

# 数理逻辑

授课教师：蒋琳

e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

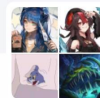
哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年11月



# 课程信息

- 授课教师：蒋琳 博士，副教授，博士生导师
- 办公室：信息楼1705
- 邮箱：[zoeljiang@hit.edu.cn](mailto:zoeljiang@hit.edu.cn)
- 助教：孙健康、黄睿茜
- 课程QQ群：扫码加入，以学号-姓名（如210110XXX-蒋琳）格式实名



2022秋数理逻辑...



扫一扫二维码，入群聊。

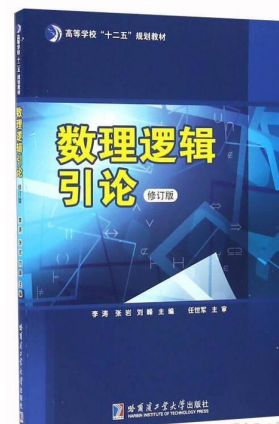


# 课程信息

**课程教材：**李涛，张岩，刘峰主编. 任世军主审. 《数理逻辑引论》修订版，哈尔滨工业大学出版社，2016.08

**参考书：**陆钟万. 《面向计算机科学的数理逻辑》第二版. 科学出版社，1998

王捍贫. 《数理逻辑》（离散数学一分册）. 北京大学出版社，1997



## 课程考核方法

考核环节	所占分值	考核与评价细则
1. 课堂表现及平时作业	30%	考勤占5% 作业成绩占25%
2. 期末考试	70%	主观题和客观题两种题型



# 线上参考资料

1. 哈工大任世军数理逻辑

[https://www.bilibili.com/video/BV1Ng411j7ig?spm\\_id\\_from=33.337.search-card.all.click](https://www.bilibili.com/video/BV1Ng411j7ig?spm_id_from=33.337.search-card.all.click)

2. 面向计算机科学的数理逻辑-陆钟万

[https://www.bilibili.com/video/BV1Vf4y1R7cA?spm\\_id\\_from=33.337.search-card.all.click](https://www.bilibili.com/video/BV1Vf4y1R7cA?spm_id_from=33.337.search-card.all.click)

3. 【爱课程公开课】北大-离散数学第三部分-数理逻辑-王捍贫

[https://www.bilibili.com/video/BV1GE411J7S5?spm\\_id\\_from=33.337.search-card.all.click](https://www.bilibili.com/video/BV1GE411J7S5?spm_id_from=33.337.search-card.all.click)

4. 【讲座】冯琦：从莱布尼兹之梦到数理逻辑

[https://www.bilibili.com/video/BV1TZ4y1L7Bq?spm\\_id\\_from=33.337.search-card.all.click](https://www.bilibili.com/video/BV1TZ4y1L7Bq?spm_id_from=33.337.search-card.all.click)

# 什么是逻辑

“事物发展有其内在的**逻辑**”

“这个人为人处世，有他自己的**逻辑**”

“按照对方辩友的**逻辑**，岂不是说 ……”

“说话、写文章都要讲**逻辑**”

“这篇论文结构严谨，**逻辑**严密。”

“他的发言颠三倒四，**逻辑**混乱”



# 什么是逻辑

帝国主义者的逻辑和人民的逻辑是这样的不同。捣乱，失败，再捣乱，再失败，直至灭亡——这就是帝国主义和世界上一切反动派对待人民事业的逻辑，... 斗争，失败，再斗争，再失败，再斗争，直至胜利——这就是人民的逻辑。

（毛泽东：《丢掉幻想准备斗争》）



# 什么是逻辑

- 逻辑一词最早来自古希腊语logos（逻各斯）
  - 语言、命题、说明、解释、论证
  - 理性、理念、推理、推理能力
  - 尺度、关系、比例、价值
  - .....
- 逻辑一词的不同含义
  - 客观事物的规律性
  - 某种理论、观点、行为方式



# 什么是逻辑学

- 逻辑学作为一门学科是以推理形式为主要研究对象
  - 推理：从已知条件（前提）得出结论的过程
- 推理形式：推理的结构，同类的不同具体推理具有共同的结构

所有人都是会死的  
张三是人

---

张三是会死的

所有金属都是导体  
铜是金属

---

铜是导体

所有A都是B  
C是A

---

C是B



# 什么是逻辑学

所有的金属都是导体  
铜是金属

---

铜是导体

所有的金属都是导体  
铜是导体

---

铜是金属

所有A都是B  
C是A

---

C是B

所有A都是B  
C是B

---

C是A



# 什么是逻辑学

- 逻辑学是研究有效推理形式
- 有效推理形式：真前提通过有效推理形式只能得到真结论，即：  
：通过有效推理形式，从真前提不会得到假结论。

所有的金属都是导体  
铜是金属

---

铜是导体

所有的金属都是导体  
铜是导体

---

铜是金属

所有A都是B

C是A

---

C是B



所有A都是B

C是B

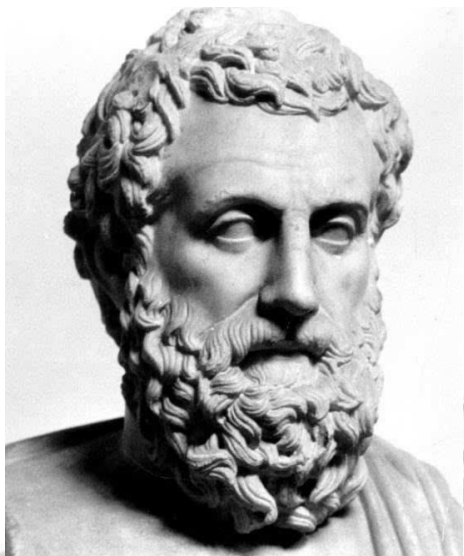
---

C是A



# 什么是逻辑学

- 逻辑学是一门高度抽象的学科，是其他学科的工具，应用范围非常广
- 逻辑学分为传统逻辑和数理逻辑
  - 传统逻辑：古典（形式）逻辑，古希腊亚里士多德为代表
  - 数理逻辑：现代逻辑，莱布尼茨为创始人



（亚里士多德，公元前384年  
-公元前322年）



（莱布尼茨，1646 – 1716）

# 中国古代的逻辑思想

- 先秦时代的逻辑思想，以“名学”，“辩学”为代表

子曰：必也正名乎！。。。。名不正则言不顺，言不顺则事不成，事不成则礼乐不兴，礼乐不兴则刑罚不中，刑罚不中，则民无所措手足。故君子名之必可言也，言之必可行也。君子于其言，无所苟而已矣。

——《论语·子路篇》



# 中国古代的逻辑思想

- 先秦时代的逻辑思想，以“名学”，“辩学”为代表

庄子与惠子游于濠梁之上。

庄子曰：“鲦鱼出游从容，是鱼乐也。”

惠子曰：“子非鱼，**安**知鱼之乐？”

庄子曰：“子非我，**安**知我不知鱼之乐？”

惠子曰：“我非子，固不知子矣，子固非鱼也，子不知鱼之乐，全矣。”

庄子曰：“请循其本。子曰汝**安**知鱼乐云者，既已知吾知之而问我，我知之**濠上**也。”

——《庄子·外篇·秋水第十七》





# 中国古代的逻辑思想

- 先秦时代的逻辑思想，以“名学”，“辩学”为代表

“楚人有鬻盾与矛者，誉之曰：  
‘吾盾之坚，物莫能陷也。’又誉其  
矛曰：‘吾矛之利，于物无不陷也。’  
或曰：‘以子之矛，陷子之盾，何  
如？’其人弗能应也。

夫不可陷之盾与无不陷之矛，不  
可同世而立。

——《韩非子·难一》



# 中国古代的逻辑思想

- 先秦时代的逻辑思想，以“名学”，“辩学”为代表

曰：“白马非马，可乎？”

曰：“可。”

曰：“何哉？”

曰：“马者，所以命形也。白者，所以命色也。命色者，非命形也，故曰白马非马。”。。。

曰：“求马，黄、黑马皆可致。求白马，黄、黑马不可致。”

——公孙龙子：《白马论》

- 《墨经》提出了比较完整的逻辑体系

夫辩者，将以明是非之分，审治乱之纪，明同异之处，察名实之理，处利害，决嫌疑焉。”

以名举实，以辞抒意，以说出故。

——《墨经·小取》



# 什么是数理逻辑

- 数理逻辑是用数学的方法，数学的语言，数学的工具研究诸如推理的有效性、证明的真实性、数学的真理性和计算的可行性等这类现象中的逻辑问题。

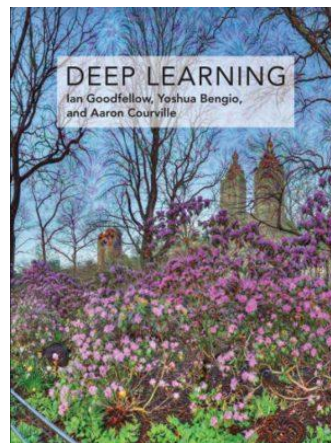
其研究对象是对证明和计算进行符号化以后的形式系统。数理逻辑的研究范围是逻辑学中可被数学模式化的部分

- 数理逻辑的内容
  - 逻辑演算（命题逻辑、谓词逻辑）
  - 证明论
  - 集合论（公理集合论和朴素集合论）
  - 递归论
  - 模型论



# 什么是数理逻辑

- 数理逻辑与集合论，图论，近世代数组成离散数学
- 数理逻辑是很多课程的基础
  - 人工智能
  - 形式语义学
  - 程序设计方法学



## FROM SYSTEM 1 DEEP LEARNING TO SYSTEM 2 DEEP LEARNING

YOSHUA BENGIO

NeurIPS'2019 Keynote  
December 11th, 2019, Vancouver BC



未来的深度神经网络应当能够实现 System2（逻辑分析系统），实现的是有意识的、有逻辑的、有规划的、可推理以及可以语言表达的系统

# 课程介绍

- 离散数学：集合论与图论、数理逻辑、近世代数
- 形式逻辑

- 用自然语言研究推理，属于哲学

## 三段论

前提1	X认识Y
前提2	Y是足球队长
结论	X认识足球队长

前提1	X认识A班某学生
前提2	A班某学生是足球队长
结论	X认识足球队长

- 自然语言类似但逻辑形式不一样
- 逻辑学需要作为一门严谨的数学学科被建立
- 符号语言及思维演算（计算）

# 课程介绍

- 离散数学：集合论与图论、数理逻辑、近世代数
- 数理逻辑
  - 字面含义：数学理论的逻辑，逻辑是研究**演绎（推理）规律**的学科
  - 广义理解：用数学方法研究演绎规律的学科
  - 狭义理解：用数学方法研究数学中演绎规律和数学基础的学科
  - 研究内容：用**符号语言**和**数学方法**研究**演绎推理**和**证明**的学科，又称

## 符号逻辑

- 研究对象：对**证明**和**计算**这两个直观概念进行符号化以后的**形式系统**
- 研究范围：逻辑学中可被数学模式化的部分

# 课程介绍

- 推理

前提1	所有3的倍数的各位数字之和是3的倍数
前提2	10的10次方的各位数字之和是1
结论	10的10次方不是3的倍数

命题真

命题真

命题真

推理正确

前提1	所有中学生打网球
前提2	王军不打网球
结论	王军不是中学生

命题真?

命题真?

命题真?

推理正确

推理正确与否与推理中前提和结论（命题）是否真没有关系

前提1	集合S中的所有元素都有性质R
前提2	元素A没有性质R
结论	元素A不是集合S中的元素

从内容抽象出来的逻辑形式决定推理是否正确

# 数理逻辑的发展简史

- 初始阶段（1660-19世纪末）
  - 亚里士多德（Aristotle）：形式逻辑
  - 莱布尼茨（Leibniz）：符号语言和思维演算，奠基人
  - 布尔代数：代数方法应用于逻辑
- 过渡阶段（1900-1940）
  - 非欧几何公理方法：数理逻辑中的公理学
  - 实数理论皮亚诺算术：发展布尔所创始的符号逻辑系统
  - 集合论（康托尔Cantor）、希尔伯特计划（公理系统）
  - 罗素（Russell）：命题演算和谓词演算系统
- 成熟阶段（1930-）
  - 哥德尔（Gödel）：谓词演算系统完备性、哥德尔不完全定理
  - 四论：证明论具有语法性质、模型论具有语义性质、递归论是证明论的工具、公理化集合论是模型论的工具）

# 从程序到模型

```
1 int n=100;  
2 int bPrime=1;
```

```
3 for(int i=2;i<n;i++){  
4   if(n%i==0){  
5     bPrime=0;  
6     break;  
7   }  
8 }
```

```
9 if(bPrime==1){  
10  printf("%d is prime!\n",n);  
11 }  
12 else{  
13  printf("%d isn't  
prime!\n",n);  
14 }
```

1  $A_1$

2  $A_2$

3  $A_3$

$\vdots$

n  $A_n$

$(A_1)^v$

$\wedge(A_2)^v$

$\vdots$

$\wedge(A_n)^v$

$$(A \rightarrow B)^v = 1 - A^v + A^v B^v$$

# 数字字谜问题

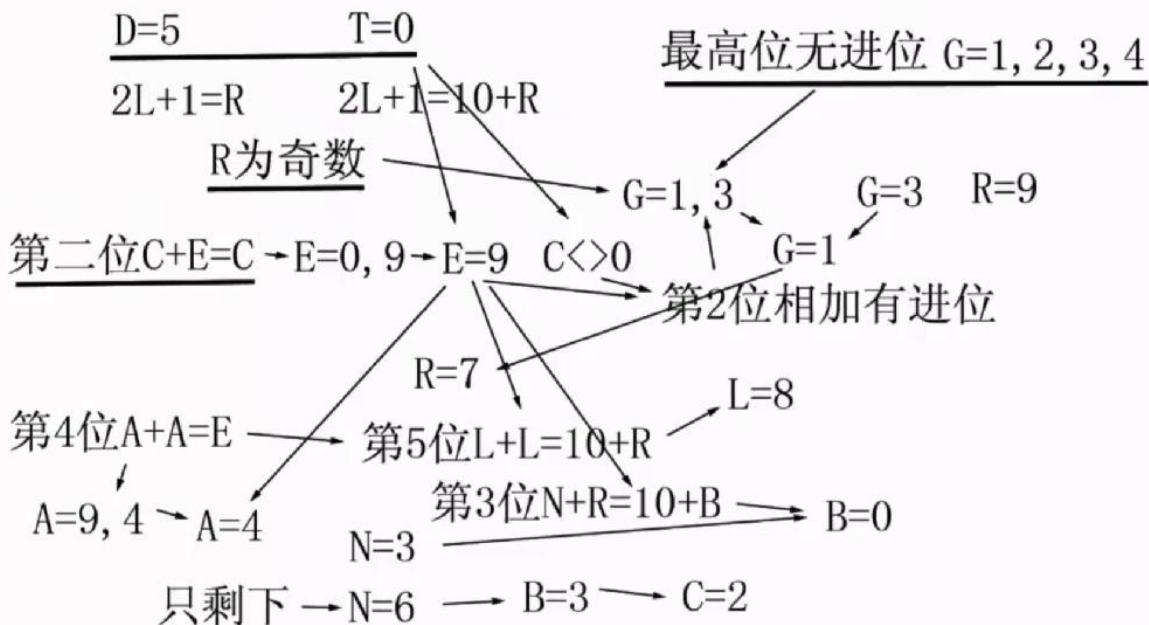
已知公式：  

$$\begin{array}{r} D C N A L D \\ + G E R A L D \\ \hline R C B E R T \end{array}$$

共有10个字母A,B,C,D,E,G,N,L,R,T,每个字母代表0-9中的一个，没有重复。已知D=5，计算其余9个字母所代表的数字。

已知公式：  

$$\begin{array}{r} D C N A L D \\ + G E R A L D \\ \hline R C B E R T \end{array}$$



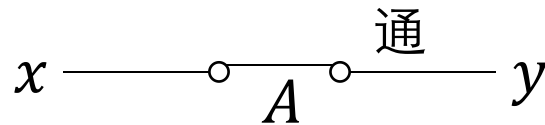
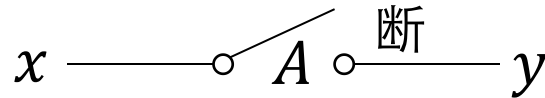


# 电路中的逻辑—开关

- 开关及其两种状态



开关



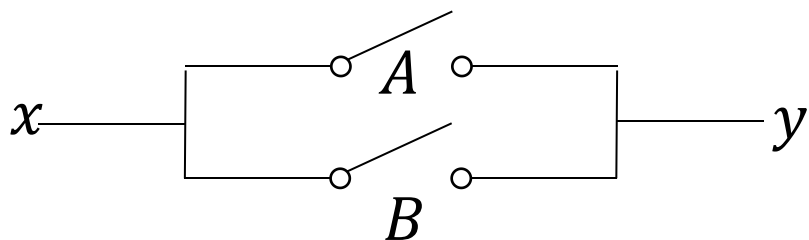
开关的两种闭合状态

- 开关 $\rightarrow$ 事件
  - 可以从开关 $A$ 得到一个事件：“ $x$ 和 $y$ 两点是连通的。”
  - 用 $A$ 表示此事件。
  - 对立事件 $\bar{A}$ 就是：“ $x$ 和 $y$ 两点是切断的。”

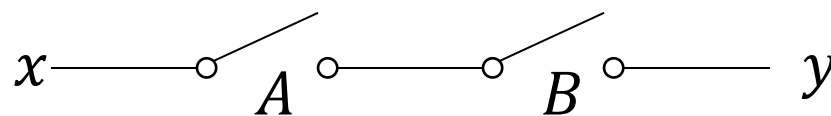


# 电路中的逻辑—复杂开关

- 对开关 $A$ 和 $B$ 而言有对应的事件 $A$ 和 $B$ ， $A \vee B$  ( $A$ 或 $B$ ) 和 $A \wedge B$  ( $A$ 与 $B$ ) 在电路中意味着什么呢？
- 事件 $A \vee B$ 表示“或者 $A$ 通或者 $B$ 通”。因此， $A \vee B$ 的发生等价于 $A$ 与 $B$ 之一是通的，这说明事件 $A \vee B$ 对应于开关 $A$ 和 $B$ 并联所得到的电路。



表示事件 $A \vee B$ 的开关



表示事件 $A \wedge B$ 的开关

- 事件 $A \wedge B$ 表示“ $A$ 通并且 $B$ 通”。因此， $A \wedge B$ 的发生等价于 $A$ 与 $B$ 是两者都是通的，这说明事件 $A \wedge B$ 对应于开关 $A$ 和 $B$ 串联所得到的电路。

# 电路中的逻辑—通断表

- 复杂开关 $A \vee B$  ( $A$ 或 $B$ ) 的通断表

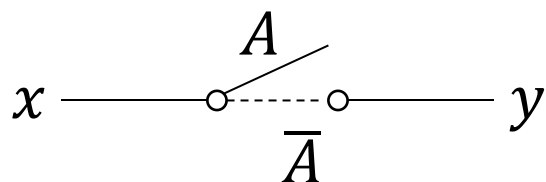
开关 $A$	开关 $B$	复杂开关 $A \vee B$
通	通	通
通	断	通
断	通	通
断	断	断

- 复杂开关 $A \wedge B$  ( $A$ 与 $B$ ) 的通断表

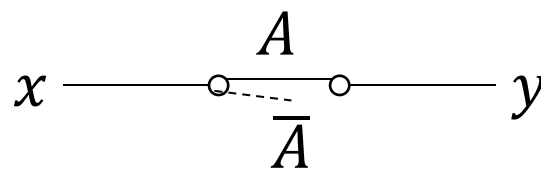
开关 $A$	开关 $B$	复杂开关 $A \wedge B$
通	通	通
通	断	断
断	通	断
断	断	断

# 电路中的逻辑—状态相反的开关

- 与开关 $A$ 相反的开关 $\bar{A}$  ( $A$  非)



$A$ 断 $\bar{A}$ 通



$A$ 通 $\bar{A}$ 断

- 开关 $\bar{A}$ 的通断表

开关 $A$	开关 $\bar{A}$
通	断
断	通

# 电路中的逻辑—真值表

- 真值表
- 通断表→真值表

- 通→真→1→T

- 断→假→0→F

- 开关的通断对应事件的真假

$A$	$\bar{A}$
真(1)	假(0)
假(0)	真(1)

- 真值表

$A$	$B$	$A \vee B$	$A \wedge B$
1	1	1	1
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	0

# 电路中的逻辑—应用

- 楼梯上有一盏电灯，问应该如何**设计电路**以使楼上与楼下均能自由开关？
- 设楼下的开关为 $A$ ，楼上的开关为 $B$ ，应如何设计电路才能达到预定的要求呢？
- 如果开关 $A$ ， $B$ 已经接入电路并已经达到要求，那么这个电路就是一个新的开关 $P$ 。

- 如果 $A = B = 1$ ，那么 $P = 1$

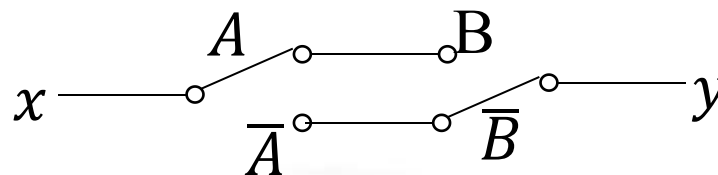
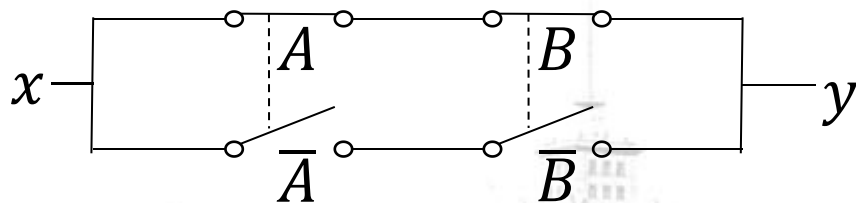
$A$	$B$	$P$
1	1	1
1	0	
0	1	
0	0	

# 电路中的逻辑—应用

$A$	$B$	$P$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

设计电路

- 于是  $P = (A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge \bar{B})$

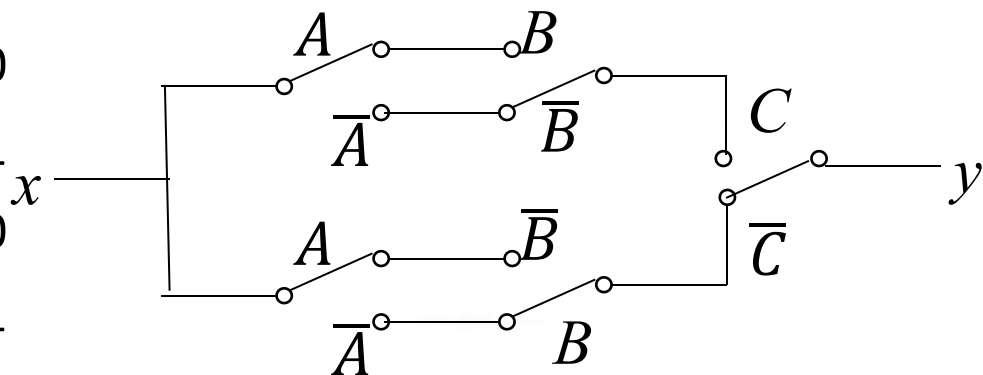


- 如果  $A = B = 1$ , 那么  $P = 0$

# 电路中的逻辑—应用扩展

- 一个展览大厅有三个门，问应该如何设计电路以使三个门处的任何一个均能自由开关展览厅的灯？
- 设三个门处的开关分别为 $A$ ,  $B$ 和 $C$ , 应如何设计电路才能达到预定的要求？

$A$	$B$	$C$	$P$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0



# 大纲

- 命题与联结词
- 形式语言与命题公式
- 范式 (Normal Form)
- 联结词的扩充与归约
- 命题演算形式系统PC (Proposition Calculus)
- 命题演算形式系统PC的定理





# 主要内容

- 命题
- 逻辑联结词
- 自然语言联结词
- 自然语言联结词的符号表示
- 真值函数



# 命题

Definition (命题(Proposition))

命题是一个能判断真假的陈述句。

Definition (原子命题(Atom Proposition))

不包含其他命题成分的命题称为简单命题 (原子命题)

Definition (复合命题(Compound Proposition))

至少包含一个其他命题成分的命题称为复合命题。

Definition (支命题(Branch Proposition))

组成复合命题的那些命题称为支命题。

# 逻辑联结词

- 对把几个支命题联结起来构成复合命题的词项叫逻辑联结词
  - ……并且……
  - 并非……
  - ……或（者）……
  - 如果(前件)……那么(后件)……
  - ……当且仅当……
- 命题的真假
  - 简单命题的真假取决于它是否反映了客观世界
  - 复合命题的真假也是如此
  - 但是复合命题是由其支命题组成的
  - 支命题的真假完全可以决定复合命题的真假

# 逻辑联结词

- $p$ 表示“2是素数”
- $q$ 表示“3是偶数”
- 那么“2是素数并且3也是偶数”可以表示成“ $p$ 并且 $q$ ”
- 在形如“ $p$ 并且 $q$ ”这样的复合命题中，**只有当两个支命题 $p$ 和 $q$ 都真时**，“ $p$ 并且 $q$ ”才真，否则就是假。
- 2是素数**并且**3也是**素数**（**真**命题）
- 2是素数**并且**3也是**偶数**（**假**命题）

$p$ 、 $q$ 、 $r$ 表示原子命题

$A$ 、 $B$ 、 $C$ 表示复合命题

# 例子

Y	T	1. 雪是白的。
Y	F	2. 雪是黑的。
N	-	3. 好大的雪啊!
Y	?	4. 任何一个偶数可以表示成两个素数之和。
Y	?	5. 太阳有第11颗行星。
Y	F	6. $2+2=5$ .
Y	T	7. 2是素数又是偶数。
Y	?	8. 陈胜吴广起义之日杭州下雨。
N	-	9. 你上哪儿去?
N	-	10. 这句话是假的。
N	-	11. $x+y<0$ .

**哥德巴赫猜想**

# 自然语言中的联结词

- 逻辑中的联结词可以用某种自然语言来表述，**但绝不等同于任何一种自然语言中相关的词。**
- 在汉语中说：“甲和乙有了孩子，并且结婚了”与说“甲和乙结婚了，并且有了孩子”含义有所不同。
- 在汉语里“并且”作为联结词，它联结的句子不仅有递进的意思还有时间的先后顺序。但是逻辑中的联结词仅与真假值有关系。



# 自然语言联结词的符号表示

- 否定词 $\neg$ : 对应于“并非……”，读“非”
- 合取词 $\wedge$ : 对应于“……并且……”，读“与”，“交”
- 析取词 $\vee$ : 对应于“……或者……”，读“或”，“并”
- 蕴含词 $\rightarrow$ : 对应于“如果……那么……”，读“蕴含”
- 等价词 $\leftrightarrow$ : 对应于“……当且仅当……”，读“等价”

$p$	$q$	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

$p \rightarrow q$  当且仅当前件真后件假是为假

$p \leftrightarrow q$   $p$ 与 $q$ 的值相同时为真，否则为假

# 符号化表示

- $A$ 当且仅当 $B$ 。可表示为,  $A \leftrightarrow B$
- $A$ 当 $B$ 。可表示为,  $B \rightarrow A$
- $A$ 仅当 $B$ ; 只有 $B$ 才有 $A$ ; 非 $B$ 一定非 $A$ 。均可表示为,  $A \rightarrow B$
- $A$ 的充分必要条件是 $B$ 。可表示为,  $A \leftrightarrow B$
- $A$ 的充分条件是 $B$ 。可表示为,  $B \rightarrow A$
- $A$ 的必要条件是 $B$ 。可表示为,  $A \rightarrow B$





# 符号化表示

1、用 $p$ 表示“今天是星期五”

“今天不是星期五”可表示为,  $\neg p$

$A$ 仅当 $B \Rightarrow$ 只有 $B$ 才有 $A \Rightarrow$

2、用 $p$ 表示“2是素数”， $q$ 表示“2是偶数”

非 $B$ 一定非 $A \Rightarrow A \rightarrow B$

“2是素数并且2也是偶数”可表示为,  $p \wedge q$

3、用 $p$ 表示“研一上组合数学课”， $q$ 表示“研一上算法设计课”

“研一或者上组合数学课，或者上算法设计课”可表示为,  $p \vee q$

4、用 $p$ 表示“明天下雨”， $q$ 表示“我在家看书”

“如果明天下雨，那么我在家看书”可表示为,  $p \rightarrow q$

5、用 $p$ 表示“你是大一新生”， $q$ 表示“你能在寝室用电脑”

“只有你不是大一新生，才能在寝室用电脑”可表示为,  $(q \rightarrow \neg p)$

6、用 $p$ 表示“三角形是等腰三角形”， $q$ 表示“三角形中有两个角相等”

“三角形是等腰三角形当且仅当三角形中有两个角相等”可表示为,  $p \leftrightarrow q$

# 真值函数

- 设  $D = \{0,1\}$ ，一个映射  $f: D^n \rightarrow D$  称为一个  $n$  元真值函数

- $\neg$  是一个一元真值函数

中缀表示:  $p \rightarrow q$

- $\wedge$  是二元真值函数

前缀表示:  $\rightarrow(p, q)$

- $\vee$  是二元真值函数

- $\rightarrow$  是二元真值函数

- $\leftrightarrow$  是二元真值函数

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- 有多少个二元真值函数?

$$D^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

- $D^2 \rightarrow D$  的映射有多少种

$$D = \{0, 1\}$$

- $D^2$  中每一个元素可以有 2 种映射选择，一共 4 个元素，互相独立

- $2^4 = 16$  种

# 小结

- 数理逻辑的由来与发展史
- 什么是命题，如何判断命题
- 自然语言联结词和逻辑连接词的关系，即自然语言联结词的符号化
- 真值函数

