Übung 1

1. Welche Behauptungen über Mengen sind wahr/falsch? Begründung?

- **Ø ⊆ Ø** -> wahr, weil beide kein Elemente haben (also jedes Element kommt in beiden vor) Ø ist Teilmenge jeder Mengr
- **Ø ∈ Ø** -> falsch, weil leere Menge enthält keine Elemente
- **Ø ∈ { Ø }** -> wahr, *{}* ∈ {*{}*} Menge enthält {} als Element
- **Ø ⊆ { Ø }** -> wahr, Leere Menge ist Teilmenge jeder Menge!
- **Ø ⊆ 2^Ø** -> wahr, laut Definition:

Def. 2^A Potenzmenge: Menge aller Teilmengen von A

Potenzmenge von Ø umfasst nur Ø.

- **Ø ∈ 2^Ø** -> wahr ???

2. Welche Behauptungen über Mengen sind wahr/falsch? Begründung?

Alphabet: Jede nicht leere Menge (>= 1 Symbole)

- ***{a,b}* ∈ {a,b,*{a,b}*}** -> wahr: Alphabet {a,b} kommt als Symbol im anderen Alphabet vor
- **{a,b} ⊆ {a,b,{a,b}}** -> wahr: a, b kommen als Element in der rechten Menge vor.

  2^{a,b,{a,b}}: {Ø, {a}, {b}, {{a,b}}, {a,b}, {a,{a,b}}, {b,{a,b}}, {a,b,{a,b}}}

- **{a,b} ⊆ 2^{a,b,{a,b}}** -> falsch, weil Element a,b nicht rechts als Element vorkommt
- **{{a,b}} ⊆ 2^{a,b,{a,b}}** -> wahr, weil Menge {a,b} als Element rechts vorkommt
- **{a, {a,b}} ⊆ 2^{a,b,{a,b}}** -> falsch, weil Element a rechts nicht als Element vorkommt
- **{a, {a,b}} ⊆ 2^{a,b,{a,b}}** -> wahr, Potenzmenge = { ..., {{a,b}}, ..}

3. Wahr oder falsch. Begründung?

$$\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$$

-> wahr, Assoziativität

$$\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1 \cup L_2)L_3 = (L_1L_3) \cup (L_2L_3)$$

-> wahr, Distributivität

$$\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1 \cap L_2)L_3 = L_1 * L_3 \cap L_2 * L_3$$

-> falsch, Konkatenation nicht kommutativ:

Gegenbeispiel:

$$L_1 = \{a\}; L_2 = \{aa\}; L_3 = \{\varepsilon, a\}$$

$$\text{l.S.: } (L_1 \cap L_2)L_3 = \emptyset * L_3 = \{a\}$$

$$\text{r.S.: } L_1 * L_3 \cap L_2 * L_3 = \{a, aa\} \cap \{aa, aaa\} = \{aa\}$$

$$\text{Links} \neq \text{Rechts}$$

$$\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1L_2) \cup L_3 = (L_1 \cup L_3)(L_2 \cup L_3)$$

-> falsch, Konkatenation nicht kommutativ:

Gegenbeispiel:

$$L_1 = \{a\}; L_2 = \{b\}; L_3 = \{c\}$$

$$\text{l.S.: } (L_1L_2) \cup L_3 = \{a, b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$$

$$\text{r.S.: } (L_1 \cup L_3)(L_2 \cup L_3) = \{a, c\}\{b, c\} = \{ab, ac, cb, cc\}$$

$$\text{Links} \neq \text{Rechts}$$

---

4. Wahr oder falsch? Begründe!

$$\{\varepsilon\}^* = \emptyset$$

-> falsch, Menge mit leerem Wort ist nicht leer!

$$\emptyset \cup \emptyset^* = \{\varepsilon\}$$

-> wahr:

$$\emptyset \cup \emptyset^* = \{\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$$

$$\forall L : (L^+)^* = L^*$$

-> wahr, da Kleene Star Abschluss. L^+ ohne ε mit * wieder mit ε

$$\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$$

-> wahr

$$\forall L : \emptyset L^* = \{\varepsilon\}$$

-> falsch, wenn L aus mehr als ε besteht, daher nicht ∀L

$$\forall L : \emptyset \cup L^+ = L^*$$

-> flasch, $\emptyset \neq \varepsilon$:

$$L^+ \cup \emptyset = L^+$$

$$L^* = L^+ \cup \varepsilon$$

5.

- ∀L1,L2 :(L1L2)∗ =L∗1L∗2 *
- ∀L1,L2 :(L1∪L2)∗ =(L2∪L1)∗ -> wahr, da kommutativ

- $\forall L1,L2 : (L1 \cup L2)^* = L^*1 \cup L^*2$ -> falsch
- $\forall L1,L2 : L^*1 \cap L^*2 = (L1 \cap L2)^*$ -> falsch

6.

a) $\{w \in \{a,b\}^* \mid$ genau ein Suffix von w beginnt mit a$\}$

Alle Wörter können gebildet werden.

aa gilt nicht weil Unentscheidbar

b) $\{w \in \{a,b\}^* \mid$ alle Präfixe von w mit Länge mindestens 1 enden mit b$\}$

Jedes Wort mit Präfix (ungleich ε) enthält ein b beim Vorkommen von einem a ist keine Eindeutigkeit vorhanden