数值分析第二次大作业
实验报告

2017011010 杜澍浛 自 71

需求分析

本次大作业要求至少用（1）逼近；（2）数值积分；（3）常微分方程中的两种算法实现$\sin(x)$的数值求解并做误差分析。要求方法本身要能够达到任意精度；要分析不同方法的方法误差及存储误差对最终结果的影响，分析比较所用方法的计算代价、收敛速度等；具体计算结果至少精确到小数点后第 4 位。

我实现了 Taylor 多项式展开（逼近）和改进欧拉算法（常微分方程），完整分析了两项误差、计算代价和收敛速度。

原理和分析

Taylor 多项式展开

（1）方法误差：

$f(x)=\sin(x)$在$x=0$附近的 Taylor 级数为

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

假设取其中的前$n+1$项计算结果作为最终估计值，将上式写成带拉格朗日余项的形式如下：

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+\frac{sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

因此产生的方法误差即

$$e_n=\frac{sin^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

若令$y_n=\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$，可以推出$\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!}\times\frac{(2n+2)!}{x^{2n+2}}=\frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)}$

输入值x的范围为$(-10,10)$，因此可以保证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n}=\frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)}=0$$

即

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

由$\left|sin^{(2n+2)}(\xi)\right| < 1$推出$|e_n| < |y_n| = y_n$，因此有$\lim_{n\to\infty}|e_n| = 0$。由此可以说明 Taylor 多项式展开理论上的确可以达到任意精度。

$$\sin(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

当$\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right|}{\left|(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|} = \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} < 1$时，可以推出第 n+1 项之后的任意一项与其前项的绝对值比值小于 1，也即自第 n 项起各项绝对值单调递减。再由$\sin(x)$Taylor 展开式各项的正负相间性，可以得到结论：自第$n+1$项起的所有项加和的绝对值小于第n项绝对值，故只要能保证$\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} < 1$及$\left|(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| < \frac{1}{2}\times 10^{-m}$，取前$n+1$项计算结果作为最终估计值就有方法误差小于$\frac{1}{2}\times 10^{-m}$($m$的最小值为要求显示的最小小数位数，这里设为 5)。

（2）舍入误差：

由于输入精确度设为六位有效数字，整数部分为个位的舍入误差限$|\Delta_{in}| = \frac{1}{2}\times 10^{-5}$，又由于 C++ double 类精度为 15，整数部分为个位的舍入误差限$|\Delta_c| = \frac{1}{2}\times 10^{-14}$. 我在代码实现时先将输入转到$[0,2\pi]$区间上了（原因在**其他说明**一节中阐释），此转换需要用x向 M_PI（C++中的π，double 类型，精度也为 15 位）做一次除法，造成的舍入误差限$|\Delta_c{}'| = |\Delta_c|$.

若令$f_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, y_n = (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，有：

$$f_0 = 0$$

$$f_{n+1} - f_n = y_{n+1}$$

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = -\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}$$

因此有：

$$|\Delta y_{n+1}| \le \left|\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\right||\Delta y_n| + \left|\frac{2xy_n}{(2n+2)(2n+3)}\right||\Delta_{in}| + |\Delta_c|$$

由输入精度单独造成的误差$|\Delta_{in}{}'| \le max\left|\frac{\partial f_n}{\partial x}\right||\Delta_{in}| \approx |\cos(x)||\Delta_{in}| \le$

$|\Delta_{in}| = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$，那么上式可以化简为：

$$|\Delta y_{n+1}| \le \left|\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\right| |\Delta y_n| + |\Delta_c|$$

且由于输入精度要求在 double 精度范围内，$\Delta y_0 = 0$.

由此可见 $|x|$ 最大时舍入误差最大，令 $x = 10$，由 $\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} < 1$ 和 $\left|(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| < \frac{1}{2} \times 10^{-5}$计算得到$n$应取 19. 根据上面的不等式可以得到：

$$\Delta y_0 = 0, \Delta y_1 \le \frac{1}{2} \times 10^{-14}, \Delta y_2 \le 3 \times 10^{-14}$$

$$\Delta y_3 \le 7.643 \times 10^{-14}, \Delta y_4 \le 1.112 \times 10^{-13}, \Delta y_5 \le 1.060 \times 10^{-13}$$

$n \ge 5$时，$\left|\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}\right| \le \frac{100}{12\times 13} \approx 0.642$，那么有：

$$|\Delta y_{n+1}| \le 0.642|\Delta y_n| + \frac{1}{2} \times 10^{-14}$$

即

$$|\Delta y_{n+1}| - 1.397 \times 10^{-13} \le 0.642(|\Delta y_n| - 1.397 \times 10^{-13})$$

$$|\Delta y_n| \le 1.397 \times 10^{-13} \times (1 - 0.642^n)$$

$$\sum_{k=0}^{19} |\Delta y_k| \le 2.265 \times 10^{-12}$$

又由上面的推导有：

$$\Delta f_{n+1} = \Delta f_n + \Delta y_{n+1} + |\Delta_c| \to |\Delta f_{n+1}| \le |\Delta f_n| + |\Delta y_{n+1}| + |\Delta_c|$$

$$|\Delta f_n| \le \sum_{k=0}^{n} |\Delta y_k| + n|\Delta_c|$$

所以$max|\Delta f_n| \le 2.265 \times 10^{-12} + 9.5 \times 10^{-14} = 2.36 \times 10^{-12}$

（3）计算代价：

在题目要求的范围内最多只需要进行10^1数量级的循环就可以得到理想的结果。

（4）收敛速度：

利用拉格朗日余项推出：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\Delta_{n+1}|}{|\Delta_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|f_{n+1} - \sin(x)|}{|f_n - \sin(x)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|sin^{(2n+4)}(\xi_1)|}{|sin^{(2n+2)}(\xi_2)|} \left|\frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)}\right| = 0$$

说明 Taylor 级数超线性收敛，收敛速度很快。

改进欧拉算法

（1）方法误差：

改进欧拉法公式如下：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

考虑到$\sin(x)$的周期性和对称性，实际上只需要计算$x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$的值，但实现时发现非常靠近$\frac{\pi}{2}$的取值是无法运行的，另外也会给误差分析造成困难，改进的方法就是计算$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$的值，其他区间上的值都可以用这一段来表示，分析舍入误差时详细说明转化过程。在此区间内考虑常微分方程：

$$\begin{cases} y' = \sqrt{1-y^2} = f(x, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

其解即为$\mathrm{y} = \sin(x)$，那么与之对应的改进欧拉公式可写为：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + h\sqrt{1-{y_n}^2} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[\sqrt{1-{y_n}^2} + \sqrt{1-{\bar{y}_{n+1}}^2}] \end{cases}$$

这里的开根函数用牛顿迭代法实现，其原理为，对于任意非负常数c，方程$f(x) = x^2 - c$的解就是它的平方根$\sqrt{c}$. 因为$|\sin(x)| \le 1$，故只需考虑$c \in [0, 1]$的情况。由$f(x)$推出其迭代式为$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)'} = x_k - \frac{{x_k}^2 - c}{2x_k} = \frac{x_k}{2} + \frac{c}{2x_k}$，令$\varphi(x) = \frac{x}{2} + \frac{c}{2x}$，则$\varphi(x)' = \frac{1}{2} - \frac{c}{2x^2}$，$\varphi(x)'' = \frac{c}{x^3}$在$(0, \frac{\pi}{4}]$上恒为正，即$\varphi(x)'$单调递增。由于$\varphi\left(\sqrt{c}\right)' = 0$，$min\varphi(x) = \varphi\left(\sqrt{c}\right) = \sqrt{c}$，也即任意$x_k$均满足$x_k \ge \sqrt{c}$。在$x \ge \sqrt{c}$时有$|\varphi(x)'| = \left|\frac{1}{2} - \frac{c}{2x^2}\right| < \frac{1}{2} < 1$，满足迭代法定理 1.

设$y_n = y(x_n)$，欲求其截断误差，将$y(x_{n+1})$在x_n处 Taylor 展开可得：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y^{(2)}(x_n) + \frac{h^3}{3!}y^{(3)}(\xi_n), \xi_n \in [x_n, x_{n+1}]$$

将y_{n+1}在x_n处 Taylor 展开可得：

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left[y'(x_n)+y'(x_n)+hy^{(2)}(x_n)+\frac{h^2}{2}y^{(3)}(x_n)+\frac{h^3}{3!}y^{(4)}({\xi_n}')\right]$$

其中${\xi_n}'\in[x_n,x_{n+1}]$。所以$y(x_{n+1})-y_{n+1}\approx-\frac{h^3}{12}y^{(3)}(x_n)$

接下来分析累积误差，若设第n步前累积的截断误差为Δ_n，对于$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，根据改进欧拉公式有：

$$\bar{\Delta}_{n+1}\leq[1+h\left|\frac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial y}\right|]\Delta_n+\frac{h^2}{2}\left|y^{(2)}(\xi_1)\right|$$

$$\Delta_{n+1}\leq\Delta_n+\frac{h}{2}\left|\frac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial y}\right|\Delta_n+\frac{h}{2}\left|\frac{\partial f(x_n,\overline{y_n})}{\partial y}\right|\bar{\Delta}_{n+1}+\frac{h^3}{12}\left|y^{(3)}(\xi_2)\right|$$

$$\left|\frac{\partial f(x_n,y_n)}{\partial y}\right|=\left|\frac{y_n}{\sqrt{1-{y_n}^2}}\right|=|\tan(arcsin y_n)|=|\tan(x_n)|\leq 1$$

$$\left|y^{(2)}(\xi_1)\right|=|\sin(\xi_1)|<1,\left|y^{(3)}(\xi_2)\right|=|\cos(\xi_2)|<1$$

$$\Rightarrow\Delta_{n+1}\leq\Delta_n+\frac{h}{2}\Delta_n+\frac{h}{2}[(1+h)\Delta_n+\frac{h^2}{2})]+\frac{h^3}{12}=(1+h+\frac{h^2}{2})\Delta_n+\frac{h^3}{3}$$

进一步处理：

$$\Delta_{n+1}+\frac{2h^3}{3(h^2+2h)}\leq(1+h+\frac{h^2}{2})[\Delta_n+\frac{2h^3}{3(h^2+2h)}]$$

又因为$\Delta_0=0$

$$\Rightarrow\Delta_n\leq[(1+h+\frac{h^2}{2})^n-1]\frac{2h^3}{3(h^2+2h)}$$

即$|\Delta_n|\leq\left|[(1+h+\frac{h^2}{2})^n-1]\frac{2h^3}{3(h^2+2h)}\right|=[(1+h+\frac{h^2}{2})^n-1]\frac{2h^3}{3(h^2+2h)}$

也即迭代至第n步的改进欧拉算法的方法误差限为$[(1+h+\frac{h^2}{2})^n-1]\frac{2h^3}{3(h^2+2h)}$.

（2）舍入误差：

上面已经提到过 M_PI 的舍入误差限等于$|\Delta_c|=\frac{1}{2}\times10^{-14}$，如果全程使用弧度制计算，所有利用周期转换的步骤都要用到 M_PI，为了避免多次使用它造成更大的误差，在开始迭代前先将其转换为角度值。

整个转换流程为：（1）若输入为负值，做一个标记，然后将其转换为相反数

$-x$（最后依据该标记将结果反号）;（2）弧度制转角度制即$\theta = \frac{|x|}{2M_PI} \cdot 360°$;（3）若$\theta \in [180°, 360°]$，做一个标记，然后将其转换到$[0,180°]$上（最后依据标记将结果反号）;（4）若$\theta \in [90°, 180°]$，转到$[0,90°]$，不用变号;（5）若$\theta \in [45°, 90°]$，转到$[0,45°]$，不用变号;（6）角度制转弧度制即$x' = \frac{\theta}{360°} \cdot 2M_PI$. 因为$x \in (-10,10)$，这样的转换过程最终使得 M_PI 造成的舍入误差限$|\Delta_c'| < \frac{1}{2} \times 10^{-13}$.

要注意的是，在转换过程（5）中，$[45°, 90°]$到$[0,45°]$（$\theta = 90° - \theta$）实际上得到的是$\cos(x)$，要得到$\sin(x)$要利用$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$再次开根并存储，因此需要分析开根运算的误差。

由于$|x_{k+p} - x_k| \le |x_{k+p} - x_{k+p-1}| + |x_{k+p-1} - x_{k+p-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k|$

设$|\varphi(x)'| \le L < 1$，则有：

$$|x_{k+p} - x_k| \le (L^{p-1} + L^{p-2} + \cdots + 1)|x_{k+1} - x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$$

可见只要控制$|x_{k+1} - x_k|$的上限就可以控制开根运算的误差，例如若选$L = \frac{1}{2}$且设截止条件为$|x_{k+1} - x_k| \le \frac{1}{4} \times 10^{-15}$就可以保证$|x_{k+p} - x_k| \le \frac{1}{2} \times 10^{-15} < |\Delta_c|$，可将其并入到存储误差中。

若设第n步前累积的舍入误差为Δ_n，对于$x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$，根据改进欧拉公式有：

$$\bar{\Delta}_{n+1} \le \left[1 + h\left|\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}\right|\right]\Delta_n + |f(x_n, y_n)|\Delta h + |\Delta_c|$$

$$\Delta_{n+1} \le \Delta_n + \frac{h}{2}\left|\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}\right|\Delta_n + \frac{h}{2}\left|\frac{\partial f(x_n, \overline{y_n})}{\partial y}\right|\bar{\Delta}_{n+1}$$

$$+ \left|\frac{f(x_n, y_n) + f(\bar{x}_{n+1}, \bar{y}_{n+1})}{2}\right|\Delta h + |\Delta_c|$$

$$\left|\frac{\partial f(x_n, y_n)}{\partial y}\right| \le 1, \left|y^{(2)}(\xi_1)\right| < 1, \left|y^{(3)}(\xi_2)\right| < 1, |f(x_n, y_n)| < 1$$

$\Rightarrow \Delta_{n+1} \le \Delta_n + \frac{h}{2}\Delta_n + \frac{h}{2}[(1+h)\Delta_n + \Delta h + |\Delta_c|] + \Delta h + |\Delta_c| = (1 + h + \frac{h^2}{2})\Delta_n + (\frac{h}{2} + 1)(\Delta h + |\Delta_c|)$

进一步处理：

$$\Delta_{n+1}+\frac{\Delta h+|\Delta_c|}{h}\leq(1+h+\frac{h^2}{2})[\Delta_n+\frac{\Delta h+|\Delta_c|}{h}]$$

取$h=\frac{x'}{N}$（即取 N+1 个点，N 取10^3数量级），因为h为 double 类型，可得$\Delta h\leq|\Delta_c|$，故：

$$\Rightarrow\ \Delta_{n+1}+\frac{2|\Delta_c|}{h}\leq(1+h+\frac{h^2}{2})[\Delta_n+\frac{2|\Delta_c|}{h}]$$

又因为$\Delta_0=0$

$$\Rightarrow\Delta_n\leq[(1+h+\frac{h^2}{2})^n-1]\frac{2|\Delta_c|}{h}$$

再考虑上转换过程（5）附加的一次开根和一次存储，因此有：

$$|\Delta_n|\leq\left|[(1+h+\frac{h^2}{2})^n-1]\frac{2|\Delta_c|}{h}+|\Delta_c|\right|=[(1+h+\frac{h^2}{2})^n-1]\frac{2|\Delta_c|}{h}+|\Delta_c|$$

也即迭代至第n步的改进欧拉算法的舍入误差限为$[(1+h+\frac{h^2}{2})^n-1]\frac{2|\Delta_c|}{h}+|\Delta_c|$

（3）计算代价：

只需要进行10^3数量级的循环就可以得到比较理想的结果。

（4）收敛速度：

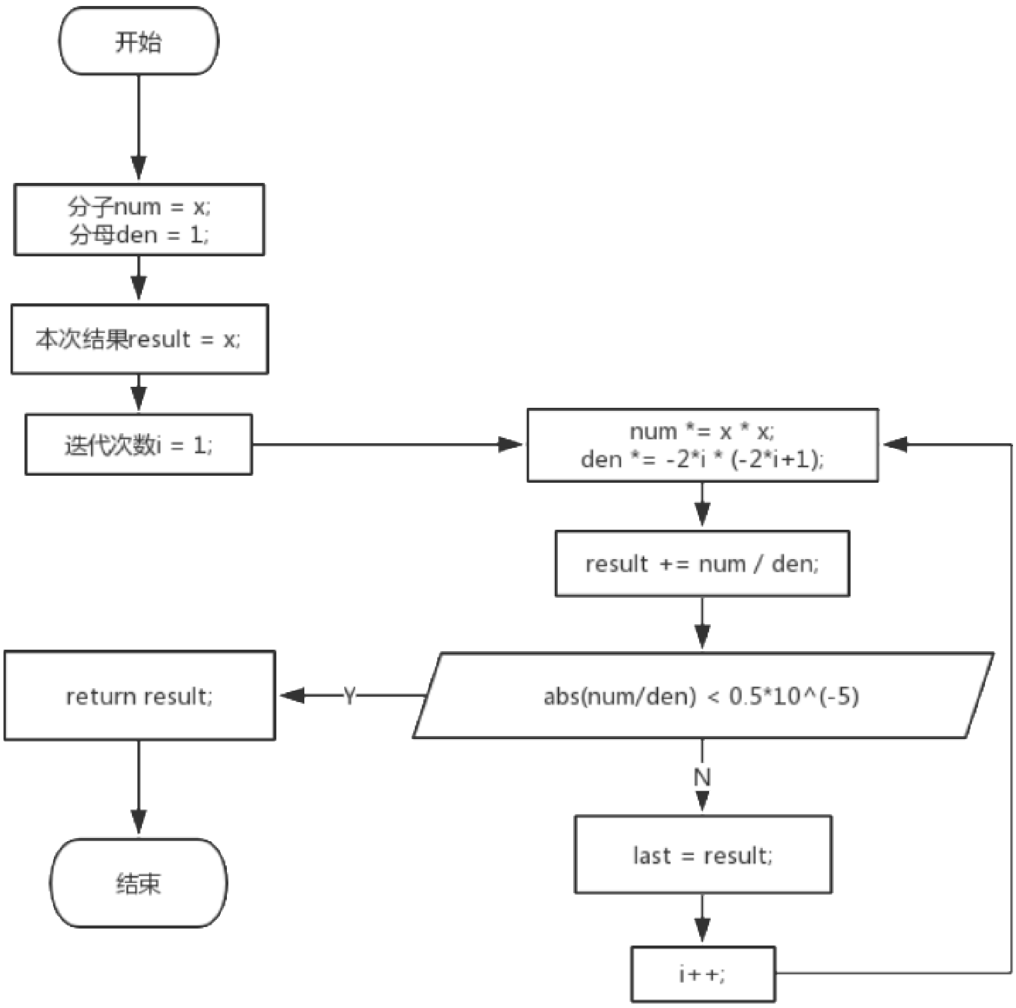
$$\lim_{n\to\infty}\frac{|\Delta_{n+1}|}{|\Delta_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{[(1+h_1+\frac{{h_1}^2}{2})^{n+1}-1]\frac{2{h_1}^3}{3({h_1}^2+2h_1)}}{[(1+h_2+\frac{{h_2}^2}{2})^{n}-1]\frac{2{h_2}^3}{3({h_2}^2+2h_2)}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{[(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2})^{n+1}-1]\frac{\frac{2}{(n+1)^3}}{3\left(\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{2}{n+1}\right)}}{[(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2})^{n}-1]\frac{\frac{2}{n^3}}{3\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}\right)}}=1$$

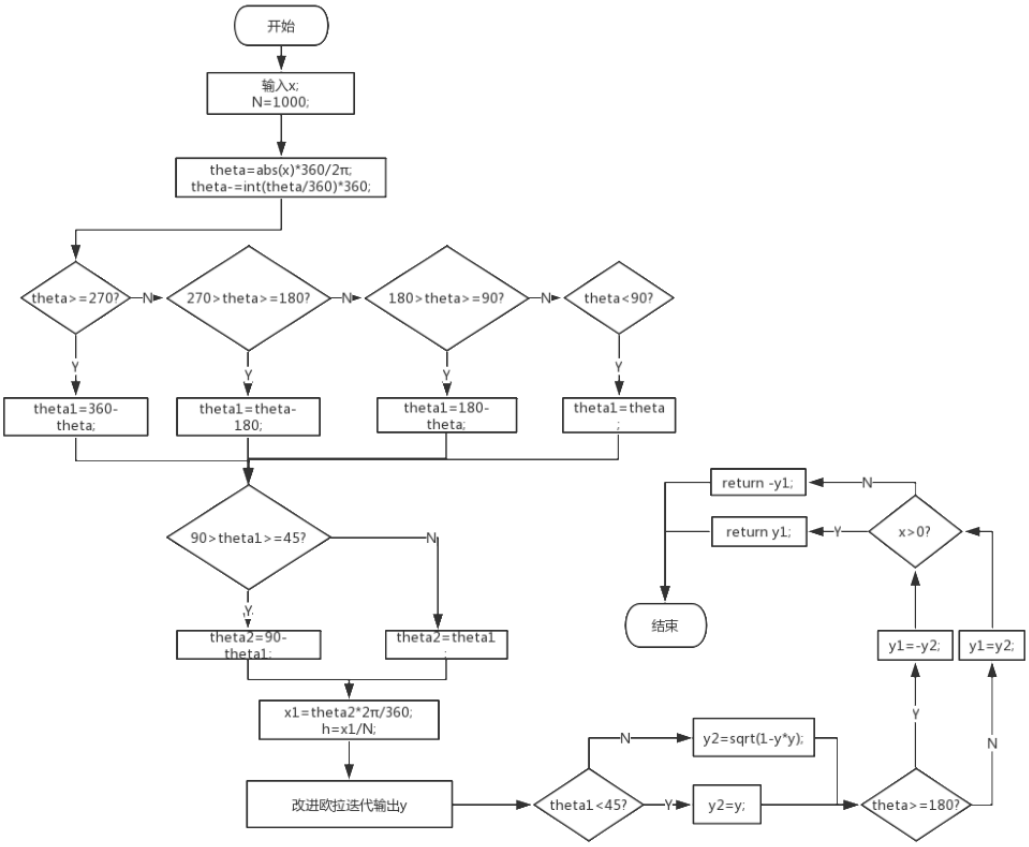
即改进欧拉算法一阶收敛。

程序流程图

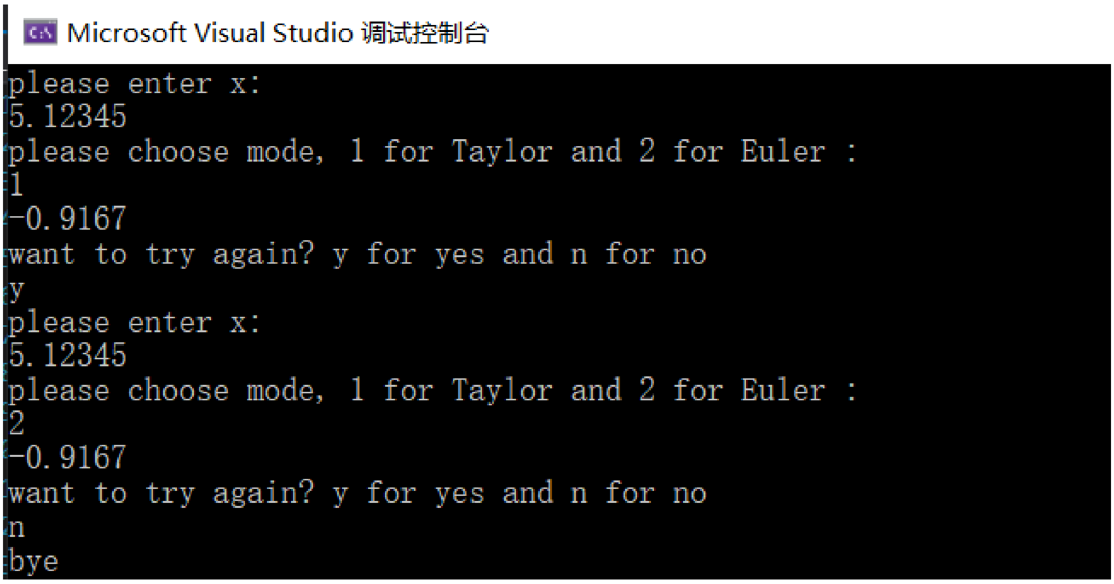
Taylor 多项式展开



改进欧拉算法

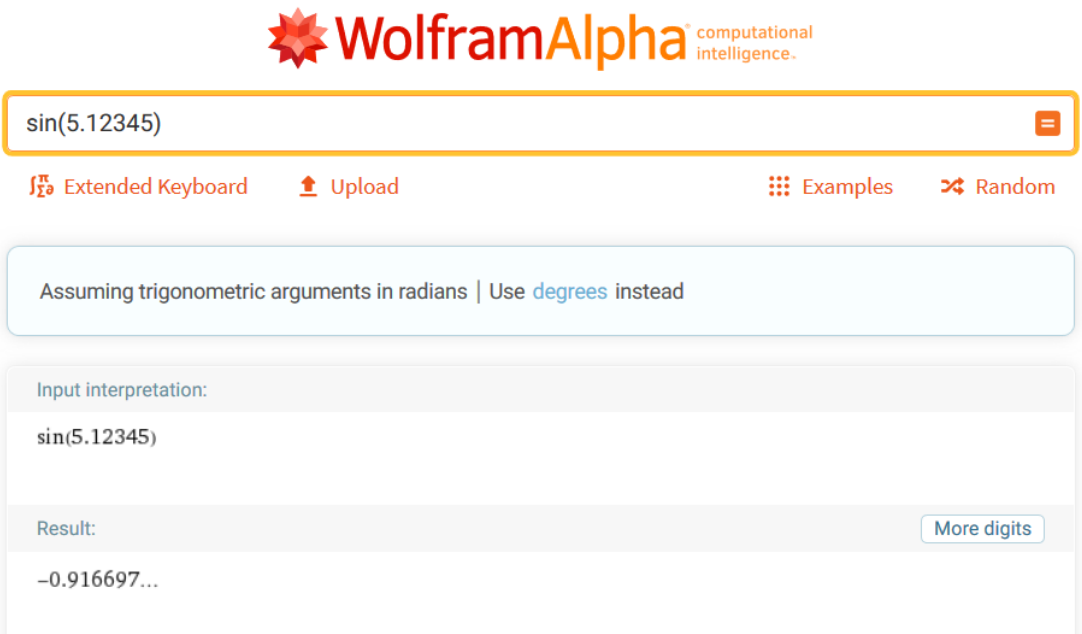


功能展示



```
Microsoft Visual Studio 调试控制台
please enter x:
5.12345
please choose mode, 1 for Taylor and 2 for Euler :
1
-0.9167
want to try again? y for yes and n for no
y
please enter x:
5.12345
please choose mode, 1 for Taylor and 2 for Euler :
2
-0.9167
want to try again? y for yes and n for no
n
bye
```

与用 WolfframAlpha 算出的结果对比：



可见在题目要求精度下是准确的。

其他说明

一开始没有给出限制输入范围的通知时，我发现如果输入值比较大（例如 40）时就会出现 Taylor 计算错误的结果，这是因为大的输入值导致展开式中间项的值也非常大，甚至超过 double 的位数而被截断，因此我对 Taylor 的操作数也进行了转换处理。

最初做改进欧拉时我仅仅是将所有的输入值转到$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上并且也没有在测试时用到非常靠近$\frac{\pi}{2}$的测例，因此一直没有发现如果输入非常靠近$\frac{\pi}{2}$会导致程序不能正常运行。后来和同学交流的过程中我发现了这个问题，检查循环过程我发现迭代中如果出现 0.9999…这样的中间结果就会导致循环终止，这实际上是因为开根运算不能正常进行了（程序中的 1 并非准确的 1，可能会小于 0.9999…），但是如果仅是转到$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上就不会出现这种问题，此时在输入靠近$\frac{\pi}{2}$的值会造成步长$h$几乎为 0，进而迭代中的每一步都几乎为 0，也就是说得到的$\cos(x)$几乎为 0，最后再用$cos^2(x)+sin^2(x)=1$的关系求到几乎为 1 的$\sin(x)$（在要求的精度下就是 1.000），在换了区间之后误差分析中在$|\tan(x_n)|$这一步的不收敛问题也解决了。

在实践 Taylor 展开方法和改进欧拉法的过程中，我发现之前对这两种方法的理解都太书面了，在实际计算时有很多细节需要考虑，做误差分析也让我直观感受到了无处不在的误差并在理论上对这两种方法有了更深的理解。