Matrix Analysis and Applications (Autumn 2021)

Homework: 9

最小二乘

Lecturer: Feng Chen chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao zhang-tr19, jiangyz20, gck20@mails.tsinghua.edu.cn

- **1.** 已知数据点 (1,3), (3,1), (5,7), (4,6), (7,4), 分别求关于 x 轴方向,y 轴方向的一般最小二乘拟合直线,以及总体最小二乘拟合直线,并分别分析数据点到三条拟合直线的距离平方和。
- 2. (加权最小二乘问题) 在普通最小二乘问题中,我们默认观测模型 y = Ax + e 中的噪声 e 满足 $\mathbb{E}\{e\} = 0$, $\mathbb{E}\{ee^{\mathsf{T}}\} = I$,故有 $x_{\mathrm{LS}} = A^{\dagger}y$ 。但在工程实际中,噪声 e 的各分量可能不完全独立,此时 $\mathbb{E}\{ee^{\mathsf{T}}\} = R_e$ 并不为对角矩阵。此时,对未知变量 x 的最佳估计应该采用最小化加权误差函数 $J_W(x) = (y Ax)^{\mathsf{T}}W(y Ax)$ 。试证明

$$oldsymbol{x}_{ ext{WLS}} = oldsymbol{\left(oldsymbol{A}^{ ext{T}}oldsymbol{W}oldsymbol{A}
ight)}^{-1}oldsymbol{A}^{ ext{T}}oldsymbol{W}oldsymbol{y}$$

其中,加权矩阵 W 的最优选择为 $W_{\mathrm{opt}} = R_e^{-1}$ 。

3. 使用 MATLAB 分别编写普通最小二乘和总体最小二乘代码,并自行生成数据点对其效果进行测试和对比。(在网络学堂提交代码文件和报告,报告中需要包含对最小二乘结果的可视化)