3.1

证明:

(a) 由f是凸函数, a,b ∈ dom f, x∈[a,b], 有

$$f\left(\frac{b-x}{b-a}\cdot a+\frac{x-a}{b-a}\cdot b\right)\le\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$$

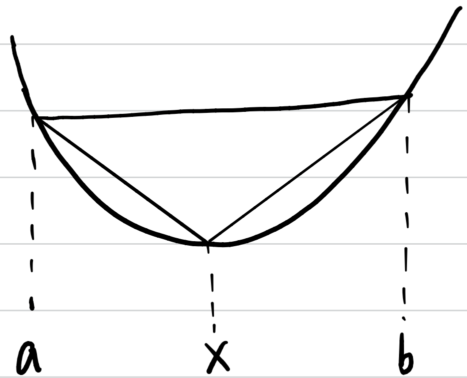
即 $f(x)\le\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)$

(b) 由(a)有

$$f(x)-f(a)\le\frac{a-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\Rightarrow\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$f(x)-f(b)\le\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-b}{b-a}f(b)\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

草图如下:



(c) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\lim\limits_{x\to b}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}=f'(b)\ge\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

(d) 由c有

$$\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} \geq 0 \Rightarrow \lim_{a\to b} \frac{f'(b)-f'(a)}{b-a} = f''(a) = f''(b) \geq 0 .$$

3.7

证明:

假设 f 不是常数, 即 $\exists\, a, b \in \mathrm{dom}\, f$ s.t. $f(a) < f(b)$

令 $g(t) = f(a + t(b-a))$. f 是凸的, 故 g 是凸的且 $f(a) = g(0)$, $f(b) = g(1)$

由Jensen不等式 $g(1) \leq \frac{t-1}{t} g(0) + \frac{1}{t} g(t) \Rightarrow g(t) \geq t(g(1) - g(0)) + g(0)$

$t \to \infty$ 时 $g(t)$ 没有上界, 与题设矛盾. 故假设不成立. f 是常数.

3.32

证明:

(a)

令 $h = fg$, 则 $h'' = (f'g + fg')' = f''g + 2f'g' + fg''$

f、g 都凸且大于零, 则 $f''g \geq 0$, $fg'' \geq 0$. f、g 都非减或非增, 则 $f'g' \geq 0$. 故 $h'' \geq 0$. fg 在此区间凸.

(b)

由(a)知. 当 f、g 都凹且大于零时, $f''g \leq 0$. $fg'' \leq 0$. f、g 一个非减一个非增则 $f'g' \leq 0$. $h'' \leq 0$. fg 在此区间凹.

(c)

由题有 $\frac{1}{g}$ 是凸函数. 非减且大于零, 则由(a)有 f/g 是凸的

4.21

(c) $B \in S_+^n$ 时，最优解显然是 0.

$B \notin S_+^n$ 时，设其最小特征值为 $\lambda_{min}(B)$，有 $\lambda_{min}(B) = \inf\limits_{x^Tx=1} x^TBx$.

$A \in S_{++}^n$，可令 $y = A^{\frac{1}{2}}x$，则 $x = A^{-\frac{1}{2}}y$，原 QCQP 写为：

minimize $y^TA^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}y$

subject to $y^Ty \le 1$

若在 $y^Ty=1$ 处取得最优解，则该最优解为 $\lambda_{min}(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}})$

若在 $y^Ty<1$ 处取得最优解，则该最优解为 0

4.33

(a)

minimize t

subject to $p(x)/t \le 1$, $q(x)/t \le 1$

(b)

minimize $\exp(t_1) + \exp(t_2)$

subject to $p(x) \le t_1$, $q(x) \le t_2$

(c)

minimize t

subject to $p(x) \le t(r(x) - q(x))$

4.40

(b)

QP：令 $P = WW^T$，其中 $W \in R^{n\times r}$，问题表示为

minimize $t + 2q^T x + r$

subject to $\begin{bmatrix} I & W^T x \\ x^T W & tI \end{bmatrix} \succeq 0$

$Gx \preceq h$

$Ax = b$

QCQP：令 $P_i = W_i W_i^T$，其中 $W \in R^{n\times r_i}$，问题表示为

minimize $t_0 + 2q_0^T x + r_0$

subject to $t_i + 2q_i^T x + r_0 \leq 0$，$i = 1, \cdots, m$

$\begin{bmatrix} I & W_i^T x \\ x^T W_i & t_i I \end{bmatrix} \succeq 0$，$i = 1, \cdots, m$

$Ax = b$

SOCP：问题表示式

minimize $f^T x$

subject to $\begin{bmatrix} (C_i^T x + d_i) I & A x_i + b_i \\ (A_i x + b_i)^T & (C_i^T x + d_i) I \end{bmatrix} \succeq 0$，$i = 1, \cdots, m$

$Fx = g$

(c) 问题表示为

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & t \\
\text{subject to} \quad & \begin{bmatrix} F(x) & Ax+b \\ (Ax+b)^T & t \end{bmatrix} \succeq 0
\end{aligned}
$$