Matrix Analysis and Applications (Autumn 2021) **Homework: 7**

特征分析

Lecturer: Feng Chen `chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn`

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao `zhang-tr19,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn`

1. 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & \cdots & 2 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与一组特征向量。

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个相异的特征值，证明：若有 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则 $\boldsymbol{B}$ 可对角化。

3. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足方程 $\boldsymbol{A}^2-5\boldsymbol{A}+6\boldsymbol{I}=0$，问 $\boldsymbol{A}$ 是否可以相似对角化?

4. 考虑对称矩阵序列

$$\boldsymbol{A}_r=[a_{ij}], \quad i,j=1,2,\cdots,r$$

其中, $r=1,2,\cdots,n$。令 $\lambda_i(\boldsymbol{A}_r), i=1,2,\cdots,r$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}_r$ 的第 i 个特征值, 并且

$$\lambda_1(\boldsymbol{A}_r)\geq\lambda_2(\boldsymbol{A}_r)\geq\cdots\geq\lambda_r(\boldsymbol{A}_r)$$

则

$$\lambda_{k+1}(\boldsymbol{A}_{i+1})\leq\lambda_k(\boldsymbol{A}_i)\leq\lambda_k(\boldsymbol{A}_{i+1})$$

这一结果称为 Sturmian 分离定理。试使用 Rayleigh 商证明这一定理。

5. 令

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, f(x)=x^{23}-2*x^{13}$$

使用化零多项式证明：$\boldsymbol{A}^{23}-2\boldsymbol{A}^{13}=-\boldsymbol{A}$

6. 试画出矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 2\\ 2 & 7 & 1\\ 1 & 2 & 15\end{bmatrix}$$

的盖尔圆, 并任选 2 种相似变换对特征值范围的估计进行改进。

7.（**谐波频率估计的 ESPRIT 方法**）考虑白噪声中的混合谐波信号

$$x(n)=\sum_{i=1}^{3}s_ie^{j\omega_in}+\omega(n)$$

其中信号 (复) 幅值和归一化角频率分别为

$$[s_1,s_2,s_3]=\left[1.31e^{j\frac{\pi}{4}},2.07e^{j\frac{\pi}{3}},1.88e^{j\frac{\pi}{5}}\right]$$
$$[\omega_1,\omega_2,\omega_3]=[0.12\pi,0.37\pi,0.72\pi],$$

而 $\omega(n)$ 是一零均值、方差为 σ^2 的复值高斯白噪声过程。试编制应用 ESPRIT 方法来估计各谐波分量频率的 MATLAB 程序并完成如下研究任务:

(1) 设样本数 $N=100$, 画出估计均方误差

$$\mathrm{MSE}=\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\left(\sum_{i=1}^{3}\left|\hat{\omega}_i-\omega_i\right|^2\right)$$

随 σ^2 的变化曲线, 其中 $K=200$ 为独立实验次数。

(2) 设噪声方差 $\sigma^2=0.01$, 画出估计均方误差 MSE 随样本数 N 变化的曲线。

请在作业文档末附上运行结果、分析报告和源代码。