1. 证明:

等价于证明 hypo $S=\{(X,T)\mid S(X)\succeq T,\ X\in S_{++}^{n},\ T\in S^{n-k}\}$ 是凸的.

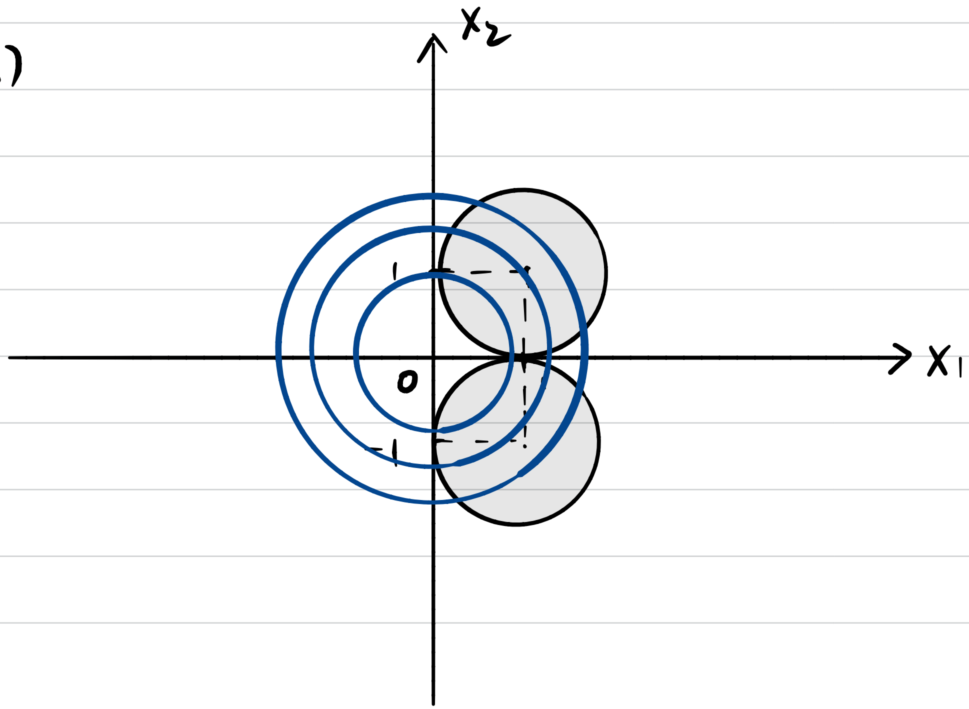
$$S(X)=C-B^{T}A^{-1}B\succeq T\Leftrightarrow\begin{bmatrix}A & B\\ B^{T} & C-T\end{bmatrix}\succeq 0\Leftrightarrow X-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}\succeq 0$$

令 $L(X,T)=X-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & T\end{bmatrix}$

hypo $S=\{(X,T)\mid L(X,T)\in S_{+}^{n},\ X\in S_{++}^{n},\ T\in S^{n-k}\}$

半正定锥是凸的, 即 hypo S 是凸的, 得证.

2. (a)



$x^{*}=(1,0)$
$p^{*}=1$

(b) KKT条件:

$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\le 1$, $(x_1-1)^2+(x_2+1)^2\le 1$, $\lambda_1\ge 0$, $\lambda_2\ge 0$,

$2x_1+2\lambda_1(x_1-1)+2\lambda_2(x_1-1)=0$, $2x_2+2\lambda_1(x_2-1)+2\lambda_2(x_2+1)=0$,

$\lambda_1[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2-1]=\lambda_2[(x_1-1)^2+(x_2+1)^2-1]=0$

在 x^* 处, 得到 $2=0$. 即不存在 λ_1^* 和 λ_2^* 证明 x^* 最优

5.27

$L(x,v)=\|Ax-b\|_2^2+v^T(Gx-h)=x^TA^TAx+(G^Tv-2A^Tb)^Tx-v^Th$

KKT条件:

$2A^TAx+G^Tv-2A^Tb=0$, $Gx=h$

$$\Rightarrow x^*=\frac{(A^TA)^{-1}(2A^Tb-G^Tv)}{2}$$

5.28

证明: 该问题是不等式形式的线性规划, 根据教材有

$L(x,\lambda)=-b^T\lambda+(A^T\lambda+c)^Tx$

其对偶问题为 $\max -b^T\lambda$ s.t. $A^T\lambda+c=0$, $\lambda\succeq 0$. $\Rightarrow \lambda^*=(3,2,2,7,0)^T$

根据强对偶性, 原问题最优值为 $-b^T\lambda^*=-64$

x^* 在原问题可行集内且 $c^Tx^*=-64$

综上, x^* 是原问题的唯一最优解.