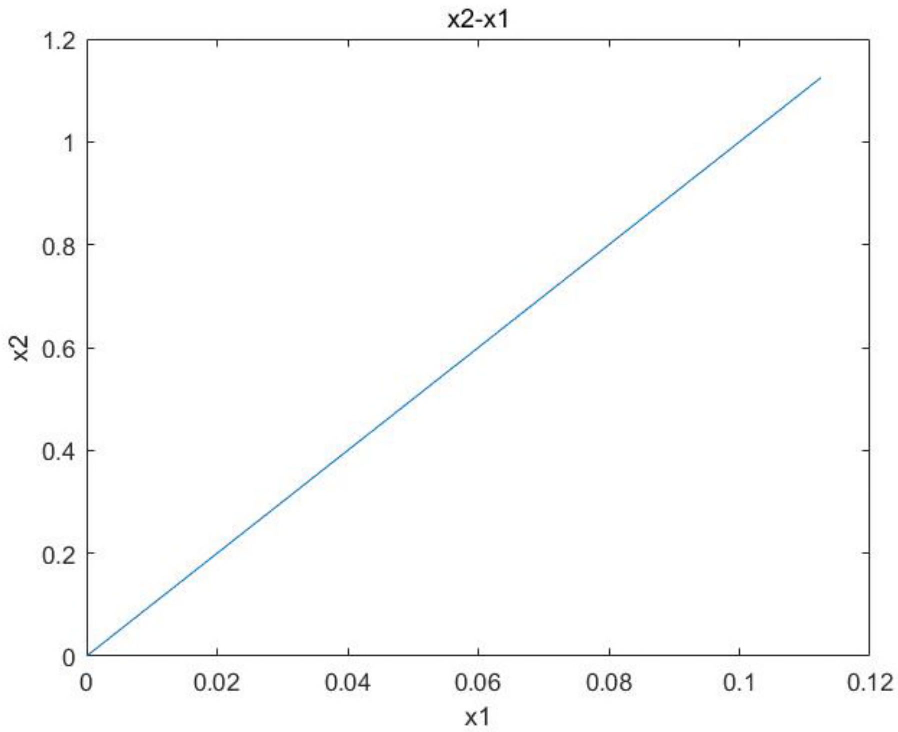
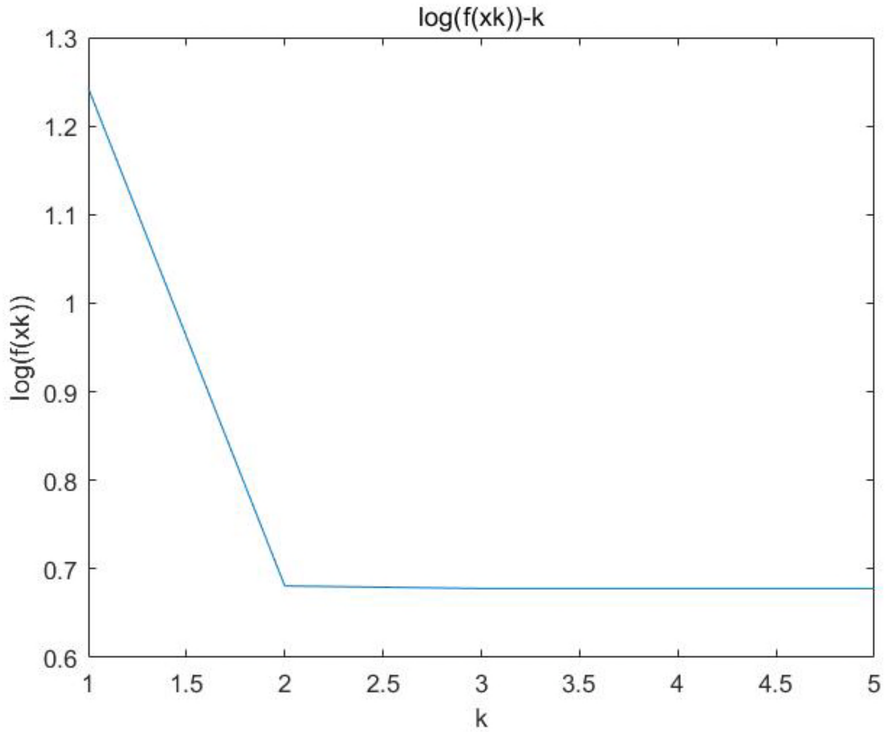
1. 选取$\alpha=0.2$，$\beta=0.8$，运行结果如下：



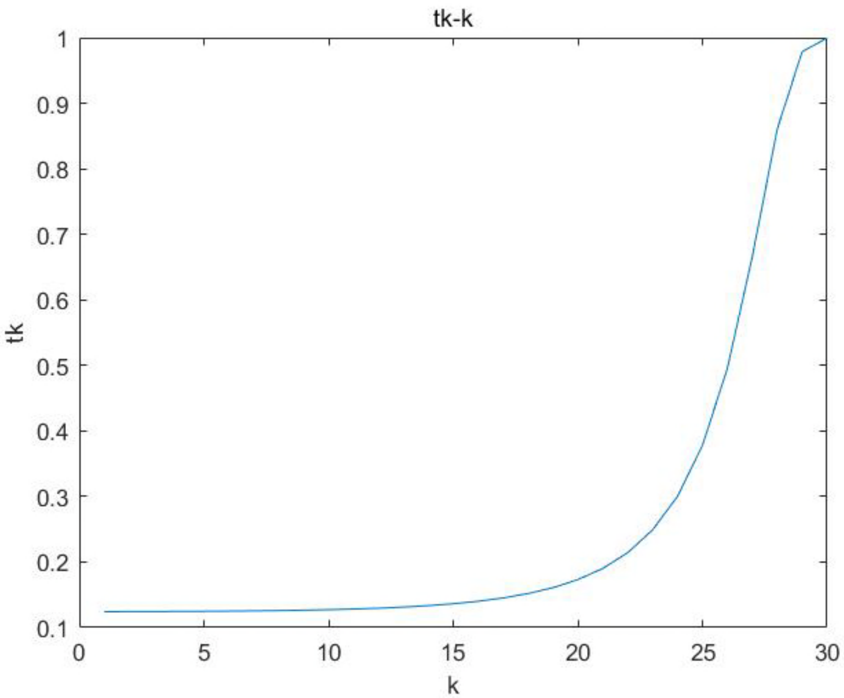

最终迭代次数 $k=5$，$x_k=(0.1125, 1.1247)$，$f(x_k)=1.9697$

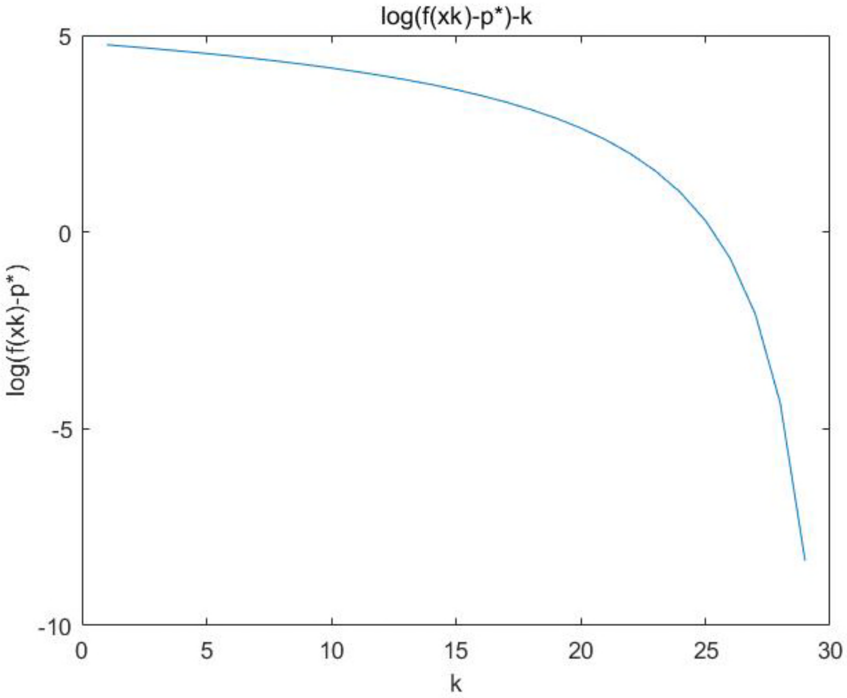
2、

(1) 根据教材，线性不等式的对数障碍、凹的二次函数的对数都是自和谐的，即每个 $-\log(1-a_i^T x)$ 和 $-\log(1-x_i^2)$ 都是自和谐的，故所有项的和也是自和谐的。

(2) 运行结果如下：

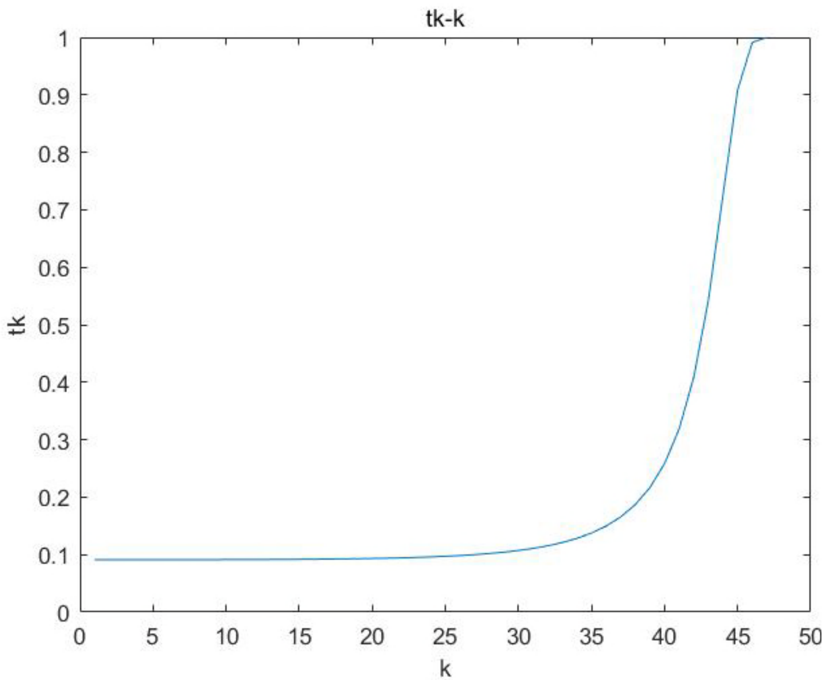
A、50：初始点选取为 $(0,0,\cdots,0)^T$，最终迭代次数 $k=30$，此时 $f(x_k)=-116.4948$，选取 $f(x_k)$ 为 $p^*$ 作图如下：

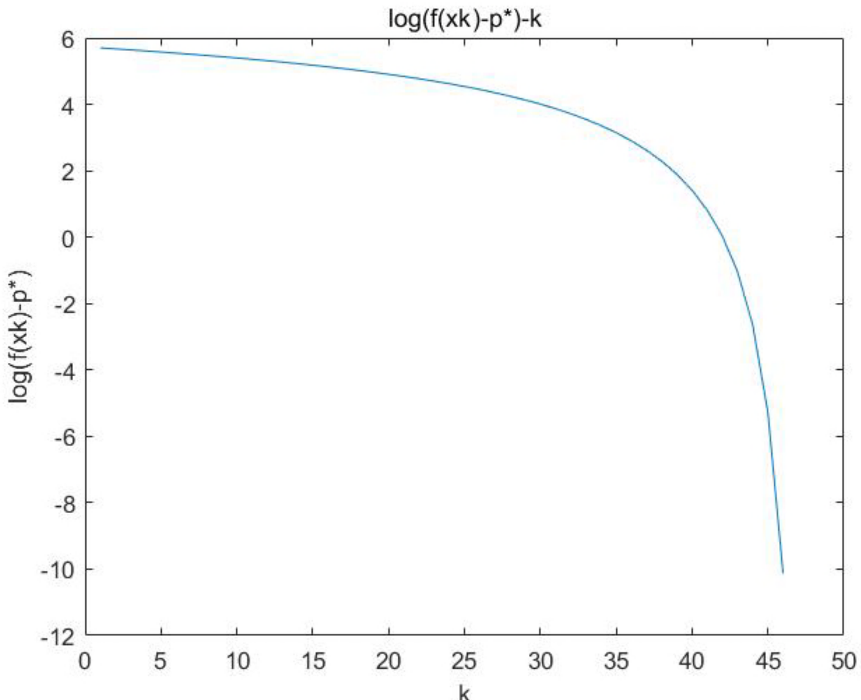



A-100：初始点选取为 $(0,0,\cdots,0)^T$，最终迭代次数 $k=47$，此时 $f(x_k)=-298.8396$

选取 $f(x_k)$ 为 $p^*$ 作图如下：

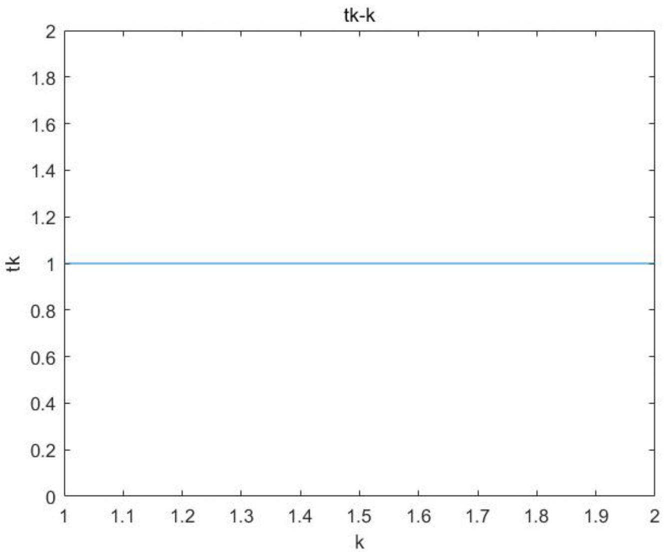


3. 选取 $\alpha=0.2$，$\beta=0.8$，对于原问题，等式约束的 $\Delta x_{nt}$ 由以下方程确定：

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta x_{nt} \\ w \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \nabla f(x) \\ 0 \end{bmatrix}$$

，其中 $\omega$ 是最优对偶变量。初始点选取为可行解 $x_0 = A\backslash b$，最终迭代次数为 $k=2$，此时 $f(x_k)=5.6957e{+}04$，对应的 $\lambda(x)^2$ 已经非常小，认为 $p^* = f(x_k)$。仅作出 $t_k$ 随 $k$ 变化的图像：




$$L(x,v) = \frac{1}{2}x^TPx + q^Tx + v^T(Ax-b) = \frac{1}{2}x^TPx + (v^TA+q^T)x - v^Tb$$

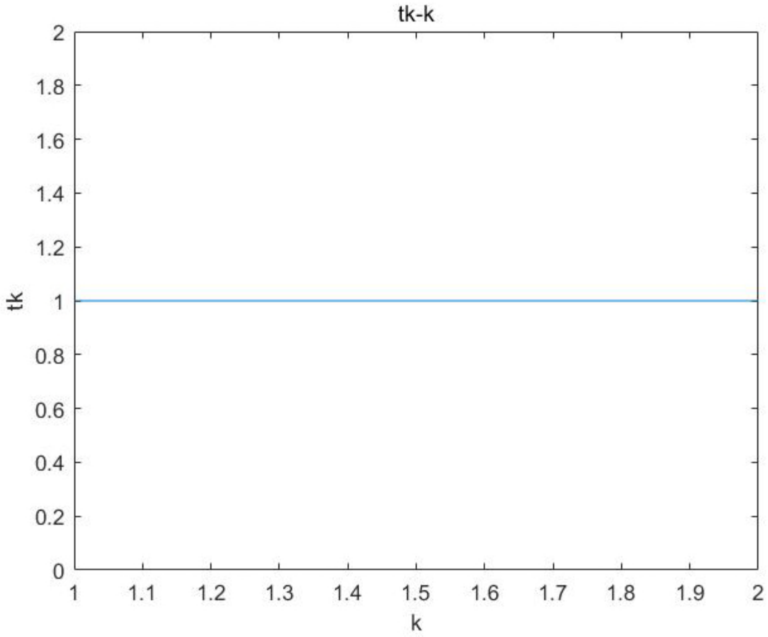
$$g(v) = \inf_x L(x,v) = L(x,v)\,\Big|_{x=-P^{-1}(A^Tv+q)} = -\frac{1}{2}(v^TA+q^T)P^{-1}(A^Tv+q) - v^Tb$$

对偶问题为 $\max\ -\frac{1}{2}(v^TA+q^T)P^{-1}(A^Tv+q) - v^Tb$

即 $\min\ \frac{1}{2}v^TAP^{-1}A^Tv + v^T(\frac{1}{2}AP^{-1}q+b) + \frac{1}{2}q^TP^{-1}A^Tv + \frac{1}{2}q^TP^{-1}q$

初始点选取为 $v_0=(1,1,\cdots,1)^T$。最终迭代次数为 $k=2$，此时 $g(v_k) = 5.6957e{+}04$，对应的是精确最优解（使 $\nabla g(v)$ 为0的解），$d^* = 5.6957e{+}04$。验证了强对偶性。

仅作出 $t_k$ 随 $k$ 变化的图像：


tk-k
tk
k
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2