

BÁO CÁO VI TÍCH PHẦN 2B

Đặng Duy Lâm - 22120182
Trần Thảo Ngân - 22120225

Ngày 30 tháng 5 năm 2023

Bài 4.2.18

a/ Vì nước được cho thoát ra với tốc độ 10 lít/phút

\Rightarrow Thể tích dung dịch thoát ra từ thời điểm t đến thời điểm $t + \Delta t$ là $10\Delta t$ lít (hay $10\Delta t$ kg).

Có $S(t)$ là lượng muối còn lại sau t phút và $S(t + \Delta t)$ là lượng muối còn lại sau $t + \Delta t$ phút

\Rightarrow Lượng muối đã thoát ra là $S(t) - S(t + \Delta t)$ (kg).

b/ Theo đề ta có bất đẳng thức:

$$\frac{S(t)}{100}(10\Delta t) \geq S(t) - S(t + \Delta t) \geq \frac{S(t + \Delta t)}{100}(10\Delta t) \quad (1)$$

Xét về trái: $\frac{S(t)}{100}$ là % muối còn lại trong nước sau t phút

$\Rightarrow \frac{S(t)}{100}(10\Delta t)$ là lượng muối có trong $10\Delta t$ kg nước sau t phút.

Xét về phải: $\frac{S(t + \Delta t)}{100}$ là % muối còn lại trong nước sau $t + \Delta t$ phút

$\Rightarrow \frac{S(t + \Delta t)}{100}(10\Delta t)$ là lượng muối có trong $10\Delta t$ kg nước sau $t + \Delta t$ phút.

Xét về giữa: $S(t) - S(t + \Delta t)$ là lượng muối có trong $10\Delta t$ kg muối đã thoát ra.

Từ đó bất đẳng thức có nghĩa là: khi xét trên cùng 1 lượng nước (ở đây là $10\Delta t$ kg nước) thì lượng muối sau t phút sẽ lớn hơn hoặc bằng lượng muối thoát ra trong Δt phút và lớn hơn hoặc bằng lượng muối sau $t + \Delta t$ phút. Dấu "=" xảy ra khi $\Delta t = 0$.

c/ Ta có:

$$(1) \iff \frac{S(t)}{100} \geq \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{10\Delta t} \geq \frac{S(t + \Delta t)}{100} \quad (\Delta t > 0)$$

Khi $\Delta t \rightarrow 0$ thì $\frac{S(t + \Delta t)}{100} \rightarrow \frac{S(t)}{100}$, là 1 số dương hữu hạn. Do đó theo nguyên lý kẹp:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{10\Delta t} &= \frac{S(t)}{100} \\ \iff \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t) - S(t + \Delta t)}{\Delta t} &= \frac{S(t)}{10} \end{aligned}$$

Đặt $y = S(t)$, khi đó

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-\Delta y}{\Delta t} &= \frac{y}{10} \\ \iff -y' &= \frac{y}{10} \end{aligned}$$

Vậy phương trình vi phân lập được là: $-y' = \frac{y}{10}$ (2).
 d/ Viết lại (2) ta được:

$$-\frac{dy}{dt} = \frac{y}{10}$$

Do y là lượng muối có trong nước nên $y > 0$

$$\implies -\frac{dy}{y} = \frac{dt}{10}$$

Tích phân 2 vế:

$$\begin{aligned} \int \frac{-dy}{y} &= \int \frac{dt}{10} \\ \iff -\ln(y) + C_1 &= \frac{t}{10} + C_2 \\ \iff \ln(y) &= \frac{-t}{10} + C \\ \iff y &= e^{\frac{-t}{10} + C} \end{aligned}$$

Lại có $y(0) = 10 \implies 10 = e^C \implies C = \ln(10)$

Vậy $S(t) = e^{\frac{-t}{10} + \ln(10)} = 10 \cdot e^{\frac{-t}{10}}$

e/ Sau 30 phút, lượng muối còn lại trong hồ là: $S(30) = 10 \cdot e^{\frac{-30}{10}} \approx 0.5(\text{kg})$

Bài 2

Ta có:

$$\begin{aligned} y' + \frac{1}{3}y &= e^x y^4 \\ \iff \frac{y'}{y^4} + \frac{1}{3y^3} &= e^x \\ \iff \frac{y^{-4}dy}{dx} + \frac{1}{3y^3} &= e^x \end{aligned}$$

Đặt $u = y^{-3} \implies du = -3y^{-4}dy$:

$$\begin{aligned} (*) \iff \frac{du}{-3dx} + \frac{u}{3} &= e^x \\ \iff u' - u &= -3e^x \end{aligned}$$

Nhân cả 2 vế cho e^{-x} ta được:

$$\begin{aligned} u'e^{-x} - u.e^{-x} &= -3 \\ \Leftrightarrow (u.e^{-x})' &= -3 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dx}(u.e^{-x}) &= -3 \\ \Leftrightarrow d(u.e^{-x}) &= -3dx \end{aligned}$$

Tích phân 2 vế:

$$\begin{aligned} \int d(u.e^{-x}) &= \int -3dx \\ \Leftrightarrow u.e^{-x} &= -3x + C \\ \Leftrightarrow u &= e^x(-3x + C) \\ \Leftrightarrow y^{-3} &= e^x(-3x + C) \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{(e^x(-3x + C))^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

Lại có $y(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{C} = 1 \Leftrightarrow C = 1$.

Vậy $y = \frac{1}{(e^x(-3x+1))^{\frac{1}{3}}}$

Dùng phần mềm Matlab để thử lại:

Câu lệnh: `dsolve('Dy + y/3 = exp(x) * y^4', 'y(0) = 1', 'x')`

Kết quả:

```
ans =  
1/(-exp(x)*(3*x - 1))^(1/3)  
>>
```

Vẽ đồ thị bằng phần mềm Geogebra:

Nhập hàm số:

$$f(x) = \left(\frac{1}{e^x (-3x + 1)} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Đồ thị được vẽ ra:

