Matrix Analysis and Applications (Autumn 2021) **Homework: 2**

向量和范数

Lecturer: Feng Chen chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao zhang-tr19,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn

1. 在 $\mathbb{R}^n$ 中，设 $\boldsymbol{\alpha} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$，分别定义实数 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ 如下：

(1) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \eta_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$;

(2) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right)\left(\sum_{j=1}^n \eta_j\right)$

(3) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \left(\sum_{i=1}^n i\xi_i\eta_i\right)$.

判断它们是否为 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积.

2. $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & \mathrm{i} \\ 3+\mathrm{i} & 5 & 1+\mathrm{i} & 0 \\ 2 & \mathrm{i} & 2 & -4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -\mathrm{i} \end{bmatrix}$，$\mathrm{i} = \sqrt{-1}$，计算 $\|\boldsymbol{Ax}\|_1$，$\|\boldsymbol{Ax}\|_2$，$\|\boldsymbol{Ax}\|_\infty$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定埃尔米特矩阵，对任意 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{C}^n$，定义

$$\|\boldsymbol{X}\|_{\boldsymbol{A}} = \sqrt{\boldsymbol{X}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}}$$

试证：$\|\boldsymbol{X}\|_{\boldsymbol{A}}$ 是一种向量范数.

4. 设求矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\mathrm{i} & 2 & 3 \\ 1 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$（其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$）的范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_\infty$ 及 $\|\cdot\|_2$.

5. 设 $\boldsymbol{P} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 可逆，已知 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中有矩阵范数 $\|\cdot\|_M$，对于 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，定义实数 $\|\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_M$，验证 $\|\boldsymbol{A}\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的一种矩阵范数.

6. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，列向量 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{C}^n$，证明：矩阵范数

$$\|\boldsymbol{A}\|=\max\{m,n\}\max_{i,j}|a_{ij}|$$

与向量 2 范数和 ∞ 范数都相容.

7. 设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上的矩阵范数，证明：

(1) $\|\boldsymbol{I}\|\geq 1$；

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征值，那么 $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|^{-1}\leq|\lambda|\leq\|\boldsymbol{A}\|$.

8. 已知 $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^n\,(n>1)$ 为一个单位列向量，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$，试证：

(1) $\|\boldsymbol{A}\|_2=1$；

(2) 对任意的 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^n$，如果有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{X}$，那么 $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\|_2<\|\boldsymbol{X}\|_2$.