数理逻辑

# 第6讲 命题演算形式系统-概念

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年5月

# 上章内容回顾

- 真值表方法研究命题逻辑

  - 命题公式的赋值和分类（重言式、矛盾式、可满足式）
  - 命题公式的逻辑蕴含和逻辑等价
  - 等价命题公式的共同规范化形式（范式、主范式）
  - 联结词的扩充与规约
  - 命题公式的对偶式和内否式（选修）

# 命题演算形式系统

**形式系统**

- 形式系统的语言：基本符号集和语法规则
- 形式系统的公理：其余命题推导的出发点
- 形式系统推理规则：公理推导定理
- 形式系统的定理：推理结果

- **推理**：从前提出发推出结论的思维过程。
- **前提**：是已知的命题公式集合。
- **结论**：从前提出发应用推理规则推出的命题公式。

什么样的推理是正确的呢?

# 主要内容

1. 形成部分：语言
2. 推理部分：公理和推理规则

# 形式语言的定义

- **字母表:** 字符（symbol）的集合称为字母表。命题逻辑中字母表往往包含$Atom(L^p)$。
- **字符串**：由字母表中的字符构成的有限长的序列称为字母表上的字符串（symbol string）。字符串中字符的个数称为字符串的长度。长度为0的字符串称为空串（empty string），$\epsilon$表示。空串是任何字符的字符串，是一个特殊的字符串。若$A$是字母表，则用$A^*$表示所有字符串的集合（包含空串）。
- $A^*$的子集称为形式语言。

# 语言

命题演算(Propositional Calculus, PC)的字母表是集合:

$$\sum = \{(,), \neg, \rightarrow, p, q, r, p_1, p_2, p_3, \cdots\}$$

注释:

(1) 三个部分构成: 助记符 + 联结词 + $Atom(L^p)$。

(2) $\{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \cdots\}$ 就是 $Atom(L^p)$。

(3) $\{\neg, \rightarrow\}$是联结词。为什么只有两个联结词?

(4) {(,)}是助记符。目的是体现公式的层次感。

# 语言

字母表：$\sum = \{(,), \neg, \rightarrow, p, q, r, p_1, p_2, \cdots\}.$

助记符+完备联结词组+ $Atom(L^p)$

$\sum^* = \{\varepsilon, (,), \neg, p, q, r, p \rightarrow, p(, \cdots\}$

**PC的公式（递归定义）：**

（1） $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \cdots$为（原子）公式。

（2）如果$A, B$ 是公式，那么$(\neg A)$，$(A \rightarrow B)$ 也是公式。

（3）只有（1）和（2）确定的$\sum^*$的字符串才是公式。 **（有限次）**

在不产生歧义的情况下，公式中最外层的括号可以省略。

# 语言

例1：$\rightarrow p$， $p($， $(p \wedge \neg q) \vee r$，是不是PC中的公式。

- $\rightarrow p$ 和$p($是$\Sigma^*$的子集，但是不满足PC的公式的定义。
- $(p \wedge \neg q) \vee r$ 不是$\Sigma^*$的子集，也不是PC中的公式。

**PC的公式（递归定义）**：

（1） $p, q, r, p_1, p_2, p_3, \cdots$为（原子）公式。

（2）如果$A, B$ 是公式，那么$(\neg A)$，$(A \rightarrow B)$ 也是公式。

（3）只有（1）和（2）确定的$\Sigma^*$的字符串才是公式。 **（有限次）**

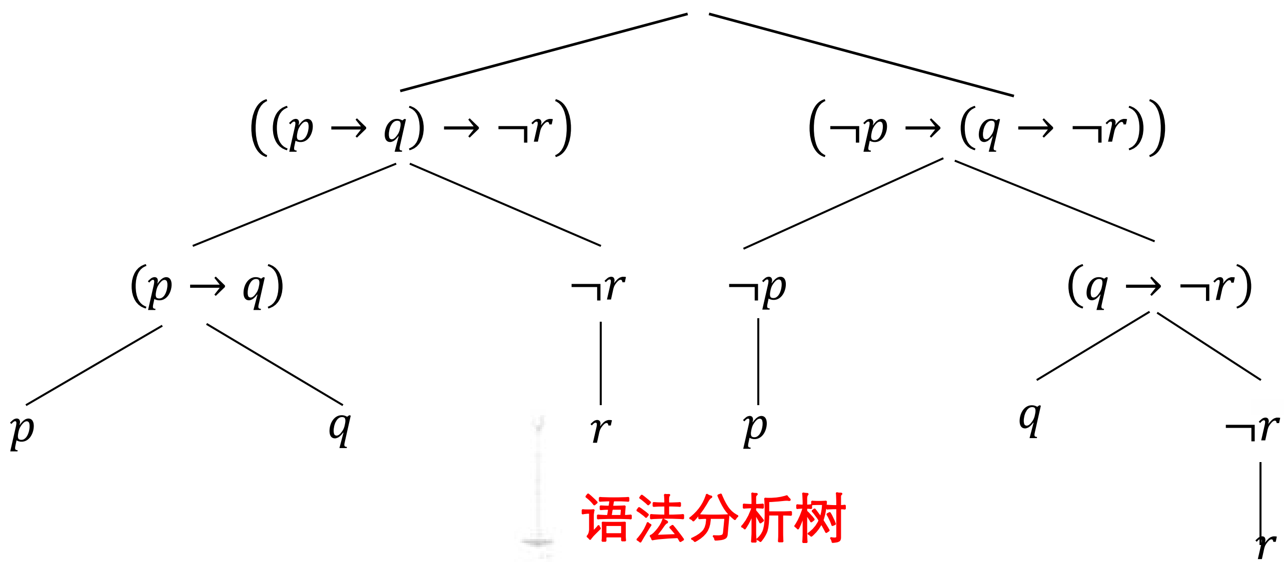
在不产生歧义的情况下，公式中最外层的括号可以省略。

# 语言

**例2：** 字符串$l$的长度$|l|$是？字符串$l$是公式吗？

$$l = ((p \to q) \to \neg r) \to (\neg p \to (q \to \neg r)) \in \Sigma^*$$

$$|l| = 22$$




语法分析树

$p, q, r, \neg r, p \to q, (p \to q) \to \neg r, \neg p, (q \to \neg r),$
$(\neg p \to (q \to \neg r)), ((p \to q) \to \neg r), \to (\neg p \to (q \to \neg r))$

字符串$l$的形成过程，形成过程的长度为10，形成过程不唯一，长度不固定

# 主要内容

1. 形成部分：语言
2. 推理部分：公理和推理规则

# PC系统中的公理

**公理集合:**

（1） $A_1$: $A \to (B \to A)$

（2） $A_2$: $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

（3） $A_3$: $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

**注释：** （1）$A, B, C$代表的是PC中的公式。

（2）三个公理实际上表示了三个公理模板

例3：$\boldsymbol{A_1: A \to (B \to A)}$

- 当$A = p,\ B = q$，$p \to (q \to p)$
- 当$A = p \to q,\ B = q$，$(p \to q) \to (q \to (p \to q))$
- 当$A = A,\ B = A \to A$，$A \to ((A \to A) \to A)$

# PC系统中的公理

例4: $\boldsymbol{A_2}: (\boldsymbol{A} \rightarrow (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C})) \rightarrow ((\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{B}) \rightarrow (\boldsymbol{A} \rightarrow \boldsymbol{C}))$

- 当$A = p,\ B = q, C = r$

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

- 当$A = p,\ B = p \rightarrow q, C = p \rightarrow r$

$$(p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))) \rightarrow ((p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow (p \rightarrow r)))$$

例5: $\boldsymbol{A_3}: (\neg \boldsymbol{A} \rightarrow \neg \boldsymbol{B}) \rightarrow (\boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{A})$

- 当$A = p \rightarrow q,\ B = p \rightarrow r$

$$(\neg(p \rightarrow q) \rightarrow \neg(p \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

# PC系统中的公理

**三个公理的含义：**

$$A_1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

含义：蕴含式后件为真，那么蕴含式为真一定成立

$$A_2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

含义：由$A \rightarrow (B \rightarrow C)$，$A \rightarrow B$，$A$三个条件成立，$A$一定可以推出$C$成立

$$A_3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

含义：逆否命题成立，一定可以推出原命题成立

# 主要内容

1. 形成部分：语言
2. 推理部分：公理和推理规则

# 推理规则

**推理规则或分离规则（Modus Ponens）：**

若有$A$和$A \rightarrow B$成立，则必有结论$B$成立，可形式化表示为:

$$r_{mp}\colon \frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

**注释：**

（1）如果$A$和$A \rightarrow B$为真，那么必有$B$为真。

（2）推理规则用于从已知的公理和已知定理，推导新的定理。

# 证明

**证明的定义：** 称下列公式序列为公式$A$ 在PC 中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，$A_i$ **或者**是PC中的公理，**或者**是 $A_j (j < i)$，**或者**$A_j, A_k (j,k < i)$用分离规则导出的。**其中$A_m$就是公式$A$。**

**注释：** $A_i$ 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或已知定理；

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中的某一个；

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的。

# 定理

**定理的定义：** 称序列$A$是PC中的定理，记为$\vdash_{PC}A$，如果公式$A$在PC中有一个证明。

**注释：**

（1）符号$\vdash$表示其后的公式在PC中是可证明的。

（2）公理一定是定理；公理本身是长度为1的定理。

（3）证明序列$A_1, A_2, \cdots, A_m$中的$A_1$一定是公理（**或已知定理**）。

（4）证明序列$A_1, A_2, \cdots, A_m$中的任何一个都是定理，即$\vdash_{PC}A_i, i = 1,2,\cdots,m$

# 演绎

**演绎的定义：** 设$\Gamma$为PC的公式集合，称以下公式序列为公式$A$的一个以$\Gamma$为前提在PC中的演绎：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的$i \in \{1,2,\cdots,m\}$，$A_i$**或者是$\Gamma$的成员，**或者是PC中的公理，或者是$A_j (j < i)$，或者$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。其中$A_m$就是公式$A$。

**证明的定义：** 称下列公式序列为公式$A$在PC中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的$i \in \{1,2,\cdots,m\}$，$A_i$或者是PC中的公理，或者是$A_j (j < i)$，或者$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。**其中$A_m$就是公式$A$。**

# 演绎结果

**演绎结果：** 称$A$是前提 $\Gamma$在PC 中的演绎结果，记为$\Gamma\vdash_{PC}A$，如果公式$A$有一个以 $\Gamma$ 为前提在PC 中的演绎。

- 如果$\Gamma=\{B\}$，则用$B\vdash_{PC}A$表示$\Gamma\vdash_{PC}A$；（**去掉了{}**）
- 如果$B\vdash_{PC}A$并且$A\vdash_{PC}B$，则记为 $A\vdash\dashv B$ （ $A$ $B$ 相互演绎）。

**注释**： 若$\Gamma\vdash_{PC}A$，则有$A_1, A_2, \cdots, A_m(=A)$

（1）若$\Gamma=\phi$（空集），$\Gamma\vdash_{PC}A$即$\phi\vdash_{PC}A$，那么$\vdash_{PC}A$，即演绎退化为证明。

（2）若$A\in\Gamma$，则必有$\Gamma\vdash_{PC}A$（此时的序列是$A$），

（3）$\{A\}\vdash_{PC}A$，$\{A,B,C\}\vdash_{PC}A$，$\{A,B,C\}\vdash_{PC}B$，$\{A,B,C\}\vdash_{PC}C$ 。