1.

$$AA^T=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

其特征值和对应的特征向量为 $\lambda_1=0$, $u_1=[\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2},0]^T$

$\lambda_2=0$, $u_2=[0,0,1]^T$、$\lambda_3=4$, $u_3=[\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},0]^T$

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&2\\2&2\end{bmatrix}$$

其特征值和对应的特征向量为 $\lambda_1=0$, $v_1=[\frac{\sqrt2}{2},-\frac{\sqrt2}{2}]^T$. $\lambda_2=4$, $v_2=[\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2}]^T$

$AA^T=U\Sigma\Sigma^TU^T$, 其中 $U=(u_3,u_1,u_2)$, $A^TA=V\Sigma^T\Sigma V^T$, 其中 $V=(v_2,v_1)$, 验算得A满足 $A=U\Sigma V^T$,
故

$$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}&0\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt2}{2}\\\frac{\sqrt2}{2}&-\frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}^T$$

2、

由 $x\perp y$, $p\perp q$, 有 $A^HA=(px^H+qy^H)(xp^H+yq^H)=px^Hxp^H+qy^Hyq^H$
$=x^Hxpp^H+y^Hyqq^H$

$\|A\|_F=\sqrt{tr(A^HA)}=\sqrt{tr(x^Hxpp^H+y^Hyqq^H)}=\sqrt{p^Hpx^Hx+q^Hqy^Hy}$

3.

(1) $A=U\Sigma V^H=U\begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^H$，$A^H=V\begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^H$

$AA^H=U\begin{bmatrix}\Sigma_1^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}U^H$，$AA^HU=U\begin{bmatrix}\Sigma_1^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=U\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$

设 $U=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$，则 $AA^Hu_i=\lambda_iu_i$，$i=1,\cdots,m$ （$i>r$ 时，$\lambda_i=0$）

说明 U 的列向量是 AA^H 的特征向量

而 $A^HA=V\begin{bmatrix}\Sigma_1^2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^H$，设 $V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，同理可得 $A^HAv_j=\lambda_jv_j$，$j=1,\cdots,n$（$j>r$ 时，$\lambda_j=0$）

说明 V 的列向量是 A^HA 的特征向量

(2)

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $AA^H=\begin{bmatrix}5 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，求得 $U=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2} & 0\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，即对于 $D_1=\begin{bmatrix}9 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix}$ 有 $AA^H=UD_1U^H$

$A^HA=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 5\end{bmatrix}$，求得 $V=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt2}{2} & -\frac{\sqrt2}{2}\\ -\frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}\end{bmatrix}$，即对于 $D_2=\begin{bmatrix}9 & \\ & 1\end{bmatrix}$ 有 $A^HA=VD_2V^H$

$\Sigma=\begin{bmatrix}3 & \\ & 1\\ & \end{bmatrix}$，$U\Sigma V^H=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\neq A$

4.

U为酉矩阵，则$(UA)^H UA = A^H A$

设$A^H A$的正特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_r$，$A$的奇异值为$\sigma_1,\cdots,\sigma_r$，则$UA$的奇异值也为$\sigma_1,\cdots,\sigma_r$

又$(AV)^H AV = V^H A^H A V$，即$(AV)^H AV$与$A^H A$酉相似，故特征值相同，因此AV的奇异值也与A相同

5.

设A的奇异值分解为$A=U\Sigma V^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T$，其中$\sigma_i$为$\Sigma$的第$i$个对角元素，$u_i$和$v_i$分别为$U$和$V$的第$i$个列向量，$i=1,\cdots,n$，则有

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix} = \sigma_i \begin{bmatrix} v_i \\ u_i \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -v_i \\ u_i \end{bmatrix} = \sigma_i \begin{bmatrix} v_i \\ -u_i \end{bmatrix}$$

故$\begin{bmatrix} 0 & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$的非零特征值所对应的特征向量可表示为$\begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} v_n \\ u_n \end{bmatrix},\begin{bmatrix} v_1 \\ -u_1 \end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix} v_n \\ -u_n \end{bmatrix}$，共$2n$个

其余$m-n$个零特征值对应的特征向量可表示为$\begin{bmatrix} 0 \\ u_j \end{bmatrix}$，$j=n+1,\cdots,m$.

6.

A是正规阵 $\Rightarrow$ $\exists$有酉矩阵$U\in C^{n\times n}$ s.t. $U^H A U = diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，其中$\lambda_i$为$A$的特征值，

故 $U^H A^H U = UA^H U^H = (U^H A U)^H = diag(\lambda_1^H,\cdots,\lambda_n^H)$

则 $U^H A^H A U = U^H A^H U U^H A U = diag(|\lambda_1|^2,\cdots,|\lambda_n|^2)$

故A的奇异值为$\sigma_i = \sqrt{|\lambda_i|^2} = |\lambda_i|$，$i=1,2,\cdots,n$.