b_k] & \text{ha } f(x_k) \cdot f(b_k) < 0. \end{cases}$$

Az x^* megoldás $(k+1)$-ik közelítése

$$x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}.$$

Intervallumfelező eljárás

Feltétel: Legyen f folytonos az $[a, b]$ intervallumon, és legyenek $f(a)$ és $f(b)$ különböző előjelűek $\rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$.
Kiindulás: Legyen $[a_1, b_1] = [a, b]$, valamint $x_1 = \frac{a+b}{2}$. Ha $f(a) \cdot f(x_1) < 0$, akkor az $[a, x_1]$ intervallumon folytatjuk a keresést, különben $f(x_1) \cdot f(b) < 0$, és ekkor az $[x_1, b]$ intervallumon folytatjuk a keresést. Egy egymásba skatulyázott intervallumsorozatot kapunk, melyek ráhúzódnak az egyenlet $[a, b]$ intervallumbeli x^* gyökére $[a, b] = [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$.
Iteráció: Tegyük fel, hogy x_k adott. Legyen

$$[a_{k+1}, b_{k+1}] = \begin{cases} [a_k, x_k], & \text{ha } f(a_k) \cdot f(x_k) < 0, \\ [x_k, b_k] & \text{ha } f(x_k) \cdot f(b_k) < 0. \end{cases}$$

Az x^* megoldás $(k+1)$-ik közelítése

$$x_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}.$$

Hiba: Az x_{k+1} tag hibája $|x^* - x_{k+1}| \leq \frac{b-a}{2^k} < \epsilon$.

Példa

Példa

Közelítse az $f(x) = x^3 + x^2 + 10x - 20$ egyenlet gyökét az $[1 - 2]$ intervallumon!

Példa

Közelítse az $f(x) = x^3 + x^2 + 10x - 20$ egyenlet gyökét az $[1 - 2]$ intervallumon!

Megoldás:

Példa

Közelítse az $f(x) = x^3 + x^2 + 10x - 20$ egyenlet gyökét az $[1 - 2]$ intervallumon!

Megoldás:

Ellenőrizzük a feltételeket:

Példa

Közelítse az $f(x) = x^3 + x^2 + 10x - 20$ egyenlet gyökét az $[1 - 2]$ intervallumon!
Megoldás:
Ellenőrizzük a feltételeket:

- f folytonos

Példa

Közelítse az $f(x) = x^3 + x^2 + 10x - 20$ egyenlet gyökét az $[1 - 2]$ intervallumon!

Megoldás:

Ellenőrizzük a feltételeket:

- f folytonos
- $f(1) < 0$ és $f(2) > 0$

Példa

Közelítse az $f(x) = x^3 + x^2 + 10x - 20$ egyenlet gyökét az $[1-2]$ intervallumon!
Megoldás:
Ellenőrizzük a feltételeket:

- f folytonos
- $f(1) < 0$ és $f(2) > 0$

k	$a_k -$	$b_k +$	x_k	$f(x_k)$ előjele
1	1	2	1.5	$+$
2	1	1.5	1.25	$-$
3	1.25	1.5	1.375	$+$
4	1.25	1.375	1.3125	$-$
5	1.3125	1.375	1.34375	$\cdots$

Példa

Közelítse az $f(x) = x^3 + x^2 + 10x - 20$ egyenlet gyökét az $[1-2]$ intervallumon!

Megoldás:

Ellenőrizzük a feltételeket:

- f folytonos
- $f(1) < 0$ és $f(2) > 0$

k	$a_k -$	$b_k +$	x_k	$f(x_k)$ előjele
1	1	2	1.5	$+$
2	1	1.5	1.25	$-$
3	1.25	1.5	1.375	$+$
4	1.25	1.375	1.3125	$-$
5	1.3125	1.375	1.34375	$\cdots$

Hány lépés szükséges a 0.01-es pontossághoz?

Példa

Közelítse az $f(x) = x^3 + x^2 + 10x - 20$ egyenlet gyökét az $[1 - 2]$ intervallumon!
Megoldás:
Ellenőrizzük a feltételeket:

- f folytonos
- $f(1) < 0$ és $f(2) > 0$

k	$a_k -$	$b_k +$	x_k	$f(x_k)$ előjele
1	1	2	1.5	$+$
2	1	1.5	1.25	$-$
3	1.25	1.5	1.375	$+$
4	1.25	1.375	1.3125	$-$
5	1.3125	1.375	1.34375	$\cdots$

Hány lépés szükséges a 0.01-es pontossághoz?

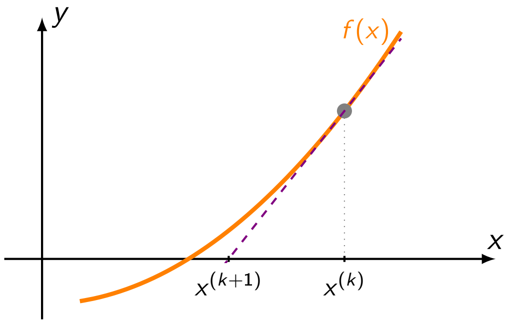
$$\frac{b-a}{2^k} = \frac{2-1}{2^k} < 0.01 \to 2^k > 100 \to k = 7$$

Newton-módszer

Érintő módszer

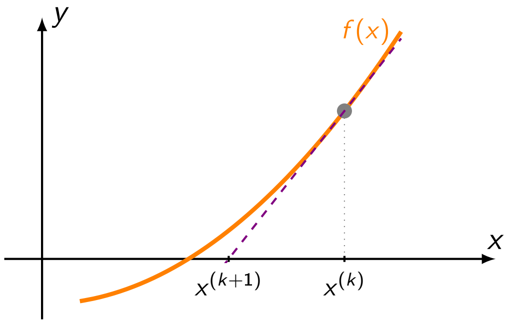
Newton-módszer

Érintő módszer



Newton-módszer

Érintő módszer



Az $f(x) = 0$ egyenlet x^* megoldáshoz közelítő sorozat elemeit az $(x_k, f(x_k))$ ponthoz tartozó érintő zérushelye határozza meg.
Az $(x_k, f(x_k))$ pontbeli érintő egyenlete

$$y - f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k)$$

Newton-módszer

Newton-módszer

Az érintő zérushelyét az $y = 0$ helyettesítéssel kapjuk

$$-f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k) \to x = -\frac{f(x_k) + x_k f'(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton-módszer

Az érintő zérushelyét az $y = 0$ helyettesítéssel kapjuk

$$-f(x_k) = f'(x_k)(x - x_k) \to x = -\frac{f(x_k) + x_k f'(x_k)}{f'(x_k)}$$

Így az x^* megoldásai közelítő sorozat következő eleme

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Newton-módszer konvergenciája

Newton-módszer konvergenciája

Tétel (Newton-módszer konvergenciája)

Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbiak

Newton-módszer konvergenciája

Tétel (Newton-módszer konvergenciája)

Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbiak

1. Az $f(x) = 0$ egyenletnek van megoldása $[a, b]$-on, azaz $f(a)f(b) < 0$.

Newton-módszer konvergenciája

Tétel (Newton-módszer konvergenciája)

Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbiak

1. Az $f(x) = 0$ egyenletnek van megoldása $[a, b]$-on, azaz $f(a)f(b) < 0$.
2. Az f kétszer folytonosan differenciálható az $[a, b]$-on: $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$.

Newton-módszer konvergenciája

Tétel (Newton-módszer konvergenciája)

Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbiak

1. Az $f(x) = 0$ egyenletnek van megoldása $[a, b]$-on, azaz $f(a)f(b) < 0$.
2. Az f kétszer folytonosan differenciálható az $[a, b]$-on: $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$.
3. Az f' és f'' állandó előjelű az $[a, b]$-on, azaz $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$ ha $x \in [a, b]$.

Newton-módszer konvergenciája

Tétel (Newton-módszer konvergenciája)

Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbiak

1. Az $f(x) = 0$ egyenletnek van megoldása $[a, b]$-on, azaz $f(a)f(b) < 0$.
2. Az f kétszer folytonosan differenciálható az $[a, b]$-on: $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$.
3. Az f' és f'' állandó előjelű az $[a, b]$-on, azaz $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$ ha $x \in [a, b]$.
4. ***Kezdőpont választása***: $x_0 \in [a, b]$, valamint $f(x_0)$ és $f''(x_0)$ előjele azonos, azaz $x_0 = a$ vagy $x_0 = b$.

Newton-módszer konvergenciája

Tétel (Newton-módszer konvergenciája)

Tegyük fel, hogy teljesülnek az alábbiak

1. Az $f(x) = 0$ egyenletnek van megoldása $[a, b]$-on, azaz $f(a)f(b) < 0$.
2. Az f kétszer folytonosan differenciálható az $[a, b]$-on: $f \in \mathcal{C}^2[a, b]$.
3. Az f' és f'' állandó előjelű az $[a, b]$-on, azaz $f'(x) \neq 0, f''(x) \neq 0$ ha $x \in [a, b]$.
4. ***Kezdőpont választása***: $x_0 \in [a, b]$, valamint $f(x_0)$ és $f''(x_0)$ előjele azonos, azaz $x_0 = a$ vagy $x_0 = b$.

Ha 1-4 feltételek teljesülnek, akkor az x_0 pontból indított $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ sorozat az $f(x) = 0$ egyenlet **egyetlen** $[a, b]$ beli x^* megoldásához konvergál, és érvényes az alábbi hibabecslés

$$|x_{k+1} - x^*| \leq \frac{M}{2m}(x_{k+1} - x_k)^2,$$

ahol $M = \max_a \leq x \leq b|f'(x)|$.

Fixpont iteráció I

Fokozatos közelítések módszere

Az $f(x) = 0$ egyenlet helyett kifejezzük $x - et$, és $x = g(x)$ iterációs alakban vizsgáljuk az egyenletet.

Tétel

Tegyük fel, hogy $g(x)$ folytonos az $[a, b]$-on és értékei $[a, b]$ között vannak: $a \leq g(x) \leq b$, ha $x \in [a, b]$.
Ekkor az $x = g(x)$ egyenletnek van legalább egy megoldása $[a, b]$-on.

Definíció

Legyen $g(x)$ folytonos $[a, b]$-on. Azt mondjuk, hogy g **kontrakció**(összehúzás) az $[a, b]$-on, ha
$\exists\ 0 \leq q \leq 1$ szám, melyre

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b].$$

Jelentés: A pontok képei egymáshoz közelebb vannak, mint maguk a pontok.

Fixpont iteráció II

Fokozatos közelítések módszere

Tétel

Tegyül fel, hogy $g(x)$ folytonos az $[a, b]$-on és értékei $[a, b]$ között vannak:
$a \leq g(x) \leq b$, ha $x \in [a, b]$, valamint $g(x)$ kontrakció $[a, b]$-on
($0 \leq q \leq 1$kontrakciós tényezővel. Ekkor $\forall x_0 \in [a, b]$esetén)

$$x_k = g(x_{k-1}), \qquad k = 1, 2, \cdots$$

sorozat az $x = g(x)$ egyenlet $[a, b]$-beli x^* megoldásához konvergál.
Hibabecslés

$$|x_k - x^*| \leq \frac{q}{1-q}|x_k - x_{k-1}|.$$

Fixpont iteráció III

Fokozatos közelítések módszere

Tétel (A kontrakió eldöntésére)

Tegyük fel, hogy g egyszerre folytonosan differenciálható az $[a, b]$-on. Ha

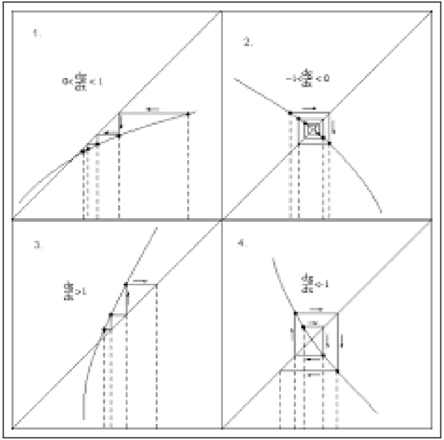
$$q = |g'(x)| < 1, \qquad x \in [a, b],$$

akkor g kontrakció $[a, b]$-on, q kontrakciós tényezővel.

Fixpont iteráció IV

Fokozatos közelítések módszere

ábra: Fixpont iterációs módszer a térben



Példa

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!
1.lépés Fejezzük ki x-et!

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!
1.lépés Fejezzük ki x-et!

$$x = x^2 - 2 = g_1(x) \qquad \text{vagy} \qquad x = \sqrt{x+2} = g_2(x) \qquad (x > 0)$$

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!
1.lépés Fejezzük ki x-et!

$$x = x^2 - 2 = g_1(x) \qquad \text{vagy} \qquad x = \sqrt{x+2} = g_2(x) \qquad (x > 0)$$

2.lépés Ellenőrizzük a feltételeket, melyik g függvény teljesíti? Először g_2:

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!
1.lépés Fejezzük ki x-et!

$$x = x^2 - 2 = g_1(x) \qquad \text{vagy} \qquad x = \sqrt{x+2} = g_2(x) \qquad (x > 0)$$

2.lépés Ellenőrizzük a feltételeket, melyik g függvény teljesíti? Először g_2:

- $g_2(x) = \sqrt{x+2}$ folytonos a $[0, \infty]$-on.

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!

1.lépés Fejezzük ki x-et!

$$x = x^2 - 2 = g_1(x) \qquad \text{vagy} \qquad x = \sqrt{x+2} = g_2(x) \qquad (x > 0)$$

2.lépés Ellenőrizzük a feltételeket, melyik g függvény teljesíti? Először g_2:

- $g_2(x) = \sqrt{x+2}$ folytonos a $[0, \infty]$-on.
- $g_2(x) \in [0, \infty]$

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!
1.lépés Fejezzük ki x-et!

$$x = x^2 - 2 = g_1(x) \qquad \text{vagy} \qquad x = \sqrt{x+2} = g_2(x) \qquad (x > 0)$$

2.lépés Ellenőrizzük a feltételeket, melyik g függvény teljesíti? Először g_2:

- $g_2(x) = \sqrt{x+2}$ folytonos a $[0, \infty]$-on.
- $g_2(x) \in [0, \infty]$
- $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} < 1, \text{ha} x > 0$

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!
1.lépés Fejezzük ki x-et!

$$x = x^2 - 2 = g_1(x) \qquad \text{vagy} \qquad x = \sqrt{x+2} = g_2(x) \qquad (x > 0)$$

2.lépés Ellenőrizzük a feltételeket, melyik g függvény teljesíti? Először g_2:

- $g_2(x) = \sqrt{x+2}$ folytonos a $[0, \infty]$-on.
- $g_2(x) \in [0, \infty]$
- $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} < 1, \text{ha} x > 0$
- $\max_x > 0 |g_2'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1, \text{azaz} g_2(x) \text{kontrakció} [0, \infty]$-on.

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!

1.lépés Fejezzük ki x-et!

$$x = x^2 - 2 = g_1(x) \qquad \text{vagy} \qquad x = \sqrt{x+2} = g_2(x) \qquad (x > 0)$$

2.lépés Ellenőrizzük a feltételeket, melyik g függvény teljesíti? Először g_2:

- $g_2(x) = \sqrt{x+2}$ folytonos a $[0, \infty]$-on.
- $g_2(x) \in [0, \infty]$
- $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} < 1, \text{ha} x > 0$
- $\max_x > 0 |g_2'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1, \text{azaz} g_2(x) \text{kontrakció} [0, \infty]$-on.

3.lépés Iteráció

Példa

Fixpont iterációval közelítsük az $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet megoldását a $[0, \infty]$-on!

1.lépés Fejezzük ki x-et!

$$x = x^2 - 2 = g_1(x) \qquad \text{vagy} \qquad x = \sqrt{x+2} = g_2(x) \qquad (x > 0)$$

2.lépés Ellenőrizzük a feltételeket, melyik g függvény teljesíti? Először g_2:

- $g_2(x) = \sqrt{x+2}$ folytonos a $[0, \infty]$-on.
- $g_2(x) \in [0, \infty]$
- $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} < 1, \text{ha} x > 0$
- $\max_x > 0 |g_2'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2}} < 1, \text{azaz} g_2(x) \text{kontrakció} [0, \infty]$-on.

3.lépés Iteráció

$$x_0 = 7 \text{ tetszőleges} \qquad x_2 = g_2(x_1) = \sqrt{3+2} = 2.236 \tag{1}$$

$$x_1 = g_2(x_0) = \sqrt{7+2} = 3 \qquad x_3 = g_2(x_2) = \sqrt{2.236+2} = 2.058 \tag{2}$$

Köszönjük szépen a figyelmet!