

## 最小二乘

Lecturer: Feng Chen      chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao      zhang-tr19, jiangyz20, gck20@mails.tsinghua.edu.cn

1. 已知数据点  $(1, 3), (3, 1), (5, 7), (4, 6), (7, 4)$ , 分别求关于  $x$  轴方向,  $y$  轴方向的一般最小二乘拟合直线, 以及总体最小二乘拟合直线, 并分别分析数据点到三条拟合直线的距离平方和。

2. (加权最小二乘问题) 在普通最小二乘问题中, 我们默认观测模型  $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e}$  中的噪声  $\mathbf{e}$  满足  $\mathbb{E}\{\mathbf{e}\} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbb{E}\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} = \mathbf{I}$ , 故有  $\mathbf{x}_{LS} = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{y}$ 。但在工程实际中, 噪声  $\mathbf{e}$  的各分量可能不完全独立, 此时  $\mathbb{E}\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} = \mathbf{R}_e$  并不为对角矩阵。此时, 对未知变量  $\mathbf{x}$  的最佳估计应该采用最小化加权误差函数  $J_W(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})^T \mathbf{W}(\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x})$ 。试证明

$$\mathbf{x}_{WLS} = (\mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{W} \mathbf{y}$$

其中, 加权矩阵  $\mathbf{W}$  的最优选择为  $\mathbf{W}_{opt} = \mathbf{R}_e^{-1}$ 。

3. 使用 MATLAB 分别编写普通最小二乘和总体最小二乘代码, 并自行生成数据点对其效果进行测试和对比。(在网络学堂提交代码文件和报告, 报告中需要包含对最小二乘结果的可视化)