数理逻辑

第5讲 联结词的扩充与规约

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

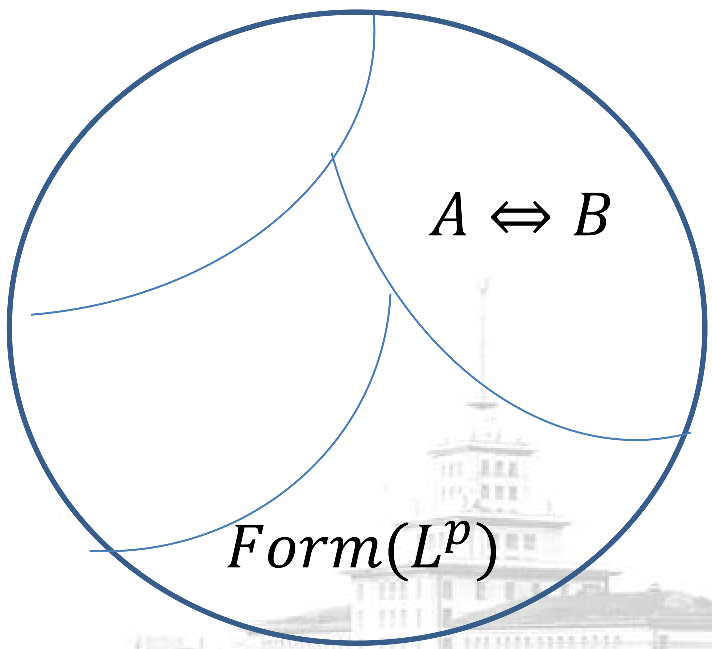
2022年11月

主要内容

1. n元联结词
2. 联结词的表示与完备

n元联结词的个数

命题：n元命题公式的全体可以划分为2^{2^n}个等价类，每一类中的公式相互逻辑等价，都等价于它们公共的**主合取范式（主析取范式）**。



从真值表的角度，$A = B$

p_1	p_2	…	p_n	A
0	0	…	0	0
0	0	…	1	0
…	…	…	…	…
1	1	…	0	0
1	1	…	1	0

一元联结词

$n=1$，即 $2^{2^1} = 4$种

表：一元联结词

p	$\Delta_1(p)$	$\Delta_2(p)$	$\Delta_3(p)$	$\Delta_4(p)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

其中, Δ_1,Δ_4为常联结词, Δ_2为幺联结词, Δ_3为否定词。

$$\Delta_1(p) \Leftrightarrow f,\quad \Delta_4(p) \Leftrightarrow t$$

$$\Delta_2(p) \Leftrightarrow p,\quad \Delta_3(p) \Leftrightarrow \neg p$$

二元联结词

$n=2$，即 $2^{2^2}=16$种

表：二元联结词

p	q	$*_1$	$*_2$	$*_3$	$*_4$	$*_5$	$*_6$	$*_7$	$*_8$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	$*_9$	$*_{10}$	$*_{11}$	$*_{12}$	$*_{13}$	$*_{14}$	$*_{15}$	$*_{16}$
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$$p *_i q = \neg(p *_{17-i} q),\ i=1,2,\cdots,8$$

二元联结词的个数

我们有下面的等式:

$p *_1 q \Leftrightarrow 0$，$p *_{16} q \Leftrightarrow 1$, 即$*_1$，$*_{16}$为**常联结词**

$p *_4 q \Leftrightarrow p$，$p *_6 q \Leftrightarrow q$, 即$*_4$，$*_6$为**投影联结词**

$p *_{13} q \Leftrightarrow \neg p$，$p *_{11} q \Leftrightarrow \neg q$, 即$*_{13}, *_{11}$为**二元否定词**

$p *_9 q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$，$*_9$称为**或非词**，用记号↓表示, 即$p \downarrow q \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$

$p *_{15} q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$, $*_{15}$称为**与非词**，用记号↑表示,即$p \uparrow q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

$p *_3 q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$, $p *_5 q \Leftrightarrow \neg(q \rightarrow p)$ 即$*_3$, $*_5$为**蕴含否定词**

$p *_7 q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee (\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$

$*_7$称为**异或词**，用记号$\bar{\vee}$（或者$\oplus$，$\forall$）表示，即

$$p \bar{\vee} q \Leftrightarrow p \oplus q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

除此之外,$*_2$为$\wedge$，$*_8$为$\vee$，$*_{12}$，$*_{14}$为$\rightarrow$，$*_{10}$为$\leftrightarrow$

二元联结词

$$p *_7 q \Leftrightarrow \neg(p \leftrightarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q)$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\neg(p \wedge q) \wedge (p \vee q)}$$

$$\Leftrightarrow ((\neg p \vee \neg q) \wedge p) \vee ((\neg p \vee \neg q) \wedge q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge p) \vee (\neg q \wedge p) \vee (\neg p \wedge p) \vee (\neg q \wedge q)$$

$$\boldsymbol{\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)}$$

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

(对合律) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

联结词的表示与完备词组

定义：联结词的可表示

称n元联结词h是由m个联结词$g_1, g_2, \cdots, g_m$可表示的，如果$h(p_1, p_2, \ldots, p_n) \Leftrightarrow A$，而$A$中所含的联结词仅取自$g_1, g_2, \cdots, g_m$。

命题：任何一个一元、二元联结词都可以通过¬，∨，∧表示出来。

理解：（1）**范式定理中任何一个命题公式，都存在与之等价的合取和析取范式**。

（2）消去**蕴涵与等价**

联结词的表示与完备词组

- 若联结词$\{g_1, g_2, \cdots, g_m\}$可表示所有一元、二元联结词时，称其为**完备联结词组**。
- $\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词组。
- 有没有长度更小的完备联结词组?

联结词的表示与完备词组

命题：$\{\neg, \rightarrow\}$是完备联结词组。

思路：因为$\{\neg, \wedge, \vee\}$是完备的联结词组，只需要证明$\{\neg, \vee, \wedge\}$可被$\{\neg, \rightarrow\}$ 所表示的，就可以证明$\{\neg, \rightarrow\}$是完备的联结词组。

证明：（1）$\neg p \Leftrightarrow \neg p$

（2）$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$　（**对合律**$\neg\neg A \Leftrightarrow A$）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$（**德摩根律**$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$）

$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$　（$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$）

（3）$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg p \vee q$（**对合律**$\neg\neg A \Leftrightarrow A$）

$\Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$（$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$）

因此，$\{\neg, \rightarrow\}$是完备的联结词组。

联结词的表示与完备词组

命题：$\{\Delta_1, \rightarrow\}$是完备联结词组。

思路：因为$\{\neg, \vee, \wedge\}$是完备的联结词组，只需要证明$\{\neg, \vee, \wedge\}$可被$\{\Delta_1, \rightarrow\}$所表示的，就可以证明$\{\Delta_1, \rightarrow\}$是完备联结词组。

证明：（1）$\neg p \Leftrightarrow \neg p \vee \Delta_1(p)$（析取永假项，真值不变，同一律$A \vee 0 \Leftrightarrow A$）

$\Leftrightarrow p \rightarrow \Delta_1(p)$（$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$）

（2）$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$（对合律$\neg\neg A \Leftrightarrow A$）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$（德摩根律$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$）

$\Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q)$（$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$）

$\Leftrightarrow (p \rightarrow \neg q) \rightarrow \Delta_1(p \rightarrow \neg q)$（利用(1)）

$\Leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow \Delta_1(q)) \rightarrow \Delta_1(p \rightarrow (q \rightarrow \Delta_1(q))$（两次利用(1)）

（3）$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg p \vee q \Leftrightarrow \neg p \rightarrow q$（对合律$\neg\neg A \Leftrightarrow A$，$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$）

$\Leftrightarrow (p \rightarrow \Delta_1(p)) \rightarrow q$（利用(1)）

因此，$\{\Delta_1, \rightarrow\}$是完备联结词组。

联结词的表示与完备词组

命题：$\{\downarrow\}$(或非) 是完备联结词组。

证明：（1）$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p)$ （**幂等律**$A \vee A \Leftrightarrow A$**和替换定理**）

$\Leftrightarrow \text{�} \downarrow p$ （或非定义）

（2）$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$ （**对合律**$\neg\neg A \Leftrightarrow A$）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$（**德摩根律**$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$）

$\Leftrightarrow \neg\text{�} \downarrow \neg q$ （或非定义）

$\Leftrightarrow (\text{�} \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$（**利用(1)**）

（3）$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$ （**对合律**$\neg\neg A \Leftrightarrow A$）

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q))$

$\Leftrightarrow \neg(p \downarrow q)$（或非定义）

$\Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$（**利用(1)**）

因此，$\{\downarrow\}$是完备联结词组。

联结词的表示与完备词组

命题：$\{\uparrow\}$ (与非)是完备联结词组。

证明：（1）$\neg p \Leftrightarrow \neg(p \wedge p)$ （**幂等律**$A \wedge A \Leftrightarrow A$**和替换定理**）

$\Leftrightarrow p \uparrow p$（与非定义）

（2）$p \wedge q \Leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$ （**对合律**$\neg\neg A \Leftrightarrow A$）

$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q))$

$\Leftrightarrow \neg(p \uparrow q)$ （与非定义）

$\Leftrightarrow ((p \uparrow q)) \uparrow ((p \uparrow q))$（**利用（1）**）

（3）$p \vee q \Leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$ （**对合律**$\neg\neg A \Leftrightarrow A$）

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \wedge \neg q)$ (**德摩根律**$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$)

$\Leftrightarrow \neg p \uparrow \neg q$（与非定义）

$\Leftrightarrow (p \uparrow p) \uparrow (q \uparrow q)$（**利用（1）**）

因此，$\{\uparrow\}$是完备联结词组。

联结词的表示与完备词组

例子：用$\{\uparrow\}$表示$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r$。

解：$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg r$

$\Leftrightarrow(\neg$ � $\vee \neg q) \rightarrow \neg r$ （**消去蕴涵**$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$）

$\Leftrightarrow\neg(\neg$ � $\vee \neg q) \vee \neg r$（**再次消去蕴涵**）

$\Leftrightarrow\neg\neg($� $\wedge q) \vee \neg r$ （**德摩根律**$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$）

$\Leftrightarrow\neg($� $\uparrow q) \vee \neg r$ （**与非的定义**）

$\Leftrightarrow\neg(($� $\uparrow q) \wedge r)$ （**德摩根律**$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$）

$\Leftrightarrow($� $\uparrow q) \uparrow r$ （**与非的定义**）

联结词的表示与完备词组

命题：任何n元联结词$h(p_1, p_2, \cdots, p_n)$都可以通过联结词$\{\neg, \rightarrow\}$表示出来。

证明思路：使用第一数学归纳法，$n = 1,2$时，显然成立。因为$\{\neg, \rightarrow\}$是完备联结词组，即可以表示所有一元、二元联结词。假设任何n-1元联结词可以通过联结词$\{\neg, \rightarrow\}$表示。只需证明，

$$\boldsymbol{h(p_1, p_2, \cdots, p_n) \Leftrightarrow (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_n)) \wedge (\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_n))}$$

联结词的表示与完备词组

证明：对n用第一数学归纳法。

当$n = 1,2$时，显然成立，假设任何n-1元联结词都可以通过$\{\neg, \rightarrow\}$来表示

只需证明，$h(p_1, p_2, \cdots, p_n) \Leftrightarrow (p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_n)) \wedge (\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_n))$

1) 对于任意的指派v，当$(h(p_1, p_2, \cdots, p_n))^v = 1$时，

若 $p_1^v = 1$, 则$(\neg p_1)^v = 0$, 那么，$(\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_n))^v = 1$

由于 $(h(p_1, p_2, \cdots, p_n))^v = h(p_1^v, p_2^v, \cdots, p_n^v)$

$= h(1, p_2^v, \cdots, p_n^v) = (h(1, p_2, \cdots, p_n))^v = 1$

则，$(p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_n))^v = 1$

故，$((p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_n)) \wedge (\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_n)))^v = 1$

若 $p_1^v = 0$, 则$(\neg p_1)^v = 1$, 那么，$(p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_n))^v = 1$

由于 $(h(p_1, p_2, \cdots, p_n))^v = h(p_1^v, p_2^v, \cdots, p_n^v)$

$= h(0, p_2^v, \cdots, p_n^v) = (h(0, p_2, \cdots, p_n))^v = 1$

则，$(\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_n)) = 1$

故，$((p_1 \rightarrow h(1, p_2, \cdots, p_n)) \wedge (\neg p_1 \rightarrow h(0, p_2, \cdots, p_n)))^v = 1$

联结词的表示与完备词组

证明：对n用数学归纳法。

当$n = 1,2$时，显然成立

只需证明，$h(p_1,p_2,\cdots,p_n)\Leftrightarrow(p_1 \rightarrow h(1,p_2,\cdots,p_n)) \wedge(\neg p_1 \rightarrow h(0,p_2,\cdots,p_n))$

2) 对于任意的指派v，当$(h(p_1,p_2,\cdots,p_n))^v = 0$时，

若 $p_1^v = 1$, 则 （**课下自己证明**）

若 $p_1^v = 0$, 则 （**课下自己证明**）

对偶式（选修）

定义：对偶式

在**仅含有**联结词¬，∨，∧的命题公式A中，将∧换成∨，∨换成∧，0换成1，1换成0，得到的公式称为A的对偶式，记为A^*。

原式A	对偶式A^*
$(p \wedge \neg q) \vee r$	$(p \vee \neg q) \wedge r$
$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$	$\neg p \wedge (q \vee \neg r)$
$\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r)$	$\neg((\neg p \vee \neg q) \wedge \neg r)$

$(A^*)^* \Leftrightarrow A$ $(A^*)^* = A$

$(\neg A)^* = \neg A^*$ 否定词对于对偶式不起作用

内否式（选修）

定义：内否式

设有命题公式$A\ (p_1, p_2, \cdots, p_n)$，对$A$中的$p_i (i = 1,2, \cdots, n)$用$\neg p_i$做代入，所得的结果为$A$的内否式，记为$A^-$。

原式A	内否式A^-
$(p \wedge \neg q) \vee r$	$(\neg p \wedge \neg\neg q) \vee \neg r$
$\neg p \vee (q \wedge \neg r)$	$\neg\neg p \vee (\neg q \wedge \neg\neg r)$
$\neg((\neg p \wedge \neg q) \vee \neg r)$	$\neg((\neg\neg p \wedge \neg\neg q) \vee \neg\neg r)$

$(A^-)^- \Leftrightarrow A$

$(\neg A)^- = \neg A^-$

(德摩根律) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$; $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

相关定理（选修）

1、$(A^{-})^{-} \Leftrightarrow A$

2、$(\neg A)^{*} \Leftrightarrow \neg(A^{*}) \Leftrightarrow A^{-}$

3、$\neg A \Leftrightarrow (A^{*})^{-} \Leftrightarrow (A^{-})^{*}$

4、$\neg\, (A^{-}) \Leftrightarrow (\neg A)^{-}$

5、$(\neg A)^{-} \Leftrightarrow A^{*}$

6、$(A^{*})^{*} = A$

定理：若$A \Leftrightarrow B$，则$A^{*} \Leftrightarrow B^{*}$。

证明：因为$A \Leftrightarrow B$，推得$\neg A \Leftrightarrow \neg B$（替换定理），

再由$\neg A \Leftrightarrow (A^{*})^{-}$，推得$(A^{*})^{-} \Leftrightarrow (B^{*})^{-}$，

最终推得$A^{*} \Leftrightarrow B^{*}$。

是否能够推出$A^{-} \Leftrightarrow B^{-}$？

对偶式（选修）

定理： 若$A \to B$永真， 则$B^* \to A^*$也永真。

证明： 若$A \to B$永真，则$\neg B \to \neg A$永真。（逆否命题）

由（3）： $\neg A \Leftrightarrow (A^*)^-$，得 $(B^*)^- \to (A^*)^-$永真 。

由永真式的定义：任意的赋值（指派），$(B^*)^- \to (A^*)^-$都为真

那么两边都取内否式，蕴含式仍然是永真的，

得$B^* \to A^*$。得证。

例： $A(p, q, r)$ 为永真，那么$A(\neg p, \neg q, \neg r)$ 为永真。

对偶式（选修）

定理： 若$A \to B$永真，则$B^* \to A^*$也永真。

例：$p \land q \to p$为永真，那么$p \to p \lor q$为永真。

总结

- 命题与联结词
- 范式
- 联结词的扩充与归约
- 2.4 对偶式（选修）