Matrix Analysis and Applications (Autumn 2021) **Homework: 1**

矩阵分析基础 (1)

Lecturer: Feng Chen `chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn`

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao `zhang-tr19,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn`

1. 设 $P[x]_3$ 的两基为

$$\text{(I)}: \begin{array}{ll} f_1(x) = 1, & f_2(x) = 1 + x, \\ f_3(x) = 1 + x + x^2, & f_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3. \end{array}$$

$$\text{(II)}: \begin{array}{ll} g_1(x) = 1 + x^2 + x^3, & g_2(x) = x + x^2 + x^3, \\ g_3(x) = 1 + x + x^2, & g_4(x) = 1 + x + x^3. \end{array}$$

(1) 求由基 (I) 变到基 (II) 的过渡矩阵；

(2) 求 $P[x]_3$ 中在基 (I) 和基 (II) 下有相同坐标的全体多项式。

2. 设三维线性空间间 $\mathcal{V}^3$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e_3}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_1}$ 下的矩阵；

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e_1}, k\boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ 下的矩阵，$k \neq 0$；

(3) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\boldsymbol{e_1} + \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ 下的矩阵。

3. 已知 $n \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$。若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩为 $r_{\boldsymbol{X}}$，且 $\boldsymbol{y}$ 是一个正态分布的随机向量，其均值向量为 $\boldsymbol{Xb}$，协方差矩阵为 $\sigma^2\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{y} \sim N(\boldsymbol{Xb}, \sigma^2\boldsymbol{I})$，证明：

(1) $\mathbf{E}\{\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{My}\} = (n - r_{\boldsymbol{X}})\sigma^2$；

(2) $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{My}/\sigma^2$ 服从自由度为 $(n - r_{\boldsymbol{X}})$ 的 χ^2 分布，即 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{My}/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-r_{\boldsymbol{X}}}$。

提示：借助性质 $\boldsymbol{M}^2 = \boldsymbol{M}, \boldsymbol{M}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{M}$ 作特征值分解。

4. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 证明:

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right) = \operatorname{rank}\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)$$

5. 设 n 维向量空间 $\mathbb{U}$ 和 m 维向量空间 $\mathbb{V}$ 中各有如下基变换：

在 $\mathbb{U}$ 中：$(\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{u}}_n) = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)\boldsymbol{P}$，

在 $\mathbb{V}$ 中：$(\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{v}}_n) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m)\boldsymbol{Q}$，

再设线性变换 $\mathcal{L} : \mathbb{U} \mapsto \mathbb{V}$ 在基 $\boldsymbol{U} = [\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n]$ 和 $\boldsymbol{V} = [\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_m]$ 下的表示矩阵为 $\boldsymbol{A}$，即 $[\mathcal{L}(\boldsymbol{r})]_{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{r}]_{\boldsymbol{U}}$；而在基 $\tilde{\boldsymbol{U}} = [\tilde{\boldsymbol{u}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{u}}_n]$ 和 $\tilde{\boldsymbol{V}} = [\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \cdots, \tilde{\boldsymbol{v}}_m]$ 下的表示矩阵为 $\tilde{\boldsymbol{A}}$，求证：

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

6. 设线性算子 $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, 有

$$\mathscr{A}\left[(x_1, x_2, x_3, x_4)^{\mathrm{T}}\right] = (x_1 - x_2 + x_3 + x_4, x_1 + 2x_2 - x_4, x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4)^{\mathrm{T}}$$

求 $\mathscr{A}$ 的核空间 $N(\mathscr{A})$ 及像空间 $R(\mathscr{A})$（基可自行选定）。

7. 请作图说明三阶行列式的几何意义。并利用几何意义求 $\|\det[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]\|$，其中 $\boldsymbol{u}_1 = (-3, 1, -2)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}_2 = (1, 1, -1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}_3 = (1, -5, -4)^{\mathrm{T}}$。

8. 设 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为一实对称矩阵，而 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ 为二次型。

(1) 证明：f 半正定（即 $\boldsymbol{A} \succeq 0$），当且仅当存在 $\boldsymbol{F} \in \mathbb{R}^{k\times n}$ 使得

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}\|^2$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 l_2 范数。若 $\boldsymbol{A}$ 半正定，试说明如何求解矩阵 $\boldsymbol{F}$？又如何确定最小 k 值？

(2) 证明：$f(\boldsymbol{x})$ 可表示为

$$f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{F}\boldsymbol{x}\|^2 - \|\boldsymbol{G}\boldsymbol{x}\|^2$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 为合适的矩阵。试确定 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 的最小维数。

(3) 当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

时，利用 Matlab 画出 $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 对应的空间曲面。同时研究并解释 f 取不同值时的等高线形状。