Matrix Analysis and Applications (Autumn 2021) **Homework: 3**

特殊矩阵

Lecturer: Feng Chen chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao zhang-tr19,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn

1. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -c & -1 & c \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

求 c 值，使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵。并求矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 。

2. 令 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵, $\boldsymbol{B}$ 为实反对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$ 。证明：若 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是非奇异的, 则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-1}$ 是正交矩阵。

3. 证明：若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times n$ 的反对称矩阵，且 n 为奇数，则其行列式等于零。

4. 证明：右循环矩阵

$$C_R\left(c_0,c_1,\cdots,c_{N-1}\right)=\begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{N-1} \\ c_{N-1} & c_0 & \cdots & c_{N-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_{N-1} & c_0 \end{bmatrix}$$

可由 Fourier 矩阵酉对角化

$$\boldsymbol{F}\boldsymbol{C}_R\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}=\operatorname{diag}\left(f\left(\lambda_0\right),f\left(\lambda_1\right),\cdots,f\left(\lambda_{N-1}\right)\right)$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 为 Fourier 矩阵，$f\left(\lambda_n\right)=c_0+c_1\lambda_n+c_2\lambda_n^2+\cdots+c_{N-1}\lambda_n^{N-1}$ 。同时,

$$\boldsymbol{f}=\sqrt{N}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{c}$$

其中 $\boldsymbol{f}=\left[f\left(\lambda_0\right),f\left(\lambda_1\right),\cdots,f\left(\lambda_{N-1}\right)\right]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}=\left[c_0,c_1,\cdots,c_{N-1}\right]^{\mathrm{T}}$ 。

5. 令 $\boldsymbol{P}$ 是一个 $n \times n$ 置换矩阵，证明存在一个正整数 k，使得 $\boldsymbol{P}^k = \boldsymbol{I}$ 。

6. 证明：若 $\boldsymbol{A}$ 为实反对称矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 非奇异。

7. 假设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相似，证明：

(1) $\boldsymbol{B}+\alpha\boldsymbol{I}$ 与 $\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{I}$ 相似；

(2) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 相似；

(3) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 非奇异，则 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 相似。

8. 第 i 行和第 j 列元素为 $1/(i+j-1)$ 的 $n \times n$ 矩阵称为 Hilbert 矩阵。令 $\boldsymbol{A}$ 是一个 6×6 维 Hilbert 矩阵, 并且

$$\boldsymbol{b} = [1,2,1,1.414,1,2]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b} = [1,2,1,1.4142,1,2]^{\mathrm{T}}$$

用 MATLAB 求解矩阵方程 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{b}+\Delta\boldsymbol{b}$，并比较 $\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$，试解释为什么尽管向量 $\boldsymbol{A}$ 的扰动很小，$\boldsymbol{x}_1$ 和 $\boldsymbol{x}_2$ 却相差很大。

9. 形如

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} x_1^{\alpha_1} & x_1^{\alpha_2} & x_1^{\alpha_3} & \cdots & x_1^{\alpha_p} \\ x_2^{\alpha_1} & x_2^{\alpha_2} & x_2^{\alpha_3} & \cdots & x_2^{\alpha_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p^{\alpha_1} & x_p^{\alpha_2} & x_p^{\alpha_3} & \cdots & x_p^{\alpha_p} \end{bmatrix} \quad x_1 < x_2 < \cdots < x_p \in \mathbb{R}_+ \quad \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p \in \mathbb{R}$$

的矩阵称为广义 Vandermonde 矩阵。试证明：广义 Vandermonde 矩阵一定可逆。