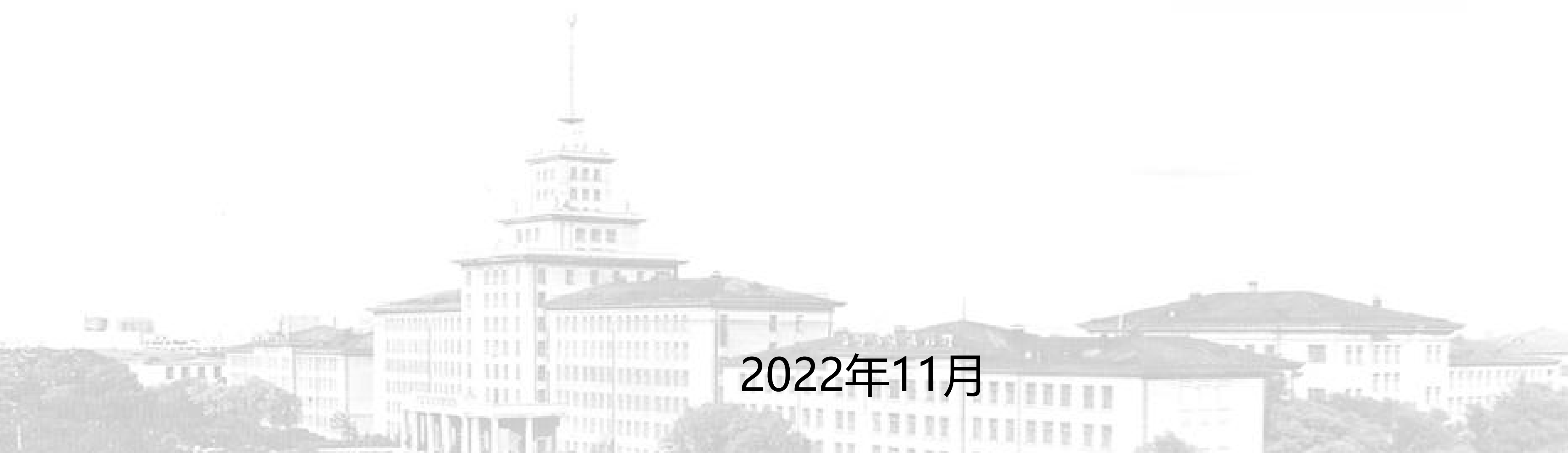
数理逻辑

第2讲 命题公式

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院



2022年11月

主要内容

1. 形式语言
2. 命题变项和指派（赋值）
3. 命题公式的定义
4. 命题公式的赋值与计算
5. 命题公式的分类
6. 命题公式的判定

形式语言的定义

- **字母表Σ**：字符（symbol）的集合，不能为空。例如：$\Sigma = \{0, 1\}$。
- **字符串l**：由字母表中的字符构成的**有限长的序列**称为字母表上的字符串（symbol string），所有字符串形成的集合记作Σ^*
  - $\Sigma^* = \{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000,\ 001,\ 010,\ \ldots\}$
- **字符串的长度$|l|$**：字符串中字符的个数。长度为0的字符串称为**空串**（empty string），ϵ表示。空串是任何字符的字符串，是一个特殊的字符
  - $l = 010 \in \Sigma^*,\ |l| = 3$
  - $\epsilon \in \Sigma^*,\ |\epsilon| = 0$
- **形式语言**：Σ^*的任何子集称为形式语言

形式语言的定义

- $\Sigma^* = \{0, 1\}^*$
- $l = 010 \in \Sigma^*$, $|l| = 3$
- $\epsilon \in \Sigma^*$, $|\epsilon| = 0$
- $m = 0001 \in \Sigma^*$, $|m| = 4$
- 定义$l \circ m = 0100001 \in \Sigma^*$，具有**封闭性**
- 任取$l \in \Sigma^*$，$l \circ \epsilon = \epsilon \circ l = l$，$\epsilon$为**单位元**
- 任取$l, m, k \in \Sigma^*$，$(l \circ m) \circ k = l \circ (m \circ k)$，具有**结合律**
- $(\Sigma^*, \circ)$构成代数系统，称为**半群**，ϵ-**半群**
- $(\Sigma^*, \circ)$无法构成群，因为不存在**乘法逆**

形式语言的例子

- 设字母表$\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$\Sigma^*$是由10个阿拉伯数字组成的所有十进位数的集合且包含空串ϵ和有限个“0”为前缀构成的字符串（如：00, 000, 0000, 001, 0010等）
  - $L_1 = \{0,5,10,15,20,25,30,35,\cdots\}$，表示可以被5整除的所有十进制数的集合。
  - $L_2 = \{0000,0001,0010,0011,0100,0101,0110,\cdots,1111\}$，表示由0和1构成的所有长度为4的序列的集合，可以看成是长度为4的所有二进制数的集合。
  - $L_3 = \{1,3,5,7,9,11,13,15,\cdots\}$，表示所有奇数的集合。
  - $L_4 = \{0,1,4,9,16,25,36,49,\cdots\}$，表示所有十进制的平方的集合。
- $L_1 - L_4$均是Σ^*的子集，故均为字母表Σ上的**形式语言**
- 所有形式语言形成的集合为2^{Σ^*}

命题变项和指派（赋值）

Definition（命题变项）

表示命题的变元称为命题变元或命题变项。命题变项的**集合**用$Atom(L^p)$表示。 **命题逻辑的字母表Σ**

Definition（指派或赋值）

任何一个映射$v: Atom(L^p) \to \{0,1\}$称为命题演算的一个指派或赋值（valuation）。并且对$p \in Atom(L^p)$，将$v(p)$记作p^v，自然有$p^v \in \{0,1\}$。

命题公式

Definition（命题公式）-递归定义

- $Atom(L^p)$中的元素是命题公式（命题变元是命题公式）
- 如果A是命题公式，那么$\neg A$也是命题公式
- 如果A, B是命题公式，那么$A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$都是命题公式
- 只有1，2，3确定的表达式才是命题公式

命题公式集合表示为$Form(L^p)$

例：判定$\neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r)$是否为命题公式

$\neg(p \rightarrow q)$ $\qquad$ $p \vee r$

$(p \rightarrow q)$ $\qquad$ p $\quad$ r

p $\quad$ q

语法分析树

$p, q, p \rightarrow q, r, p \vee r, \neg(p \rightarrow q), \neg(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r)$ 公式形成过程

命题公式

- 5个联结词¬, ∧ , ∨ , → , ↔的优先级:
  1. ¬否定
  2. ∧ , ∨ 合取，析取
  3. → , ↔ 蕴涵，等价
- 举例
  - $\neg p \to q \ = (\neg p) \to q \ \neq \neg(p \to q)$
  - $p \wedge q \to r = (p \wedge q) \to r \neq p \wedge (q \to r)$
  - $p \wedge q \vee r \ \neq (p \wedge q) \vee r \neq p \wedge (q \vee r)$ 无意义

$Atom(L^p)$ 是Σ的子集，还包括联结词
$Form(L^p)$是Σ^*的子集，是2^{Σ^*}的元素

弄真与弄假

Definition（弄真和弄假）

设v是一个指派（赋值），$A \in Form(L^p)$是任意一个命题公式，若在v下，公式A的值为真，则称**v弄真A**，记作$v(A) = 1$或$A^v = 1$；若在v下，公式A的值为假，则称**v弄假A**，记作$v(A) = 0$或$A^v = 0$

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

对于复合公式，先用语法分析树拆分，形成联结词联结的公式的真假

命题公式的赋值

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

- 命题公式A的指派A^v递归的定义如下：$v: Atom(L^p) \to \{0,1\}$

① 如果A是原子公式p，则$A^v = p^v$且$p^v \in \{0,1\}$

② 如果$\boldsymbol{A} = \neg \boldsymbol{B}$且$B^v \in \{0,1\}$，则当$B^v = 1$时，规定$A^v = 0$；当$B^v = 0$时，规定$A^v = 1$；

③ 如果$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \wedge \boldsymbol{C}$且$B^v, C^v \in \{0,1\}$，那么当$B^v = 1$且$C^v = 1$时，规定$A^v = 1$；当$B^v = 0$或$C^v = 0$时，规定$A^v = 0$；

④ 如果$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \vee \boldsymbol{C}$且$B^v, C^v \in \{0,1\}$，那么当$B^v = 0$且$C^v = 0$时，规定$A^v = 0$；当$B^v = 1$或$C^v = 1$时，规定$A^v = 1$；

⑤ 如果$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$且$B^v, C^v \in \{0,1\}$，那么当$B^v = 1$且$C^v = 0$时，规定$A^v = 0$；当$B^v = 0$或$C^v = 1$时，规定$A^v = 1$；

⑥ 如 果 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \leftrightarrow \boldsymbol{C}$ 且 $B^v, C^v \in \{0,1\}$， 那 么 当 $B^v = C^v$ 时， 规 定 $A^v = 1$； 当 $B^v \neq C^v$时，规定$A^v = 0$。

命题赋值的计算

- 设$A, B \in Form(L^p)$，把0,1看作是通常的实数，并按照通常的实数做运算，那么

  ① $(\neg A)^v = 1 - A^v$

  ② $(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$

  ③ $(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$

  ④ $(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{1} - \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{v}}$

  ⑤ $(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$

A^v	B^v	$(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{v}}$	$\boldsymbol{1} - \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{v}}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

- 赋值的计算与手工列出真值表会得到同样的结果

公式赋值的性质

命题：真值的确定性

对任意一个赋值v，和任意的命题公式$A \in Form(L^p)$，都有$A^v \in \{0,1\}$。

证明

- 设v是任意一个赋值，$A \in Form(L^p)$是一个命题公式
- 如果$A \in Atom(L^p)$是原子公式，由于v是一个赋值，所以它是从集合$Atom(L^p)$到集合$\{0,1\}$的映射，故$A^v \in \{0,1\}$
- 如果$A = \neg B$，由**第二数学归纳法**知，$B^v \in \{0,1\}$，从而$A^v = 1 - B^v \in \{0,1\}$.
- 如 果 $A = B \vee C$，$A = B \wedge C$，$A = B \rightarrow C$，$A = B \leftrightarrow C$怎么证?(作业)

公式赋值的性质

- 第一数学归纳法可以概括为以下三步：
  - (1)归纳奠基：证明$n=1$时命题成立；
  - (2)归纳假设：假设$n=k$时命题成立；
  - (3)归纳递推：由归纳假设推出$n=k+1$时命题也成立。
- 第二数学归纳法是设有一个与自然数n有关的命题，如果：
  - (1)当$n=1$时，命题成立；
  - (2)假设当$n \leqslant k$时命题成立，由此可推得当$n=k+1$时，命题也成立。
  - 那么，命题对于一切自然数n来说都成立。

命题公式的分类

- 设$A \in Form(L^p)$,则
  - 若对任意的赋值v，都有$A^v = 1$，则称A为**永真式或重言式**（tautology）
  - 若对任意的赋值v，都有$A^v = 0$，则称A为**永假式或矛盾式**（contradiction），即不可满足的
  - 若存在赋值v，使得$A^v = 1$，则称A为**可满足的**（satisfiable）

永真式的判定

- 判定$A \to (B \to A)$为永真式。

① 真值表方法

A	B	$B \to A$	$A \to (B \to A)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

蕴涵式后件为真，必有蕴涵式为真

$$(\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{v}} = \mathbf{1} - \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{B}^{\boldsymbol{v}}$$

② 计算方法

对任意的赋值$v: Atom(L^p) \to \{0,1\}$，我们有

$$\begin{aligned}(A \to (B \to A))^v &= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + A^v B^v) \\ &= 1 - A^v B^v + (A^v)^2 B^v \\ &= 1 - A^v B^v + A^v B^v = 1\end{aligned}$$

③ 反证法

假设存在v，使得$(A \to (B \to A))^v = 0$

则$\boldsymbol{A^v = 1}$，$(B \to A)^v = 0$，

则必有$B^v = 1$，$\boldsymbol{A^v = 0}$，矛盾

永假式的判定

- 判定$\neg(A \to A)$为永假式。

① 真值表方法

A	$A \to A$	$\neg(A \to A)$
0	1	0
1	1	0

② 计算方法

对任意的赋值$v: Atom(L^p) \to \{0,1\}$，我们有

$$(\neg A)^v = 1 - A^v$$

$$\boldsymbol{(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v}$$

$$\begin{aligned}\big(\neg(A \to A)\big)^v &= 1 - (A \to A)^v \\ &= 1 - (1 - A^v + A^v \cdot A^v) \\ &= A^v - A^v A^v \\ &= 0\end{aligned}$$

可满足公式的判定

- 判定$(A \to \neg A) \to A$为可满足的。

① 真值表方法　　　　**公式的形成过程**

A	$\neg A$	$A \to \neg A$	$(A \to \neg A) \to A$
0	1	1	0
1	0	0	1

② 计算方法

对任意的赋值v: $Atom(L^p) \to \{0,1\}$，欲使$\big((A \to \neg A) \to A\big)^v = 1$

只需要$1 - (A \to \neg A)^v + (A \to \neg A)^v \cdot A^v = 1$

只需要$(A \to \neg A)^v(1 - A^v) = 0$

只需要$A^v = 1$

小结

- 命题变元和命题公式
- 命题公式的三种计算方法（真值表、计算、反证）
- 命题公式三种类型（永真式、永假式和可满足式）及判定