第3讲 逻辑蕴涵和逻辑等价

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年11月

主要内容

1. 逻辑蕴涵的定义与判定
2. 逻辑等价的定义
3. 逻辑蕴含的性质
4. 逻辑等价的性质
5. 常用的逻辑等价式
6. 代入定理和替换定理

逻辑蕴涵的定义

- 逻辑蕴涵：设$\Gamma \subseteq Form(L^P), A \in Form(L^P)$。如果对任意赋值$v$，当$v$对$\Gamma$中的任意公式赋值为1时（即对任意的$B \in \Gamma$，有$B^v = 1$），有$v$对命题公式$A$的赋值也为1（即$A^v = 1$），
  - 则称Γ可以语义推出（semantic deduce）A，
  - 或称Γ可以逻辑推出（logically deduce）A，
  - 或称Γ可以逻辑蕴涵（logically conclude）A，
  - 或称A是Γ的逻辑结果（logical result），
  - 记为$\Gamma \Rightarrow A$
- $\Gamma = \{P, Q, R\}$，对任意v，当$P^v = Q^v = R^v = 1$，则$A^v = 1$，则称$\{P, Q, R\} \Rightarrow A$
- $\Gamma = \emptyset$，$\emptyset \Rightarrow A$，A是永真式，记为$\Rightarrow A$

逻辑蕴涵的判定

例1：试证$\{A, A \to B\}$逻辑蕴涵B，即证$\{A, A \to B\} \Rightarrow B$

如果对任意赋值v，当v对Γ中的任意公式赋值都为1时，有v对命题公式A的赋值也为1，称Γ逻辑蕴涵A，记为$\Gamma \Rightarrow A$

证明：只需证明对任意的指派v,

当 $A^v = 1$，$(A \to B)^v = 1$时，$B^v = 1$

由$(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v B^v = 1$

故$A^v B^v$=A^v

又由 $A^v = 1$，知$B^v = 1$

① $(\neg A)^v = 1 - A^v$

② $(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$

③ $(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$

④ $(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v$

⑤ $(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$

逻辑蕴涵的判定

例2：试证$\{\neg A, A\to B\}$逻辑蕴涵$\neg B$，即证 $\{\neg A, B\to A\}\Rightarrow \neg B$

证明：只需证明对任意的指派v,

当 $(\neg A)^v=1$, $(B\to A)^v=1$时，$(\neg B)^v=1$

由$(B\to A)^v=1-B^v+B^vA^v=1$

知B^vA^v=B^v

由$(\neg A)^v=1-A^v$=1

知$A^v=0$

从而$B^v=A^vB^v=0$

$(\neg B)^v=1-B^v=1$

如果对任意赋值v，当v对Γ中的任意公式赋值都为1时，有v对命题公式A的赋值也为1，称Γ逻辑蕴涵A，记为$\Gamma\Rightarrow A$

逻辑等价的定义

- 逻辑等价：设$A, B \in Form(L^P)$，如果$A \Rightarrow B$并且$B \Rightarrow A$,则称A和B逻辑等价，记为$A \Leftrightarrow B$　　$A \Rightarrow B \overset{\text{def}}{=} \{A\} \Rightarrow B$

- 定义的推论：设$A, B \in Form(L^P)$，$A \Leftrightarrow B$**当且仅当**对任意的赋值v都有$A^v = B^v$

推论证明:

必要性：若$A^v = 1$，则由$A \Leftrightarrow B$，有$A \Rightarrow B$，故$B^v = 1$；若$A^v = 0$，则$B^v = 0$，否则若$B^v = 1$，由$A \Leftrightarrow B$有$B \Rightarrow A$，必有$A^v = 1$，与$A^v = 0$矛盾

充分性：由对任意的指派v，都有$A^v = B^v$知，对于任意的指派v，当A^v=1，则B^v=1，$A \Rightarrow B$；对于任意的指派v，当B^v=1，则A^v=1，$B \Rightarrow A$；故，$A \Leftrightarrow B$

逻辑蕴含的性质

- $A \Rightarrow B$当且仅当$A \rightarrow B$是永真式

若对任意的赋值v，都有$A^v = 1$，则称A为永真式

- **必要性：如果$A \Rightarrow B$，那么$A \rightarrow B$是永真式。**

证明：如果� ⇒� ，对任意指派v，往证$(A \rightarrow B)^v = 1$

若 $A^v = 1$，由$A \Rightarrow B$知$B^v = 1$

则有$(A \rightarrow B)^v = 1 - A^v + A^v B^v = 1$

若$A^v = 0$，有$(A \rightarrow B)^v = 1 - A^v + A^v B^v = 1$

故$A \rightarrow B$是永真式。

逻辑蕴含的性质

如果对任意赋值v，当v对Γ中的任意公式赋值都为1时，有v对命题公式A的赋值也为1，称Γ逻辑蕴涵A，记为$\Gamma \Rightarrow A$

- $A \Rightarrow B$当且仅当$A \rightarrow B$是永真式
- **充分性：如果$\boldsymbol{A \rightarrow B}$是永真式，那么$\boldsymbol{A \Rightarrow B}$**

证明：如果$A \rightarrow B$是永真式，若$A^v = 1$，则$B^v = 1$

对任意指派v，有$(A \rightarrow B)^v = 1$

对指派v，若$A^v = 1$

有$1 = (A \rightarrow B)^v = 1 - A^v + A^v B^v = B^v$

即$B^v = 1$，$A \Rightarrow B$得证

逻辑等价的性质

若对任意的赋值v，都有$A^v=1$，则称A为永真式

- $A\Leftrightarrow B$当且仅当$A\leftrightarrow B$是永真式
- **必要性：如果$A\Leftrightarrow B$，那么$A\leftrightarrow B$是永真式**

证明：如果$A\Leftrightarrow B$，对任意指派v，有$(A\leftrightarrow B)^v=1$

由$A\Leftrightarrow B$，对任意指派v，有$A^v=B^v$

$$(A\leftrightarrow B)^v=A^vB^v+(1-A^v)(1-B^v)$$

$$=(A^v)^2+(1-A^v)^2$$

$$=A^v+(1-A^v)=1$$

得证 $A\leftrightarrow B$是永真式

逻辑等价的性质

设 $A, B \in Form(L^P)$，$A \Leftrightarrow B$当且仅当对任意的赋值v都有$A^v = B^v$

- $A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \leftrightarrow B$是永真式
- **充分性：如果$A \leftrightarrow B$是永真式，那么$A \Leftrightarrow B$**

证明：如果$A \leftrightarrow B$是永真式，那么$A^v = B^v$

由$A \leftrightarrow B$永真，知对任意指派v，

有$1 = (A \leftrightarrow B)^v = A^v B^v + (1 - A^v)(1 - B^v)$

$= A^v B^v + 1 - A^v - B^v + A^v B^v$

从而，$A^v + B^v - 2A^v B^v = 0$

即$(A^v - B^v)^2 = 0$，故$A^v - B^v = 0$，从而$A^v = B^v$

由定义的推论知$A \Leftrightarrow B$

逻辑等价的性质

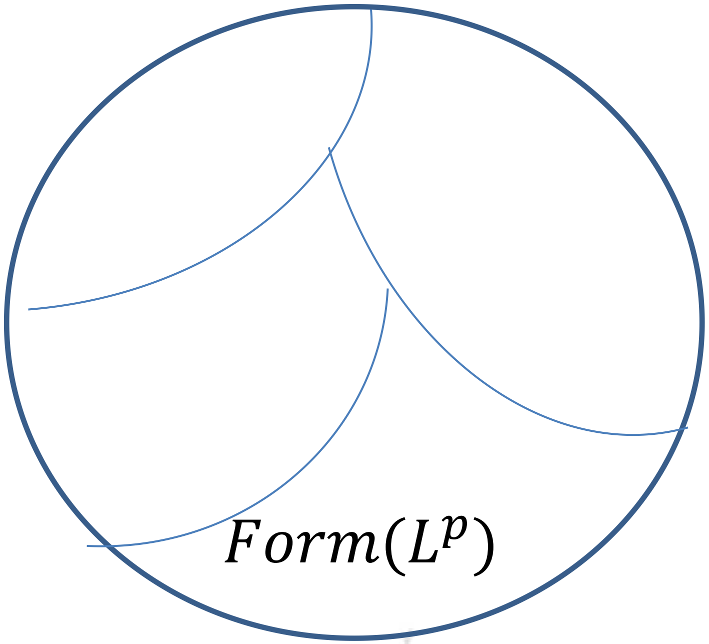
- 逻辑等价是$Form(L^P)$上的等价（二元）关系
  1. 自反性：对任意的$A \in Form(L^P)$，有$A \Leftrightarrow A$
  2. 对称性：对任意的$A, B \in Form(L^P)$，若$A \Leftrightarrow B$则有$B \Leftrightarrow A$
  3. 传递性：对任意的$A, B, C \in Form(L^P)$，若$A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，则有$A \Leftrightarrow C$

证明1：对任意v，有$A^v = A^v$，故若$A \Leftrightarrow A$

证明2：若$A \Leftrightarrow B$，对任意v，有$A^v = B^v$，有$B^v = A^v$，则$B \Leftrightarrow A$

证明3：若$A \Leftrightarrow B$，$B \Leftrightarrow C$，对任意v，有$A^v = B^v$，有$B^v = C^v$，则有$A^v = C^v$，即$A \Leftrightarrow C$

逻辑等价的性质



$\Leftrightarrow \subseteq Form(L^p) \times Form(L^p)$

$Form(L^p)/\Leftrightarrow$

n元命题公式，等价类个数?

等价意味着什么?

常用的逻辑等价式

- 设A, B, C是任意命题公式，分别用1和0表示永真式(重言式)和永假式(矛盾式)

定义的推论：设$A, B \in Form(L^P)$，$A \Leftrightarrow B$当且仅当对任意的赋值v都有$A^v = B^v$

1. (**对合律**) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

证明：对任意v，$(\neg\neg A)^v = 1 - (\neg A)^v$

$$= 1 - (1 - A)^v = A^v$$

① $(\neg A)^v = 1 - A^v$

② $(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$

③ $(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$

④ $(\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B})^v = \mathbf{1} - \boldsymbol{A}^v + \boldsymbol{A}^v \cdot \boldsymbol{B}^v$

⑤ $(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$

2. (**幂等律**) $A \wedge A \Leftrightarrow A; A \vee A \Leftrightarrow A$

证明：对任意v，$(A \wedge A)^v = A^v A^v = A^v$

从而$A \wedge A \Leftrightarrow A$

对任意v，$(A \vee A)^v = A^v + A^v - A^v A^v$

$$= A^v + A^v - A^v = A^v$$

从而$A \vee A \Leftrightarrow A$

常用的逻辑等价式

3. (交换律) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A; A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

定义的推论：设$A, B \in Form(L^P)$，$A \Leftrightarrow B$当且仅当对任意的赋值v都有$A^v = B^v$

证明：对任意v，有 $(A \wedge B)^v = A^v B^v$

$$= B^v A^v$$

$$= (B \wedge A)^v$$

从而有$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

同理，对任意v，有 $(A \vee B)^v$

$$= A^v + B^v - A^v B^v$$

$$= B^v + A^v - A^v B^v$$

$$= (B \vee A)^v$$

从而有$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

① $(\neg A)^v = 1 - A^v$

② $(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$

③ $(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$

④ $(A \rightarrow B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v$

⑤ $(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$

常用的逻辑等价式

4. (结合律) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$; $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

证明：对任意v，$((A \wedge B) \wedge C)^v = (A \wedge B)^v C^v$

$$= (A^v B^v) C^v = A^v (B^v C^v) = (A \wedge (B \wedge C))^v$$

故$(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

对任意v，$((A \vee B) \vee C)^v = (A \vee B)^v + C^v - (A \vee B)^v C^v$

$$= A^v + B^v - A^v B^v + C^v - (A^v + B^v - A^v B^v) C^v$$

又有$(A \vee (B \vee C))^v = A^v + (B \vee C)^v - A^v (B \vee C)^v$

$$= A^v + B^v + C^v - B^v C^v - A^v (B^v + C^v - B^v C^v)$$

$$= A^v + B^v + C^v - B^v C^v - A^v B^v - A^v C^v + A^v B^v C^v$$

故$(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$

常用的逻辑等价式

5. (分配律) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

证明：对任意v，$((A \wedge B) \vee (A \wedge C))^v$

$$= A^v B^v + A^v C^v - A^v B^v A^v C^v$$

$$= A^v B^v + A^v C^v - A^v B^v C^v$$

$$= (A \wedge (B \vee C))^v$$

故$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

同理可证 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

常用的逻辑等价式

6. (吸收律) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A; A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

证明：对任意v，$(A \wedge (A \vee B))^v = A^v(A \vee B)^v$

$$= A^v(A^v + B^v - A^vB^v)$$

$$= A^vA^v + A^vB^v - A^vA^vB^v$$

$$= A^v + A^vB^v - A^vB^v = A^v$$

故$A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

同理可证$A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$

常用的逻辑等价式

7. (德摩根律) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B; \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

证明：对任意v，$(\neg(A \vee B))^v = 1 - (A \vee B)^v$

$$= 1 - A^v - B^v + A^v B^v$$

$$(\neg A \wedge \neg B)^v = (\neg A)^v (\neg B)^v$$

$$= (1 - A)^v (1 - B)^v$$

$$= 1 - A^v - B^v + A^v B^v$$

故$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

同理可证$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

常用的逻辑等价式

- 设A, B, C是任意命题公式，分别用1和0表示永真式(重言式)和永假式(矛盾式)

1. (对合律) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
2. (幂等律) $A \wedge A \Leftrightarrow A; A \vee A \Leftrightarrow A$
3. (交换律) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A; A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
4. (结合律) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C); (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
5. (分配律) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C); A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. (吸收律) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A; A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
7. (德摩根律) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B; \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
8. (同一律) $A \wedge 1 \Leftrightarrow A; A \vee 0 \Leftrightarrow A$
9. (零一律) $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0; A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
10. (排中律) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0; A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

代入定理

- 代入定理：设A是含有命题变元p的永真式，那么将A中p的**所有出现**均代换为命题公式B，得到的公式（称为A的代入实例）仍为永真式

$A = A(p) = 1$

例：$A = p \to (q \to p) = 1$

令$p = q \to r$，则$A = (q \to r) \to \big(q \to (q \to r)\big) = 1$

$A^v = [A(p)]^v = [A(p^v)]^v, [A(B)]^v = [A(B^v)]^v$

替换定理

- **替换定理**：设命题公式A含有子公式C（C为A中的符号串并为命题公式），如果$C \Leftrightarrow D$，那么将A中子公式C的某些出现（未必全部）用D替换得到公式B，必有$A \Leftrightarrow B$

证明：对命题公式A的长度$l = |A|$用数学归纳法

1. 若$|A| = |C|$，则$A = C$。由$C \Leftrightarrow D$

   不替换，则$B = C$。 $A = C \Leftrightarrow C = B$

   替换，则$B = D$。 $A = C \Leftrightarrow D = B$

2. 若$A = \neg A_1$，则$|A_1| = |A| - 1$， C为A_1的子公式

   替换后， $B = \neg B_1$，那么$A_1 \Leftrightarrow B_1$

   $A^v = (\neg A_1)^v = (1 - A_1)^v = (1 - B_1)^v = (\neg B_1)^v =$

B^v

替换定理

- **替换定理**：设命题公式A含有子公式C（C为A中的符号串并为命题公式），如果$C \Leftrightarrow D$，那么将A中子公式C的某些出现（未必全部）用D替换得到公式B，必有$A \Leftrightarrow B$

证明：对命题公式A的长度$l = |A|$用第二数学归纳法

3. 若$A = A_1 \to A_2$
4. 若$A = A_1 \wedge A_2$　　　$A \Leftrightarrow B$
5. 若$A = A_1 \vee A_2$
6. 若$A = A_1 \leftrightarrow A_2$

替换定理

例：由$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$，有$(P \to Q) \wedge (R \to (P \to Q)) \Leftrightarrow ?$

$$(P \to Q)^v = 1 - P^v + P^v Q^v$$

$$(\neg P \vee Q)^v = (\neg P)^v + Q^v - (\neg P)^v Q^v$$

$$= 1 - P^v + Q^v - (1 - P)^v Q^v = 1 - P^v + P^v Q^v$$

故有$P \to Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

故$(P \to Q) \wedge \left(R \to (P \to Q)\right)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (R \to (P \to Q))$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (R \to (\neg P \vee Q))$

小结

- 逻辑蕴涵的判定
- 逻辑蕴涵与蕴涵的关系
  - $A \Rightarrow B$当且仅当$A \rightarrow B$是永真式
- 逻辑等价与等价的关系
  - $A \Leftrightarrow B$当且仅当$A \leftrightarrow B$是永真式
- 常用的逻辑等价式
- 代入定理和替换定理