数理逻辑

第4讲 命题公式的范式

授课教师：蒋琳

e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年11月

主要内容

1. 范式定义
2. 范式定理
3. 范式求解
4. 主范式定义
5. 主范式求解
6. 弄假指派与范式
7. 主合取范式与主析取范式的关系
8. 主范式应用

范式定义

里析外合 里合外析

- 命题公式B称为命题公式A的**合取**范式（conjunctive normal form），如果$B \Leftrightarrow A$，并且B呈如下形式：

$$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$$

其中$C_i(i = 1,2,\cdots,m)$称为B的**子句**，他们形如

$$L_1 \vee L_2 \vee \cdots \vee L_n \qquad L_j(j = 1,2,\cdots,n)$$

为原子公式或者原子公式的否定。称L_j为子句的**文字**。

范式定义

- 文字(literal)：命题变元及其否定（正文字和负文字）
- 子句(clause)：文字的析取式或合取式
- 析取式子句的合取式：合取范式
- 合取式子句的析取式：析取范式

1. $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r)$

2. $(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (\neg q \wedge r)$

3. $p \vee q \vee r$

范式定理

范式定理：对任意公式A，均可以做出它的合取（析取）范式

- 消去蕴含和等价
- 减少否定词的辖域
- 逐次使用**合取对析取**，**析取对合取**满足分配律，将公式化成合取或析取范式

常用的逻辑等价式

- 设A, B, C是任意命题公式，分别用1和0表示永真式(重言式)和永假式(矛盾式)

1. (对合律) $\neg\neg A \Leftrightarrow A$
2. (幂等律) $A \wedge A \Leftrightarrow A; A \vee A \Leftrightarrow A$
3. (交换律) $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A; A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
4. (结合律) $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C); (A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C)$
5. (分配律) $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C); A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
6. (吸收律) $A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A; A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A$
7. (德摩根律) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B; \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$
8. (同一律) $A \wedge 1 \Leftrightarrow A; A \vee 0 \Leftrightarrow A$
9. (零一律) $A \wedge 0 \Leftrightarrow 0; A \vee 1 \Leftrightarrow 1$
10. (排中律) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow 0; A \vee \neg A \Leftrightarrow 1$

范式求解

逻辑等价的推论：设$A, B \in Form(L^P)$，$A \Leftrightarrow B$当且仅当对任意的赋值v都有$A^v = B^v$

- 消去蕴含和等价
  - $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$
  - $A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
  - $A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$

① $(\neg A)^v = 1 - A^v$
② $(A \wedge B)^v = A^v \cdot B^v$
③ $(A \vee B)^v = A^v + B^v - A^v \cdot B^v$
④ $(A \to B)^v = 1 - A^v + A^v \cdot B^v$
⑤ $(A \leftrightarrow B)^v = A^v \cdot B^v + (1 - A^v) \cdot (1 - B^v)$

证明：对任意的的指派v有：

$$((A \to B) \wedge (B \to A))^v = (A \to B)^v (B \to A)^v$$

$$= (1 - A^v + A^v B^v)(1 - B^v + A^v B^v)$$

$$= 1 - A^v + A^v B^v - B^v + A^v B^v - A^v B^v + A^v B^v - A^v B^v + A^v B^v$$

$$= (1 - A^v)(1 - B^v) + A^v B^v$$

$$= (A \leftrightarrow B)^v$$

故$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$成立。

范式求解

- 减少否定词的辖域
  - $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$（**德摩根律**）
  - $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$（**德摩根律**）
  - $\neg\neg \mathrm{A} \Leftrightarrow A$（**对合律**）
- 逐次使用合取对析取，析取对合取满足分配律，将公式化成合取或析取范式
  - $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$（**分配律，**合取对析取）
  - $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$（**分配律，**析取对合取）

范式求解

例：做出$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$的合取范式和析取范式

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \qquad A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \wedge r) \quad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee (\neg q \wedge r)$（析取范式）

$$(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \wedge r)$$

$$\neg p \vee (\neg q \vee (\neg q \wedge r)) \qquad A \vee A \Leftrightarrow A$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$（合取范式）

范式求解

例：做出$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$的合取范式和析取范式

$$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \qquad A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \wedge r) \qquad \neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$$

$\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee (\neg q \wedge r)$（析取范式）

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$（合取范式） $A \vee A \Leftrightarrow A$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

主范式的定义

- 主范式：命题公式B称为命题公式A的**主合取**（**主析取**）范式（major conjunctive(major disjunctive) normal form），如果
  - B是A的**合取**（**析取**）范式
  - B中的每一个子句均出现A中**所有**命题变元且**仅**出现一次
- 极大项：主合取范式中的合取项
- 极小项：主析取范式中的析取项

$$(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \wedge (\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}) \wedge (\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \vee \neg \boldsymbol{r})$$

$$(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r})$$

有关极大项的命题

- 含有n个命题变元的命题公式$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$共有2^n个极大项
- 每个极大项有2^n种真值指派，但指派为0的只有一个
- 对同一个指派，任意两个不同的极大项的真值取值不能同为0
- 所有2^n个极大项的合取式逻辑等价于0

有关极小项的命题

- 含有n个命题变元的命题公式$A(p_1,p_2,\cdots,p_n)$共有2^n个极小项
- 每个极小项有2^n种真值指派，但指派为1的只有一个
- 对同一个指派，任意两个不同的极小项的真值取值不能同为1
- 所有2^n个极小项的析取式逻辑等价于1

- 3个命题变元，极大项有多少个?

$$
\begin{aligned}
&(p \vee q \vee r) \\
\wedge&(p \vee q \vee \neg r) \\
\wedge&(p \vee \neg q \vee r) \\
\wedge&(p \vee \neg q \vee \neg r) \\
\wedge&\boxed{(\neg p \vee q \vee r)} \\
\wedge&(\neg p \vee q \vee \neg r) \\
\wedge&(\neg p \vee \neg q \vee r) \\
\wedge&(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \\
&\Leftrightarrow 0
\end{aligned}
$$

- 3个命题变元，极小项有多少个?

$$
\begin{aligned}
&(p \wedge q \wedge r) \\
\vee&(p \wedge q \wedge \neg r) \\
\vee&(p \wedge \neg q \wedge r) \\
\vee&(p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
\vee&(\neg p \wedge q \wedge r) \\
\vee&\boxed{(\neg p \wedge q \wedge \neg r)} \\
\vee&(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\
\vee&(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\
&\Leftrightarrow 1
\end{aligned}
$$

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

极大项　　极小项　　析取项　　合取项　　析取式　　合取式

主范式求解步骤

- 求解命题公式的合取（析取）范式
- 除去合取（析取）范式种所有永真、永假项
- 合并相同的变元与相同的项
- 对合取（析取）项中缺少的变元r，通过析取（合取）永假式（永真式）$r \wedge \neg r(r \vee \neg r)$并用分配律补齐

主范式求解

- 求解命题公式的合取（析取）范式
- 除去合取（析取）范式种所有永真、永假项
- 合并相同的变元与相同的项
- 对合取（析取）项种缺少的变元r，通过析取（合取）永假式（永真式）$r \land \neg r(r \lor \neg r)$并用分配律补齐

例：求出$(p \land q) \to (\neg q \land r)$的主合取范式

$A \land 1 \Leftrightarrow A; A \lor 0 \Leftrightarrow A$

$(p \land q) \to (\neg q \land r) \Leftrightarrow \neg(p \land q) \lor (\neg q \land r)$ $\quad A \to B \Leftrightarrow \neg A \lor B$

$\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q) \lor (\neg q \land r)$ $\quad \neg(A \land B) \Leftrightarrow \neg A \lor \neg B$

$\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q \lor \neg q) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$（合取范式） $\quad A \lor A \Leftrightarrow A$

$\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q \lor (r \land \neg r)) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r) \land (\neg p \lor \neg q \lor r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \lor \neg q \lor r) \land (\neg p \lor \neg q \lor \neg r)$（主合取范式）

$A \lor (B \land C) \Leftrightarrow (A \lor B) \land (A \lor C)$ $\quad$ 交换律、幂等律

主范式求解

例：求出$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$的主析取范式。

$(p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \vee (\neg q \wedge r)$ （**析取范式**）

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (\neg q \wedge (p \vee \neg p)) \vee (\neg q \wedge r \wedge (p \vee \neg p))$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (p \wedge \neg q \wedge (r \vee \neg r)) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ （**主析取范式**）

弄假指派与范式

命题1：对于一个命题公式的任何一个指派，这个指派可以**弄假**一个子句，这个子句包含命题公式中的**所有命题变元**且每个命题变元只被包含一次。在这类子句中，这个指派不能弄假任何其他的子句，从而弄真所有其他的子句。

$$A = A(p,q,r) \qquad \alpha = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\neg p \vee \neg q \vee r)^{\alpha} = 0$$

命题2：对于一个公式的任何一个**弄假指派**，则有该命题公式的一个主合取范式中的一个合取项，使得这一个指派**弄假这个合取项**，并且只弄假这个合取项。

$$A = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m \qquad A^{\alpha} = (C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m)^{\alpha} = 0$$

弄假指派与范式

命题3：通过公式的主合取范式可以直接写出公式的弄假指派，这就是公式的**所有**弄假指派。

证明：不妨假设任意命题公式A的主合取范式为$C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$

其中，$C_1, C_2, \cdots, C_m$为所有极大项，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$为对应极大项的弄假指派

如果存在$\alpha \neq \alpha_1, \alpha \neq \alpha_2, \cdots, \alpha \neq \alpha_m$, $\boldsymbol{A^{\alpha} = 0}$。根据命题2则必有$C_1^{\alpha} = 1, C_2^{\alpha} = 1, \cdots, C_m^{\alpha} = 1$

从而$\boldsymbol{A^{\alpha} = (C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m)^{\alpha} = 1}$，这与$A^{\alpha} = 0$**矛盾**，故不存在除$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$外的弄假指派。

弄假指派与主合取范式

命题4：如果已知公式的所有弄假指派，则可以写出该公式的主合取范式。

例：$A = (p \wedge q) \rightarrow (\neg q \wedge r)$

由真值表可知**弄假指派**有

$$\alpha = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}，\ \beta = \begin{pmatrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

弄假指派对应**极大项**为：$\neg p \vee \neg q \vee r, \neg p \vee \neg q \vee \neg r$

所以命题公式的**主合取范式**为：$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$

弄真指派与主析取范式

命题5：如果已知公式的所有弄真指派，则可以写出该公式的主析取范式。

例：$A = (p \wedge q) \to (\neg q \wedge r)$

由真值表可知弄真指派的对应极小项为:

$$\neg p \wedge q \wedge r, \neg p \wedge q \wedge \neg r, \neg p \wedge \neg q \wedge r,$$

$$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r, p \wedge \neg q \wedge r, p \wedge \neg q \wedge \neg r$$

对应的主析取范式为:

$$(\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee$$

$$(p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$$

主范式与指派

定理2.2.2：永真式无主合取范式，永假式无主析取范式。

定理2.2.3：任一命题公式（非永真，非永假）都存在唯一与之等价的主合取范式和主析取范式。

定理2.2.4：设变元$p_1, p_2, \cdots, p_n$的极大项全体为$M_1, M_2, \cdots, M_{2^n}$

A的主合取范式表示为$\wedge_{i\in I} M_i$，则A的主析取范式为$\neg\wedge_{i\in \bar{I}} M_i$，$A$的极大项与极小项的数目之和为$2^n$

• $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$（德摩根律）

主合取范式与主析取范式的关系

已知$A \Leftrightarrow \wedge_{i\in I} M_i$，求证$A \Leftrightarrow \neg \wedge_{i\in \bar{I}} M_i$ $\quad (\neg A)^v = 1 - A^v$

证明：即证对于任意v，$(\wedge_{i\in I} M_i)^v = (\neg \wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1 - (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v$

只需证：$(\wedge_{i\in I} M_i)^v + (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$

设v对应的极大项为M_k，即$(M_k)^v = 0, (M_i)^v = 1 (i \neq k)$

若$k \in I, (\wedge_{i\in I} M_i)^v = 0, (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$

若$k \in \bar{I}, (\wedge_{i\in I} M_i)^v = 1, (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 0$

故有$(\wedge_{i\in I} M_i)^v + (\wedge_{i\in \bar{I}} M_i)^v = 1$

主合取范式与主析取范式的关系

p	q	r	极大项	极小项	
0	0	0	$M_1\,(p \vee q \vee r)$	$(\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$	$\neg M_1$
0	0	1	$M_2\,(p \vee q \vee \neg r)$	$(\neg p \wedge \neg q \wedge r)$	$\neg M_2$
0	1	0	$M_3\,(p \vee \neg q \vee r)$	$(\neg p \wedge q \wedge \neg r)$	$\neg M_3$
0	1	1	$M_4\,(p \vee \neg q \vee \neg r)$	$(\neg p \wedge q \wedge r)$	$\neg M_4$
1	0	0	$M_5\,(\neg p \vee q \vee r)$	$(p \wedge \neg q \wedge \neg r)$	$\neg M_5$
1	0	1	$M_6\,(\neg p \vee q \vee \neg r)$	$(p \wedge \neg q \wedge r)$	$\neg M_6$
1	1	0	$M_7\,(\neg p \vee \neg q \vee r)$	$(p \wedge q \wedge \neg r)$	$\neg M_7$
1	1	1	$M_8\,(\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$	$(p \wedge q \wedge r)$	$\neg M_8$

主合取范式

$$p \wedge q \rightarrow \neg q \wedge r \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \Leftrightarrow M_7 \wedge M_8$$

$$\Leftrightarrow \neg(M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 \wedge M_4 \wedge M_5 \wedge M_6)$$

主析取范式

$$\Leftrightarrow (\neg M_1 \vee \neg M_2 \vee \neg M_3 \vee \neg M_4 \vee \neg M_5 \vee \neg M_6)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

主范式应用

例1：安排三个人A, B, C去完成一项任务，需满足以下条件:

- 若A去，则C也去。
- 若B去，则C不能去。
- 若C不去，则不是A去就是B去。

问A, B, C三人有几种合理的安排方案?

解:

1、分别用P, Q, R表示派A, B, C去。

2、首先写出描述上述条件的命题公式：$(P \to R) \wedge (Q \to \neg R) \wedge (\neg R \to P \vee Q)$

3、做出上述公式的主析取范式

主范式应用

$$A = (P \to R) \land (Q \to \neg R) \land (\neg R \to P \lor Q)$$

$P\ Q\ R$	$P \to R$	$\neg R$	$P \lor Q$	$Q \to \neg R$	$\neg R \to P \lor Q$	A
0 0 0	1	1	0	1	0	0
0 0 1	1	0	0	1	1	1
0 1 0	1	1	1	1	1	1
0 1 1	1	0	1	0	1	0
1 0 0	0	1	1	1	1	0
1 0 1	1	0	1	1	1	1
1 1 0	0	1	1	1	1	0
1 1 1	1	0	1	0	1	0

极小项：$\neg P \land \neg Q \land R$　$\neg P \land Q \land \neg R$　$P \land \neg Q \land R$

主析取范式$A = (\neg P \land \neg Q \land R) \lor (\neg P \land Q \land \neg R) \lor (P \land \neg Q \land R)$

A, B, C三人有三种合理的安排方案。