Übung 2

Aufgabe 1: Wie man aus einer Fliege einen Elefanten macht!

Wir beweisen folgende Aussage durch Induktion über n:

Ist von n Tieren eines ein Elefant, dann sind alle diese Tiere Elefanten.

Induktionsanfang $n = 1$: Hat man nur ein Tier und ist dieses ein Elefant, so sind alle diese Tiere Elefanten. Induktionsschritt $n \to n+1$: Gegeben seien also $n+1$ Tiere $T_1, ..., T_{n+1}$, von denen das erste ein Elefant sei. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die ersten n dieser Tiere an, so erhalten wir, dass $T_1, ..., T_n$ Elefanten sind. Nun nehmen wir T_{n+1}, dies sei die Fliege, hinzu und lassen eines der anderen Tiere weg. Nach Induktionsvoraussetzung können wir schließen, dass auch diese Tiere alle Elefanten sind. Also sind alle $T_1, ..., T_{n+1}$, auch die Fliege, Elefanten. Oder etwa nicht? Wo liegt der Fehler?

Im Fall $n + 1 = 2$ kann man den Elefanten zwar so stellen, daß er bei den ersten $n = 1$ Tieren steht. Folglich sind alle Tiere unter den ersten $n = 1$ Tieren Elefanten. Aber deshalb befinden sich unter den "letzten" n Tieren nicht notwendig Elefanten.

Der Induktionsschluß würde nur für $n > 1$ funktionieren, denn nur dann können aus einem Elefanten zwei (oder mehr) werden und ist damit auch ein Elefant unter den letzten n Tieren. Die Induktionsvoraussetzung war aber gezeigt für $n = 1$. Man müßte also zunächst zeigen, daß von zwei Tieren, von denen eines ein Elefant ist, auch das andere ein Elefant ist. Aber das wird schwer.

Aufgabe 2:

(a) Seien A und B Mengen. B^A bezeichne die Menge aller Funktionen von A nach B. Geben Sie eine " natürliche Bijektion“ zwischen $\{0,1\}^A$, also der Menge aller Funktionen von A nach {0,1}, und 2^A, also der Potenzmenge von A, an.

(b) Erläutern Sie folgende Fußnote aus dem Buch *Elements of the Theory of Computation: True fundamentalists would see the ordered pair (a,b) not as a new kind of object, but as identical to $\{a, \{a, b\}\}$.*

ist hier die Untermenge gemeint? also dass (a,b) eine untermenge von (a,(a,b)) darstellt? für teil a hilft vllt cantorsche Paarungsfunktion?

Aufgabe 3:

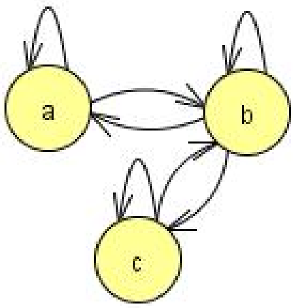
Reflexiv: $\forall a \in A : (a,a) \in R$

Symmetrie: $\forall a,b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

Transitivität: $\forall a,b,c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

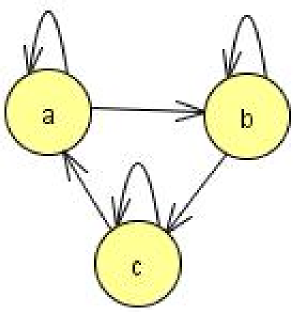
- **a) Geben Sie eine Relation an, die reflexiv und symmetrisch ist, aber nicht transitiv.**

  $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)(b,a)(b,c)(c,b)\}$

- **b) Geben Sie eine Relation an, die reflexiv und transitiv ist, aber nicht symmetrisch.**

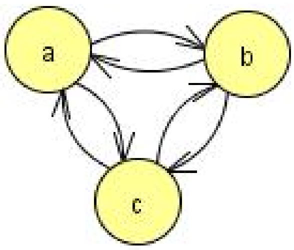
  $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(ab)(bc)(ac)\}$

  [@cyberkeiler] (ac) Relation im Bild falschherum gezeichnet!

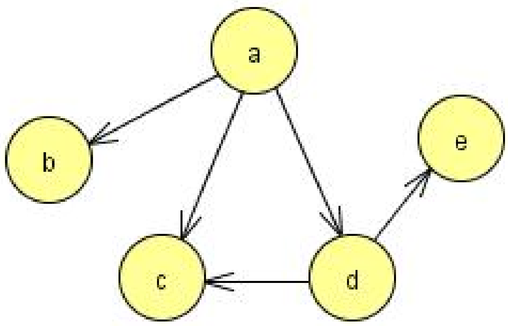
- **c) Geben Sie eine Relation an, die symmetrisch und transitiv ist, aber nicht reflexiv.**

  $R = \{(a,b),(b,a),(b,c),(cb)(ac)(ca)\}$

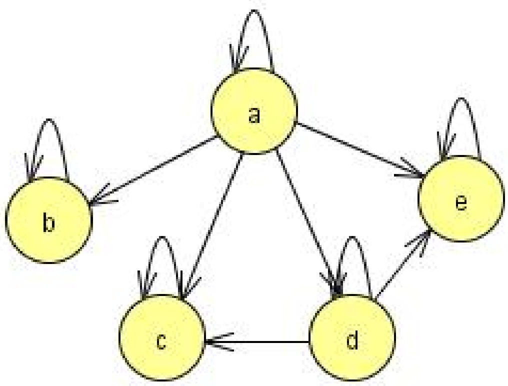


- **(d) Bestimmen Sie die reflexive transitive Hülle R^* der Relation $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(d,c),(d,e)\}$. Zeichnen Sie die Darstellung von R als gerichteter Graph. Ebenso für R^*.**

  $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(d,c),(d,e)\}$



  $R^* = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(d,c),(d,e)\}$



[@belkinot] was ist mit a,e ?

[@cyberkeiler] Habe es in R^* eingefügt!

Aufgabe 4:

Sei A eine endliche Menge. Zeigen Sie $|2^A| = 2^{|A|}$.

Aufgabe 5:

Beweisen oder widerlegen Sie: $\forall L1, L2 : (L1L2 \cup L1)^* = L1(L2L1 \cup L1)^*$

Gegenbeispiel:

$$\begin{array}{rlrl} L_1 &= \{a\} & L_2 &= \{b\} \\ L_1L_2 &= \{ab\} & L_2L_1 &= \{ba\} \\ L_1L_2 \cup L_1 &= \{a, ab\} & L_2L_1 \cup L_1 &= \{a, ba\} \\ (L_1L_2 \cup L_1)^* &= \{\varepsilon, a, ab, \ldots\} & (L_2L_1 \cup L_1)^* &= \{\varepsilon, a, ba, \ldots\} \\ & & L_1(L_2L_1 \cup L_1)^* &= \{a, ba, \ldots\} \end{array}$$

$\Rightarrow (L1L2 \cup L1)^* \neq L1(L2L1 \cup L1)^*$

Aufgabe 6:

- **(a) Beweisen Sie, dass die Menge der Wörter über einem Alphabet abzählbar unendlich ist.**

  ```
  Für alle Alphabete gilt sie sind abzählbar.
  d.h. injektiv und surjektiv -> f :
  ```

  $\sum$ -> N und { parse error: \forall a \in \sum \exist l \in N }

  ```
  Beispiel: ∑ = {a,b,c}
  Ordnung a<b<c
  ϵ  a  b  c  aa  ab  ac  ba  bb ....
  1  2  3  4  5   6   7   8   9  ....
  ```

- **(b) Beweisen Sie, dass die Menge der Sprachen über einem Alphabet überabzählbar unendlich ist.**

```
Siehe R zu N ist überabzählbar, Cantorsches
Verfahren/Diagonalverfahren.
Alle Zahlen zwischen 0 und 1 aufschreiben, dann bei der n-ten zahl
die n-te nachkommastelle nichit übereinstimmen --> neue Zahl
geschaffen
Bsp:
Zahl 1    0,5324
Zahl 2    0,4356
Zahl 3    0.8432
Zahl 4    0.9342

Neue Zahl: 0,4218 (4 ungleich 5, 2 ungleich 3, 1 ungleich 3 und 8
ungleich 2)
http://www.mathe-online.at/mathint/zahlen/i_Rueberabz.html
```

Aufgabe 7:

Sei $\sum = \{a, b\}$ und sei L induktiv wie folgt definiert:

- (1) ε gehört zu L.
- (2) Falls x ∈ L ist, dann gehört auch axb zu L.
- (3) Falls x ∈ L ist, dann gehört auch bxa zu L.
- (4) Falls x ∈ L und y ∈ L, dann gehört auch xy zu L.

Zeigen Sie, dass alle Wörter in L gleichviele a and b enthalten.

Beweis durch struktuelle Induktion:

IA: $\varepsilon \in L, |\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$

IV: $x, y \in L, |x|_a = |x|_b, |y|_a = |y|_b$

IB:

- 1) $axb \in L, |axb|_a = |axb|_b, \text{da } w = axb$

  $|w|_a = |axb|_a = 1 + |x|_a = 1 + |x|_b = (\text{laut IV})|axb|_b = |w|_b$

- 2) $bxa \in L, |bxa|_a = |bxa|_b \rightarrow \text{analog zu 1)}$

- 3) $xy \in L, |xy|_a = |xy|_b$

  $|xy|_a = |x|_a + |y|_a = (\text{laut IV})|x|_b + |y|_b = |xy|_b$

Aufgabe 8:

Beweisen Sie: Jeder ungerichtete Graph mit mehr als einem Knoten besitzt zwei Knoten vom gleichen Grad.

Lösung