Matrix Analysis and Applications (Autumn 2021) **Homework: 6**

矩阵级数与矩阵微分

Lecturer: Feng Chen `chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn`

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao `zhang-tr19,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn`

1. 计算矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix} 0.1 & 0.7 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}^k$。

2. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in\mathbb{R}^{n\times n}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}$，$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{M}$，求：

(1) $\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{C}^k$。

(2) $\lim_{k\to\infty}\begin{bmatrix} 0.2 & 0 & 1 & 1 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^k$。

3. 计算下列函数或函数值:

(1) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}$，求矩阵函数 $e^{t\boldsymbol{A}}$。

(2) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{1000}$。

(3) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}$ 和 $\sin\boldsymbol{A}$。（提示：考虑使用 Cayley-Hamilton Theorem。）

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为任意 n 阶矩阵，证明 $\left\|\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}}\right\|\leqslant\mathrm{e}^{\|\boldsymbol{A}\|}$。

5. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 是向量变量，$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2^2$，试求 $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}$。

6. 求矩阵函数 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的 Jacobian 矩阵。

7. 求标量函数 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}$ 的 Hessian 矩阵。

8. 证明：

$$\mathrm{d}\left(\boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{F}\right) = \boldsymbol{F}^{\dagger}(\mathrm{d}\boldsymbol{F})\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{F}\right) + \left[\boldsymbol{F}^{\dagger}(\mathrm{d}\boldsymbol{F})\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}^{\dagger}\boldsymbol{F}\right)\right]^{\mathrm{T}}$$
$$\mathrm{d}\left(\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\dagger}\right) = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\dagger}\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{\dagger} + \left[\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\dagger}\right)(\mathrm{d}\boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{\dagger}\right]^{\mathrm{T}}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是实矩阵，$\boldsymbol{F}^{\dagger}$ 是 $\boldsymbol{F}$ 的 Moore-Penrose 逆矩阵。

9. 设 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 是矩阵变量，$\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 的常数矩阵，求:

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}\left(\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right)\right)$。

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}(\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}))$。