Übung 2

Aufgabe 1: Wie man aus einer Fliege einen Elefanten macht!

Wir beweisen folgende Aussage durch Induktion über n:

Ist von n Tieren eines ein Elefant, dann sind alle diese Tiere Elefanten.

Induktionsanfang $n = 1$: Hat man nur ein Tier und ist dieses ein Elefant, so sind alle diese Tiere Elefanten. Induktionsschritt $n \to n + 1$: Gegeben seien also $n + 1$ Tiere $T_1, ..., T_{n+1}$, von denen das erste ein Elefant sei. Wenden wir die Induktionsvoraussetzung auf die ersten n dieser Tiere an, so erhalten wir, dass $T_1, ..., T_n$ Elefanten sind. Nun nehmen wir T_{n+1}, dies sei die Fliege, hinzu und lassen eines der anderen Tiere weg. Nach Induktionsvoraussetzung ko¨nnen wir schließen, dass auch diese Tiere alle Elefanten sind. Also sind alle $T1, ..., T_{n+1}$, auch die Fliege, Elefanten. Oder etwa nicht? Wo liegt der Fehler?

Im Fall n+1=2 kann man den Elefanten zwar so stellen, daß er bei den ersten n=1 Tieren steht. Folglich sind alle Tiere unter den ersten n=1 Tieren Elefanten. Aber deshalb befinden sich unter den "letzten" n Tieren nicht notwendig Elefanten.

Der Induktionsschluß funktioniert nur für n>1, denn nur dann können aus einem Elefanten zwei (oder mehr) werden und ist damit auch ein Elefant unter den letzten n Tieren. Die Induktionsvoraussetzung war aber gezeigt für n=1. Man müßte also zunächst zeigen, daß von zwei Tieren, von denen eines ein Elefant ist, auch das andere ein Elefant ist. Aber das wird schwer.

Aufgabe 2:

- (a) Seien A und B Mengen. B^A bezeichne die Menge aller Funktionen von A nach B. Geben Sie eine ” natürliche Bijektion“ zwischen $\{0, 1\}^A$, also der Menge aller Funktionen von A nach {0,1}, und 2^A, also der Potenzmenge von A, an.
- (b) Erläutern Sie folgende Fußnote aus dem Buch *Elements of the Theory of Computation: True fundamentalists would see the ordered pair (a,b) not as a new kind of object, but as identical to* $\{a, \{a, b\}\}$.

Aufgabe 3:

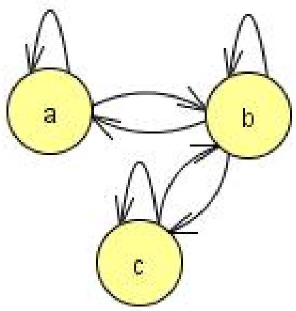
Refelxiv: $\forall a \in A : (a,a) \in R$

Symmetrie: $\forall a, b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

Transitivität: $\forall a, b, c \in A : aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

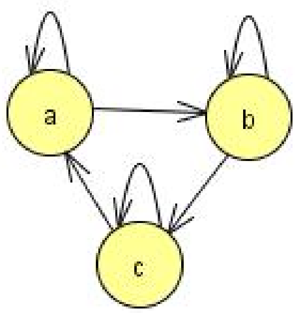
- a) Geben Sie eine Relation an, die reflexiv und symmetrisch ist, aber nicht transitiv.

  $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b)(b,a)(b,c)(c,b)\}$



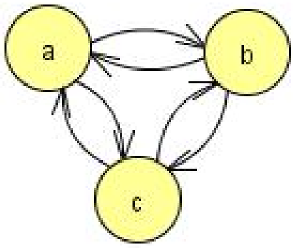
- b) Geben Sie eine Relation an, die reflexiv und transitiv ist, aber nicht symmetrisch.

  $R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(ab)(bc)(ac)\}$



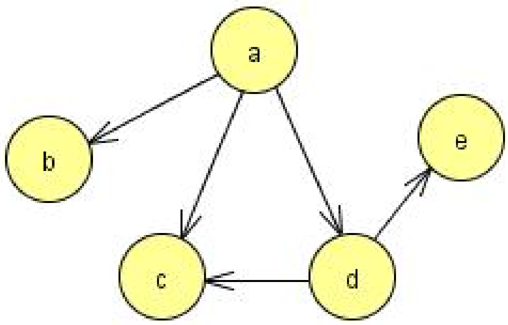
- c) Geben Sie eine Relation an, die symmetrisch und transitiv ist, aber nicht reflexiv.

  $R = \{(a,b),(b,a),(b,c),(cb)(ac)(ca)\}$

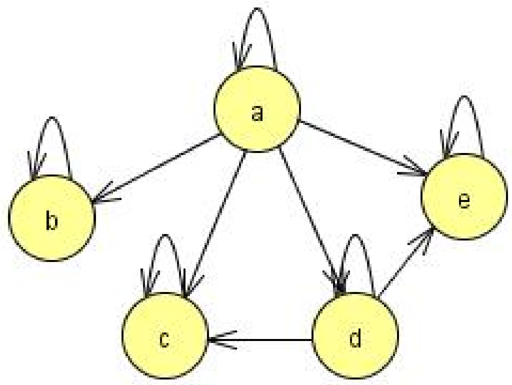


- (d) Bestimmen Sie die reflexive transitive Hülle R^* der Relation $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(d,c),(d,e)\}$. Zeichnen Sie die Darstellung von R als gerichteter Graph. Ebenso für R^*.

  $R = \{(a,b),(a,c),(a,d),(d,c),(d,e)\}$



$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,b),(a,c),(a,d),(d,c),(d,e)\}$



Aufgabe 4:

Sei A eine endliche Menge. Zeigen Sie $|2^A| = 2^{|A|}$.

Aufgabe 5:

Beweisen oder widerlegen Sie: $\forall L1, L2 : (L1L2 \cup L1)^* = L1(L2L1 \cup L1)^*$

Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a\} & L_2 &= \{b\} \\ L_1L_2 &= \{ab\} & L_2L_1 &= \{ba\} \\ L_1L_2 \cup L_1 &= \{a, ab\} & L_2L_1 \cup L_1 &= \{a, ba\} \\ (L_1L_2 \cup L_1)^* &= \{\varepsilon, a, ab, ...\} & (L_2L_1 \cup L_1)^* &= \{\varepsilon, a, ba, ...\} \\ & & L_1(L_2L_1 \cup L_1)^* &= \{a, ba, ...\} \end{aligned}$$

$\Rightarrow (L1L2 \cup L1)^* \neq L1(L2L1 \cup L1)^*$

Aufgabe 6:

- (a) Beweisen Sie, dass die Menge der Wörter über einem Alphabet abzählbar unendlich ist.
- (b) Beweisen Sie, dass die Menge der Sprachen über einem Alphabet überabzählbar unendlich ist.

Aufgabe 7:

Sei $\sum = \{a, b\}$ und sei L induktiv wie folgt definiert:

- (1) ε gehört zu L.
- (2) Falls x ∈ L ist, dann gehört auch axb zu L.
- (3) Falls x ∈ L ist, dann gehört auch bxa zu L.
- (4) Falls x ∈ L und y ∈ L, dann gehört auch xy zu L.

Zeigen Sie, dass alle Wörter in L gleichviele a and b enthalten.

Beweis durch struktuelle Induktion:

IA: $\varepsilon \in L, |\varepsilon|_a = |\varepsilon|_b = 0$

IV: $x, y \in L, |x|_a = |x|_b, |y|_a = |y|_b$

IB:

- 1) $axb \in L, |axb|_a = |axb|_b, \text{da } w = axb$

  $|w|_a = |axb|_a = 1 + |x|_a = 1 + |x|_b = (\text{laut IV})|axb|_b = |w|_b$

- 2) $bxa \in L, |bxa|_a = |bxa|_b \rightarrow \text{analog zu 1)}$

- 3) $xy \in L, |xy|_a = |xy|_b$

  $|xy|_a = |x|_a + |y|_a = (\text{laut IV})|x|_b + |y|_b = |xy|_b$

Aufgabe 8:

Beweisen Sie: Jeder ungerichtete Graph mit mehr als einem Knoten besitzt zwei Knoten vom gleichen Grad.

Lösung

THINF Ü3

1.) grad 1 grad 1 grad 2 $n > 1$ $G = (V, E)$ G = Graf (2-Tuple)

V = Menge an Knoten

E = Menge an Kanten

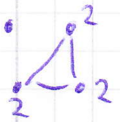
$|V| = n \geq 1$

Behauptung $\exists\, v, w \in V,\ grad(v) = grad(w)$ $v \neq w$

Durchnummerieren
↳ nie gleich
↳ für alle Knoten

1. Fall: $\exists\, k_0 \in V,\ grad(k_0) = 0$

↳ $\forall\, k \in V,\ grad(k) \leq n-2$ → Behauptung



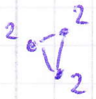
$N = 4$
$2 \leq 2$

$N = 3$
$1 \leq 1$

2. Fall: $\exists\, k_0,\ grad(k_0) > 0$

↳ $1 \leq grad(k) \leq n-1$ → Behauptung

⇒ //(Knoten kann max $n-1$ Grade haben) // ↳ min 2 gleiche Grade somit



$N = 3$
$2 \leq 2$

$N = 4$
$3 \leq 3$.

2.) a) 199 \$ 232 \$ 109 # 109 \$ 199 \$ 232 $\in$ SORTED

01 \$ 23 \$ 45 # 01 \$ 23 \$ 45 $\in$ SORTED

Null

Reihenfolge stimmt zwar, ist aber durch Null hinfällig

b) PRODUCT $= \{ w \in \{0, 1, 2 \ldots 9, x, =\}^* /$

w ist von der Form $w_1 \times w_2 = w_3$, wobei w_1, w_2, w_3 jeweils dezimal dargestellt. nat. Zahlen sind und das Produkt der durch w_1 und w_2 dargestellten Zahlen die durch w_3 dargestellte Zahl ist $\}$

Bsp.:
$1 \times 2 = 2$ $\in$ PRODUCT
$2 \times 3 = 6$ $\in$ -"-
$2 \times 7 = 9$ $\notin$ -"-
$3 \times 01 = 3$ $\notin$ -"-
$7 \times 3 = 23$ $\notin$ -"-