# 第15讲 一阶谓词逻辑演算形式系统-II

**授课教师：蒋琳**
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年12月

# FC的基本定理

**定理1（定理5.2.1）**：对于FC中的任何公式$A$，变元$v$:√

$$\vdash_{FC} \forall vA \to A$$

**定理2（定理5.2.2）**：对于FC中的任何公式$A$，变元$v$：√

$$\vdash_{FC} A \to \neg\forall v\neg A$$ （也即$\vdash_{\mathrm{FC}} A \to \exists vA$）

**定理3（定理5.2.3）**：对于FC中的任何公式$A$，变元$v$：√

$$\vdash_{FC} \forall vA \to \exists vA$$

**定理4（定理5.2.4）**：（全称推广定理）对于FC中的任何公式$A$，变元$v$：√

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

**定理5（定理5.2.5）**：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合$\Gamma$，公式$A$，以及不在$\Gamma$的任意公式里自由出现的变元$v$：√

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall vA$

# FC的基本定理

**定理6（定理5.2.6）**：（演绎定理）设$\Gamma$对于$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，那么：$\Gamma; A \vdash B$当且仅当$\Gamma \vdash A \to B$

**定理7（定理5.2.7）**：$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，

那么：$\Gamma; A \vdash \neg B$当且仅当$\Gamma; B \vdash \neg A$

**定理8（定理5.2.8）**：（反证法） 如果$FC$中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，

那么：$\Gamma \vdash \neg A$

**定理9（定理5.2.9）**：设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$在$\Gamma$的任何公式里无自由出现，那么：

$\Gamma; A \vdash B$蕴含$\Gamma; \forall xA \vdash B$和$\Gamma; \forall xA \vdash \forall xB$

**定理10（定理5.2.10）**：（存在消除）设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$在$\Gamma$的任何公式里无自由出现，那么：

由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

# 定理6

**定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）**设$\Gamma$对于$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash B \text{当且仅当} \Gamma \vdash A \rightarrow B$$

**证明：**(充分性)已知$\Gamma \vdash A \rightarrow B$，往证$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$

- 由$\Gamma \vdash A \rightarrow B$，则有演绎过程 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ $(= A \rightarrow B)$。
- 在此序列中加上公式$A, B$得到一个演绎过程 $A_1$，$A_2$，$\cdots, A_m$ $(= A \rightarrow B), A, B$，即得到一个以$\Gamma \cup \{A\}$为前提对$B$的演绎过程。

**定理6（定理5.2.6）：（演绎定理）**设$\Gamma$对于$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$ 为$FC$中的任意两个公式，那么：

$$\Gamma; A \vdash B\text{当且仅当}\Gamma \vdash A \to B\text{。}$$

**证明**：(必要性)已知$\Gamma \cup \{\cancel{A}\} \vdash_{\mathrm{FC}} B$，往证$\Gamma \vdash_{\mathrm{FC}} A \to B$

对$\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{FC}} B$的演绎序列的长度$l$用第二数学归纳法。

(1) 当$l = 1$时，序列中只有$B$,那么$B$有如下可能：

- $B$为公理，那么序列$\{B, B \to (A \to B), A \to B\}$构成了一个证明，从而$\Gamma \vdash A \to B$。
- $B \in \Gamma$，那么序列$\{B, B \to (A \to B), A \to B\}$构成了一个以$\Gamma$为前提对$A \to B$的演绎过程，从而$\Gamma \vdash A \to B$。

$A \to A$

- $B = A$，由$A = B$知$A \to B$是一个定理（PC中定理1），从而$\Gamma \vdash A \to B$。

(2) 假设当演绎序列的长度$l < n$时结论成立

(3) 则当长度为$l = n$时，演绎序列为$A_1, A_2, \cdots, A_l\,(= B)$。观察$B$：

- 如果$B$为公理或者为假设中的元素，可仿照$l = 1$的情形证明结论完全正确。
- 如果$B = A_j (j < n)$，则由$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$，得到$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j$，由归纳假设知 $\Gamma \vdash A \to A_j$即$\Gamma \vdash A \to B$。

(2)

- 如果$B$为$A_j$，$A_k (j, k < l)$用分离规则导出，不妨设$A_k = A_j \to B$，由于$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j$，$\Gamma \cup \{A\} \vdash A_j \to B$，有$\Gamma \vdash A \to A_j$和$\Gamma \vdash A \to (A_j \to B)$。此两序列加上公式$(A \to (A_j \to B)) \to ((A \to A_j) \to (A \to B))$（公理2），用分离规则得$(A \to A_j) \to (A \to B)$，再使用分离规则得$A \to B$，以上序列是一个以$\Gamma$为前提对$A \to B$的一个演绎过程。从而$\Gamma \vdash A \to B$。

# FC的演绎定理应用

**例1：** 证明$\forall x(A\to B)\vdash A\to\forall xB$，其中$x$在$A$中无自由出现。

**证明思路:**

$\forall x(A\to B)\vdash A\to\forall xB$

演绎定理6

$\forall x(A\to B), A\vdash\forall xB$

全称推广定理5，需要验证$x$在$\Gamma$中无自由出现

$\forall x(A\to B), A\vdash B$

演绎定理6

$\forall x(A\to B)\vdash A\to B$

演绎定理6

$\vdash\forall x(A\to B)\to(A\to B)$

FC中的定理1

（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合$\Gamma$，公式$A$，以及不在$\Gamma$的任意公式里自由出现的变元$v$：如果$\Gamma\vdash A$，那么$\Gamma\vdash\forall vA$

（演绎定理）设$\Gamma$对于$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，那么：$\Gamma;A\vdash B$当且仅当$\Gamma\vdash A\to B$

对于FC中的任何公式$A$，变元$v$：$\vdash_{FC}\forall vA\to A$

# FC的演绎定理应用

**例1：** 证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$A$中无自由出现。

**证明：**

（1）$\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to B)$ 定理1

（2）$\forall x(A \to B) \vdash (A \to B)$ 对（1）演绎定理6

（3）$\forall x(A \to B), A \vdash B$ 对（2）演绎定理6

（4）$\forall x(A \to B), A \vdash \forall xB$ 对（3）用全称推广定理5

（5）$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$ 对（4）用演绎定理6

# FC的演绎定理应用

**例2**：证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$B$中无自由出现。

**证明思路:**

$$\boxed{\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB}$$

演绎定理6

$$\boxed{\vdash \forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)}$$

FC定理1

FC中公理6和PC加前件定理4

$$\boxed{(A \to B)}$$

对于FC中的任何公式$A$，变元$v$:

$\vdash_{FC} \forall vA \to A$

$A_6$: $A \to \forall vA$ （$v$在$A$中无自由出现）

# FC的演绎定理应用

例2：证明$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$，其中$x$在$B$中无自由出现

证明：

（1）$B \to \forall xB$　公理6

（2）$(B \to \forall xB) \to ((A \to B) \to (A \to \forall xB))$　PC中加前件定理4

（3）$(A \to B) \to (A \to \forall xB)$　(1)与(2)用rmp分离规则

（4）$\forall x(A \to B) \to (A \to B)$　FC中定理1

（5）$\forall x(A \to B) \to (A \to \forall xB)$　(4)与(3)用PC中三段论定理8

（6）$\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$　对（5）用演绎定理6

# 定理7

**定理7（定理5.2.7）**：设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，那么：$\Gamma; A \vdash \neg B$当且仅当$\Gamma; B \vdash \neg A$

**证明**：（必要性）由$\Gamma; A \vdash \neg B$证$\Gamma; B \vdash \neg A$

（1）$\Gamma; A \vdash \neg B$　　　　已知

（2）$\Gamma \vdash A \rightarrow \neg B$　　　　对（1）用演绎定理6

（3）$(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$　　PC中定理15

（4）$\Gamma \vdash B \rightarrow \neg A$　　　　（2）（3）用rmp分离规则

（5）$\Gamma; B \vdash \neg A$　　　　对（4）用演绎定理6

# 定理7

**定理7（定理5.2.7）**：设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，那么：$\Gamma; A \vdash \neg B$当且仅当$\Gamma; B \vdash \neg A$

**证明**：（充分性）由$\Gamma; B \vdash \neg A$证$\Gamma; A \vdash \neg B$

| | | |
|---|---|---|
| （1） | $\Gamma; B \vdash \neg A$ | 已知 |
| （2） | $\Gamma \vdash B \to \neg A$ | 对（1）用演绎定理6 |
| （3） | $(B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$ | PC中定理15 |
| （4） | $\Gamma \vdash A \to \neg B$ | （2）（3）用rmp分离规则 |
| （5） | $\Gamma; A \vdash \neg B$ | 对（4）用演绎定理6 |

# 定理8

**定理8（定理5.2.8）：**（反证法） 如果$FC$中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：$\Gamma \vdash \neg A$

**证明:**

推理规则9：¬引入规则 $\dfrac{\Gamma;A\vdash B,\ \Gamma;A\vdash \neg B}{\Gamma\vdash\neg A}$ $(\neg+)$

（1） $\Gamma; A \vdash B$ 由$\Gamma \cup \{A\}$是不一致知

（2） $\Gamma; A \vdash \neg B$ 由$\Gamma \cup \{A\}$是不一致知

（3） $\Gamma \vdash A \to B$ 对（1）用演绎定理6

（4） $\Gamma \vdash A \to \neg B$ 对（2）用演绎定理6

（5） $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ PC中定理17

（6） $\Gamma \vdash (A \to \neg B) \to \neg A$ （3） （5）用rmp分离规则

（7） $\Gamma \vdash \neg A$ （4） （6）用rmp分离规则

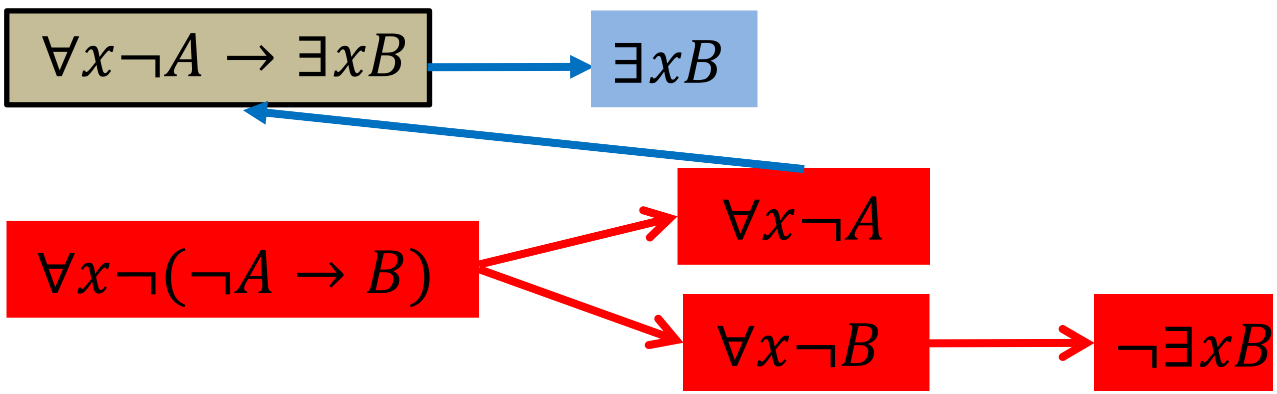
# 定理8应用

定理8（定理5.2.8）：（反证法） 如果$FC$中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，那么：$\Gamma \vdash \neg A$

**例4：** 证明$\forall x \neg A \rightarrow \exists x B \vdash \exists x(\neg A \rightarrow B)$

$$\forall x \neg A \rightarrow \exists x B \vdash \neg \forall x \neg(\neg A \rightarrow B)$$

**证明思路：** 使用FC定理8反证法



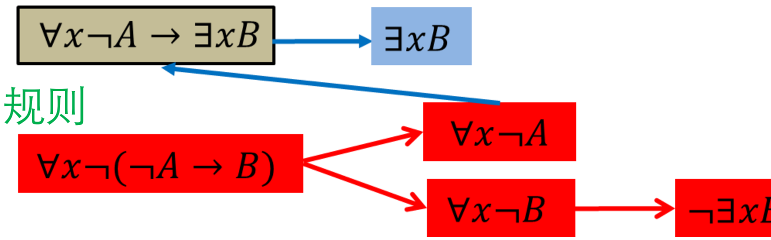
# 定理8应用

定理8（定理5.2.8）：（反证法） 如果 $FC$中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，

那么：$\Gamma \vdash \neg A$

**例4：证明$\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \exists x(\neg A \to B)$**

**证明：**




（1）$\neg(\neg A \to B) \to \neg A$ PC中定理7，定理13逆否及分离规则

（2）$\neg(\neg A \to B) \to \neg B$ 公理1，定理13逆否及分离规则

（3）$\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg A)$ (1)用全称推广定理4

（4）$\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg B)$ (2)用全称推广定理4

（5）$\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg A) \to (\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg A)$ 公理5 $\forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$

（6）$\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg A$ (3)与(5)用rmp分离规则

（7）$\forall x(\neg(\neg A \to B) \to \neg B) \to (\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg B)$ 公理5

（8）$\forall x \neg(\neg A \to B) \to \forall x \neg B$ (4)与(7)用rmp分离规则

（9）$\forall x \neg A \to \exists x B$ 已知假设

（10）$\forall x \neg(\neg A \to B) \to \exists x B$ (6)与(9)用PC中三段论定理8

（11）$\forall x \neg A \to \exists x B, \forall x \neg(\neg A \to B) \vdash \forall x \neg B$ （$\neg \exists x B$） 演绎定理6 $\Gamma; A \vdash B$当且仅当$\Gamma \vdash A \to B$

（12）$\forall x \neg A \to \exists x B, \forall x \neg(\neg A \to B) \vdash \neg \forall x \neg B$ （$\exists x B$） 演绎定理6

（13）$\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \neg \forall x \neg(\neg A \to B)$ (11)(12)用FC中定理8反证法

（14）$\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \exists x(\neg A \to B)$ 定义式

# 定理9

**定理9（定理5.2.9）：** 设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A,B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$在$\Gamma$的任何公式里无自由出现，那么：

$$\Gamma;A\vdash B\text{蕴涵}\Gamma;\forall vA\vdash B\text{和}\Gamma;\forall vA\vdash\forall vB$$

**证明思路：**

- 由$\Gamma;A\vdash B$及演绎定理可知：

$$\Gamma\vdash A\to B$$

- 由$v$不在$\Gamma$中自由出现，由全称推广定理5知

$$\Gamma\vdash\forall v(A\to B)$$

- 再由公理5：$\forall v(A\to B)\to(\forall vA\to\forall vB)$，知：

$$\Gamma\vdash\forall vA\to\forall vB$$

- 从而再由演绎定理知：

$$\Gamma;\forall vA\vdash\forall vB$$

- 再由FC中定理1：$\forall vB\to B$知：

$$\Gamma;\forall vA\vdash B$$

# 定理9

**定理9（定理5.2.9）：** 设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A,B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$在$\Gamma$的任何公式里无自由出现，那么：

$$\Gamma; A \vdash B\text{蕴含}\Gamma; \forall vA \vdash B\text{和}\Gamma; \forall vA \vdash \forall vB$$

**证明:**

（1）$\Gamma; A \vdash B$ 已知

（2）$\Gamma \vdash A \to B$ 对（1）用演绎定理6

（3）$\Gamma \vdash \forall v(A \to B)$ 对（2）用全称推广定理5

（4）$\forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$公理5

（5）$\Gamma \vdash \forall vA \to \forall vB$ （3）（4）用rmp分离规则

（6）$\Gamma; \forall vA \vdash \forall vB$ 对（5）用演绎定理6

（7）$\forall vB \to B$ FC中定理1

（8）$\Gamma; \forall vA \vdash B$ （6）（7）用rmp分离规则

# 定理10

**定理10（定理5.2.10）**：（存在消除）设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A, B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$在$\Gamma$的任何公式以及公式$B$中无自由出现，那么：

$$由\Gamma \vdash \exists v A以及\Gamma; A \vdash B可以推出\Gamma \vdash B$$

**证明思路:**

- 由$\Gamma; A \vdash B$及演绎定理知:

$$\Gamma \vdash A \to B$$

- 由PC中定理13：$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$知:

$$\Gamma \vdash \neg B \to \neg A$$

- 再由演绎定理知:

$$\Gamma; \neg B \vdash \neg A$$

- 由$v$在$\Gamma$及$\neg B$中无自由出现及全称推广定理5知:

$$\Gamma; \neg B \vdash \forall v \neg A$$

- 再由演绎定理知:

$$\Gamma \vdash \neg B \to \forall v \neg A$$

- 由PC中定理14：$(\neg B \to \forall v \neg A) \to (\neg \forall v \neg A \to B)$知:

$$\Gamma \vdash \neg \forall v \neg A \to B$$

- 也即:

$$\Gamma \vdash \exists v A \to B$$

- 再由已知条件$\Gamma \vdash \exists v A$知：$\Gamma \vdash B$

# 定理10应用

**例5：** 证明 $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$，其中$v$在$A$中无自由出现。

**证明：**

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A, B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$在$\Gamma$的任何公式以及公式$B$中无自由出现，那么：
由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

(1) $\exists v(A \to B), A \vdash \exists v(A \to B)$ (∈)

(2) $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A$ (∈)

(3) $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash A \to B$ (∈)

(4) $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash B$ (2)(3)(→ −)

(5) $B \to \exists vB$ FC中定理2

(6) $\exists v(A \to B), A, A \to B \vdash \exists vB$ (4)(5)rmp分离规则

(7) $\exists v(A \to B), A \vdash \exists vB$ (6)(1)用FC中定理10

(8) $\exists v(A \to B) \vdash A \to \exists vB$ 对 (7)用演绎定理6

(9) $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$ 对 (8)用演绎定理6

**在FC的证明中ND，PC，FC的公理，推理规则都可以用！**

# FC的基本定理

**定理6（定理5.2.6）**：（演绎定理）设$\Gamma$对于$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，那么：$\Gamma; A \vdash B$当且仅当$\Gamma \vdash A \to B$ √

**定理7（定理5.2.7）**：$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，

那么：$\Gamma; A \vdash \neg B$当且仅当$\Gamma; B \vdash \neg A$ √

**定理8（定理5.2.8）**：（反证法） 如果$FC$中的公式集合$\Gamma \cup \{A\}$是不一致的，

那么：$\Gamma \vdash \neg A$ √

**定理9（定理5.2.9）**：设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$不在$\Gamma$的任何公式里面自由出现，那么：

$\Gamma; A \vdash B$蕴含$\Gamma; \forall x A \vdash B$和$\Gamma; \forall x A \vdash \forall x B$ √

**定理10（定理5.2.10）**：（存在消除）设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A$，$B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$不在$\Gamma$的任何公式里面自由出现，那么：

由$\Gamma \vdash \exists v A$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$ √

# FC的基本定理

**定理11（定理5.2.11）：**（替换原理）设$A,B$为$FC$中的公式，且满足$A \vdash\dashv B$，$A$是$C$的子公式，$D$是将$C$中$A$的若干出现换为公式$B$得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。

**定理12（定理5.2.12）：**（改名定理）在FC中，若$A'$是$A$的改名式，且$A'$改用的变元不在$A$中出现，则$A \vdash\dashv A'$。

**定理13（定理5.2.13）：**

（1）$\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

（2）$\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

**定理14（定理5.2.14）：**

（1）$\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall x A \wedge \forall x B$

（2）$\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists x A \vee \exists x B$

**定理15（定理5.2.15）：**

（1）$\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x A \wedge \exists x B$

（2）$\forall x A \vee \forall x B \vdash \forall x(A \vee B)$

（3）$\exists x \forall y B(x,y) \vdash \forall y \exists x B(x,y)$

# 定理11

**定理11（定理5.2.11）**：（替换原理） 设$A,B$为$FC$中的公式，且满足 $A \vdash\dashv B$（即$A \vdash B$且$B \vdash A$），$A$是$C$的子公式，$D$是将$C$中$A$的若干出现换为公式$B$得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。

**例6**： $\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to \exists xB$。

**证明**：

（1）$A \to B \vdash\dashv \neg B \to \neg A$ PC中定理13和公理3

（2）$\forall x(A \to B) \vdash\dashv \forall x(\neg B \to \neg A)$ 对（1）用替换原理

（3）$\forall x(\neg B \to \neg A) \to (\forall x\neg B \to \forall x\neg A)$ 公理5

（4）$\forall x(A \to B) \vdash \forall x\neg B \to \forall x\neg A$ （2）（3）用rmp分离规则

（5）$\forall x\neg B \to \forall x\neg A \vdash \neg\forall x\neg A \to \neg\forall x\neg B$ PC中定理13

（6）$\forall x(A \to B) \vdash \neg\forall x\neg A \to \neg\forall x\neg B$ （4）（5）用rmp分离规则

（7）$\forall x(A \to B) \vdash \exists xA \to \exists xB$ 定义式

# 定理12

**定理12（定理5.2.12）**：（改名定理）在FC中，若$A'$是$A$的改名式，且$A'$改用的变元不在$A$中出现，则$A \vdash\dashv A'$

**例如：** $\forall x A \vdash\dashv \forall y A_y^x$

# 定理13

**定理13（定理5.2.13）**：

（1）$\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

（2）$\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

**证明：** 先证 $\exists x \neg A \vdash \neg \forall x A$

（1）$A \rightarrow \neg\neg A$ PC 中的定理12

（2）$\forall x(A \rightarrow \neg\neg A)$ 对（1）用全称推广定理4

（3）$\forall x(A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x \neg\neg A)$ 公理5

（4）$\forall x A \rightarrow \forall x \neg\neg A$ （2）（3）用rmp分离规则

（5）$(\forall x A \rightarrow \forall x \neg\neg A) \rightarrow (\neg \forall x \neg\neg A \rightarrow \neg \forall x A)$ PC中的定理13

（6）$\neg \forall x \neg\neg A \rightarrow \neg \forall x A$ （4）（5）用rmp分离规则

（7）$\exists x \neg A \rightarrow \neg \forall x A$ 定义式

（8）$\exists x \neg A \vdash \neg \forall x A$ 对（7）演绎定理6

# 定理13

**定理13（定理5.2.13）**：

（1）$\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$

（2）$\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$

**证明：** 再证$\neg \forall x A \vdash \exists x \neg A$

（1）$\neg\neg A \to A$ PC 中的定理10

（2）$\forall x(\neg\neg A \to A)$ 对（1）用全称推广定理4

（3）$\forall x(\neg\neg A \to A) \to (\forall x \neg\neg A \to \forall x A)$ 公理5

（4）$\forall x \neg\neg A \to \forall x A$ （2）（3）用rmp分离规则

（5）$(\forall x \neg\neg A \to \forall x A) \to (\neg \forall x A \to \neg \forall x \neg\neg A)$ PC中的定理13

（6）$\neg \forall x A \to \neg \forall x \neg\neg A$ （4）（5）用rmp分离规则

（7）$\neg \forall x A \to \exists x \neg A$ 定义式

（8）$\neg \forall x A \vdash \exists x \neg A$ 对（7）演绎定理6

# 定理14

**定理14（定理5.2.14）：**

（1） $\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall xA \wedge \forall xB$

（2） $\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists xA \vee \exists xB$

**证明：** 先证 $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA \wedge \forall xB$

（1） $\forall x(A \wedge B) \to A \wedge B$　　FC中的定理1

（2） $\forall x(A \wedge B) \vdash A \wedge B$　　对（1）用演绎定理6

（3） $\forall x(A \wedge B) \vdash A$　　（2）　（$\wedge -$）

（4） $\forall x(A \wedge B) \vdash B$　　（2）　（$\wedge -$）

（5） $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA$　　对（3）用全称推广定理5

（6） $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xB$　　对（4）用全称推广定理5

（7） $\forall x(A \wedge B) \vdash \forall xA \wedge \forall xB$　　（5）　（6）　（$\wedge +$）

# 定理14

定理14（定理5.2.14）：

（1）$\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall xA \wedge \forall xB$

（2）$\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists xA \vee \exists xB$

**证明：** 再证$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$

（1）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xA \wedge \forall xB$ （$\in$）

（2）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xA$ （1） （$\wedge -$）

（3）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall xB$ （1） （$\wedge -$）

（4）$\forall xA \to A$ FC中的定理1

（5）$\forall xB \to B$ FC中的定理1

（6）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash A$ （2） （4）用rmp分离规则

（7）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash B$ （3） （5）用rmp分离规则

（8）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash A \wedge B$ （6） （7） （$\wedge +$）

（9）$\forall xA \wedge \forall xB \vdash \forall x(A \wedge B)$ 对（8）用全称推广定理5

# 定理15

定理15（定理5.2.15）：

(1) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists xB$

(2) $\forall xA \vee \forall xB \vdash \forall x(A \vee B)$

(3) $\exists x \forall y B(x,y) \vdash \forall y \exists x B(x,y)$

定理10（定理5.2.10）：（存在消除）设$\Gamma$为$FC$中的任一公式集合，$A,B$为$FC$中的任意两个公式，并且变元$v$在$\Gamma$的任何公式以及公式$B$中无自由出现，那么：

由$\Gamma \vdash \exists vA$以及$\Gamma; A \vdash B$可以推出$\Gamma \vdash B$

**证明:**

(1) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash A \wedge B$ (∈)

(2) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash A$ (1) ($\wedge -$)

(3) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash B$ (1) ($\wedge -$)

(4) $A \rightarrow \exists xA$ FC中的定理2

(5) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xA$ (2) (4) 用rmp分离规则

(6) $B \rightarrow \exists xB$ FC中的定理2

(7) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xB$ (3) (6) 用rmp分离规则

(8) $\exists x(A \wedge B), A \wedge B \vdash \exists xA \wedge \exists xB$ (5) (7) ($\wedge +$)

(9) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x(A \wedge B)$ (∈)

(10) $\exists x(A \wedge B) \vdash \exists xA \wedge \exists xB$ 对（9）和（8）用存在消除定理10

# FC的基本定理

**定理11（定理5.2.11）：**（替换原理）设 $A, B$ 为 $FC$ 中的公式，且满足 $A \vdash\dashv B$，$A$是$C$的子公式，$D$是将$C$中$A$的若干出现换为公式$B$得到的公式，则$C \vdash\dashv D$。√

**定理12（定理5.2.12）：**（改名定理）在FC中，若$A'$是$A$的改名式，且$A'$改用的变元不在$A$中出现，则$A \vdash\dashv A'$。√

**定理13（定理5.2.13）：**（1）$\exists x \neg A \vdash\dashv \neg \forall x A$　（2）$\forall x \neg A \vdash\dashv \neg \exists x A$ √

**定理14（定理5.2.14）：** √

（1）$\forall x(A \wedge B) \vdash\dashv \forall x A \wedge \forall x B$

（2）$\exists x(A \vee B) \vdash\dashv \exists x A \vee \exists x B$

**定理15（定理5.2.15）：** √

（1）$\exists x(A \wedge B) \vdash \exists x A \wedge \exists x B$

（2）$\forall x A \vee \forall x B \vdash \forall x(A \vee B)$

（3）$\exists x \forall y B(x, y) \vdash \forall y \exists x B(x, y)$