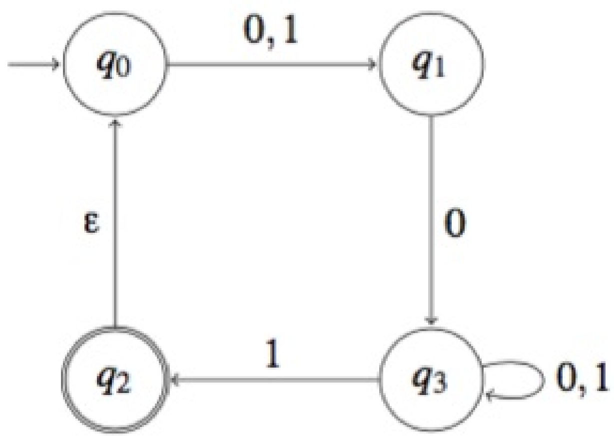
Übung 4

Aufgabe 1:

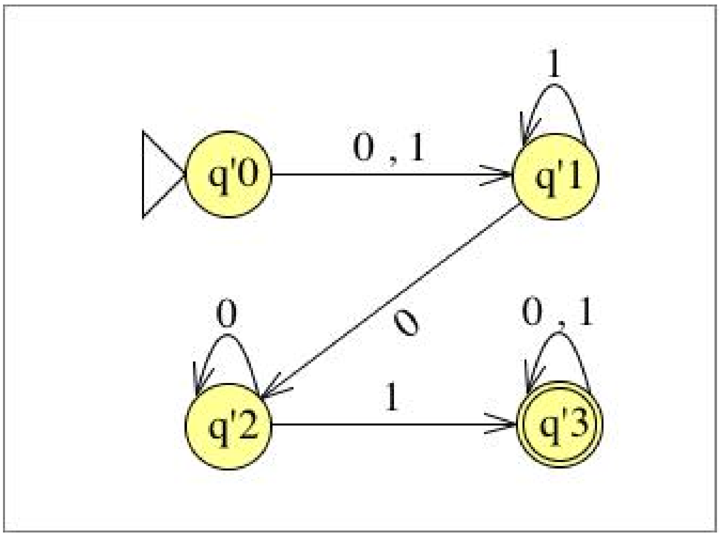
Konstruieren Sie mit dem Verfahren aus dem Beweis der Äquivalenz von NEA und DEA zu dem nichtdeterministischen endlichen Automaten, der durch das folgende Zustandsübergangsdiagramm gegeben ist, einen äquivalenten deterministischen Automaten. Sie brauchen dabei nicht alle Zustände, die sich aus der Potenzmengenkonstruktion ergeben, zu konstruieren, sondern nur die vom Startzustand aus erreichbaren.



$NEA = (\{q_0, ..., q_3\}, \{0,1\}, \Delta, q_0, \{q_3\})$

Δ		**0**	**1**
q_0		q_1	q_1
q_1		q_2	$\emptyset$
q_2		q_2	$\{q_2, q_3\}$
q_3		$\emptyset$	$\emptyset$

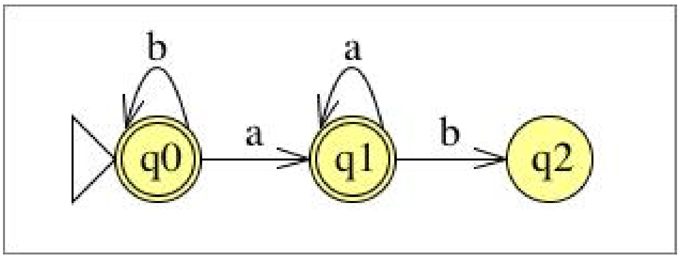
$\Delta \rightarrow \delta$		**0**	**1**
q_0'		q_1'	q_1'
q_1'		q_2'	q_1'
q_2'		q_2'	q_3'
q_3'		q_3'	q_3'



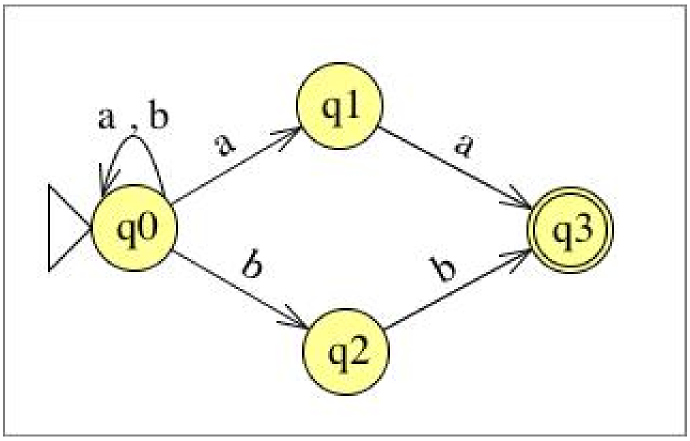
Aufgabe 2:

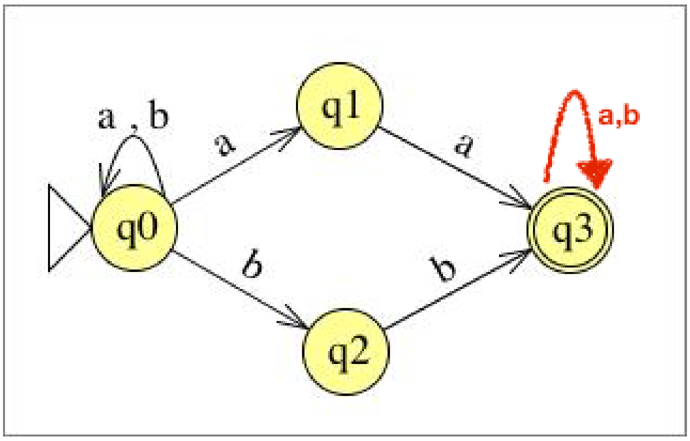
Geben Sie jeweils Zustandsübergangsdiagramme (nichtdeterministischer) endlicher Automaten an, die die folgenden Sprachen akzeptieren:

- a) $\{w \in \{a,b\}^* | w \text{ enthaelt das Teilwort ab nicht}\}$



- b) $\{w \in \{a,b\}^* | w \text{ enthaelt das Teilwort aa oder das Teilwort bb}\}$





Aufgabe 3:

Geben Sie das Zustandsübergangsdiagramm eines deterministischen endlichen Automaten an, der die Sprache $\{w \in \{a, b\}^* | w \text{ enthaelt genau zwei a und mindestens ein b}\}$ **akzeptiert. Die Sprache ist der Schnitt zweier einfacherer Sprachen. Konstruieren Sie zunächst deterministische endliche Automaten für diese Sprachen und kombinieren Sie dann die beiden Automaten wie in der Vorlesung angegeben.**

Def. Schnitt zweier Sprachen:

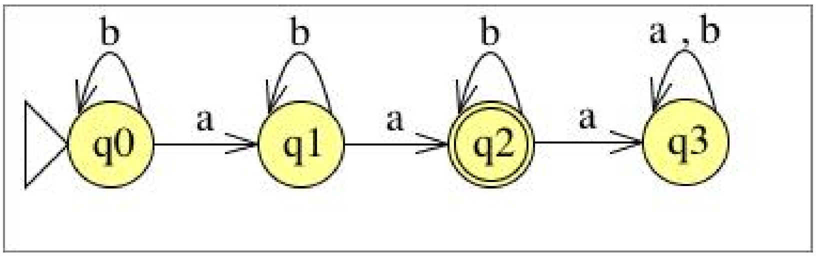
- Sein $M_1 = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, s_1, F_1)$ und $M_2 = (K_2, \Sigma_2, \delta_2, s_2, F_2)$ deterministische endliche Automaten mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$.

  Sei $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$ mit

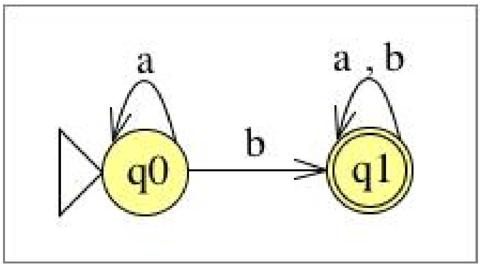
  - $K = K_1 \times K_2$
  - $s = (s_1, s_2)$
  - $F = F_1 \times F_2$

  und $\delta((q_1, q_2), \sigma) = (\delta_1(q_1, \sigma), \delta_2(q_2, \sigma))$.
- Dann gilt: $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$

Die einzelnen Bedingungen werden in 2 unabhängigen Automaten umgesetzt.

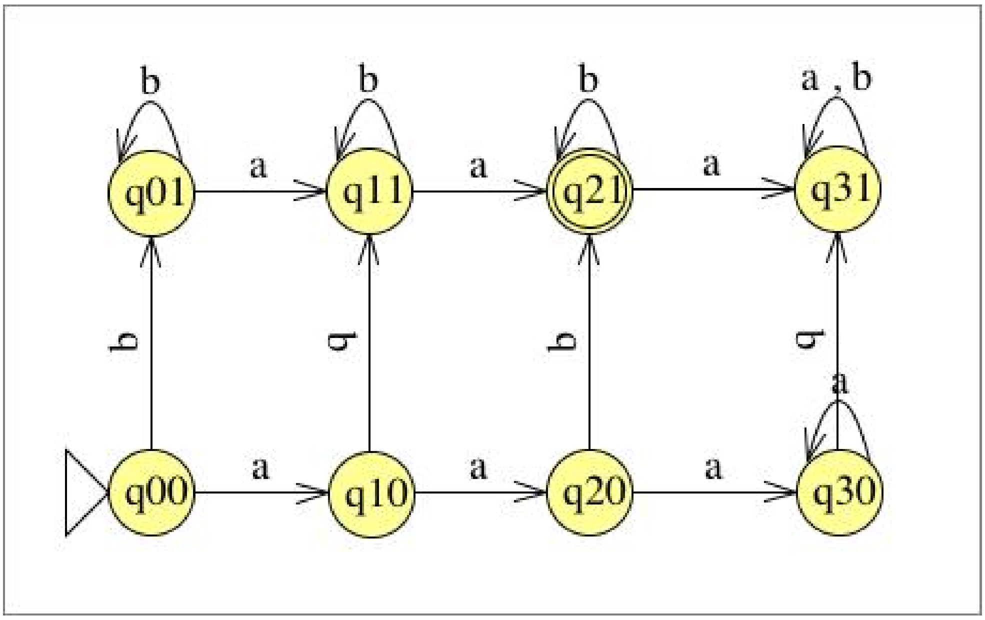


q_i		**a**	**b**
q_0		q_2	q_1
q_1		q_1	q_1
q_2		q_3	q_3
q_3		q_3	q_3



q_j		**a**	**b**
q_0		q_0	q_1
q_1		q_2	q_0
q_2		q_1	q_2

$q_{ij} = (q_i, q_j)$:



q_{ij}		a	b
q_{00}		q_{10}	q_{01}
q_{11}		q_{11}	q_{01}
q_{10}		q_{20}	q_{11}
q_{11}		q_{21}	q_{11}
q_{20}		q_{30}	q_{21}
q_{21}		q_{31}	q_{21}
q_{30}		q_{30}	q_{31}
q_{31}		q_{31}	q_{31}

Aufgabe 4:

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an. Sie dürfen dabei wie in der Vorlesung angegeben Klammern einsparen.

- a) $\{w \in \Sigma^* | w \text{ endet mit b}\}$

  $L(((a \cup b \cup c)^* b))$

  $= L((a \cup b \cup c)^*)L(b)$

  $= L((a \cup b \cup c)^*)\{b\}$

  $= (L(a) \cup L(b) \cup L(c))^*\{b\}$

  $= (\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^*\{b\}$

  $= \{a, b, c\}^*\{b\}$

- b) $\{w \in \Sigma^* | w \text{ enthaelt das Teilwort ab}\}$

  $L(((a \cup b \cup c)^* ab(a \cup b \cup c)^*))$

  $= L((a \cup b \cup c)^*))L(ab)L((a \cup b \cup c)^*))$

  $= L((a \cup b \cup c)^*))\{ab\}L((a \cup b \cup c)^*))$

  $= (L(a) \cup L(b) \cup L(c))^*)\{ab\}(L(a) \cup L(b) \cup L(c))^*)$

  $= (\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^*\{ab\}(\{a\} \cup \{b\} \cup \{c\})^*$

  $= \{a, b, c\}^*\{ab\}\{a, b, c\}^*$

Aufgabe 5:

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an. Sie dürfen dabei wie in der Vorlesung angegeben Klammern einsparen.

- a) $\{w \in \Sigma^* | \text{ das Wort bab ist ein Praefix von w}\}$

  $L((bab)(a \cup b)^*)$

  $= L(bab)L((a \cup b)^*)$

  $= \{bab\}(L(a) \cup L(b))^*$

  $= \{bab\}(\{a\} \cup \{b\})^*$

  $= \{bab\}\{a, b\}^*$

- b) $\{w \in \Sigma^* | w \text{ enthaelt hoestens zwei a}\}$

  $L((b)^*(a)(b)^*(a)(b)^*)$

  $= L((b)^*)L(a)L((b)^*)L(a)L((b)^*)$

  $= L((b)^*)\{a\}L((b)^*)\{a\}L((b)^*)$

  $= (L(b)^*)\{a\}(L(b)^*)\{a\}(L(b)^*)$

  $= \{b\}^*\{a\}\{b\}^*\{a\}\{b\}^*$

Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass die Sprache $\{a^m b^k | m \leq k\} \subseteq \{a, b\}^*$ nicht regulär ist.

Angenommen L ist regulär, so erfüllt L die Aussage des Pumpink Lemma (für reguläre Sprachen). Es sei p die Konstante aus dem Pumping Lemma, dann ist $w = a^p b^p \in L$.

Für jede Zerlegung $w = xyz$ mit $|y| \geq 1$ und $|xy| < p$ so gilt $y \in \{a\}^*$.

Daraus folgt aber $xy^2z = a^{p+|y|}b^p \notin L$ was in Widerspruch zur Aussage des Pumping Lemma steht.

Falls die Sprache regulär wäre, müsste das Pumping Lemma gelten, also:

- $x = \varepsilon$
- $y = a$
- $z = bb$

Pumpe y auf: $xyz = \varepsilon a^k bb$ Es wäre nach dem Lemma das Wort aaaabb möglich, nach der Spreche jedoch nicht.

Aufgabe 7:

Zeigen Sie, dass die Sprache $\{ww^R | w \in \{a, b\}^*\}$ nicht regulär ist.