第11讲 命题演算形式系统的一致性、不完全性和完备性

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年12月

PC系统的合理性

PC的合理性：PC是合理的，即对任意公式集合Γ和公式A, 如果$\Gamma \vdash A$，则$\Gamma \Rightarrow A$。特别是如果A为PC 中的定理($\vdash A$)，则A是永真式($\Rightarrow A$)。

证明：对$\Gamma \vdash A$的演绎序列长度m用归纳法。设$\Gamma \vdash A$演绎序列为$A_1, A_2, \ldots, A_m (= A)$。

（1）当$m = 1$时。序列中只有A，此时A有两种可能情况：

- A为公理。那么A为永真式，从而$\Gamma \Rightarrow A$。
- A为Γ的成员。此时也有$\Gamma \Rightarrow A$。

（2）假设当$m < n$时结论成立

（3）往证$m = n$时成立。此时演绎序列为$A_1, A_2, \ldots, A_n (= A)$。$A$有以下4种可能的情况：

- A为公理。此时，可仿照（1）的情形证明结论成立
- A为Γ中的一员。此时，可仿照（1）的情形证明结论成立
- A为$A_j (j < n)$。由于$\Gamma \vdash A_j$且$j < n$，由（2）知$\Gamma \Rightarrow A_j$即$\Gamma \Rightarrow A$。
- A为A_j, $A_k (j, k < n)$用分离规则导出。不妨设$A_k = A_j \to A$，由于$\Gamma \vdash A_j$且$\Gamma \vdash A_k = A_j \to A$，从而根据（2）知$\Gamma \Rightarrow A_j$，$\Gamma \Rightarrow A_j \to A$。对任意的指派$\alpha$，此指派弄真$\Gamma$中的所有公式，从而弄真$A_j$和$A_j \to A$，从而必把$A$弄真，故$\Gamma \Rightarrow A$成立。

公式集的一致性和完全性定义

公式集的一致性：设Γ是 PC 的一个公式集，如果不存在PC的公式A，使得$\Gamma \vdash A$与$\Gamma \vdash \neg A$同时成立，则称Γ是一致的公式集。

公式集的完全性：设Γ是PC 的一个公式集，如果对任意的公式A，$\Gamma \vdash A$或$\Gamma \vdash \neg A$必有一个成立，则称Γ是一个完全公式集。

如果Γ是一个不一致的公式集，则至少存在一个PC的公式A，使得$\Gamma \vdash A$与$\Gamma \vdash \neg A$同时成立。那么Γ必是一个完全的公式集。

PC系统的一致性和不完全性

定理（PC的一致性）：PC是一致的，即不存在A，使得A和$\neg A$均为PC中的定理。

证明：假设PC不一致，即存在A，$\vdash A$和$\vdash \neg A$均成立，则：

- 根据PC的合理性定理，由$\vdash A$知A为永真式（$\Rightarrow A$）
- 根据PC的合理性定理，由$\vdash \neg A$知$\neg A$为永真式$\Rightarrow \neg A$
- A和$\neg A$同时为永真式存在矛盾，故假设不成立

定理（PC的不完全性）：PC不是完全的，即存在公式A，使得$\vdash A$和$\vdash \neg A$均不能成立。

PC系统的扩充

定义：PC的理论

- PC的理论（theory）指的是如下集合：

$$Th(PC) = \{A \mid \vdash_{PC} A\}$$（定理的集合）

- PC基于前提Γ的扩充（extension）指的是：

$$Th(PC \cup \Gamma) = \{A \mid \Gamma \vdash_{PC} A\}$$（演绎结果的集合）

定理：不一致与完全性

- PC的不一致的扩充必定是完全的，至少有一个公式不是公式一致扩充的定理。
- 特别地，当公式集合Γ不一致的时候，扩充$Th(PC \cup \Gamma)$是完全的；当Γ一致时，至少有一个公式A使得

$$A \notin Th(PC \cup \Gamma)\ \text{即}\ (\Gamma \nvdash A)$$

PC系统的完备性

定理（完备性定理）：PC是完备的，即对任意公式集合Γ和公式A，如果$\Gamma \Rightarrow A$，那么$\Gamma \vdash A$。特别地，如果$\Rightarrow A$，即A永真，那么$\vdash A$，即A是PC 中的一个定理。

PC的合理性：PC是合理的，即对任意公式集合Γ和公式A, 如果$\Gamma \vdash A$，则$\Gamma \Rightarrow A$。特别是如果A为PC 中的定理($\vdash A$)，则A是永真式($\Rightarrow A$) 。

PC系统的完备性

命题1：如果Γ一致且$\Gamma \nvdash A$，那么$\Gamma \cup \{\neg A\}$也是一致的。

命题2：如果Γ一致且$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \cup \{A\}$也是一致的。

命题3：如果Γ一致，那么存在公式集合Δ，使得$\Gamma \subseteq \Delta$，Δ是一致的并且Δ是完全的。

PC系统的完备性

命题1：如果Γ一致且$\Gamma \nvdash A$，那么$\Gamma \cup \{\neg A\}$也是一致的。

证明（用反证法）：

演绎定理：对PC中的任意公式集合Γ和公式A, B, $\Gamma \cup \{A\} \vdash_{PC} B$当且仅当$\Gamma \vdash_{PC} A \to B$。

- 假设$\Gamma \cup \{\neg A\}$不一致，则必有公式B，使得$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash B$并且$\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash \neg B$。
- 由演绎定理知$\Gamma \vdash \neg A \to B$并且$\Gamma \vdash \neg A \to \neg B$，则有以$\Gamma$为前提的以下演绎序列：
  - （1）$\neg A \to B$ 已知条件
  - （2）$\neg A \to \neg B$ 已知条件
  - （3）$(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$ 定理16
  - （4）$(\neg A \to \neg B) \to A$ （1）和（3）用rmp分离规则
  - （5）A （2）和（4）用rmp分离规则
- 由以上演绎序列知$\Gamma \vdash A$，这与$\Gamma \nvdash A$相矛盾，因此假设不成立，即$\Gamma \cup \{\neg A\}$ 也一致。

PC系统的完备性

命题2：如果Γ一致，$\Gamma \vdash A$，那么$\Gamma \cup \{A\}$也是一致的。

证明（用反证法）：

- 假设$\Gamma \cup \{A\}$是不一致，则必有公式B，使得$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$ 且 $\Gamma \cup \{A\} \vdash \neg B$。
- 由演绎定理知$\Gamma \vdash A \to B$并且$\Gamma \vdash A \to \neg B$，则有以$\Gamma$为前提的以下演绎序列：

  （1）$A \to B$ 已知条件

  （2）$A \to \neg B$ 已知条件

  （3）$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ 定理17

  （4）$(A \to \neg B) \to \neg A$ （1）和（3）用rmp分离规则

  （5）$\neg A$ （2）和（4）用rmp分离规则
- 由以上演绎序列知$\Gamma \vdash \neg A$，又有$\Gamma \vdash A$，故Γ是不一致的公式集，这与Γ是一致的相矛盾，故假设不成立，即$\Gamma \cup \{A\}$也是一致的。

PC系统的完备性

命题3：如果Γ一致，那么存在公式集合Δ，使得$\Gamma \subseteq \Delta$，Δ是一致的并且是完全的。

3.1、构造公式集Δ

3.2、证明公式集$\Delta_n, n = 0,1,2,\cdots$是一致的

3.3、证明对公式A，若$\Delta \vdash A$，则存在n,有$\Delta_n \vdash A$。

3.4、证明公式集Δ是一致的

3.5、证明公式集Δ是完全性的

PC系统的完备性

命题3：如果Γ一致，那么存在公式集合Δ，使得$\Gamma \subseteq \Delta$，Δ是一致的并且是完全的。

3.1、构造公式集Δ：

设$A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$是PC 中所有公式（可数），构造公式集合序列如下：

（1）$\Delta_0 = \Gamma$

（2）$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{A_n\}$ 如果 $\Delta_n \vdash A_n$

（3）$\Delta_{n+1} = \Delta_n \cup \{\neg A_n\}$ 如果 $\Delta_n \nvdash A_n$

（4）$\Delta = \cup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$

PC系统的完备性

3.2、证公式集$\Delta_n, n = 0,1,2,\cdots$ 是一致的

证明（用归纳法）：

- 首先$\Delta_0 = \Gamma$是一致的
- 其次，假设Δ_k是一致的
- 往证Δ_{k+1}是一致的。根据Δ_{k+1}的构造方式:

（1）$\Delta_k \nvdash A_k$，则$\Delta_{k+1} = \Delta_k \cup \{\neg A_k\}$。由命题1知$\Delta_{k+1}$是一致的。

（2）$\Delta_k \vdash A_k$，则$\Delta_{k+1} = \Delta_k \cup \{A_k\}$。由命题2知$\Delta_{k+1}$是一致的。

PC系统的完备性

3.3、证对公式A，若$\Delta \vdash A$，则存在n,有$\Delta_n \vdash A$。

证明：由$\Delta \vdash A$，则存在演绎序列$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$，对于演绎序列中的$A_i$有四种情况：

1）A_i是Δ的成员，2）A_i是PC中的公理，3）$A_i = A_j (j < i)$，4）A_i是由$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。

- 假设演绎序列中有k项是Δ的成员，记为$A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{ik} \in \Delta = \cup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$，则必有：

$$A_{i1} \in \Delta_{n_{i1}}, A_{i2} \in \Delta_{n_{i2}}, \cdots, A_{ik} \in \Delta_{n_{ik}}$$

- 令$n = \max\{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{ik}\}$，即$n_{ij} \le n, j = 1,2, \cdots, k$。由于$\Delta$序列是一个不减序列，即$\Delta_{n_{ij}} \subseteq \Delta_n$，那么$A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{ik} \in \Delta_n$。
- 那么演绎序列$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$中的每一项$A_i$就有下面四种情况：1）$A_i$是$\Delta_n$的成员，2）$A_i$是PC中的公理，3）$A_i = A_j (j < i)$，4）$A_i$是由$A_j, A_k (j, k < i)$用分离规则导出的。因此，$\Delta_n \vdash A$。

PC系统的完备性

3.4、证明公式集Δ是一致的

证明（用反证法）：

- 假设Δ不是一致的，即存在A，使得$\Delta \vdash A$并且$\Delta \vdash \neg A$，那么根据命题3.3知：

  存在m、n，使得$\Delta_m \vdash A$，$\Delta_n \vdash \neg A$

- 令$k = max\{m, n\}$，从而$\Delta_k \vdash A$并且$\Delta_k \vdash \neg A$
- 这与Δ_k是一致（命题3.2）相矛盾，因此假设不成立，即Δ是一致的。

PC系统的完备性

3.5、Δ是完全性的

证明：对PC中的任一公式A_i，由公式Δ_i的构造方式知：

- 要么$\Delta_i \vdash A_i$，那么：$A_i \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$，从而$\Delta \vdash A_i$。
- 要么$\Delta_i \nvdash A_i$，那么：$\neg A_i \in \Delta_{i+1} \subseteq \Delta$，从而$\Delta \vdash \neg A_i$。

- 由此可知，$\Gamma \subseteq \Delta$，且Δ是完全的。

由3.4和3.5即完成命题3的证明：如果Γ一致，那么存在公式集合Δ，使得$\Gamma \subseteq \Delta$，Δ是一致的并且是完全的。

PC系统的完备性

命题4：上面构造的公式集合$\varDelta$，有如下性质：对任一公式A，$A \in \varDelta$当且仅当$\varDelta \vdash A$。

证明：必要性显然，只须证充分性。由于A是PC公式，不妨设A在所有公式中的排序为i，即令$A_i = A$，由于$\varDelta \vdash A_i$，则必有$\varDelta_j$，且$\varDelta_j \vdash A_i(= A)$（命题3.3）

- 若$j \le i$，由$\varDelta_j \vdash A_i$，根据命题3.1，$\varDelta$的构造过程知$\varDelta_j \subseteq \varDelta_i$，知$\varDelta_i \vdash A_i$，故$A_i \in \varDelta_{i+1} \subseteq \varDelta$。
- 若$i < j$，则有以下两种可能情况：

  （1）要么$\varDelta_i \vdash A_i$，根据$\varDelta$的构造过程知$A_i \in \varDelta_{i+1} \subseteq \varDelta$。

  （2）要么$\varDelta_i \nvdash A_i$，则必有$\neg A_i \in \varDelta_{i+1}$。但是 $i+1 \le j$ 可知$\varDelta_{i+1} \subseteq \varDelta_j$，从而$\varDelta_j \vdash \neg A_i$，又由于$\varDelta_j \vdash A_i$，那么这与$\varDelta_j$的一致性矛盾，故假设不成立，即若$i < j$，必有$\varDelta_i \vdash A_i$。根据$\varDelta$的构造过程知$A_i \in \varDelta_{i+1} \subseteq \varDelta$。

PC系统的完备性

命题5：设$\varGamma$是PC的一致公式集合，那么存在一个指派∂，使得对任一公式$A \in \varGamma$，都有$A^{\partial} = 1$。

证明概要：设$\varDelta$是按命题3.1构造的，则$\varGamma \subseteq \varDelta$，$\varDelta$一致且完全。

现在定义映射$\bar{\partial}$如下：$A^{\bar{\partial}} = \begin{cases} 1\text{当}A \in \varDelta \\ 0\text{当}A \notin \varDelta \end{cases}$

（1）由于$\varDelta$是一致的且是完全的，所以$\bar{\partial}$确实是所有公式组成的集合到$\{0，1\}$的映射。

（2）映射$\bar{\partial}$满足真值运算$\neg$、$\rightarrow$，即：

$$(\neg A)^{\bar{\partial}} = 1 - A^{\bar{\partial}}，\ (A \rightarrow B)^{\bar{\partial}} = 1 - A^{\bar{\partial}} + A^{\bar{\partial}}B^{\bar{\partial}}$$

（3）令$\partial = \bar{\partial}|_{Atom(L^p)}$，对PC中任一公式$A$，都有$A^{\partial} = A^{\bar{\partial}}$。

PC系统的完备性

定理（完备性定理）：PC是完备的，即对任意公式集合Γ和公式A，如果$\Gamma \Rightarrow A$，那么$\Gamma \vdash A$。特别地，如果$\Rightarrow A$，即A永真，那么$\vdash A$，即A是PC中的一个定理。

证明：如果Γ不是一致的，那么Γ演绎PC中的所有公式，所以$\Gamma \vdash A$。如果Γ是一致的，假设$\Gamma \nvdash A$，那么$\Gamma \cup \{\neg A\}$也是一致的（命题1），由上面的命题5知，存在一个指派∂，使得∂弄真集合$\Gamma \cup \{\neg A\}$中的所有公式。从而这个指派弄真Γ中的所有公式，所以弄假A，这与$\Gamma \Rightarrow A$矛盾。

总结

- PC系统的合理性
- 公式集的一致性和完全性定义
- PC系统的一致性和不完全性
- PC系统的扩充
- PC系统的完备性（命题1、2，完备性定理）