

矩阵分解

Lecturer: Feng Chen chenfeng@mail.tsinghua.edu.cn

TA: Tianren Zhang, Yizhou Jiang, Chongkai Gao zhang-tr19,jiangyz20,gck20@mails.tsinghua.edu.cn

1. 利用 LU 分解, 求解线性方程组

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 &= 1 \\2x_1 + x_2 &= 3 \\3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 0\end{aligned}$$

2. 求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -4 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

的 Doolittle 分解与 Crout 分解。

3. 求对称正定矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

的不带平方根的 Cholesky 分解 (即 $\mathbf{A} = \mathbf{LDL}^T$, 其中 \mathbf{D} 为对角阵)。

4. 用 Householder、Givens、Schmidt 变换求矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

的 QR 分解

5. 设 $A^2 = A$ 且 A 满足满秩分解 $A = BC$, 证明 $CB = I$ 。

6. 设 A, B, C 分别为 $m \times n, n \times k, k \times p$ 矩阵, 证明:

$$\text{rank}(ABC) \geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) - \text{rank } B$$

7. 令 $A = I + uu^T$, 其中 $u \in R^n$ 为已知向量, $A \in R^{n \times n}$, $\|u\| = 1$ 。求矩阵 A 的 Cholesky 因子的主对角线和次对角线的显式表达式。
8. 随机产生一个 11×8 的实值矩阵 X , 并令 $A = XX^T$ 。请编程实现矩阵 A 的 Cholesky 分解, 给出源代码和运行结果 (附于作业文本中即可), 并与 `chol(matlab)` 或 `numpy.linalg.cholesky(python)` 等函数的结果对比。