Übung 2

Aufgabe 1: *Wie man aus einer Fliege einen Elefanten macht!*

Wir beweisen folgende Aussage durch Induktion über n:

> *Ist von n Tieren eines ein Elefant, dann sind alle diese Tiere Elefanten.*

Induktionsanfang $n = 1$: Hat man nur ein Tier und ist dieses ein Elefant, so sind alle diese Tiere Elefanten. Induktionsschritt $n \to n+1$: Gegeben seien also $n+1$ Tiere $T_1, \dots, T_{n+1}$, von denen das erste ein Elefant sei. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die ersten n dieser Tiere an, so erhalten wir, dass $T_1, \dots, T_n$ Elefanten sind. Nun nehmen wir T_{n+1}, dies sei die Fliege, hinzu und lassen eines der anderen Tiere weg. Nach Induktionsvoraussetzung können wir schließen, dass auch diese Tiere alle Elefanten sind. Also sind alle $T_1, \dots, T_{n+1}$, auch die Fliege, Elefanten. Oder etwa nicht? Wo liegt der Fehler?

Aufgabe 2:

(a) Seien A und B Mengen. B^A bezeichne die Menge aller Funktionen von A nach B.
Geben Sie eine „natürliche Bijektion“ zwischen $\{0,1\}^A$, also der Menge aller Funktionen von A nach $\{0,1\}$, und 2^A, also der Potenzmenge von A, an.

(b) Erläutern Sie folgende Fußnote aus dem Buch *Elements of the Theory of Computation*:

> True fundamentalists would see the ordered pair (a,b) not as a new kind of object, but as identical to $\{a,\{a,b\}\}$.

Aufgabe 3:

(a) Geben Sie eine Relation an, die reflexiv und symmetrisch ist, aber nicht transitiv.
(b) Geben Sie eine Relation an, die reflexiv und transitiv ist, aber nicht symmetrisch.
(c) Geben Sie eine Relation an, die symmetrisch und transitiv ist, aber nicht reflexiv.
(d) Bestimmen Sie die reflexive transitive Hülle R^* der Relation $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(d,c),(d,e)\}$.
Zeichnen Sie die Darstellung von R als gerichteter Graph. Ebenso für R^*.

Aufgabe 4: Sei A eine endliche Menge. Zeigen Sie $|2^A| = 2^{|A|}$.

Aufgabe 5: Beweisen oder widerlegen Sie: $\forall L_1, L_2 : (L_1L_2 \cup L_1)^* = L_1(L_2L_1 \cup L_1)^*$

Aufgabe 6:

(a) Beweisen Sie, dass die Menge der Wörter über einem Alphabet abzählbar unendlich ist.
(b) Beweisen Sie, dass die Menge der Sprachen über einem Alphabet überabzählbar unendlich ist.

Aufgabe 7: Sei $\Sigma = \{a,b\}$ und sei L induktiv wie folgt definiert:

(1) ε gehört zu L.
(2) Falls $x \in L$ ist, dann gehört auch axb zu L.
(3) Falls $x \in L$ ist, dann gehört auch bxa zu L.
(4) Falls $x \in L$ und $y \in L$, dann gehört auch xy zu L.

Zeigen Sie, dass alle Wörter in L gleichviele a and b enthalten.

Aufgabe 8:
Beweisen Sie: *Jeder ungerichtete Graph mit mehr als einem Knoten besitzt zwei Knoten vom gleichen Grad.*