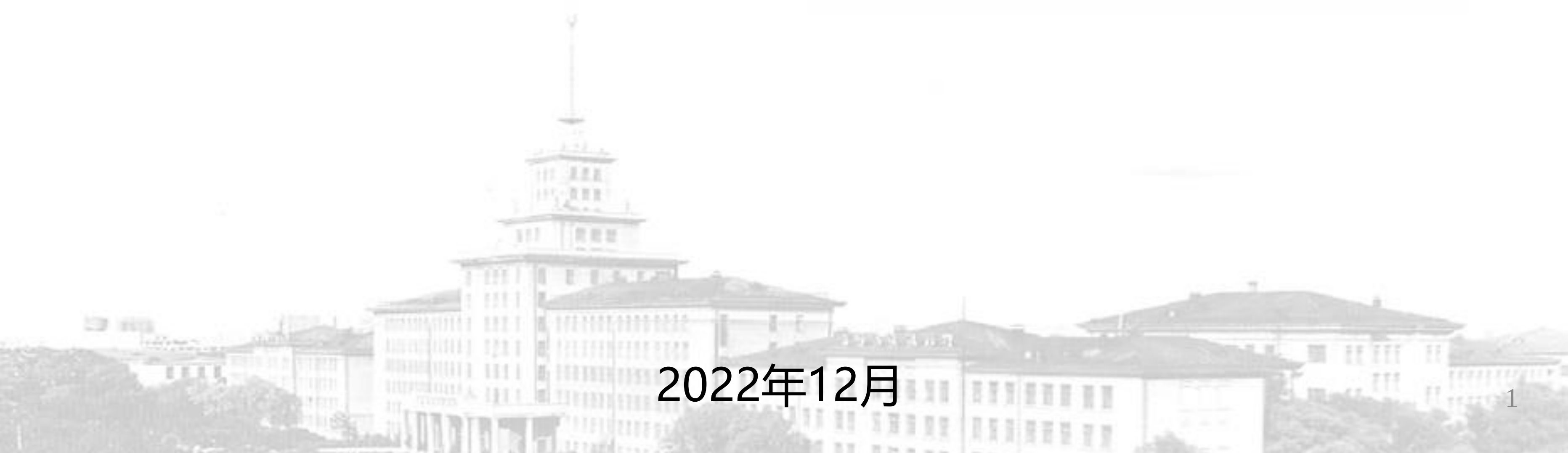
第12讲 自然演绎系统

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院



2022年12月

自然演绎系统ND的语言部分

字母表是集合:

$$\Sigma = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$$

注释：

（1）三个部分构成：助记符 + 联结词 + $Atom(L^p)$。

（2）$\{p, q, r, p_1, p_2, \cdots\}$ 就是 $Atom(L^p)$。

（3）$\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$是联结词。

（4）$\{(,)\}$是助记符。目的是体现公式的层次感。

自然演绎系统ND的语言部分

字母表：$\Sigma = \{(,), \neg, \wedge, \vee, \longrightarrow, \longleftrightarrow, p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots\}$

助记符+完备联结词组+ $Atom(L^p)$

ND的公式（递归定义）：

（1）$p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots$为（原子）公式。

（2）如果 A, B 是公式，那么$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B)$也是公式。

（3）只有（1）和（2）确定的Σ^*的字符串才是公式。**（有限次）**在不产生歧义的情况下，公式中最外层的括号可以省略。

自然演绎系统ND中的公理

公理模式：

$$\Gamma \cup \{A\} \vdash A \ (\in)$$

注释：

（1）ND中只有这一条公理

（2）Γ代表的是ND中的公式集合

（3）A代表的是ND中的公式

（4）该公理实际上表示了一个公理模板

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

1、推理规则1：假设引入规则，出自重言式$B \to (A \to B)$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B} \quad (+)$$

推理规则1的PC证明：

证明：

- 由$\Gamma \vdash B$，则可得以Γ为前提对$A \to B$的如下演绎序列：

$$B，B \to (A \to B)，A \to B$$

- 从而$\Gamma \vdash A \to B$，再由演绎定理知$\Gamma; A \vdash B$。

演绎定理： 对PC中的任意公式集合Γ和公式A, B, $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{\mathrm{PC}} B$当且仅当$\Gamma \vdash_{\mathrm{PC}} A \to B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

2、推理规则2：假设消除规则，出自重言式$\neg A \to (A \to B)$

$$\frac{\Gamma; A \vdash B\,,\quad \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad (-)$$

推理规则2的PC证明：

证明： 由$\Gamma; A \vdash B$，$\Gamma; \neg A \vdash B$，根据演绎定理知：

$$\Gamma \vdash A \to B,\ \Gamma \vdash \neg A \to B$$

- 可构造以Γ为前提的如下演绎序列：
  - （1）$A \to B$ 已知条件
  - （2）$(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ 定理13
  - （3）$\neg B \to \neg A$ （1）和（2）用rmp分离规则
  - （4）$(\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ 定理14
  - （5）$\neg A \to B$ 已知条件
  - （6）$\neg B \to A$ （5）和（4）用rmp分离规则
  - （7）$(\neg B \to A) \to ((\neg B \to \neg A) \to B)$ 定理16
  - （8）$(\neg B \to \neg A) \to B$ （6）和（7）用rmp分离规则
  - （9）B （3）和（8）用rmp分离规则
- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

3、**推理规则3**：析取引入规则，出自重言式$A \to A \vee B, B \to A \vee B$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B},\ \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\quad (\vee +)$$

推理规则3的PC证明：

定理19：$\vdash A \to A \vee B$，其中$A \vee B$定义为$\neg A \to B$

证明：

- 由$\Gamma \vdash A$可以得到以Γ为前提的如下演绎序列：

$$A,\ A \to A \vee B,\ A \vee B$$

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash A \vee B$
- 由$\Gamma \vdash B$可以得到以Γ 为前提的如下演绎序列：

$$B,\ B \to A \vee B,\ A \vee B$$

- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash A \vee B$

定理20：$\vdash A \to B \vee A$，其中$A \vee B$定义为$\neg A \to B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

4、**推理规则4**：析取消除规则，出自重言式$(A \vee B) \wedge (A \to C) \wedge (B \to C) \to C$

$$\frac{\Gamma;A\vdash C,\ \Gamma;B\vdash C,\ \Gamma\vdash A\vee B}{\Gamma\vdash C}\ (\vee -)$$

推理规则4的PC证明：

定理22: $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

证明：

- 由$\Gamma; A \vdash C$和$\Gamma; B \vdash C$，根据演绎定理知：

$$\Gamma \vdash A \to C，\ \Gamma \vdash B \to C$$

- 可以构造以Γ 为前提的如下演绎序列：
  （1） $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C))$ 定理22二难推理
  （2） $A \to C$ 已知条件
  （3） $(B \to C) \to (A \vee B \to C)$ （2）和（1）用rmp分离规则
  （4） $B \to C$ 已知条件
  （5） $A \vee B \to C$ （4）和（3）用rmp分离规则
  （6） $A \vee B$ 已知条件
  （7） C （6）和（5）用rmp分离规
- 从上述演绎序列可知$\Gamma \vdash C$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

5、**推理规则5**：合取引入规则，出自重言式$A \to (B \to A \land B)$

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \land B} \quad (\land +)$$

推理规则5的PC证明：

证明：

- 由$\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B$，可以构造以$\Gamma$为前提的如下演绎序列：

(1) A 已知条件

(2) B 已知条件

(3) $A \to (B \to A \land B)$ 定理26

(4) $B \to A \land B$ (1) 和 (3) 用rmp分离规则

(5) $A \land B$ (2) 和 (4) 用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知，$\Gamma \vdash A \land B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

6、推理规则6：合取消除规则，出自重言式$A \wedge B \rightarrow A, A \wedge B \rightarrow B$

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \quad (\wedge -)$$

推理规则6的PC证明:

证明:

- 由$\Gamma \vdash A \wedge B$，可以构造以Γ为前提的如下演绎序列:

  (1) $A \wedge B$ 已知条件

  (2) $A \wedge B \rightarrow A$ 定理24

  (3) A （1）和（2）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知，$\Gamma \vdash A$
- 由$\Gamma \vdash A \wedge B$，也可以构造以Γ 为前提的如下演绎序列:

  (1) $A \wedge B$ 已知条件

  (2) $A \wedge B \rightarrow B$ 定理25

  (3) B （1）和（2）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知，$\Gamma \vdash B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

7、**推理规则7**：蕴涵引入规则

$$\frac{\Gamma;A\vdash B}{\Gamma\vdash A\to B}\quad(\to +)$$

推理规则7的PC证明：

证明： 由$\Gamma;A\vdash B$，根据演绎定理知$\Gamma\vdash A\to B$。

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

8、**推理规则8**：蕴涵消除规则

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \rightarrow B}{\Gamma \vdash B} \quad (\rightarrow -)$$

推理规则8的PC证明：

证明：

- 由$\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash A \rightarrow B$可以构造以$\Gamma$为前提的如下演绎序列：

  （1）A 已知条件

  （2）$A \rightarrow B$ 已知条件

  （3）B （1）和（2）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知，$\Gamma \vdash B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

9、推理规则9：¬引入规则

$$\frac{\Gamma;A\vdash B,\ \Gamma;A\vdash\neg B}{\Gamma\vdash\neg A}\ (\neg+)$$

推理规则9的PC证明：

证明：

- 由$\Gamma;A\vdash B$，$\Gamma;A\vdash\neg B$根据演绎定理知：

$$\Gamma\vdash A\to B,\ \Gamma\vdash A\to\neg B$$

- 可以构造以Γ 为前提的如下演绎序列：
  - （1）$A\to B$ 已知条件
  - （2）$A\to\neg B$ 已知条件
  - （3）$(A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$ 定理17
  - （4）$(A\to\neg B)\to\neg A$ （1）和（3）用rmp分离规则
  - （5）$\neg A$ （2）和（4）用rmp分离规则
- 从上述演绎序列可知，$\Gamma\vdash\neg A$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

10、**推理规则10**： ¬消除规则，出自重言式 $A \to (\neg A \to B)$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \quad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} \ (\neg -)$$

推理规则10的PC证明：

证明：

- 由$\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A$，构造以$\Gamma$为前提的如下演绎序列：

  （1） A 已知条件

  （2） $\neg A$ 已知条件

  （3） $A \to (\neg A \to B)$定理7

  （4） $\neg A \to B$ （1）和（3）用rmp分离规则

  （5） B （2）和（4）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知，$\Gamma \vdash B$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

11、**推理规则11**： ¬¬引入规则，出自重言式$A \to \neg\neg A$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \neg\neg A}\ (\neg\neg +)$$

推理规则11的PC证明:

证明:

- 由$\Gamma \vdash A$构造以Γ为前提的如下演绎序列:

  (1) A 已知条件

  (2) $A \to \neg\neg A$ 定理12

  (3) $\neg\neg A$ (1) 和 (2) 用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知，$\Gamma \vdash \neg\neg A$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

12、**推理规则12**： ¬¬消除规则，出自重言式$\neg\neg A \to A$

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A} \quad (\neg\neg-)$$

推理规则12的PC证明：

证明：

- 由$\Gamma \vdash A$构造以Γ为前提的如下演绎序列：

  （1）$\neg\neg A$ 已知条件

  （2）$\neg\neg A \to A$ 定理10

  （3）A （1）和（2）用rmp分离规则

- 从上述演绎序列可知，$\Gamma \vdash A$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

13、**推理规则13**： 等价引入规则，出自↔的定义

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \quad \Gamma \vdash B \rightarrow A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B} \quad (\leftrightarrow +)$$

推理规则13的PC证明：

证明：根据↔的定义而得

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则：共有14条推理规则

14、**推理规则14**：等价消除规则，出自↔的定义

$$\frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash A \to B}, \quad \frac{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}{\Gamma \vdash B \to A} \quad (\leftrightarrow -)$$

推理规则14的PC证明：

证明：根据↔的定义而得

自然演绎系统ND的推理规则

0、 公理模式： $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ (∈)

1、 推理规则1： 假设引入规则， $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \cup \{A\} \vdash B}$ (+)

2、 推理规则2： 假设消除规则， $\dfrac{\Gamma; A \vdash B,\ \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$ (−)

3、 推理规则3： 析取引入规则， $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$， $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$ (∨ +)

4、 推理规则4： 析取消除规则， $\dfrac{\Gamma; A \vdash C,\ \Gamma; B \vdash C,\ \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$ (∨ −)

5、 推理规则5： 合取引入规则， $\dfrac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$ (∧ +)

6、 推理规则6： 合取消除规则， $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$， $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$ (∧ −)

自然演绎系统ND的推理规则

7、推理规则7：→引入规则，$\dfrac{\Gamma;A\vdash B}{\Gamma\vdash A\to B}$ $(\to +)$

8、推理规则8：→消除规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A,\ \Gamma\vdash A\to B}{\Gamma\vdash B}$ $(\to -)$

9、推理规则9：¬引入规则，$\dfrac{\Gamma;A\vdash B,\ \Gamma;A\vdash\neg B}{\Gamma\vdash\neg A}$ $(\neg +)$

10、推理规则10：¬消除规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A,\ \Gamma\vdash\neg A}{\Gamma\vdash B}$ $(\neg -)$

11、推理规则11：¬¬引入规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash\neg\neg A}$ $(\neg\neg +)$

12、推理规则12：¬¬消除规则，$\dfrac{\Gamma\vdash\neg\neg A}{\Gamma\vdash A}$ $(\neg\neg -)$

13、推理规则13：↔ 引入规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A\to B,\ \Gamma\vdash B\to A}{\Gamma\vdash A\leftrightarrow B}$ $(\leftrightarrow +)$

14、推理规则14：↔ 消除规则，$\dfrac{\Gamma\vdash A\leftrightarrow B}{\Gamma\vdash A\to B}$，$\dfrac{\Gamma\vdash A\leftrightarrow B}{\Gamma\vdash B\to A}$ $(\leftrightarrow -)$

自然演绎系统ND的推理规则

推理规则2：假设消除规则， $\dfrac{\Gamma;A\vdash B,\ \Gamma;\neg A\vdash B}{\Gamma\vdash B}$ $(-)$

求证： $\neg A \to A \vdash_{ND} A$

证明思路:

1. $\neg A \to A, A \vdash A$ 公理 $\Gamma \cup \{A\} \vdash A\ (\in)$

2. $\neg A \to A, \neg A \vdash A$ rmp分离规则

3. $\neg A \to A \vdash A$ (1)(2)(−)

自然演绎系统ND的演绎和定理

定义：演绎结果和定理

在ND系统中称A为Γ的演绎结果，记为$\Gamma \vdash_{ND} A$，如果存在一个序列:

$$\Gamma_1 \vdash_{ND} A_1, \Gamma_2 \vdash_{ND} A_2, \ldots, \Gamma_m \vdash_{ND} A_m \ (\Gamma \vdash_{ND} A)$$

对任意的$i = 1,2,\ldots,m, \Gamma_i \vdash_{ND} A_i$ 都满足下列情况之一：

- $\Gamma_i \vdash_{ND} A_i$ 公理
- $\Gamma_i \vdash_{ND} A_i$ 是$\Gamma_j \vdash A_j (j < i)$
- $\Gamma_i \vdash_{ND} A_i$ 是$\Gamma_{j_1} \vdash_{ND} A_{j_1}$，$\Gamma_{j_2} \vdash_{ND} A_{j_2}, \ldots, \Gamma_{j_k} \vdash_{ND} A_{j_k} (j_1, j_2, \ldots, j_k < i)$使用推理规则导出

特别地，称A 为ND的定理，如果$\Gamma \vdash_{ND} A$，并且$\Gamma = \emptyset$。即$\vdash_{ND} A$。

自然演绎系统ND的基本定理

定理1：$\vdash_{ND} A \vee \neg A$

定理2：$\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

定理3：$\vdash_{ND} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

定理4：$\neg A \rightarrow B \vdash\dashv A \wedge \neg B$

定理5：$A \rightarrow B \vdash\dashv \neg A \vee B$

定理6：$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

定理7：PC的公理是ND的定理，即

（1）$\vdash_{ND}\ A \rightarrow (B \rightarrow A)$

（2）$\vdash_{ND}\ (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

（3）$\vdash_{ND}\ (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

定理1

定理1： $\vdash_{ND} A \vee \neg A$

证明：

1. $A \vdash A$ $(\in)$

公理模式： $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ $(\in)$

2. $A \vdash A \vee \neg A$ $(1)(\vee +)$

3. $\neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

4. $\neg A \vdash A \vee \neg A$ $(3)(\vee +)$

5. $\vdash A \vee \neg A$ $(2)(4)(-)$

推理规则3：析取引入规则， $\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$， $\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $(\vee +)$

推理规则2：假设消除规则， $\dfrac{\Gamma; A \vdash B,\ \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$ $(-)$

定理2

定理2：$\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

证明思路：

$(\leftrightarrow +)$

$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$　　$\vdash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

$(\rightarrow +)$

$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

$(\wedge +)$

$\neg(A \vee B) \vdash \neg A$　　$\neg(A \vee B) \vdash \neg B$

$(\neg +)$　　$(\neg +)$

$\neg(A \vee B); A \vdash ?$　　$\neg(A \vee B); B \vdash ?$

$\neg(A \vee B); A \vdash \neg ?$　　$\neg(A \vee B); B \vdash \neg ?$

$\neg(A \vee B); A \vdash (A \vee B)$

$\neg(A \vee B); A \vdash \neg(A \vee B)$

推理规则5：合取引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\wedge +)$$

推理规则7：→引入规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow +)$$

推理规则9：¬引入规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B,\ \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \quad (\neg +)$$

推理规则13：↔引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A \rightarrow B,\ \Gamma \vdash B \rightarrow A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B} \quad (\leftrightarrow +)$$

定理2

定理2： $\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

$\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$

$(\rightarrow +)$

$\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$

$(\wedge +)$

$\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ $\quad$ $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$

$(\neg +)$ $\quad$ $(\neg +)$

$\neg(A \vee B); A \vdash ?$ $\quad$ $\neg(A \vee B); B \vdash ?$

$\neg(A \vee B); A \vdash \neg ?$ $\quad$ $\neg(A \vee B); B \vdash \neg ?$

$\neg(A \vee B); A \vdash (A \vee B)$

$\neg(A \vee B); A \vdash \neg(A \vee B)$

证明：先证 $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$

1. $\neg(A \vee B), A \vdash A$ $\quad(\in)$
2. $\neg(A \vee B), A \vdash A \vee B$ $\quad(1)(\vee +)$
3. $\neg(A \vee B), A \vdash \neg(A \vee B)$ $\quad(\in)$
4. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ $\quad(2)(3)(\neg +)$
5. $\neg(A \vee B), B \vdash B$ $\quad(\in)$
6. $\neg(A \vee B), B \vdash A \vee B$ $\quad(5)(\vee +)$
7. $\neg(A \vee B), B \vdash \neg(A \vee B)$ $\quad(\in)$
8. $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$ $\quad(6)(7)(\neg +)$
9. $\neg(A \vee B) \vdash \neg A \wedge \neg B$ $\quad(4)(8)(\wedge +)$
10. $\vdash \neg(A \vee B) \rightarrow \neg A \wedge \neg B$ $\quad(9)(\rightarrow +)$

推理规则3：析取引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee +)$$

定理2

定理2：$\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

证明思路：

$(\leftrightarrow +)$

$\vdash \neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$　　　$\vdash \neg A \wedge \neg B \to \neg(A \vee B)$

$(\to +)$

$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

$(\neg +)$

$\neg A \wedge \neg B; A \vee B \vdash ?$　　　$\neg A \wedge \neg B; A \vee B \vdash \neg ?$

推理规则5：合取引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge +)$$

推理规则7：$\to$引入规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to +)$$

推理规则9：$\neg$引入规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B,\ \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg +)$$

推理规则13：$\leftrightarrow$引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A \to B,\ \Gamma \vdash B \to A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}\ (\leftrightarrow +)$$

公理模式：$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ (∈)

定理2

推理规则3：析取引入规则，$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$，$\dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}$ $(\vee +)$

定理2：$\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

推理规则4：析取消除规则，$\dfrac{\Gamma;A \vdash C,\ \Gamma;B \vdash C,\ \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}$ $(\vee -)$

证明：再证 $\vdash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$

11. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A$ (∈)
12. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A \wedge \neg B$ (∈)
13. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash \neg A$ (12)$(\wedge -)$
14. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, A \vdash A \wedge \neg A$ (11)(13)$(\wedge +)$
15. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash B$ (∈)
16. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg A \wedge \neg B$ (∈)
17. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash \neg B$ (16)$(\wedge -)$
18. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B, B \vdash A \wedge \neg A$ (15)(17)$(\neg -)$
19. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \vee B$ (∈)
20. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A \wedge \neg A$ (14)(18)(19)$(\vee -)$
21. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash A$ (20)$(\wedge -)$
22. $\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash \neg A$ (20)$(\wedge -)$
23. $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$ (21)(22)$(\neg +)$
24. $\vdash \neg A \wedge \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$ (24)$(\rightarrow +)$
25. $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (10)(24) $(\leftrightarrow +)$

推理规则5：合取引入规则，$\dfrac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}$ $(\wedge +)$

推理规则6：合取消除规则，$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}$，$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$ $(\wedge -)$

推理规则7：→引入规则，$\dfrac{\Gamma;A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$ $(\rightarrow +)$

推理规则9：¬引入规则，$\dfrac{\Gamma;A \vdash B,\ \Gamma;A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}$ $(\neg +)$

推理规则10：¬消除规则，$\dfrac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}$ $(\neg -)$

推理规则13：↔引入规则，$\dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow B,\ \Gamma \vdash B \rightarrow A}{\Gamma \vdash A \leftrightarrow B}$ $(\leftrightarrow +)$

定理3

定理3：$\vdash_{ND} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

证明：先证 $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$

(1) $\neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

(2) $\neg(A \wedge B), \neg A \vdash \neg A \vee \neg B$ $(1)(\vee +)$

(3) $\neg(A \wedge B), A, B \vdash A$ $(\in)$

(4) $\neg(A \wedge B), A, B \vdash B$ $(\in)$

(5) $\neg(A \wedge B), A, B \vdash A \wedge B$ $(3)(4)(\wedge +)$

(6) $\neg(A \wedge B), A, B \vdash \neg(A \wedge B)$ $(\in)$

(7) $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B$ $(5)(6)(\neg +)$

(8) $\neg(A \wedge B), A \vdash \neg A \vee \neg B$ $(7)(\vee +)$

(9) $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$ $(8)(2)(-)$

(10) $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B$ $(9)(\rightarrow +)$

公理模式： $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ $(\in)$

推理规则2：假设消除规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B,\ \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B} \quad (-)$$

推理规则3：析取引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee +)$$

推理规则5：合取引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\wedge +)$$

推理规则7：$\rightarrow$引入规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow +)$$

推理规则9：$\neg$引入规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B,\ \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A} \quad (\neg +)$$

公理模式：$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ $(\in)$ **定理3**

定理3：$\vdash_{ND} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

证明：再证 $\vdash \neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$

(11) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg A \vdash A \wedge B$ $(\in)$

(12) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg A \vdash A$ $(11)(\wedge -)$

(13) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

(14) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg A \vdash A \wedge \neg A$ $(12)(13)(\wedge +)$

(15) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg B \vdash A \wedge B$ $(\in)$

(16) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg B \vdash B$ $(15)(\wedge -)$

(17) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg B \vdash \neg B$ $(\in)$

(18) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B, \neg B \vdash A \wedge \neg A$ $(16)(17)(\neg -)$

(19) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash \neg A \vee \neg B$ $(\in)$

(20) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash A \wedge \neg A$ $(14)(18)(19)(\vee -)$

(21) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash A$ $(20)(\wedge -)$

(22) $\neg A \vee \neg B, A \wedge B \vdash \neg A$ $(20)(\wedge -)$

(23) $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$ $(21)(22)(\neg +)$

(24) $\vdash \neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$ $(23)(\rightarrow +)$

(25) $\vdash \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ $(10)(24)(\leftrightarrow +)$

推理规则4：析取消除规则，

$$\frac{\Gamma;A\vdash C,\ \Gamma;B\vdash C,\ \Gamma\vdash A\vee B}{\Gamma\vdash C}\ (\vee -)$$

推理规则5：合取引入规则，

$$\frac{\Gamma\vdash A,\ \Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\wedge B}\ (\wedge +)$$

推理规则6：合取消除规则，

$$\frac{\Gamma\vdash A\wedge B}{\Gamma\vdash A},\ \frac{\Gamma\vdash A\wedge B}{\Gamma\vdash B}\ (\wedge -)$$

推理规则7：→引入规则，

$$\frac{\Gamma;A\vdash B}{\Gamma\vdash A\rightarrow B}\ (\rightarrow +)$$

推理规则9：¬引入规则，

$$\frac{\Gamma;A\vdash B,\ \Gamma;A\vdash\neg B}{\Gamma\vdash\neg A}\ (\neg +)$$

推理规则10：¬消除规则，

$$\frac{\Gamma\vdash A,\ \Gamma\vdash\neg A}{\Gamma\vdash B}\ (\neg -)$$

推理规则13：↔引入规则，

$$\frac{\Gamma\vdash A\rightarrow B,\ \Gamma\vdash B\rightarrow A}{\Gamma\vdash A\leftrightarrow B}\ (\leftrightarrow +)$$

定理4

定理4: $\neg A \to B \vdash\dashv A \vee B$

证明： 先证$\neg A \to B \vdash_{ND} A \vee B$

1：$\neg A \to B, A \vdash A$ $(\in)$

2：$\neg A \to B, A \vdash A \vee B$ $(1)(\vee +)$

3：$\neg A \to B, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

4：$\neg A \to B, \neg A \vdash \neg A \to B$ $(\in)$

5：$\neg A \to B, \neg A \vdash B$ $(3)(4)(\to -)$

6：$\neg A \to B, \neg A \vdash A \vee B$ $(5)(\vee +)$

7：$\neg A \to B \vdash A \vee B$ $(2)(6)(-)$

公理模式： $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ $(\in)$

推理规则2：假设消除规则，

$$\frac{\Gamma;A\vdash B,\ \Gamma;\neg A\vdash B}{\Gamma\vdash B}\ (-)$$

推理规则3：析取引入规则，

$$\frac{\Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash A\vee B},\quad \frac{\Gamma\vdash B}{\Gamma\vdash A\vee B}\ (\vee +)$$

推理规则8：→消除规则，

$$\frac{\Gamma\vdash A,\ \Gamma\vdash A\to B}{\Gamma\vdash B}\ (\to -)$$

定理4

定理4:$\neg A \to B \vdash\dashv A \vee B$

证明: 再证$A \vee B \vdash_{ND} \neg A \to B$

1: $A \vee B, \neg A, A \vdash A$ $(\in)$

2: $A \vee B, \neg A, A \vdash \neg A$ $(\in)$

3: $A \vee B, \neg A, A \vdash B$ $(1)(2)(\neg -)$

4: $A \vee B, \neg A, B \vdash B$ $(\in)$

5: $A \vee B, \neg A \vdash A \vee B$ $(\in)$

6: $A \vee B, \neg A \vdash B$ $(3)(4)(5)(\vee -)$

7: $A \vee B \vdash \neg A \to B$ $(6)(\to +)$

公理模式: $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ $(\in)$

推理规则4: 析取消除规则,

$$\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} (\vee -)$$

推理规则7: →引入规则,

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} (\to +)$$

推理规则10: ¬消除规则,

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B} (\neg -)$$

定理5

定理5：$A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$

证明： 先证$A \to B \vdash \neg A \vee B$

(1) $A \to B, \neg A \vdash \neg A$ $\quad(\in)$

(2) $\boldsymbol{A \to B, \neg A \vdash \neg A \vee B}$ $\quad(1)\ (\vee +)$

(3) $A \to B, A \vdash A$ $\quad(\in)$

(4) $A \to B, A \vdash A \to B$ $\quad(\in)$

(5) $A \to B, A \vdash B$ $\quad(3)(4)(\to -)$

(6) $\boldsymbol{A \to B, A \vdash \neg A \vee B}$ $\quad(5)\ (\vee +)$

(7) $A \to B \vdash \neg A \vee B$ $\quad(6)(2)(-)$

公理模式： $\Gamma \cup \{A\} \vdash A\ (\in)$

推理规则2： 假设消除规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B,\ \Gamma; \neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (-)$$

推理规则3： 析取引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B},\quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee +)$$

推理规则8： 蕴涵消除规则

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\ (\to -)$$

定理5

定理5：$A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$

证明： 再证$\neg A \vee B \vdash A \to B$

公理模式： $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ $(\in)$

(1) $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash A$ $(\in)$

(2) $\neg A \vee B, A, \neg A \vdash \neg A$ $(\in)$

(3) $\neg \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}, \neg \boldsymbol{A} \vdash \boldsymbol{B}$ (1)(2)$(\neg -)$

(4) $\neg A \vee B, A, B \vdash B$ $(\in)$

(5) $\neg A \vee B, A \vdash \neg A \vee B$ $(\in)$

(6) $\neg A \vee B, A \vdash B$ (3)(4)(5)$(\vee -)$

(7) $\neg A \vee B \vdash A \to B$ (6) $(\to +)$

(8) $A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$

推理规则2：假设消除规则，

$$\frac{\Gamma;A \vdash B,\ \Gamma;\neg A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\ (-)$$

推理规则4：析取消除规则，

$$\frac{\Gamma;A \vdash C,\ \Gamma;B \vdash C,\ \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C}\ (\vee -)$$

推理规则7：→引 入 规 则，

$$\frac{\Gamma;A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to +)$$

推理规则10：¬消除 规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}\ (\neg -)$$

公理模式：$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ ($\in$)

定理6

定理6：$\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

证明：先证 $\vdash A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

1：$A \wedge (B \vee C), B \vdash B$ ($\in$)

2：$A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge (B \vee C)$ ($\in$)

3：$A \wedge (B \vee C), B \vdash A$ (2)($\wedge -$)

4：$A \wedge (B \vee C), B \vdash A \wedge B$ (3)(1)($\wedge +$)

5：$A \wedge (B \vee C), B \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (4)($\vee +$)

6：$A \wedge (B \vee C), C \vdash C$ ($\in$)

7：$A \wedge (B \vee C), C \vdash A \wedge (B \vee C)$ ($\in$)

8：$A \wedge (B \vee C), C \vdash A$ (7)($\wedge -$)

9：$A \wedge (B \vee C), C \vdash A \wedge C$ (6)(8)($\wedge +$)

10：$A \wedge (B \vee C), C \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (9)($\vee +$)

11：$A \wedge (B \vee C) \vdash A \wedge (B \vee C)$ ($\in$)

12：$A \wedge (B \vee C) \vdash B \vee C$ (11)($\wedge -$)

13：$A \wedge (B \vee C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (5)(10)(12)($\vee -$)

14：$\vdash A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (13)($\rightarrow +$)

推理规则3：析取引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}, \quad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \quad (\vee +)$$

推理规则4：析取消除规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash C, \Gamma; B \vdash C, \Gamma \vdash A \vee B}{\Gamma \vdash C} \quad (\vee -)$$

推理规则5：合取引入规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \quad (\wedge +)$$

推理规则6：合取消除规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}, \quad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \quad (\wedge -)$$

推理规则7：$\rightarrow$ 引 入 规 则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow +)$$

定理6

定理6： $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

证明： 再证 $\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$

15： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash A$ $(\in)$之上做$(\wedge -)$

16： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash B$ $(\in)$之上做$(\wedge -)$

17： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash B \vee C$ $(16)(\vee +)$

18： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge B \vdash A \wedge (B \vee C)$ $(15)(17)(\wedge +)$

19： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash A$ $(\in)$之上做$(\wedge -)$

20： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash C$ $(\in)$之上做$(\wedge -)$

21： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash B \vee C$ $(20)(\vee +)$

22： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C), A \wedge C \vdash A \wedge (B \vee C)$ $(19)(21)(\wedge +)$

23： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $(\in)$

24： $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$ $(18)(22)(23)(\vee -)$

25： $\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$ $(24)(\to +)$

26： $\vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \leftrightarrow A \wedge (B \vee C)$ $(14)(25)(\leftrightarrow +)$

定理7

定理7：PC的公理是ND的定理，即

(1) $\vdash_{ND}\ A \to (B \to A)$

(2) $\vdash_{ND}\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) $\vdash_{ND}\ (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

(1)：$\vdash A \to (B \to A)$

证明：

1：$A, B \vdash A$ $(\in)$

2：$A \vdash B \to A$ $(1)(\to +)$

3：$\vdash A \to (B \to A)$ $(2)(\to +)$

公理模式： $\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ $(\in)$

推理规则7：→引入规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad (\to +)$$

推理规则8：→消除规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B} \quad (\to -)$$

定理7 公理模式：$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ (∈)

定理7：PC的公理是ND的定理，即

(1) $\vdash_{ND}\ A \to (B \to A)$

(2) $\vdash_{ND}\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) $\vdash_{ND}\ (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

(2) ：$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

证明：

1：$A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A$ (∈)

2：$A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A \to B$ (∈)

3：$A \to (B \to C), A \to B, A \vdash A \to (B \to C)$ (∈)

4：$A \to (B \to C), A \to B, A \vdash B$ $(1)(2)(\to -)$

5：$A \to (B \to C), A \to B, A \vdash B \to C$ $(1)(3)(\to -)$

6：$A \to (B \to C), A \to B, A \vdash C$ $(4)(5)(\to -)$

7：$A \to (B \to C), A \to B \vdash A \to C$ $(6)(\to +)$

8：$A \to (B \to C) \vdash (A \to B) \to (A \to C)$ $(7)(\to +)$

9：$\vdash (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ $(8)(\to +)$

推理规则7：→引入规则，

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \quad (\to +)$$

推理规则8：→消除规则，

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B} \quad (\to -)$$

定理7 公理模式：$\Gamma \cup \{A\} \vdash A$ ($\in$)

定理7：PC的公理是ND的定理，即

(1) $\vdash_{ND}\ A \to (B \to A)$

(2) $\vdash_{ND}\ (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(3) $\vdash_{ND}\ (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

(3) ：$\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

证明：

1：$\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash B$ ($\in$)

2：$\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg A$ ($\in$)

3：$\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg A \to \neg B$ ($\in$)

4：$\neg A \to \neg B, B, \neg A \vdash \neg B$ (2)(3)($\to -$)

5：$\neg A \to \neg B, B \vdash \neg\neg A$ (1)(4)($\neg +$)

6：$\neg A \to \neg B, B \vdash A$ (5)($\neg\neg -$)

7：$\neg A \to \neg B \vdash B \to A$ (6)($\to +$)

8：$\vdash (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ (7)($\to +$)

推理规则7：→引入规则

$$\frac{\Gamma; A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to +)$$

推理规则8：→消除规则

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\ (\to -)$$

推理规则9：¬引入规则

$$\frac{\Gamma; A \vdash B,\ \Gamma; A \vdash \neg B}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg +)$$

推理规则10：¬消除规则

$$\frac{\Gamma \vdash A,\ \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash B}\ (\neg -)$$

推理规则12：¬¬消除规则

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\neg\neg -)$$

自然演绎系统ND的基本定理

定理1： $\vdash_{ND} A \vee \neg A$√

定理2： $\vdash_{ND} \neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$√

定理3： $\vdash_{ND} \neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$√

定理4:$\neg A \to B \vdash\dashv A \wedge \neg B$√

定理5： $A \to B \vdash\dashv \neg A \vee B$√

定理6： $\vdash A \wedge (B \vee C) \leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$√

定理7： PC的公理是ND的定理，即√

（1） $\vdash_{ND} A \to (B \to A)$

（2） $\vdash_{ND} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

（3） $\vdash_{ND} (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$