

1. Bevezető

Készítsük el a következő matematikai formulákat (és a kísérő szöveget):

a) Az $\frac{1}{n^2}$ sorösszege:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

b) Az $n!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n -ig, azaz

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n. \quad (1)$$

Konvenció szerint $0! = 1$.

c) Legyen $0 \leq k \leq n$. A binomiális együttható

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

ahol a faktoriális (1) szerint definiáljuk.

d) Az előjel- azaz szignum függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

2. Determináns

Készítsük el a következő matematikai formulákat (és kísérő szöveget): a) Legyen

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

a természetes számok halmaza 1-től n -ig.

b) Egy n -edrendű permutáció σ egy bijekció $[n]$ -ből $[n]$ -be. Az n -edrendű permutációk halmazát, az ún. szimmetrikus csoportot, S_n -nel jelöljük.

c) Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverzióknak nevezünk egy (i, j) párt, ha $i < j$ de $\sigma_i > \sigma_j$.

d) Egy $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:

$$\mathcal{I}(\sigma) := |\{(i, j) | i, j \in [n], i < j, \sigma_i > \sigma_j\}|.$$

e) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, egy $n \times n$ -es (négyzetes) valós mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 1 & a_1 2 & \cdots & a_1 n \\ a_2 1 & a_2 2 & \cdots & a_2 n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n 1 & a_n 2 & \cdots & a_n n \end{pmatrix}$$

Az A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i} \quad (2)$$

3. Logikai azonosság

Készítsük el a következő táblázatot, formulákat és levezetést. Ügyeljünk a számozásra és igazításra is! Tekintsük az $L = \{0, 1\}$ halmazt, és rajta a következő, igazságtáblával definiált műveleteket:

x	\bar{x}	x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1

Legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot:

$$(a \wedge b \wedge c) \rightarrow d = a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)). \quad (3)$$

A következő azonosságokat bizonyítás nélkül használjuk:

$$x \rightarrow y = \bar{x} \vee y \quad (4a)$$

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y} \quad \overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y} \quad (4b)$$

A (3) bal oldala, (4) felhasználásával

$$(a \wedge b \wedge c) \rightarrow d \stackrel{(4a)}{=} \overline{a \wedge b \wedge c \vee d} \stackrel{(4b)}{=} (\bar{a} \vee \bar{b} \vee \bar{c}) \vee d. \quad (5)$$

A (3) jobb oldala, (4a) ismételt felhasználásával

$$\begin{aligned} a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)) &= \bar{a} \vee (b \rightarrow (c \rightarrow d)) \\ &= \bar{a} \vee (\bar{b} \vee (c \rightarrow d)) \\ &= \bar{a} \vee (\bar{b} \vee (\bar{c} \vee d)), \end{aligned} \quad (6)$$

ami a \vee asszociativitása miatt egyenlő (5) egyenlettel.

4. Binomiális tétel

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) \quad (7a)$$

$$= \dots \quad (7b)$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^k$$

$$= \dots \quad (7c)$$

$$= \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k$$

$$+ \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{(n+1)-k} b^k \quad (7d)$$