5.21

(a) $(e^{-x})'' = (-e^{-x})' = e^{-x} \geq 0$，目标函数是凸的

而 $f(x,y)=x^2/y$ 为二次-线性分式函数，是凸的

故这是一个凸优化问题，$p^*=1$

(b) $L(x,y,\lambda) = e^{-x} + \lambda x^2/y$

$$g(\lambda) = \inf_{x,y>0} L(x,y,\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda \geq 0 \\ -\infty, & \lambda < 0 \end{cases}$$

对偶问题为：max 0

s.t. $\lambda \geq 0$

故 $d^*=0$，$\lambda^* \geq 0$，$p^*-d^*=1$

(c) 不成立

(d)

$$p^*(u) = \begin{cases} 1, & u=0 \\ 0, & u>0 \\ \infty, & u<0 \end{cases}$$

可见当 $u>0$ 时，$p^*(u) \geq p^*(0) - \lambda^* u$ 不恒成立，得证

5.22

(a) $L(x,\lambda) = x + \lambda(x^2-1)$ $g(\lambda) = \inf_x L(x,\lambda) = \begin{cases} -(\frac{1}{4\lambda}+\lambda), & \lambda>0 \\ -\infty, & \lambda \leq 0 \end{cases}$

故对偶问题为 $\max -(\frac{1}{4\lambda}+\lambda)$ s.t. $\lambda>0$

$x^*=-1$，$p^*=-1$，$\lambda^*=\frac{1}{2}$，$d^*=-1$，优化问题是凸问题，Slater 条件成立，强对偶性成立

(b) $L(x,\lambda)=x+\lambda x^2$ $\quad g(\lambda)=\inf_x L(x,\lambda)=\begin{cases}-\frac{1}{4\lambda}, & \lambda>0\\ -\infty, & \lambda\le 0\end{cases}$

对偶问题为 $\max\ -\frac{1}{4\lambda}$ $\quad s.t.\ \lambda>0$

$x^*=0$, $p^*=0$. $d^*=0$. 优化问题是凸问题. Slater条件不成立. 强对偶性成立

(c) 此问题与(b)等价.

(d) $L(x,\lambda)=\begin{cases}(1-\lambda)x+2\lambda, & x\ge 1\\ (1+\lambda)x, & -1\le x\le 1\\ (1-\lambda)x-2\lambda, & x\le -1\end{cases}$ $\quad g(\lambda)=\inf_x L(x,\lambda)=\begin{cases}-2, & \lambda=1\\ -\infty, & \text{otherwise}\end{cases}$

对偶问题为 $\max\ -2$ $\quad s.t.\ \lambda=1$

$x^*=-2$, $p^*=-2$. $\lambda^*=1$. $d^*=-2$. 优化问题不是凸问题. 强对偶性成立

(e) $L(x,\lambda)=x^3+\lambda(-x+1)=x^3-\lambda x+1$

$g(\lambda)=\inf_x L(x,\lambda)=-\infty$

$x^*=1$, $p^*=1$. $d^*=-\infty$. 优化问题不是凸问题. 强对偶性不成立

(f) 由(e)有 $g(\lambda)=\inf_{x\in R_+} L(x,\lambda)=\begin{cases}1-\frac{2\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}, & \lambda\ge 0\\ 1, & \lambda<0\end{cases}$

对偶问题为 $\max\ 1-\frac{2\lambda}{3}\sqrt{\frac{\lambda}{3}}$ $\ s.t.\ \lambda\ge 0$

$x^*=1$, $p^*=1$, $\lambda^*=0$, $d^*=1$. 优化问题是凸问题. Slater条件成立. 强对偶性成立

5.24

① 若 Z、$W=\phi$. $\sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z)=-\infty\le\infty=\inf\limits_{w\in W}\sup\limits_{z\in Z} f(w,z)$

② 若 $W\ne\phi$, 对于 $\forall\tilde{w}\in W$, $\forall z\in Z$, 有 $\inf\limits_{w\in W} f(w,z)\le f(\tilde{w},z) \Rightarrow \sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z)\le\sup\limits_{z\in Z} f(\tilde{w},z)$

$\Rightarrow \sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,z)\le\inf\limits_{\tilde{w}\in W}\sup\limits_{z\in Z} f(\tilde{w},z)$

③ 若 $Z\ne\phi$, 对于 $\forall\tilde{z}\in Z$, $\forall w\in W$, 有 $f(w,\tilde{z})\le\sup\limits_{z\in Z} f(w,z)\Rightarrow\inf\limits_{w\in W} f(w,\tilde{z})\le\inf\limits_{w\in W}\sup\limits_{z\in Z} f(w,z)$

$\Rightarrow \sup\limits_{z\in Z}\inf\limits_{w\in W} f(w,\tilde{z})\le\inf\limits_{w\in W}\sup\limits_{z\in Z} f(w,z)$

5.31

对于可行点 x, 由于 $f_i(x)$ 是凸的, 有 $0\ge f_i(x)\ge f_i(x^*)+\nabla f_i(x^*)^T(x-x^*)$, $i=1,\cdots,m$

$\lambda_i^*\ge0$, 因此有 $0\ge\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i^*[f_i(x^*)+\nabla f_i(x^*)^T(x-x^*)]$

$=\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i^* f_i(x^*)+\sum\limits_{i=1}^m\lambda_i^*\nabla f_i(x^*)^T(x-x^*)=-\nabla f_0(x^*)^T(x-x^*)$

也即 $\nabla f_0(x^*)^T(x-x^*)\ge0$.