Übung 1

1. Welche Behauptungen über Mengen sind wahr/falsch? Begründung?

$$\emptyset \subseteq \emptyset$$

-> wahr, weil beide kein Elemente haben (also jedes Element kommt in beiden vor) Ø ist Teilmenge jeder Menge

---

$$\emptyset \in \emptyset$$

-> falsch, weil leere Menge enthält keine Elemente

$$\emptyset \in \{\emptyset\}$$

-> wahr, *{}* ∈ {*{}*} Menge enthält {} als Element

$$\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$$

-> wahr, Leere Menge ist Teilmenge jeder Menge!

$$\emptyset \subseteq 2^{\emptyset}$$

-> wahr, laut Definition:

Def. 2^A Potenzmenge: Menge aller Teilmengen von A

Potenzmenge von Ø umfasst nur Ø.

$$\emptyset \in 2^{\emptyset}$$

-> wahr

---

2. Welche Behauptungen über Mengen sind wahr/falsch? Begründung?

Alphabet: Jede nicht leere Menge (>= 1 Symbole)

- ***{a,b}* ∈ {a,b,*{a,b}*}** -> wahr: Alphabet {a,b} kommt als Symbol im anderen Alphabet vor
- ***{a,b}* ⊆ {*a*,*b*,{a,b}}** -> wahr: a, b kommen als Element in der rechten Menge vor.

Potenzmenge $2^{\{a,b,\{a,b\}\}}$:

$$\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{\{a,b\}\}, \{a,b\}, \{a,\{a,b\}\}, \{b,\{a,b\}\}, \{a,b,\{a,b\}\}\}$$

- **{a,b} ⊆ 2^{a,b,{a,b}}** -> falsch, weil Element a,b nicht rechts als Element vorkommt
- **{{a,b}} ⊆ 2^{a,b,{a,b}}** -> wahr, weil Menge {a,b} als Element rechts vorkommt
- **{a, {a,b}} ⊆ 2^{a,b,{a,b}}** -> falsch, weil Element a rechts nicht als Element vorkommt
- **{a, {a,b}} ⊆ 2^{a,b,{a,b}}** -> wahr, Potenzmenge = { ..., {{a,b}}, ..}

---

3. Wahr oder falsch. Begründung?

$$\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$$

-> wahr, Assoziativität - Beweis gefordert

Assoziativität für Wörter vorrausgesetzt: (uv)w = u(vw)

$$x \in (L_1L_2)L_3$$

$$x = vw, v \in L_1 * L_2, w \in L_3 =$$

$$= (v_1v_2)w, v_1 \in L_1, v_2 \in L_2, w \in L_3 =$$

da Assoziativität für Wörter vorrausgesetzt: (uv)w = u(vw)

$$= v_1(v_2w), v_1 \in L_1, v_2 \in L_2, w \in L_3$$

$$v_1(v_2w) \in L_1(L_2L_3)$$

$$\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1 \cup L_2)L_3 = (L_1L_3) \cup (L_2L_3)$$

-> wahr, Distributivität - Beweis gefordert

$$\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1 \cap L_2)L_3 = L_1 * L_3 \cap L_2 * L_3$$

-> falsch, Konkatenation nicht kommutativ:

Gegenbeispiel:

$$L_1 = \{a\}; L_2 = \{aa\}; L_3 = \{\varepsilon, a\}$$

$$\text{l.S.: } (L_1 \cap L_2)L_3 = \emptyset * L_3 = \{a\}$$

$$\text{r.S.: } L_1 * L_3 \cap L_2 * L_3 = \{a, aa\} \cap \{aa, aaa\} = \{aa\}$$

$$\text{Links} \neq \text{Rechts}$$

$$\forall L_1, L_2, L_3 : (L_1L_2) \cup L_3 = (L_1 \cup L_3)(L_2 \cup L_3)$$

-> falsch, Konkatenation nicht kommutativ:

Gegenbeispiel:

$$L_1 = \{a\}; L_2 = \{b\}; L_3 = \{c\}$$

$$\text{l.S.: } (L_1L_2) \cup L_3 = \{a, b\} \cup \{c\} = \{a, b, c\}$$

$$\text{r.S.: } (L_1 \cup L_3)(L_2 \cup L_3) = \{a, c\}\{b, c\} = \{ab, ac, cb, cc\}$$

$$\text{Links} \neq \text{Rechts}$$

---

4. Wahr oder falsch? Begründe!

$$\{\varepsilon\}^* = \emptyset$$

-> falsch, Menge mit leerem Wort ist nicht leer!

$$\emptyset \cup \emptyset^* = \{\varepsilon\}$$

-> wahr:

$$\emptyset \cup \emptyset^* = \{\} \cup \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}$$

$$\forall L : (L^+)^* = L^*$$

-> wahr, da Kleene Star Abschluss. L^+ ohne ε mit * wieder mit ε

$$\{\varepsilon\}^* = \{\varepsilon\}$$

-> wahr

$$\forall L : \emptyset L^* = \{\varepsilon\}$$

-> falsch, wenn L aus mehr als ε besteht, daher nicht ∀L

$$\forall L : \emptyset \cup L^+ = L^*$$

-> flasch, $\emptyset \neq \varepsilon$:

$$L^+ \cup \emptyset = L^+$$

$$L^* = L^+ \cup \varepsilon$$

5.

$$\forall L_1, L_2 : (L_1 L_2)^* = L_1^* L_2^*$$

-> falsch, Gegenbeispiel: $L_1 = \{a\}; L_2 = \{b\}$

$$(\{a, b\})^* \neq \{a\}^* \{b\}^*$$

$$\forall L_1, L_2 : (L_1 \cup L_2)^* = (L_2 \cup L_1)^*$$

-> wahr, kommutiert bereits unter der kleenschen Hülle:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$\forall L_1, L_2 : (L_1 \cup L_2)^* = L_1^* \cup L_2^*$$

-> falsch

- links mehr wörter als rechts
- rechts teilmenge von links
- Beispiel: $L_1 = \{a\} L_2 = \{b\}$

$(L_1 \cup L_2)^*$ ist ab möglich

in $L_1^* \cup L_2^*$ nicht möglich

$$aber : L_1^* \cup L_2^* \subseteq L_1^* \cup L_2^*$$

$$\forall L_1, L_2 : L_1^* \cap L_2^* = (L_1 \cap L_2)^*$$

-> falsch

Gegenbeispiel: $L_1 = \{a\} L_2 = \{aa\}$

$$(L_1 \cap L_2)^* = \emptyset$$

$$L_1^* \cap L_2^* = \{aa\}^*$$

6.

a) $\{w \in \{a, b\}^*$ | genau ein Suffix von w beginnt mit a$\}$

Jedes Wort besteht aus genau einem a

b) {w ∈ {a,b}* | alle Präfixe von w mit Länge

mindestens 1 enden mit b}

Alle Wörter bestehen aus bs. Bzw. $\{b\}^*$