Problem 1

1.

$$\|Ax-b\|_2^2=\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}A^TA & -A^Tb\\ -b^TA & b^Tb\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}=tr(Q_0X)$$

其中 $X=\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\1\end{bmatrix}^T$ $Q_0=\begin{bmatrix}A^TA & -A^Tb\\ -b^TA & b^Tb\end{bmatrix}$

$\|x\|_2=1 \Leftrightarrow \|x\|_2^2=1$ $\|x\|_2^2=tr(Q_1X)$

其中 $Q_1=\begin{bmatrix}I & \\ & 0\end{bmatrix}$，令 $Q_2=\begin{bmatrix}0 & \\ & 1\end{bmatrix}$

原问题的SDP松弛为 $\min\limits_{X\in S_+^n} tr(Q_0X)$ s.t. $tr(Q_1X)=1$，$tr(Q_2X)=1$

2. 由 $m=2$ 且 $\frac{r(r+1)}{2}\le m$，有最优解秩最多为1，故SDP松弛可以求得精确解

Problem 2

1. 假设G全连接，则优化问题的解为 $x_i=1$，$\forall i\in V$. 考虑向G中加入一点j，若j不与其他点相连，根据约束条件，$x_j=0$. 否则 $x_j=1$.

   那么优化问题1.2实际上在寻找G的最大完全子图并将其包含顶点的 x_i 值置1，其余顶点则置0.

   故 $\alpha(G)$ 对应了G的最大完全子图的大小(包含顶点数)

2. 设V大小为n. $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$. A为邻接矩阵, 若$(i,j)\notin E$, $A_{ij}=0$, 否则$A_{ij}=1$. 设A中不为0的元素个数为m.

原问题等价于 $\max\ \mathbf{1}^T x \quad \text{s.t.}\quad x^T x-m\geq 0,\ x^T(x-\mathbf{1})=0$

$$\mathbf{1}^T x=\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1} \\ \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1}^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}(Q_0\tilde{X})$$

其中 $\tilde{X}=\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}^T$, $Q_0=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1} \\ \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1}^T & 0\end{bmatrix}$

$$x^T x-m=\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} I & \\ & -m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}(Q_1\tilde{X})$$

其中 $Q_1=\begin{bmatrix} I & \\ & -m\end{bmatrix}$

$$x^T(x-\mathbf{1})=\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{2}\cdot\mathbf{1} \\ -\frac{1}{2}\cdot\mathbf{1}^T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1\end{bmatrix}=\operatorname{tr}(Q_2\tilde{X})$$

其中 $Q_2=\begin{bmatrix} I & -\frac{1}{2}\cdot\mathbf{1} \\ -\frac{1}{2}\cdot\mathbf{1}^T & 0\end{bmatrix}$, 令 $Q_3=\begin{bmatrix} 0 & \\ & 1\end{bmatrix}$

故原问题的SDP松弛为 $\min\limits_{\tilde{X}\in S_+^n}\ \operatorname{tr}(Q_0\tilde{X})\quad \text{s.t.}\ \operatorname{tr}(-Q_1\tilde{X})\leq 0,\ \operatorname{tr}(Q_2\tilde{X})=0,\ \operatorname{tr}(Q_3\tilde{X})=1$