数理逻辑

# 第9讲 命题演算形式系统-基本定理18-29

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年11月

# 推理部分

**公理集合:**

（1） $A_1$: $A \to (B \to A)$

（2） $A_2$: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

（3） $A_3$: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

**推理规则或分离规则（Modus Ponens）：**

若有$A$和$A \to B$成立，则必有结论$B$成立，可形式化表示为:

$$r_{mp}: \frac{A,\ A \to B}{B}$$

# 证明

**证明的定义：** 称下列公式序列为公式$A$ 在PC 中的一个证明:

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，$A_i$ 或者是PC中的公理，或者是 $A_j (j < i)$，或者$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。**其中$A_m$就是公式$A$。**

**注释：** $A_i$ 只能是以下三种中的其一:

（1）PC中的公理或已知定理;

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中的某一个;

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的。

# 基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \to A$ ($A \to A$是PC中的一个定理)√

定理2：如果$\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ （前件互换定理）√

定理3：$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 定理（2）的另一种形式 √

定理4：$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$（加前件定理）√

定理5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$（加后件定理）√

定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$√

定理7：$\vdash A \to (\neg A \to B)$√

定理8：如果$\vdash (A \to B)$，$\vdash (B \to C)$，那么$\vdash (A \to C)$（三段论定理）√

定理9. $\vdash (\neg A \to A) \to A$ （反证法）√

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$√

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ （反证法）√

定理12. $\vdash A \to \neg\neg A$√

# 基本定理

定理13：$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ （公理$A_3$的逆命题）√

定理14：$\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$ √

定理15：$\vdash (A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$ √

定理16：$\vdash (\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ （反证法）√

定理17：$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ √

# 基本定理

定理18：$\vdash \neg A \to C$，　$\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$

定理19：$\vdash A \to A \vee B$，　其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to A \vee B \;\Leftrightarrow\; A \to (\neg A \to B)$$ （等价于定理7）

定理20：$\vdash A \to B \vee A$，　其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to B \vee A \;\Leftrightarrow\; A \to (\neg B \to A)$$ （等价于公理1）

定理21：如果$\vdash P \to Q$, 且$\vdash R \to S$, 则$\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$

定理22：$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ 也即

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$ （二难推理）

# 定理18

定理18：$\vdash \neg A \to C$， $\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$

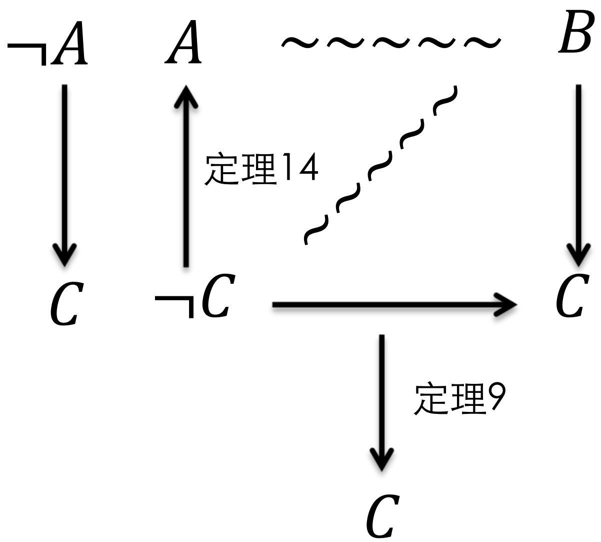
**必要性：** 若$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$则$\vdash (A \to B) \to C$

**充分性：** 若$\vdash (A \to B) \to C$, 则$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$

# 定理18必要性证明

**必要性：若$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$则$\vdash (A \to B) \to C$**

**证明思路：**




定理9. $\vdash (\neg A \to A) \to A$

定理14. $\vdash (\neg A \to B) \to (\neg B \to A)$

# 定理18必要性证明

定理18（必要性）： 若$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$则$\vdash (A \to B) \to C$

**证明（必要性）：**

（1） $\neg A \to C$ 已知定理

（2） $(\neg A \to C) \to (\neg C \to A)$ 定理14

（3） $\neg C \to A$ (2)和(3)用rmp分离规则

（4） $(\neg C \to A) \to ((A \to B) \to (\neg C \to B))$ 加后件定理5

（5） $(A \to B) \to (\neg C \to B)$ (3)和(4)用rmp分离规则

（6） $B \to C$ 已知定理

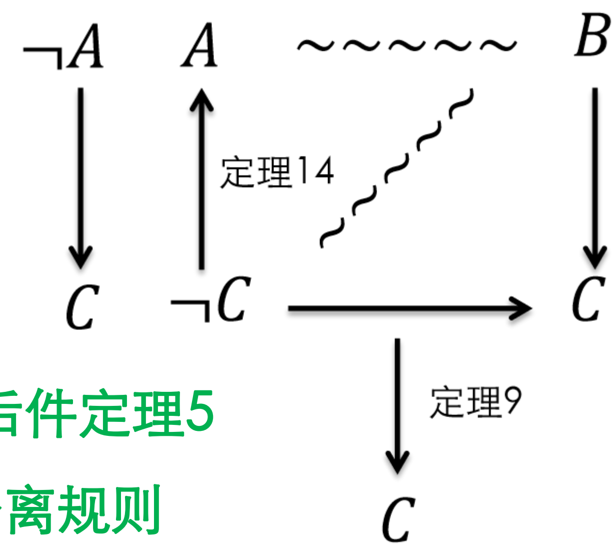
（7） $(B \to C) \to ((\neg C \to B) \to (\neg C \to C))$ 对(6)用加前件定理4

（8） $(\neg C \to B) \to (\neg C \to C)$ (1)和(7)用rmp分离规则

（9） $(A \to B) \to (\neg C \to C)$ (5)和(8)用三段论定理8

（10） $(\neg C \to C) \to C$ 定理9

（11） $(A \to B) \to C$ (9)和(10)用三段论定理8



# 定理18充分性证明

**充分性**：若 $\vdash (A \to B) \to C$, 则$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$

**证明思路**：结合已知定理，利用三段论加以证明

**证明**：

(1)　$(A \to B) \to C$ 已知定理

(2)　$\neg A \to (A \to B)$定理6

(3)　$\neg A \to C$ (2)和(1)用三段论定理8

(4)　$B \to (A \to B)$　公理1

(5)　$B \to C$　(4)和(1)用三段论定理8

# 定理18的应用

定理18（必要性）若$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$，那么$\vdash (A \to B) \to C$

例1.证明$((A \to B) \to A) \to A$

**证明思路**：有了定理18的必要性，再证明该命题就简单很多了。

只需要证明$A \to A$ 和$\neg(A \to B) \to A$

**证明：**

(1)　$A \to A$　定理1

(2)　$\neg A \to (A \to B)$　定理6

(3)　$(\neg A \to (A \to B)) \to (\neg(A \to B) \to A)$定理14

(4)　$\neg(A \to B) \to A$　(2)和(3)用rmp分离规则

(5)　$((A \to B) \to A) \to A$　(4) 和(1)用定理18

# 定理19

定理19： $\vdash A \to A \vee B$， 其中$A \vee B$定义为$\neg A \to B$

$$A \to A \vee B \Leftrightarrow A \to (\neg A \to B)$$ （等价于定理7）

# 定理20

定理20： $\vdash A \to B \vee A$， 其中$A \vee B$定义为$\neg A \to B$

$$A \to B \vee A \quad \Leftrightarrow \quad A \to (\neg B \to A)$$ （等价于公理1）

# 定理21

定理21：如果$\vdash P \to Q$, 且$\vdash R \to S$, 则$\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$

**证明:**

(1) $P \to Q$ 已知定理

(2) $R \to S$ 已知定理

(3) $(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$ 加后件定理5

(4) $(Q \to R) \to (P \to R)$ （1）和（3）用rmp分离规则

(5) $(R \to S) \to ((P \to R) \to (P \to S))$ 加前件定理4

(6) $(P \to R) \to (P \to S)$ （2）和（5）用rmp分离规则

(7) $(Q \to R) \to (P \to S)$ （4）和（6）使用三段论定理8

# 定理22

定理22: $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ （二难推理）

也即 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

**证明思路1：** 运用定理18，

$$令Q = (B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C)$$

要证$(A \to C) \to Q$成立，根据定理18的必要性，只需证：

$$C \to Q和\neg A \to Q$$

也即：

$$C \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$

$$\neg A \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$

定理18：$\vdash \neg A \to C$，$\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$

# 定理22

定理22：$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ （二难推理）

**证明（思路1）：**

(1) $C \to ((\neg A \to B) \to C)$ 公理1

(2) $(C \to ((\neg A \to B) \to C)) \to ((B \to C) \to (C \to ((\neg A \to B) \to C)))$ 公理1

(3) $(B \to C) \to (C \to ((\neg A \to B) \to C))$ (1)和(2)用rmp分离规则

**(4) $\boldsymbol{C \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))}$** 对(3)用前件互换定理2

(5) $(\neg A \to B) \to (\neg A \to B)$ 定理1

(6) $\neg A \to ((\neg A \to B) \to B)$ 对(5)用前件互换定理2

(7) $((\neg A \to B) \to B) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ 加后件定理5

**(8) $\boldsymbol{\neg A \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))}$** (6)和(7)用三段论定理8

(9) $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$ (4) 和(8)用定理18

# 定理22

定理21：如果$\vdash P \to Q$，且$\vdash R \to S$，则$\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$

定理22: $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$

（二难推理）

也即 $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$

**证明思路2：** 要证$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$成立，只需证：

$(\neg C \to \neg A) \to ((\neg C \to \neg B) \to (\neg C \to \neg(\neg A \to B)))$（运用定理21）

逆向用公理2，提取相同的前件$\neg C$，只需证：

$$(\neg C \to \neg A) \to (\neg C \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B)))$$

再次逆向用公理2，提取相同的前件$\neg C$，只需证：

$$\neg C \to (\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B)))$$

去掉$\neg C$，只需证：

$$\neg A \to (\neg B \to \neg(\neg A \to B))$$

逆否命题，只需证：

$$\neg A \to ((\neg A \to B) \to B)$$

前件互换定理，只需证：

$(\neg A \to B) \to (\neg A \to B)$（定理1）

# 基本定理

定理18：$\vdash \neg A \to C$， $\vdash B \to C$当且仅当$\vdash (A \to B) \to C$√

定理19：$\vdash A \to A \vee B$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to A \vee B \;\Leftrightarrow\; A \to (\neg A \to B)$$ (等价于定理7) √

定理20：$\vdash A \to B \vee A$， 其中，$A \vee B$定义为$\neg A \to B$，也即

$$A \to B \vee A \;\Leftrightarrow\; A \to (\neg B \to A)$$ (等价于公理1) √

定理21：如果$\vdash P \to Q$, 且$\vdash R \to S$, 则$\vdash (Q \to R) \to (P \to S)$ √

定理22：$\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ 也即

$$(A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$$ （二难推理） √

# 基本定理

定理23：$\vdash A \wedge B \to C$ 当且仅当 $\vdash A \to (B \to C)$

定理24：$\vdash A \wedge B \to A$

定理25：$\vdash A \wedge B \to B$

定理26：$\vdash A \to (B \to (A \wedge B))$

定理27：$\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

定理28：$\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

定理29：$\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

# 定理23

定理23：$\vdash A \wedge B \to C$ 当且仅当$\vdash A \to (B \to C)$，$A \wedge B$定义为$\neg(A \to \neg B)$ 即

定理23：$\vdash \neg(A \to \neg B) \to C$ 当且仅当$\vdash A \to (B \to C)$

**证明**（必要性）： 若$\vdash \neg(A \to \neg B) \to C$，则$\vdash A \to (B \to C)$

（1） $\neg(A \to \neg B) \to C$ 已知定理

（2） $(\neg(A \to \neg B) \to C) \to (\neg C \to (A \to \neg B))$ 定理14

（3） $\neg C \to (A \to \neg B)$ 由（1）和（2）用分离规则

（4） $A \to (\neg C \to \neg B)$ 对（3）用前件互换定理2

（5） $(\neg C \to \neg B) \to (B \to C)$ 公理3

（6） $A \to (B \to C)$ （4）和（5）用三段论定理8

# 定理23

定理23：$\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$，$\boldsymbol{A \wedge B}$**定义为**$\neg(\boldsymbol{A} \rightarrow \neg \boldsymbol{B})$ 即

定理23：$\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ 当且仅当$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

**证明**（充分性）：若 $\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$，则$\vdash \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$

（1） $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 已知定理

（2） $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ 定理13

（3） $A \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$ 由（1）和（2）使用三段论

（4） $\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$ 对（3）用前件互换定理2

（5） $(\neg C \rightarrow (A \rightarrow \neg B)) \rightarrow (\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C)$ 定理14

（6） $\neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow C$ 由（4）和（5）用分离规则

（7） $A \wedge B \rightarrow C$

# 定理24

定理24：$\vdash A \wedge B \rightarrow A$，$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(A \rightarrow \neg B)$

**证明：** $A \wedge B \rightarrow A \;\Leftrightarrow\; \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow A \;\Leftrightarrow\; \neg A \rightarrow (A \rightarrow \neg B)$

(取逆否命题)　等价于定理6

# 定理25

定理25： $\vdash A \land B \to B$

**证明：** $A \land B \to B \;\Leftrightarrow\; \neg(A \to \neg B) \to B \;\Leftrightarrow\; \neg B \to (A \to \neg B)$

(取逆否命题)　等价于公理1

# 定理26

定理26：$\vdash A \to (B \to (A \land B))$

**证明思路1：** 由$\vdash A \land B \to A \land B$，使用定理23直接得证

**证明思路2：**

定理23：$\vdash A \land B \to C$ 当且仅当$\vdash A \to (B \to C)$

$$(A \to \neg B) \to (A \to \neg B)$$ 定理1

$$\Big\downarrow \text{前件互换定理2}$$

$$A \to ((A \to \neg B) \to \neg B)$$

$$\Big\downarrow \text{定理15}$$

$$A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$$

$$\Big\downarrow \text{形式变换}$$

$$A \to (B \to (A \land B))$$

# 定理 27

定理27： $\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \land C))$

证明思路: 发现三个蕴含式的前件都是一样的。

**证明：**

定理26： $\vdash A \to (B \to (A \land B))$

（1） $B \to (C \to B \land C)$ 定理26

（2） $(B \to (C \to (B \land C))) \to$

$((A \to B) \to (A \to (C \to (B \land C))))$加前件定理2

（3） $(A \to B) \to (A \to (C \to (B \land C)))$ （1）和（2）用rmp分离规则

（4） $((A \to (C \to (B \land C)))) \to ((A \to C) \to (A \to (B \land C)))$ 公理2

（5） $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \land C)))$ （3）和（4）用三段论

$A_2: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

# 定理27另一种证明方法

定理27：$\vdash (A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B \wedge C))$

**证明：**

（1） $B \to (C \to (B \wedge C))$ 定理26

（2） $(B \to (C \to (B \wedge C))) \to (A \to (B \to (C \to (B \wedge C))))$ 公理1

（3） $(A \to (B \to (C \to (B \wedge C)))) \to ((A \to B) \to (A \to (C \to (B \wedge C))))$ 公理2

（4） $(B \to (C \to (B \wedge C))) \to$

$((A \to B) \to (A \to (C \to (B \wedge C))))$ （2）和（3）用三段论定理8

（5） $(A \to B) \to (A \to (C \to (B \wedge C)))$ 由（1）和（4）用分离规则

（6） $((A \to (C \to (B \wedge C))) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$ 公理2

（7） $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to (B \wedge C)))$ （5）和（6）用三段论定理8

# 定理28

定理28：$\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$, 其中$\vdash P \leftrightarrow Q$即$\vdash P \rightarrow Q$且$\vdash Q \rightarrow P$.

**证明：** $A \vee B \rightarrow B \vee A \;\Leftrightarrow\; (\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow A)$　定理14

反向也是同理。

$B \vee A \rightarrow A \vee B \;\Leftrightarrow\; (\neg B \rightarrow A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$　定理15

# 定理29

定理29：$\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A \quad \Leftrightarrow \quad \neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A)$

**证明：**

（1）$(B \to \neg A) \to (A \to \neg B)$ 定理15

（2）$((B \to \neg A) \to (A \to \neg B)) \to$

$$(\neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A))$$ 定理13

（3）$\neg(A \to \neg B) \to \neg(B \to \neg A)$ （1）和（2）用rmp分离规则

# 基本定理

定理23：$\vdash A \wedge B \rightarrow C$ 当且仅当$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$√

定理24：$\vdash A \wedge B \rightarrow A$ √

定理25：$\vdash A \wedge B \rightarrow B$ √

定理26：$\vdash A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ √

定理27：$\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B \wedge C))$√

定理28：$\vdash A \vee B \leftrightarrow B \vee A$√

定理29：$\vdash A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$√