

奇异值分析

Lecturer: Feng Chen chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao zhang-tr19,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn

1. 已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

求矩阵 \mathbf{A} 的奇异值分解。

2. 令 $\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{p}^H + \mathbf{y}\mathbf{q}^H$, 其中 $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$. 求矩阵 \mathbf{A} 的 Frobenius 范数。(提示: 计算 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$, 并求 \mathbf{A} 的奇异值。)

3. 设 $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^H$ 为矩阵 \mathbf{A} 的一个奇异值分解.

(1) 证明: \mathbf{U} , \mathbf{V} 的列向量分别为 $\mathbf{A}\mathbf{A}^H$ 和 $\mathbf{A}^H\mathbf{A}$ 的特征向量;

(2) 举反例说明根据 (1) 确定的酉矩阵 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 不一定是 \mathbf{A} 的奇异值分解。

4. 设 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m \times n}$, \mathbf{U} 和 \mathbf{V} 分别为 m , n 阶酉矩阵, 试证: $\mathbf{U}\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}\mathbf{V}$ 的奇异值与 \mathbf{A} 的奇异值相同。

5. 用矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} (m \geq n)$ 的奇异向量表示 $\begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{O} \end{bmatrix}$ 的特征向量。

6. 若 $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是正规矩阵, 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 求 \mathbf{A} 的奇异值。