数理逻辑

第7讲 命题演算形式系统 -基本定理13-17

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年5月

推理部分

公理集合:

（1） A_1: $A \to (B \to A)$

（2） A_2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

（3） A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

推理规则或分离规则（Modus Ponens）：

若有A和$A \to B$成立，则必有结论B成立，可形式化表示为:

$$r_{mp}: \frac{A,\ A \to B}{B}$$

证明

证明的定义： 称下列公式序列为公式A 在PC 中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，A_i 或者是PC中的公理，或者是 $A_j (j < i)$，或者$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。**其中A_m就是公式A。**

注释： A_i 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或已知定理；

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中的某一个；

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的。

基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \to A$ ($A \to A$是PC中的一个定理)√

定理2：如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ （前件互换定理）√

定理3：$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 定理（2）的另一种形式 √

定理4：$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$（加前件定理）√

定理5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$（加后件定理）√

定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$√

定理7：$\vdash A \to (\neg A \to B)$√

定理8：如果 $\vdash (A \to B)$，$\vdash (B \to C)$，那么$\vdash (A \to C)$（三段论定理）√

定理9. $\vdash (\neg A \to A) \to A$ （反证法）√

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$（否定之否定蕴涵肯定）√

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ （反证法）√

定理12. $\vdash A \to \neg\neg A$√

基本定理

定理13: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ （公理A_3的逆命题）

定理14: $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

定理15: $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

定理16: $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ （反证法）

定理17: $\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ （反证法）

定理13

定理13. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$A_3: (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

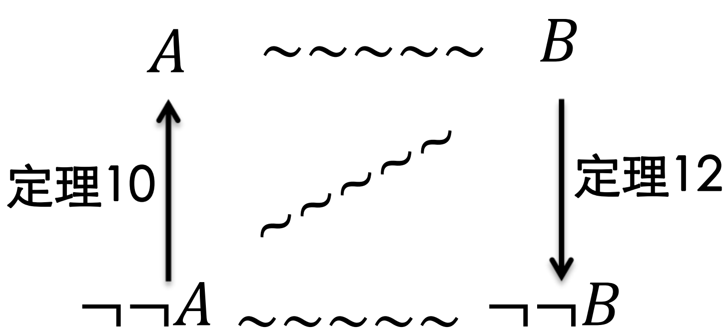
证明思路:

（1） $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$ （公理3）

（2） 定理13是公理3的逆命题

（3） 如果能够证明出 $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$，利用三段论定理8，推出要证明的定理。

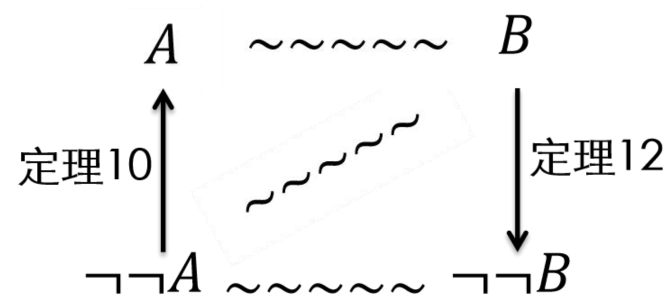
- $\neg\neg A \to A$ （定理10）
- $B \to \neg\neg B$ （定理12）



$A_3: (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ **定理13**

定理13. $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

证明:



(1) $\neg\neg A \to A$ 定理10

(2) $B \to \neg\neg B$ 定理12

(3) $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to B) \to (\neg\neg A \to B))$ 加后件定理5

(4) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to B)$ (1) 和 (3) 用rmp分离规则

(5) $(B \to \neg\neg B) \to ((\neg\neg A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B))$ 加前件定理4

(6) $(\neg\neg A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ (2) 和 (5) 用rmp分离规则

(7) $(A \to B) \to (\neg\neg A \to \neg\neg B)$ (4) 和 (6) 用三段论定理8

(8) $(\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A)$ 公理3

(9) $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (7) 和 (8) 用三段论定理8

定理14

定理14. $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

证明思路: $A_3: (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

(1) $(\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A)$ （公理3）

(2) 如果能够证明出 $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B)$，利用三段论定理8，推出要证明的定理。

证明:

(1) $B \to \neg\neg B$ 定理12

(2) $(B \to \neg\neg B) \to ((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B))$ 对（1）加前件定理4

(3) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg\neg B)$ （1）和（2）用rmp分离规则

(4) $(\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to A)$ 公理3

(5) $(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ （3）和（4）用三段论定理8

定理15

定理15. $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

证明思路:

$A_3: (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

（1）$(\neg\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ （公理3）

（2）如果能够证明出 $(A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B)$，利用三段论定理8，推出要证明的定理。

证明:

（1）$\neg\neg A \to A$ 定理10

（2）$(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B))$ 加后件定理5

（3）$(A \to \neg B) \to (\neg\neg A \to \neg B)$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4）$(\neg\neg A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ 公理3

（5）$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ （3）和（4）用三段论定理8

$A_2: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$
$A_3: (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$
Thm13: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

定理16

定理16. $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ （反证法）

证明思路： 把$(\neg A \to B)$看成A，$(\neg A \to \neg B) \to A$看成$B$，要证$\vdash A \to B$

可以找一个C，并通过$\vdash (A \to C)$，$\vdash (C \to B)$和三段论定理8得证

由于$(\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B)) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$公理3

只需证$(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$

发现上式前件一致，利用公理2，只需证

$$\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))$$

利用前件互换定理2，只需证$B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$

结合定理13证明 $(\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ 的逆否命题，只需证

$$B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$$

利用前件互换定理2，只需证

$$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$$（公理3）

定理16

定理16. $\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

证明:

(1) $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ 公理3

(2) $B \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 对（1）用前件互换定理2

(3) $((\neg A \to \neg B) \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$定理13

(4) $B \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ (2) 和 (3) 用三段论定理8

(5) $\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))$ 对（4）用前件互换定理2

(6) $(\neg A \to (B \to \neg(\neg A \to \neg B))) \to$

$((\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B)))$公理2

(7) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B))$ （5）和（6）用rmp分离规则

(8) $(\neg A \to \neg(\neg A \to \neg B)) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$公理3

(9) $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ (7) 和 (8) 用三段论定理8

反证法思想的运用

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路(利用反证法)**:**

假设上述命题为假，则:

一个蕴涵式只有一种情况为假，就是前真后假，**即$(A \to B) \to A$为真，A为假**。

那么，A为假并且使得$(A \to B) \to A$为真，则**前提$(A \to B)$一定为假**。

又已知A为假，则**$(A \to B)$一定为真**，

那么$(A \to B)$真假性就产生了矛盾。**根据假设可知上述定理是真。**

反证法思想的运用

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明（反证法思想）：

令$P = ((A \to B) \to A) \to A$

（1）$\neg((A \to B) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$ 定理6

（2）$(\neg((A \to B) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$

$\to (\neg(((A \to B) \to A) \to A) \to ((A \to B) \to A))$ 定理14

(3) $\neg P \to ((A \to B) \to A)$ （1）和（2）用rmp分离规则而得

（4）$A \to P$ 即 $A \to (((A \to B) \to A) \to A)$ 公理1

（5）$(A \to P) \to (\neg P \to \neg A)$ 定理13

(6) $\neg P \to \neg A$ （4）和（5）用rmp分离规则而得

(7) $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ 定理13

(8) $\neg A \to (A \to B)$ 定理6

（9）$\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ 由(3)和(7)用三段论定理8

(10) $\neg P \to (A \to B)$ 由(6)和(8)用三段论定理8

反证法思想的运用

（接上页）

（11） $(\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B)))$

$\to ((\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B)))$ 公理2

（12） $(\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B))$(9)和(11)用rmp分离规则

（13） $\neg \boldsymbol{P} \to \neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})$ (6)和(12)用rmp分离规则

（14） $(\neg \boldsymbol{P} \to (\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})) \to ((\neg \boldsymbol{P} \to \neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})) \to \boldsymbol{P})$ 定理16

（15） $(\neg \boldsymbol{P} \to \neg(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})) \to \boldsymbol{P}$ (10)和(14)用rmp分离规则

（16） $\boldsymbol{P}$ (13)和(15)用rmp分离规则而得

总结：通过假定字符串P为假，那么其否定$\neg P$为真，推出$(\neg P \to Q)$和$((\neg P \to \neg Q)$都成立，再由定理16 $(\neg P \to Q) \to ((\neg P \to \neg Q) \to P)$ 通过分离规则，分离得到P成立。

反证法思想的运用(简化)

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明（反证法思想）：

（1）$\neg P \to ((A \to B) \to A)$　分析而得

（2）$\neg P \to \neg A$　分析而得

（3）$((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B))$　分析而得

（4）$\neg A \to (A \to B)$　分析而得

（5）$\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B))$ 由(1)和(3)用三段论定理8

（6）$\neg P \to (A \to B)$ 由(2)和(4)用三段论定理8

（7）$(\neg P \to (\neg A \to \neg(A \to B)))$

$\to ((\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B)))$　公理2

（8）$(\neg P \to \neg A) \to (\neg P \to \neg(A \to B))$(6)和(7)用rmp分离规则

（9）$\neg P \to \neg(A \to B)$ (2)和(8)用rmp分离规则

（10）$(\neg P \to (A \to B)) \to ((\neg P \to \neg(A \to B)) \to P)$　定理16

（11）$(\neg P \to \neg(A \to B)) \to P$　(9)和(11)用rmp分离规则

（12）P　(6)和(11)用rmp分离规则而得

例1的其他证明方法（1）

例：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：用反证法的思想证明过程过于复杂，是否有更简化的证明方式？如果可证明$(\neg A \to \neg(A \to B)) \to A$成立，结合定理13：$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$，和三段论定理8，是否可以证明？

证明：

(1) $\neg A \to (A \to B)$ 定理6

(2) $(\neg A \to (A \to B)) \to ((\neg A \to \neg(A \to B)) \to A)$ 定理16

(3) $(\neg A \to \neg(A \to B)) \to A$ 由(1) 和(2) 用分离规则

(4) $((A \to B) \to A) \to (\neg A \to \neg(A \to B)$ 定理13, 逆否命题

(5) $((A \to B) \to A) \to A$ (4) 和(3)用三段论定理8

例1的其他证明方法（2）

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：这个公式与定理9：$\vdash (\neg A \to A) \to A$形式上比较相似，是否可以从定理6出发证明，通过加后件构造出要证的公式。

证明：

（1）$(\neg A \to A) \to A$

（2）$\neg A \to (A \to B)$

（3）$(\neg A \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$

（4）$((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$

（5）$(((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)) \to (((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$

（6）$((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$

（7）$((A \to B) \to A) \to A$

例1的其他证明方法（2）

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：这个公式与定理9：$\vdash (\neg A \to A) \to A$形式上比较相似，是否可以从定理9出发证明，通过加后件构造出要证的公式。

证明：

（1）$(\neg A \to A) \to A$ 定理9

（2）$\neg A \to (A \to B)$ 定理6

（3）$(\neg A \to (A \to B))$

$\to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$ 加后件定理5

（4）$((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$ 由(2) 和 (3)用rmp分离规则

（5）$(((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$

$\to (((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A))$ 加后件定理5

（6）$((\neg A \to A) \to A) \to (((A \to B) \to A) \to A)$ 由(4) 和 (5)用rmp分离规则

（7）$((A \to B) \to A) \to A$ 由(1) 和 (6)用rmp分离规则

例1的其他证明方法（3）

例1：证明$\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

证明思路：这个公式与定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$ 形式上比较相似，从定理6出发，结合三段论定理证明。

证明：

(1)　$\neg A \to (A \to B)$ 定理6

(2)　$(\neg A \to (A \to B)) \to (((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A))$　加后件定理5

(3)　$((A \to B) \to A) \to (\neg A \to A)$　由(1) 和 (2)用rmp分离规则

(4)　$(\neg A \to A) \to A$　定理9

(5)　$((A \to B) \to A) \to A$　由(3) 和(4)用三段论定理8

从例1的证明可以看出，命题的证明方法并不唯一，需要自己仔细分析找到切入点，用定理一步一步推理，所得的结果就都是正确的。

定理17

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

证明思路:

定理15: $\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$

要证$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$成立，因为定理15，只需证

$$(A \to B) \to (A \to \neg(A \to \neg B))$$

前件一致，逆向运用公理2，只需证

$$A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$$

只需证（逆否命题）

A_2: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$$A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$$

前件互换定理2，只需证

$$(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$$（定理1）

定理17

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$（与定理16恰好相反）

证明:

（1） $(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$ 定理1

（2） $A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$ 前件互换定理2

（3） $((A \to \neg B) \to \neg B) \to (B \to \neg(A \to \neg B))$ 定理15

（4） $A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$ 由(2) 和(3)用三段论定理8

（5） $(A \to (B \to \neg(A \to \neg B)))$

$\to ((A \to B) \to (A \to \neg(A \to \neg B)))$ 公理2

（6） $(A \to B) \to (A \to \neg(A \to \neg B))$ (4) 和(5)用rmp 分离规则

（7） $(A \to \neg(A \to \neg B)) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ 定理15

（8） $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ 由(6) 和(7)用三段论定理8

定理17另一种证明方法

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$（与定理16恰好相反）

证明：

(1) $(A \to B) \to ((B \to \neg A) \to (A \to \neg A))$ 加后件定理5

(2) $(A \to \neg A) \to \neg A$ 定理11

(3) $((A \to \neg A) \to \neg A)$

$\to (((B \to \neg A) \to (A \to \neg A)) \to ((B \to \neg A) \to \neg A))$加前件定理4

(4) $((B \to \neg A) \to (A \to \neg A)) \to ((B \to \neg A) \to \neg A)$ (2)和(3)用rmp分离规则

(5) $(A \to B) \to ((B \to \neg A) \to \neg A)$ (1)和(4)用三段论定理8

(6) $(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ 定理15

(7) $((A \to \neg B) \to (B \to \neg A))$

$\to (((B \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A))$ 加后件定理5

(8) $((B \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (6)和(7)用rmp分离规则

(9) $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ (5)和(8)用三段论定理8

基本定理

定理13：$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ （公理A_3的逆命题）√

定理14：$\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ √

定理15：$\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ √

定理16：$\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$（反证法）√

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ （反证法）√