数理逻辑

第14讲 一阶谓词逻辑演算形式系统-I

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年12月

语言部分

FC的字母表：$\sum = \boldsymbol{L_v} \cup \boldsymbol{L_a} \cup \boldsymbol{L_f} \cup \boldsymbol{L_p} \cup \boldsymbol{L_l}$

- 个体变元L_v：$v_1, v_2, v_3, \cdots$ （简称变元）
- 个体常元L_a：$a_1, a_2, a_3, \cdots$ （简称常元）
- 函词L_f：
  - $f_1^{(1)}, f_2^{(1)}, f_3^{(1)}, \cdots$ （一元函词符号）
  - $f_1^{(2)}, f_2^{(2)}, f_3^{(2)}, \cdots$ （二元函词符号）

    $\cdots$
  - $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, f_3^{(n)}, \cdots$ （n元函词符号）
- 谓词L_p：
  - $P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, P_3^{(1)}, \cdots$ （一元谓词符号）
  - $P_1^{(2)}, P_2^{(2)}, P_3^{(2)}, \cdots$ （二元谓词符号）

    $\cdots$
  - $P_1^{(n)}, P_2^{(n)}, P_3^{(n)}, \cdots$ （n元谓词符号）
- 助记符以及联结词 L_l：
  - 联结词$\to, \neg$
  - 量词：$\forall$
  - 助记符：(,)

FC中的项和公式

$\mathcal{L}(FC)$的项:

（1）变元和常元是项。

（2）对任意正整数n，如果$t_1, t_2, \cdots, t_n$为项，$f^{(n)}$为n元函词，那么$f^{(n)} t_1 t_2 \cdots t_n$也为项。

（3）除了有限次数使用（1）和（2）得到的表达式以外，其余的都不是项。

$\mathcal{L}(FC)$的谓词公式:

（1）对任意正整数n，如果$t_1, t_2, \cdots, t_n$为项，$P^{(n)}$为n元谓词符号，那么$P^{(n)} t_1 t_2 \cdots t_n$为公式，并称之为原子公式。

（2）若A, B为公式，v为任意的变元符号，那么$(\neg A), (A \rightarrow B), (\forall v A)$都是公式。

（3）只有有限次数的使用（1）和（2）的表达式才是谓词公式。

FC中的项和公式

关于$\mathcal{L}(FC)$的说明:

（1）这里的符号是抽象的，并无特别的意义。

（2）其它的联结词可以用$\rightarrow, \neg$来表示，存在量词$\exists$可以用$\neg, \forall$来表示。

$$\exists(x)P(x) \Leftrightarrow \neg\forall(x)\neg P(x)。$$

（3）$\mathcal{L}(FC)$中没有等词 =，带有等词的以后展开。

（4）不含任何函词的系统称为纯谓词演算系统（$L_f = \phi$）。

（5）在$\mathcal{L}(FC)$中引入命题符号，或者0元谓词符号作为命题符号，这样命题演算系统PC 就成了FC 的一个子系统。

约定:

（1）为了增加可读性，用$f^{(n)}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$代替$f^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$，用$P^{(n)}(t_1, t_2, \cdots, t_n)$代替$P^{(n)}t_1t_2\cdots t_n$。

（2）和PC 中一样，最外层的括号可以省略。并且$\forall v(\exists v)$的优先级高于所有的二元联结词，和$\neg$同级。

与FC的项和公式相关的一些基本概念

量词的辖域:

公式A称为量词$\forall v(\exists v)$的辖域，如果$\forall v(\exists v)$与A毗连并且A的任何真截断（如果$A = ww', w' \neq \epsilon$，那么我们称$w$为$A$的真截断）都不是公式。简单来说，辖域就是量词的作用范围。

例:

$$(\forall x)(P(x,y) \rightarrow Q(x,y)) \rightarrow R(x,y)$$

约束变元和自由变元:

公式A中，变元v的某个出现叫做约束的出现，如果该变元为$\forall v(\exists v)$的指导变元，并且出现在$\forall v(\exists v)$的辖域内。否则该变元的出现为自由的出现。

A中约束出现的变元称为约束变元，自由出现的变元称为自由变元。

与FC的项和公式相关的一些基本概念

可代入： 设y为谓词公式A中的自由变元，且项t中不含A中的约束变元符（若有可易名），则称t对v是可代入的。

例：

$$(\forall x)(P(x,y) \to Q(x,y)) \to R(x,y)$$

将自由变元y用项$t = f(z)$代入

$$(\forall x)(P(x,f(z)) \to Q(x,f(z))) \to R(x,f(z))$$

与FC的项和公式相关的一些基本概念

代入：对公式A中的变元v的所有自由出现都代换为项t（t对A中的v是可代入的）的过程称为代入。代换后得到的公式A的代入实例记为A_t^v。如果A中没有v的自由出现则A_t^v就是A。用记号$A_{t_1,t_2,\cdots,t_n}^{v_1,v_2,\cdots,v_n}$表示对$A$中的变元$v_1,v_2,\cdots,v_n$同时做代入，$v_i$代入为$t_i$，它与顺次代入$(\cdots((A_{t_1}^{V_1})_{t_2}^{V_2})_{t_3}^{V_3}\cdots)_{t_n}^{V_n}$是不同的。

$$A=(\forall x)(P(x,y)\to Q(x,y))\to R(x,y)$$

将y用$f(z)$代入

$$A_{f(z)}^{y}=(\forall x)(P(x,f(z))\to Q(x,f(z)))\to R(x,f(z))$$

$$A=(\forall x)(P(x,y)\to Q(x,y))\to(\forall y)R(x,y)$$

$$A_{f(z)}^{y}=(\forall x)(P(x,f(z))\to Q(x,f(z)))\to(\forall y)R(x,y)$$

与FC的项和公式相关的一些基本概念

代入：对公式A中的变元v的所有自由出现都代换为项t（t对A中的v是可代入的）的过程称为代入。代换后得到的公式A的代入实例记为A_t^v。如果A中没有v的自由出现则A_t^v就是A。用记号$A_{t_1,t_2,\cdots,t_n}^{v_1,v_2,\cdots,v_n}$表示对$A$中的变元$v_1,v_2,\cdots,v_n$同时做代入，$v_i$代入为$t_i$，它与顺次代入$(\cdots((A_{t_1}^{V_1})_{t_2}^{V_2})_{t_3}^{V_3}\cdots)_{t_n}^{V_n}$是不同的。

$$A=(\forall y)\,R(x,y)$$

将y用$f(z)$代入

$$A_{f(z)}^{y}=[(\forall y)\,R(x,y)]_{f(z)}^{y}=(\forall y)\,R(x,y)$$

$$\left((P(x,y))_y^x\right)_x^y=[P(y,y)]_x^y=P(x,x)$$

$$(P(x,y))_{y,x}^{x,y}=P(y,x)$$

与FC的项和公式相关的一些基本概念

代入： 对公式A中的变元v的所有自由出现都代换为项t（t对A中的v是可代入的）的过程称为代入。代换后得到的公式A的代入实例记为A_t^v。如果A中没有v的自由出现则A_t^v就是A。用记号$A_{t_1,t_2,\cdots,t_n}^{v_1,v_2,\cdots,v_n}$表示对$A$中的变元$v_1,v_2,\cdots,v_n$同时做代入，$v_i$代入为$t_i$，它与顺次代入$(\cdots((A_{t_1}^{V_1})_{t_2}^{V_2})_{t_3}^{V_3}\cdots)_{t_n}^{V_n}$是不同的。

子公式： 公式B称为公式A的子公式，如果A形如wBw'的符号串，其中w,w'是符号串，B是公式。当w和w'中有一个不是空串，我们就把B称为A的真子公式。

与FC的项和公式相关的一些基本概念

全称化： 设$v_1, v_2, \cdots, v_n$为公式A的所有的自由变元，那么公式$\forall v_{i_1} \forall v_{i_2} \cdots \forall v_{i_r} A$称为$A$的全称化。其中$1 \le r \le n, 1 \le i_1, i_2, i_r \le n$，公式$\forall v_1 \forall v_2 \cdots \forall v_n A$称为公式$A$的全称封闭式。

当A无自由变元时，A的全称封闭式就是它本身。不含自由变元的公式称为命题，FC中的公式是命题当且仅当它是一个全称封闭式。

一阶谓词演算系统FC的推理部分

FC的理论部分称为一阶逻辑，用$\mathcal{J}$(FC)表示。

公理集合，由下列公式及其所有的全称化组成:

A_1: $A \to (B \to A)$

A_2: $A \to (B \to A) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

A_4: $\forall v A \to A_t^v$ （t对A中的变元v可代入） $\forall v A \to A_a^v$

A_5: $\forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$

A_6: $A \to \forall v A$ （v在A中无自由出现）

推理规则

$$r_{mp}: \frac{A\,,A \to B}{B}$$

FC中的定理，证明以及演绎，演绎结果的定义与*PC*中是一样的！

一阶谓词演算系统FC的推理部分

FC的理论部分称为一阶逻辑，用$\mathcal{J}(\mathrm{FC})$表示。

公理集合，由下列公式及其所有的全称化组成：

A_1: $A \to (B \to A)$

A_2: $A \to (B \to A) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

A_4: $\forall v A \to A_t^v$ （t对A中的变元v可代入）

A_5: $\forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$

A_6: $A \to \forall v A$ （v在A中无自由出现）

$P(u,v) \to (Q(u,v) \to P(u,v))$ A_1

$\forall v(P(u,v) \to \left(Q(u,v) \to P(u,v)\right))$ A_1，全称化

$\forall u \forall v(P(u,v) \to \left(Q(u,v) \to P(u,v)\right))$ A_1，全称封闭式

一阶谓词演算系统FC的推理部分

FC的理论部分称为一阶逻辑，用$\mathcal{J}(\mathrm{FC})$表示。

公理集合，由下列公式及其所有的全称化组成：

公理的全称化
也是公理

A_1: $A \to (B \to A)$

A_2: $A \to (B \to A) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

A_3: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

A_4: $\forall v A \to A_t^v$ （t对A中的变元v可代入）

A_5: $\forall v(A \to B) \to (\forall v A \to \forall v B)$

A_6: $A \to \forall v A$ （v在A中无自由出现）

推理规则

$$r_{mp}: \frac{A\,,A \to B}{B}$$

FC中的定理，证明以及演绎，演绎结果的定义与*PC*中是一样的！

FC的基本定理

定理1（定理5.2.1）：对于FC中的任何公式A，变元v:

$$\vdash_{FC} \forall vA \to A$$

定理2（定理5.2.2）：对于FC中的任何公式A，变元v:

$$\vdash_{FC} A \to \neg\forall v\neg A$$ （也即$\vdash_{\mathrm{FC}} A \to \exists vA$）

定理3（定理5.2.3）：对于FC中的任何公式A，变元v:

$$\vdash_{FC} \forall vA \to \exists vA$$

定理4（定理5.2.4）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式A，变元v:

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

定理5（定理5.2.5）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v:

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall vA$

定理1

定理5.2.1：对于FC中的任何公式A，变元v:$\vdash_{FC} \forall vA \to A$

证明：$\forall vA \to A_t^v$（公理4）

$\forall vA \to A$（是公理4的一种特例，即令$t = v$，则$A_t^v = A_v^v = A$）

A_4: $\forall vA \to A_t^v$ （t对A中的变元v可代入）

定理2

定理5.2.2：对于FC中的任何公式A，变元v：

$$\vdash_{FC} A \to \neg\forall v \neg A$$ （也即$\vdash_{FC} A \to \exists v A$ ）

证明：

（1） $\forall v \neg A \to \neg A$ FC中定理1

（2） $(\forall v \neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\forall v \neg A)$ PC中定理15

（3） $A \to \neg\forall v \neg A$ (1)(2)用rmp分离规则

（4） $A \to \exists v A$

量词之间的关系：

$\forall x P(x) = \neg\exists x \neg P(x)$ （不存在个体x不满足性质P）

$\exists x P(x) = \neg\forall x \neg P(x)$ （不是所有的个体x不满足性质P）

$\neg\forall x P(x) = \exists x \neg P(x)$

（不是所有个体x都满足性质P） （存在个体x不满足性质P）

$\neg\exists x P(x) = \forall x \neg P(x)$

（没有存在个体x 满足性质P） （所有的个体x 不满足性质P ）

定理3

定理5.2.3：对于FC中的任何公式A，变元v：

$$\vdash_{FC} \forall vA \to \exists vA$$

证明：

（1）$\forall vA \to A$ FC中定理1

（2）$A \to \exists vA$ FC中定理2

（3）$\forall vA \to \exists vA$ (1)(2)用PC中三段论定理8

定理5.2.1：对于FC中的任何公式A，变元v:$\vdash_{FC} \forall vA \to A$

定理5.2.2：对于FC中的任何公式A，变元v：

$$\vdash_{FC} A \to \neg\forall v\neg A$$ （也即$\vdash_{FC} A \to \exists vA$）

定理4

定理5.2.4：（全称推广定理）对于FC中的任何公式A，变元v：

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

证明：设$A_1, A_2, \cdots, A_n (= A)$是FC中公式$A$的证明序列，对该证明序列的长度$n$用第二数学归纳法。

（1）当$n = 1$时，A只能是公理。

- 若v在A中有自由出现，那么$\forall vA$是A的全称化，$\forall vA$也是公理；
- 若v在A中无自由出现，则$A \to \forall vA$为公理6，那么由A和$A \to \forall vA$通过rmp分离规则，知$\forall vA$为定理。

（2）假设A的证明序列长度小于n时，结论成立

（3）则当A的证明序列长度为n时：

- 若A是公理，则仿照（1）的证明知$\forall vA$为定理。
- 若A_n（$= A$）为A_j $(j < n)$，则由归纳假设(2)知$\forall vA_j = \forall vA$为定理。
- 若A_n为$A_i, A_j (i, j < n)$分离而得，不妨设$A_j = A_i \to A$，则由归纳假设(2)知$\forall vA_i, \forall v(A_i \to A)$都是定理。再由公理5:$\forall v(A_i \to A) \to (\forall vA_i \to \forall vA)$，知$\forall vA_i \to \forall vA$为定理。再由$\forall vA_i$和$\forall vA_i \to \forall vA$使用分离规则，知$\forall vA$为定理。

定理5

定理5.2.5：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v：

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall vA$

证明：设$A_1, A_2, \cdots, A_n(= A)$是FC中公式$A$的演绎序列，对该演绎序列的长度$n$用归纳法。

（1）当$n = 1$时

- 若A是公理，则参照前面的定理证明知$\forall vA$是定理,从而$\Gamma \vdash \forall v\mathrm{A}$;
- 若$A \in \Gamma$，则v不在A中自由出现，$A \to \forall vA$为公理6，由rmp分离规则知$\Gamma \vdash \forall v\mathrm{A}$。

（2）假设A的演绎序列长度小于n时，结论成立

（3）当A的演绎序列长度为n时

- 若A是公理或$A \in \Gamma$,则仿照（1）的证明知$\Gamma \vdash \forall vA$。
- 若A_n为$A_j(j < n)$，则由归纳假设知$\Gamma \vdash \forall vA_j = \forall vA$。
- 若A_n为$A_i, A_j(i, j < n)$推得，不妨设$A_j = A_i \to A$，则由归纳假设$\Gamma \vdash \forall vA, \Gamma \vdash \forall v(A_i \to A)$。再由公理5: $\forall v(A_i \to A) \to (\forall vA_i \to \forall vA)$知$\Gamma \vdash \forall vA_i \to \forall vA$。由分离规则知$\Gamma \vdash \forall vA$。

FC的基本定理

定理1（定理5.2.1）：对于FC中的任何公式A，变元v:√

$$\vdash_{FC} \forall vA \rightarrow A$$

定理2（定理5.2.2）：对于FC中的任何公式A，变元v： √

$$\vdash_{FC} A \rightarrow \neg\forall v\neg A$$ （也即$\vdash_{\mathrm{FC}} A \rightarrow \exists vA$ ）

定理3（定理5.2.3）：对于FC中的任何公式A，变元v： √

$$\vdash_{FC} \forall vA \rightarrow \exists vA$$

定理4（定理5.2.4）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式A，变元v： √

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

定理5（定理5.2.5）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v： √

如果$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \vdash \forall vA$

例1

例5.2.1：若$\vdash A \to B$，且v在B中无自由出现，则：

$$\vdash \exists vA \to B$$

证明思路：

$\boxed{A \to B} \longrightarrow \boxed{\neg B \to \neg A} \longrightarrow \boxed{\forall v(\neg B \to \neg A)} \longrightarrow \boxed{\forall v \neg B \to \forall v \neg A}$

FC中公理5

PC中定理13

分离规则

FC中的（全称

推广）定理4

FC中公理6

$\boxed{\neg B}$

PC中定理14

分离规则

$\boxed{\neg \forall v \neg A \to B}$

定理4（定理5.2.4）：（全称推广定理）

对于FC中的任何公式A，变元v：√

如果$\vdash A$，那么$\vdash \forall vA$

A_5: $\forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$

A_6: $A \to \forall vA$ （v在A中无自由出现）

例1

例5.2.1：若$\vdash A \to B$，且v在B中无自由出现，则$\vdash \exists vA \to B$。

证明：

（1） $A \to B$ 已知定理

（2） $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ PC中定理13

（3） $\neg B \to \neg A$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4） $\forall v(\neg B \to \neg A)$ 对（1）用FC中的（全称推广）定理4

（5） $\forall v(\neg B \to \neg A) \to (\forall v \neg B \to \forall v \neg A)$ FC中公理5

（6） $\forall v \neg B \to \forall v \neg A$ （4）和（5）用rmp分离规则

（7） $\neg B \to \forall v \neg B$ 公理6

（8） $\neg B \to \forall v \neg A$ （6）和（7）用PC中的三段论定理8

（9） $(\neg B \to \forall v \neg A) \to (\neg \forall v \neg A \to B)$ PC中定理14

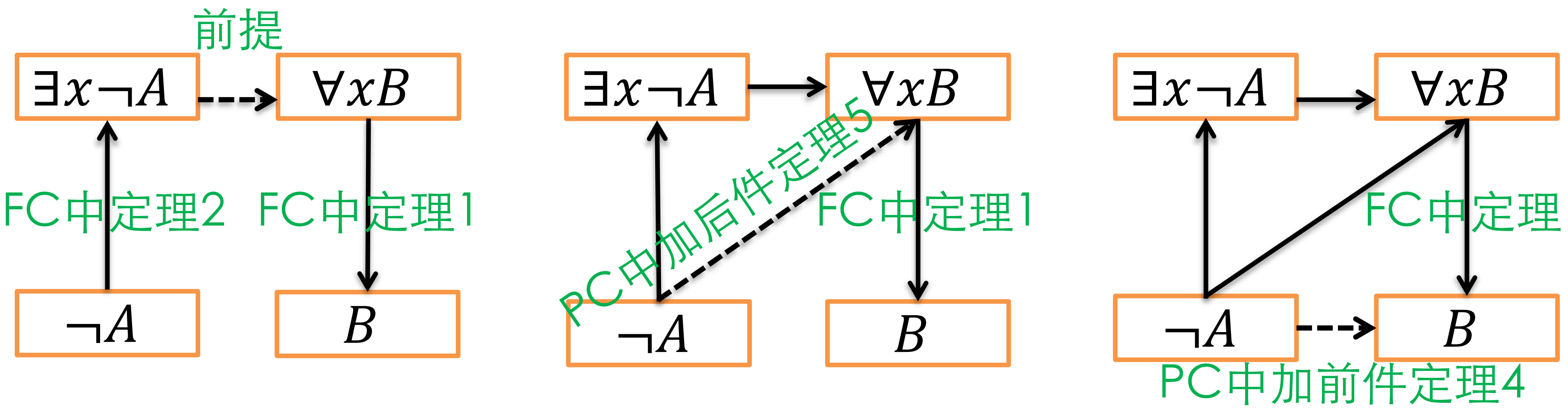
（10） $\neg \forall v \neg A \to B$ （8）和（9）用rmp分离规则

（11） $\exists vA \to B$ 定义式

例2

例5.2.2：$\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$

证明思路：



定理1（**定理5.2.1**）：对于FC中的任何公式A，变元v:√

$$\vdash_{FC} \forall v A \to A$$

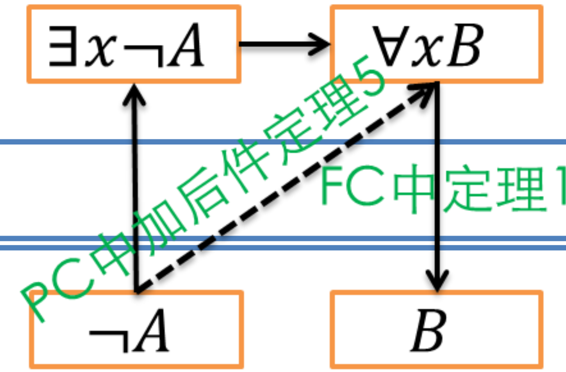
定理2（**定理5.2.2**）：对于FC中的任何公式A，变元v：√

$$\vdash_{FC} A \to \neg \forall v \neg A \quad （也即\vdash_{FC} A \to \exists v A）$$

定理5（**定理5.2.5**）：（全称推广定理）对于FC中的任何公式集合Γ，公式A，以及不在Γ的任意公式里自由出现的变元v：√

$$如果\Gamma \vdash A，那么\Gamma \vdash \forall v A$$

例2



例5.2.2： $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$

证明：

（1） $\neg A \to \exists x \neg A$ 定理2

（2） $(\neg A \to \exists x \neg A) \to ((\exists x \neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to \forall x B))$ PC中加后件定理5

（3） $(\exists x \neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to \forall x B)$ （1）和（2）用分离规则

（4） $\forall x B \to B$ 定理1

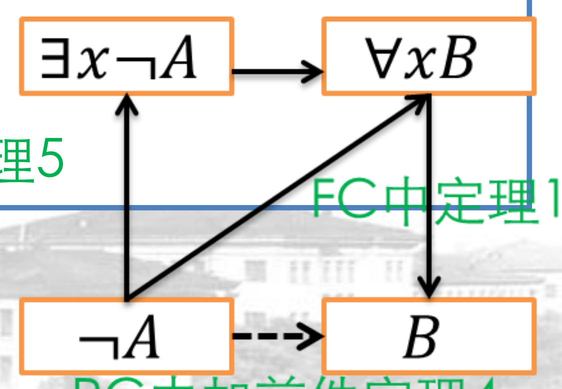
（5） $(\forall x B \to B) \to ((\neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to B))$ PC中加前件定理4

（6） $(\neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to B)$ （4）和（5）用分离规则

（7） $(\exists x \neg A \to \forall x B) \to (\neg A \to B)$ （3）和（6）用PC中的三段论定理8

（8） $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \neg A \to B$ PC中演绎定理

（9） $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$ FC中全称推广定理5



例2

例5.2.2： $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$

证明：

（1） $\neg A \to \exists x \neg A$ FC定理2

（2） $\exists x \neg A \to \forall x B$ 已知前提

（3） $\neg A \to \forall x B$ （1）和（2）用PC中的三段论定理8

（4） $\forall x B \to B$ FC定理1

（5） $\neg A \to B$ （3）和（4）用PC中的三段论定理8

（6） $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \neg A \to B$ ND中推理规则1（+）

（7） $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$ FC中全称推广定理5