Matrix Analysis and Applications (Autumn 2021) **Homework: 5**

广义逆分析

Lecturer: Feng Chen chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao zhang-tr19,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn

1. 已知矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2 & -2 & 6\\ 0 & 1 & -1 & -2 & 3\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的一个基本广义逆矩阵 $\boldsymbol{A}^-$.

2. 分别利用递推法和迹方法求矩阵

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

的 Moore-Penrose 逆矩阵 $X^\dagger$。

3. 用满秩分解法求下列矩阵的 Moore-Penrose 逆矩阵：

(1) $\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ (2) $\boldsymbol{A}_2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$

并分别求不相容方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 和 $\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_2$ 的极小范数最小二乘解，其中 $\boldsymbol{b}_1=(1,2,1,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{b}_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}^\dagger$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆. 证明下列等式：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^\dagger=\boldsymbol{A}^\dagger(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^\dagger\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^\dagger(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^\dagger$

(2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{\dagger}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})$

(3) $\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})$

(4) 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$，那么

$$(\boldsymbol{A}^2)^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^{\dagger})^2, \quad \boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{A}^2)^{\dagger} = (\boldsymbol{A}^2)^{\dagger}\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger}$$

(5) 如果 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} = \boldsymbol{A}$，那么

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A}$$

5. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{U} \in \mathbb{C}^{n\times k}$，$\boldsymbol{B} \in \mathbb{C}^{k\times k}$，$\boldsymbol{V} \in \mathbb{C}^{k\times n}$ 且 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可逆，则当 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}$ 可逆时，证明：

(1) $\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}$ 可逆.

(2) Woodbury 公式，即

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\left(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{U}\right)^{-1}\boldsymbol{V}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

6. 满足 Moore-Penrose 逆矩阵两个条件

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}$$

的矩阵 $\boldsymbol{G}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的自反广义逆矩阵. 证明：$\mathrm{rank}(\boldsymbol{G}) = \mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$ 对 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ 成立，当且仅当 $\boldsymbol{G}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个自反广义逆矩阵.

7. 给定矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 7 & 12 & 7 & 6 & 9 \\ 17 & 32 & 18 & 15 & 14 \\ 14 & 20 & 12 & 14 & 16 \\ 15 & 16 & 11 & 14 & 18 \end{bmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}\{1,3\}$ 和 $\boldsymbol{A}\{1,4\}$.

(2) 试编写运用两种不同方法求解 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 的 MATLAB 程序，并对结果进行验证、比较和分析.

（注：禁止直接调用 svd,eig 函数以及 pinv,^(-1) 等求逆函数或算符. 请尽量将程序运行结果和分析和其他部分答案写在同一个 PDF 中提交.）