数理逻辑

第7讲 命题演算形式系统 -基本定理1-12

授课教师：蒋琳
e-mail: zoeljiang@hit.edu.cn

哈尔滨工业大学（深圳）计算机科学与技术学院

2022年11月

推理部分

公理集合:

（1） A_1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

（2） A_2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

（3） A_3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

推理规则或分离规则（Modus Ponens）：

若有A和$A \rightarrow B$成立，则必有结论B成立，可形式化表示为:

$$r_{mp}: \frac{A,\ A \rightarrow B}{B}$$

证明

证明的定义: 称下列公式序列为公式A在PC中的一个证明:

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的$i \in \{1,2,\cdots,m\}$，A_i或者是PC中的公理，或者是$A_j (j < i)$，或者$A_j, A_k (j,k < i)$用分离规则导出的。**其中A_m就是公式A。**

注释: A_i只能是以下三种中的其一:

（1）PC中的公理或已知定理;

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中的某一个;

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的。

基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \to A$ （$A \to A$是PC中的一个定理）

定理2：如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ （前件互换定理）

定理3：$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 定理（2）的另一种形式

定理4：$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$（加前件定理）

定理5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$（加后件定理）

定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$

定理7：$\vdash A \to (\neg A \to B)$

定理8：如果 $\vdash (A \to B)$，$\vdash (B \to C)$，那么$\vdash (A \to C)$（三段论定理）

定理9. $\vdash (\neg A \to A) \to A$ （反证法）

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ （反证法）

定理12. $\vdash A \to \neg\neg A$

定理1

定理 1: $\vdash_{PC} A \rightarrow A$ ($A \rightarrow A$是PC中的一个定理)

证明思路：要证$A \rightarrow A$是PC中的一个定理，即证$A \rightarrow A$在PC中有一个证明，即有一个公式序列$\boldsymbol{A_1, A_2, \cdots, A_m}(= A \rightarrow A)$。因此只要找到这样的序列即可。

证明:

(1) $A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)$ 公理1

(2) $(A \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow ((A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$ 公理2

(3) $(A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$ （1）和（2）用r_{mp}分离规则

(4) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ 公理1

(5) $A \rightarrow A$ （4）和（3）用r_{mp}分离规则

公理集合:

(1) A_1: $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

(2) A_2: $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

(3) A_3: $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

定理2

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，**那么**$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ **（前件互换定理）**

证明思路：由于$\vdash_{PC} \boldsymbol{A \to (B \to C)}$，那么必有一个公式序列

(1) $\boldsymbol{A_1}$

(2) $\boldsymbol{A_2}$

⋮

(m) $\boldsymbol{A_m = A \to (B \to C)}$

要证$\boldsymbol{B \to (A \to C)}$是PC中的一个定理，只需在此公式序列的基础上，继续推导，找到一个公式序列$\boldsymbol{A_1, A_2, \cdots, A_m, A_{m+1}, \cdots, A_n (= B \to (A \to C)}$)即可。

证明：由$\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么有一个序列

(1) A_1

(2) A_2

⋮

(m) $A_m = A \to (B \to C)$

定理2

（m）　$A_m = A \rightarrow (B \rightarrow C)$

（m+1）$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$　公理2

（m+2）$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$　（m）和（m+1）r_{mp}分离规则

（m+3）$((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$　公理1

（m+4）$B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$　（m+2）和（m+3）r_{mp}分离规则

（m+5）$(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)))$公理2

（m+6）$(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$　（m+4）和（m+5）r_{mp}分离规则

（m+7）$B \rightarrow (A \rightarrow B)$　公理1

（m+8）$B \rightarrow (A \rightarrow C)$　（m+7）和（m+6）r_{mp}分离规则

这个定理叫前件互换定理，很重要！！！

证明序列中的A_i 也可以是已知定理

证明的定义： 称下列公式序列为公式A 在PC 中的一个证明：

$$A_1, A_2, \cdots, A_m (= A)$$

如果对任意的 $i \in \{1,2,\cdots,m\}$，A_i 或者是PC中的公理，或者是 $A_j(j < i)$，或者$A_j, A_k(j,k < i)$用分离规则导出的。**其中A_m就是公式A。**

注释： A_i 只能是以下三种中的其一：

（1）PC中的公理或**已知定理**；

（2）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中的某一个；

（3）序列$A_1, A_2, \cdots, A_{i-1}$中某两个用分离规则导出的。

证明序列中的A_i也可以是已知定理

因为$\vdash_{PC} A$，那么有一个公式序列

$$A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_m (= A)$$

如果A_i是PC中的定理，那么A_i同样有一个公式序列：

$$B_1, B_2, \cdots, B_i, \cdots, B_n (= A_i)$$

那么

$$A_1, A_2, \cdots, B_1, B_2, \cdots B_i, \cdots, B_n (= A_i), \cdots, A_m (= A)$$

因此，**证明序列中的A_i是PC中的已知定理也可以**。

定理2证明的简化形式

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \rightarrow (B \rightarrow C)$，那么$\vdash_{PC} B \rightarrow (A \rightarrow C)$ （前件互换定理）

（1） $A_m = A \rightarrow (B \rightarrow C)$ 已知定理

（2） $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ 公理2

（3） $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$ （m）和（m+1） r_{mp}分离规则

（4） $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)) \rightarrow (B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$ 公理1

（5） $B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ （3）和（4） r_{mp}分离规则

（6） $(B \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))) \rightarrow ((B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C)))$ 公理2

（7） $(B \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (B \rightarrow (A \rightarrow C))$ （5）和（6） r_{mp}分离规则

（8） $B \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理1

（9） $B \rightarrow (A \rightarrow C)$ （8）和（7） r_{mp}分离规则

定理3

定理3: $\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$（定理（2）的另一种形式）

证明:

（1） $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 公理2

（2） $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ 对（1）式用前件互换定理2

（3） $((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$

$\to (B \to ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))))$ 公理1

（4） $B \to ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$ （2）和（3）用r_{mp}分离规则

（5） $(B \to ((A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))))$

$\to ((B \to (A \to B)) \to (B \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))))$ 公理2

（6） $(B \to (A \to B)) \to (B \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C)))$ （4）和（5）用r_{mp}分离规则

（7） $B \to (A \to B)$ 公理1

（8） $B \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$ （7）和（6）用r_{mp}分离规则

（9） $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 对（8）用前件互换定理2

定理4

定理4： $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （加前件定理）

证明：

（1） $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 公理2

（2） $((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ 公理1

$\to ((B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$

（3） $(B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ （1）和（2）用r_{mp}分离规则

（4） $((B \to C) \to ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$ 公理2

$\to (((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))))$

（5） $((B \to C) \to (A \to (B \to C))) \to ((B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$ （3）和（4）用rmp分离规则

（6） $(B \to C) \to (A \to (B \to C))$ 公理1

（7） $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （6）和（5）用rmp分离规则

定理5

定理 5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ （加后件定理）

证明：对定理4，利用前件互换定理2得出。

（1）$(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ 加前件定理4

（2）$(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ 对（1）用前件互换定理2

定理4： $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ （加前件定理）

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，**那么**$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ （前件互换定理）

定理6

定理6. $\vdash_{PC} \neg A \to (A \to B)$

证明:

（1） $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ 公理1

（2） $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ 公理3

（3） $((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$ 公理1

（4） $\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$ （2）和（3）用r_{mp}分离规则

（5） $(\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$

$\to ((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ 公理2

（6） $((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ （4）和（5）用r_{mp}分离规则

（7） $\neg A \to (A \to B)$ （1）和（6）用r_{mp}分离规则

定理6

定理6. $\vdash_{PC} \neg A \to (A \to B)$

证明:

(1) $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ 公理3

(2) $((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$ 公理1

(3) $\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$ (1)和(2)用r_{mp}分离规则

(4) $(\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$

$\to ((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ 公理2

(5) $((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ (3)和(4)用r_{mp}分离规则

(6) $\neg A \to (\neg B \to \neg A)$ 公理1

(7) $\neg A \to (A \to B)$ (6)和(5)用r_{mp}分离规则

定理7

定理7. $\vdash_{PC} A \to (\neg A \to B)$

证明：

（1） $\neg A \to (A \to B)$ **定理6**

（2） $A \to (\neg A \to B)$ **对（1）使用前件互换定理2**

定理7的理解：

$A \to B \Leftrightarrow \neg A \vee B$，有$\neg A \to B \Leftrightarrow A \vee B$，那么定理7可以写成：

$$A \to (A \vee B)$$

因为A成立，则必有$A \vee B$成立，进而有：

$$A \to (A \vee B)$$

那么有定理7成立。

定理2: 如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，**那么**$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ **（前件互换定理）**

定理8

定理8. 如果$\vdash (A \to B)$, $\vdash (B \to C)$, 那么$\vdash (A \to C)$ （三段论定理）

思路：由$A \to B$和$B \to C$，要证$A \to C$，要想办法出现$A \to C$。

证明：

（1） $A \to B$ 已知定理

（2） $B \to C$ 已知定理

（3） $(A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ 加后件定理5

（4） $(B \to C) \to (A \to C)$ （1）和（3）用r_{mp}分离规则

（5） $A \to C$ （2）和（4）用r_{mp}分离规则

定理 5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ （加后件定理）

定理8

定理8. 如果$\vdash (A \to B)$, $\vdash (B \to C)$, 那么$\vdash (A \to C)$ **（三段论定理）**

思路：要出现$A \to C$，不仅可以用加后件定理5，还可以用加前件定理4

证明:

（1） $A \to B$ **已知定理**

（2） $B \to C$ **已知定理**

（3） $(B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ **加前件定理4**

（4） $(A \to B) \to (A \to C)$ **（2）和（3）用r_{mp}分离规则**

（5） $A \to C$ **（1）和（4）用r_{mp}分离规则**

定理4： $\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ **（加前件定理）**

定理6

定理6. $\vdash_{PC} \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

证明:

（1） $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理3

（6） $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 公理1

（7） $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 定理8

定理6

定理6. $\vdash_{PC} \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

证明:

（1） $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 公理1

（2） $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ 公理3

（3） $(\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)) \rightarrow (((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)))$

对1用加后件定理5

（4） $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (\neg A \rightarrow (A \rightarrow B))$ 1和3用rmp分离规则

（5） $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ 2和4用rmp分离规则

定理9

定理9. $\vdash_{PC}(\neg A \to A) \to A$

$A_3: (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

证明思路:匹配相近的公理或已知定理，作为切入点进行证明。这里我们尝试从定理6$\neg A \to (A \to B)$出发证明。

定理6. $\vdash_{PC} \neg A \to (A \to B)$

证明:

$A_2: (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(1) $\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))$ **定理6**

(2) $(\neg A \to (A \to \neg(\neg A \to A))) \to ((\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A)))$ **公理2**

(3) $(\neg A \to A) \to (\neg A \to \neg(\neg A \to A))$ **(1)和(2)用r_{mp}分离规则**

(4) $(\neg A \to \neg(\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A))$ **公理3**

(5) $(\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A))$ **(3)和(4)用三段论定理8**

(6) $((\neg A \to A) \to ((\neg A \to A) \to A))) \to$

$(((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A))$ **公理2**

(7) $((\neg A \to A) \to (\neg A \to A)) \to ((\neg A \to A) \to A)$ **(5)和(6)用r_{mp}分离规则**

(8) $(\neg A \to A) \to (\neg A \to A)$ **定理1**

(9) $(\neg A \to A) \to A$ **(8)和(7)用r_{mp}分离规则**

定理10

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$

证明:

（1）$\neg\neg A \to (\neg A \to A)$ 定理6

（2）$(\neg A \to A) \to A$ 定理9

（3）$\neg\neg A \to A$ （1）和（2）用三段论定理8

定理11

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$

证明:

定理 5: $\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$ （加后件定理）

(1) $\neg\neg A \to A$ 定理10

(2) $(\neg\neg A \to A) \to ((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A))$ 加后件定理5

(3) $(A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)$ （1）和（2）用 r_{mp} 分离规则

(4) $((A \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg A)) \to$

$(((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg A) \to \neg A))$ 加后件定理5

(5) $((\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A) \to ((A \to \neg A) \to \neg A)$ （3）和（4）用 r_{mp} 分离规则

(6) $(\neg\neg A \to \neg A) \to \neg A$ 定理9

定理9. $\vdash_{PC} (\neg A \to A) \to A$

(7) $(A \to \neg A) \to \neg A$ （5）和（6）用 r_{mp} 分离规则

定理12

定理12. $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

证明思路:对比定理11 $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow \neg A$和要证明的$A \rightarrow \neg\neg A$

证明:

（1） $(\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow \neg\neg A$ 定理11

（2） $A \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg A)$ 定理7

（3） $A \rightarrow \neg\neg A$ （2）和（1）用三段论定理8

定理7. $\vdash_{PC} A \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$

基本定理

定理1：$\vdash_{PC} A \to A$ ($A \to A$是PC中的一个定理)√

定理2：如果 $\vdash_{PC} A \to (B \to C)$，那么$\vdash_{PC} B \to (A \to C)$ （前件互换定理）√

定理3：$\vdash (A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ 定理（2）的另一种形式 √

定理4：$\vdash (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C))$（加前件定理）√

定理5：$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$（加后件定理）√

定理6：$\vdash \neg A \to (A \to B)$√

定理7：$\vdash A \to (\neg A \to B)$√

定理8：如果 $\vdash (A \to B)$，$\vdash (B \to C)$，那么$\vdash (A \to C)$（三段论定理）√

定理9. $\vdash (\neg A \to A) \to A$ （反证法）√

定理10. $\vdash \neg\neg A \to A$ （否定之否定蕴涵肯定）√

定理11. $\vdash (A \to \neg A) \to \neg A$ （反证法）√

定理12. $\vdash A \to \neg\neg A$√