Übung 5

Aufgabe 1:

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Geben Sie reguläre Ausdrücke für die folgenden Sprachen an. Sie dürfen dabei wie in der Vorlesung angegeben Klammern einsparen.

- (a) $\{w \in \Sigma^* | w \text{ enthaelt geradzahlig viele a}\}$

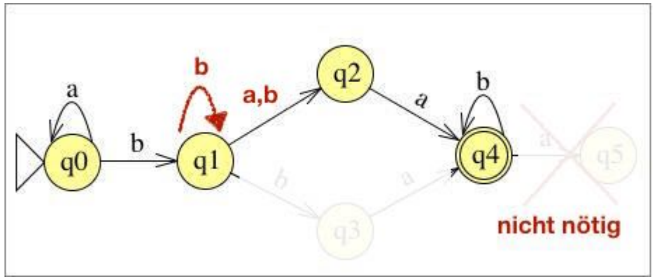
  $(b^*ab^*ab^*)b^*$

- (b) $\{w \in \Sigma^* | \text{ in w gibt es genau ein Vorkommen des Teilwortes aaa}\}$

  $b^*((aa \cup a)bb^*)^*aaa(bb^*(aa \cup a))^*b^*$

Aufgabe 2:

Geben Sie einen (nichtdeterministischen) endlichen Automaten, der die Sprache $L(a^*bb^*(a \cup b)ab^*)$ akzeptiert. Zustandsübergangsdiagramm genügt. Dabei ist es hilfreich, dem die Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen ausnutzenden Beweis aus der Vorlesung zu folgen, Sie müssen dies aber nicht tun.



Korrektur: $q_1 \to q_1$ mit b, q_5 kann weg

Aufgabe 3:

Beweisen oder widerlegen Sie: $\{www | w \in \{a, b\}^*\}$ ist eine reguläre Sprache.

Annahme: $L = \{www | w\ in \{a, b\}^*\} \in REG$

Dann gäbe es laut PL für reguläre Sprachen eine Zahl $n \in N$, so dann sich alle Wörter $w \in L$ mit $|w| \geq n$ in $w = xyz$ zerlegen lassen würden, wobei

- 1) $|xy| \leq n$
- 2) $y \neq \varepsilon$
- 3) $\forall i \geq 0 : xy^iz \in L$

Wir betrachten nun für gegebenes n das Wort $w = a^nba^nba^nb \in L$

Da $|w| = 3n \geq n$, lässt sich w wie oben zerlegen.

- (1) $|w|$ ist höchstens a^n
- (2) $|y|_a \geq 1$
- (3) $x = a^k\ y = a^l | k + l \leq n$

Aufgabe 4:

Beweisen oder widerlegen Sie: $\{xyx^R | x, y \in \{a, b\}^*\}$ ist eine reguläre Sprache.

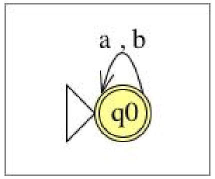
Sprache ist regulär.

$\{xyx^R | x, y \in \{a, b\}^*\}$ ist die Langform von $L = \{a, b\}^*$, da

$L \subseteq \Sigma^*$

$L = \{xyx^R | x, y \in \Sigma^*\} \supseteq^{x=\epsilon} \{\epsilon y \epsilon^R | y \in \Sigma^*\} = \{y : y \in \Sigma^*\} = \Sigma^*$

$\Sigma^* \subseteq L \subseteq \Sigma^* => L = \Sigma^*$ daher regulär und in einem Automaten abbildbar:



Aufgabe 5:

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? Begründen Sie jeweils ihre Antwort!

- (a) **Jede Teilmenge einer regulären Sprache ist eine reguläre Sprache.**

  Falsch, $L = \Sigma^* = L(a^*, b^*) \to L = \{w | w \in \{a, b\}^*\}$

  $L_1 = \{a, b\}^*$ reguläre Sprache (sh. Aufgabe 4)

  $L_2 = \{a^nb^n | n \geq 0\}$ nicht regulär

  aber $L_2 \subset L_1$ q.e.d.

- (b) **Falls L eine reguläre Sprache ist, so ist die Sprache $L^R = \{w^R | w \in L\}$**

ebenfalls regulär.

Wahr, Automat von L kann in L^R umgewandelt werden(Anfangszustand = Endzustand , Endzustand = Anfangszustand, Pfeile umkehren für NEA)
$L = L(M) \Rightarrow \exists M' : L^R = L(M')$

- (c) **Für jede reguläre Sprache L gibt es einen NEA mit genau einem Endzustand.**

  Wahr, im NEA werden alle Endzustände zu einem unter Eingabe von Epsilon zu einem Eindzustand geführt.

- (d) **Falls $L \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, dann ist auch $\{w | w \in L \wedge w \in L^R\}$ regulär.**

  Wahr, $\{w | w \in L \wedge w \in L^R\}$ $L \in REG \Rightarrow L^R \in REG \Rightarrow L \cap L^R \in REG$

Aufgabe 6:

Geben Sie eine rechtslineare Grammatik an, die die Sprache $L(a^*bba^*)$ erzeugt.

$G = (\{S, B, C\}, \{a, b\}, \{S \to aS|B, B \to bC, C \to bA, A \to A|aA|\epsilon\}, S)$

Aufgabe 7:

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ und sei $G = (V, \Sigma, R, S)$ eine kontextfreie Grammatik, wobei $V = \{S, A, B\}$ und $R = \{S \to aB|bA, A \to a|aS|BAA, B \to b|bS|ABB\}$.

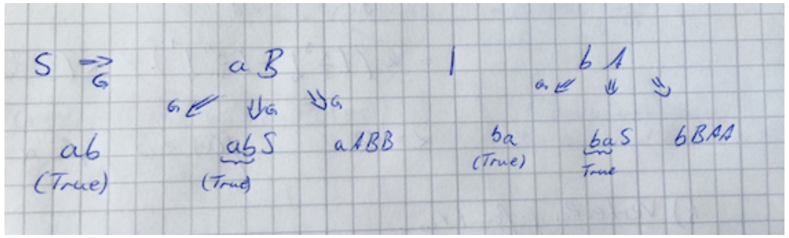
- (a) **Zeigen Sie, dass ababbaaabb zu L(G) gehört.**

  $S \Rightarrow_G aB \Rightarrow_G abS \Rightarrow_G abaB \Rightarrow_G ababS \Rightarrow_G ababbA \Rightarrow_G ababbaS$
  $\Rightarrow_G ababbaaB \Rightarrow_G ababbaaABB \Rightarrow_G^+ ababbaaabb$

Bemerkung: "$\Rightarrow_G^+$" positive Hülle, da mehr als einen Schritt der Relation auf einmal durchgeführt wird !

- (b) **Zeigen Sie, dass alle Wörter in L(G) gleich viele a und b enthalten.**

  Die Aussage ist richtig, kann es aber nicht vollständig beweisen.



Brauche noch den Beweis von:

$|ABB|_b = |ABB|_a - 1$ und $|BAA|_a = |BAA|_b - 1$

korrekte Lösung im [zugehörigen Issue #25]

Aufgabe 8:

Geben Sie eine kontextfreie Grammatik an, die die Sprache $\{aubw | u, w \in \{a, b\}, |u| = |w|\}$ erzeugt.

$R = \{S \to aB, B \to b|aBa|bBb|aBb|bBa\}$

$V = \{S, B\}$

$\Sigma = \{a, b\}$