

Sprawozdanie
Kratownica
MES i MEB w technice

Mateusz Krupnik 285608
Grupa I02

10 listopada 2019

Spis treści

1	Wstęp teoretyczny	3
2	Kratownica - rozwiązanie w środowisku Matlab	4
2.1	Analiza statyczna	6
2.2	Analiza dynamiczna	9
3	Kratownica - rozwiązanie w środowisku ANSYS Workbench	16
3.1	Analiza statyczna	16
3.2	Analiza dynamiczna	19
4	Porównanie wyników oraz wnioski	23

1 Wstęp teoretyczny

Rozwiązanie zagadnienia odbędzie się poprzez metodę elementów skończonych, a dokładnie wykorzystane zostaną elementy prętowe o liniowej funkcji kształtu. Element taki dobrze odwzorowuje zachowanie konstrukcji przenoszącej obciążenia osiowe (rozciąganie i ściskanie) przy zachowaniu małych odkształceń i zakresu sprężystego materiału.

Ponieważ zagadnienie rozważanej kratownicy jest problemem dwuwymiarowym, dlatego macierz sztywności elementu prętowego w układzie lokalnym tj. układzie który ma początek w jednym z węzłów elementu, a oś elementu pokrywa się z jedną osią układu, przedstawia się wzorem 1.

$$k_l = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Macierz sztywności w układzie lokalnym można przedstawić w układzie globalnym za pomocą wzoru 2, a macierz $[DC]$ dana jest wzorem 3. Kąt θ jest kątem pomiędzy osią elementu (osią układu lokalnego) a odpowiadającą osią układu globalnego.

$$[k_g] = [DC]^T [k_l] [DC] \quad (2)$$

$$[DC] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3)$$

Po utworzeniu wszystkich elementów wraz z ich macierzami sztywności w układzie lokalnym i przetransformowaniu do układu globalnego kolejnym krokiem jest odpowiednie przepisanie wartości do macierzy sztywności określonej w układzie globalnym. Macierz ta uwzględnia wszystkie węzły konstrukcji. Oznacza to przepisanie wartości z macierzy utworzonych dla dwóch węzłów (dla każdego węzła rozważamy przemieszczenia na dwóch kierunkach) do macierzy, w której kolumny i wiersze stanowią przemieszczenia wszystkich węzłów kratownicy.

Po uzyskaniu macierzy sztywności globalnej wszystkich elementów następuje ich agregacja do macierzy sztywności tj. zsumowanie wszystkich macierzy po uprzednim odpowiednim przepisaniu wartości.

Wyznaczenie przemieszczeń węzłów konstrukcji odbywa się za pomocą równania 4. Uzyskane w tym równaniu przemieszczenia należy dodać do współrzędnych węzłów, aby otrzymać ich nowe położenie w układzie odniesienia. Wektor przemieszczeń oraz wektor sił są podane w układzie globalnym z uwzględnieniem wszystkich węzłów i ich kierunków.

$$\{u_i\} = [K]^{-1} \{P_i\} \quad (4)$$

Warunki brzegowe uwzględnia się w równaniu modyfikując macierz sztywności $[K]$ w następujący sposób. Jeżeli dobrany został stopień swobody w pewnym węźle na danym

kierunku to w macierzy sztywności dokonuje się wyzerowania kolumny i wiersza odpowiadającym temu przemieszczeniu. Dodatkowo na przecięciu tej kolumny oraz wiersza (czyli na diagonalu) wstawia się wartość równą 1.

W przypadku analizy dynamicznej dodatkowo potrzebna jest do wyznaczenia macierzy mas (bezwładności). Lokalna macierz bezwładności czyli dla pojedynczego elementu prętowego w problemie dwuwymiarowym, określona w jego układzie współrzędnych przedstawia się wzorem 5. Jak się okazuje macierz bezwładności po transformacji do układu globalnego według wzoru 6 nie ulega zmianie, a więc wyznaczona macierz lokalna powinna następnie zostać przepisana w odpowiednie miejsca macierzy mas uwzględniającej wszystkie węzły, a następnie dokonana powinna zostać agregacja.

$$m_l = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$[m_g] = [DC]^T [m_l] [DC] \quad (6)$$

Po wyznaczeniu macierzy sztywności oraz bezwładności wraz z nałożonymi warunkami brzegowymi, wektory własne oraz odpowiadające im częstotliwości własne można wyznaczyć z równania 8.

$$([m]^{-1}[k] - \omega^2 I)u_i = 0 \quad (7)$$

Podstawiając $\lambda = \omega^2$, $A = [m]^{-1}[k]$, $X = u_i$ otrzymujemy znane z matematyki zagadnienie znajdowania wartości i wektorów własnych.

$$(A - \lambda I)X = 0 \quad (8)$$

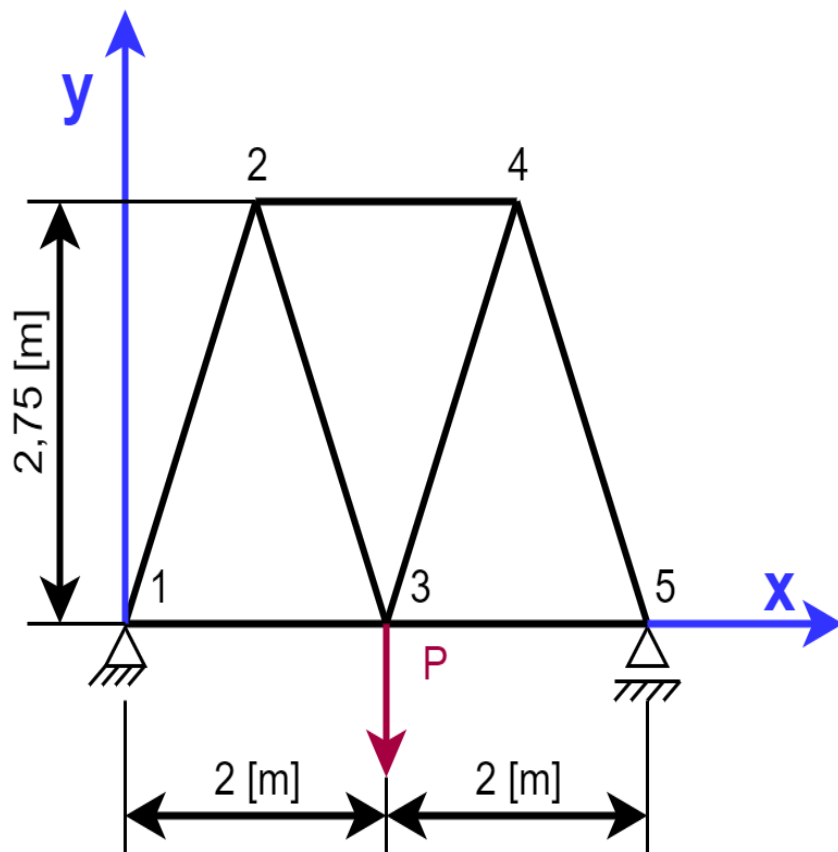
Wyznaczone w ten sposób wektory własne często normalizuje się względem macierzy bezwładności (M-ortonormalizacja) lub tak aby maksymalne przemieszczenie w wektorze było równe 1. Dodatkowo wyznaczone w ten sposób wartości własne należy przeliczyć na częstotliwość wg wzoru 9.

$$f = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi} \quad (9)$$

2 Kratownica - rozwiązanie w środowisku Matlab

Na rysunku 1 przedstawiony jest schemat kratownicy. Kratownica ta składa się z jednorodnych prętów o parametrach podanych w tabeli 1, pręty te stanowiące elementy łączą odpowiednie węzły $i=1, \dots, 5$.

Model zakłada obciążenie siłą skupioną w węźle numer 3 na kierunku pionowym, skierowaną przeciwnie do osi układu. Siła w tym zagadnieniu wynosi $P = 10^6$ [N], wartość pola przekroju wynosi odpowiednio $A = 2.5 \cdot 10^{-4}$ [m²], moduł Younga $E = 190$ [GPa] oraz gęstość $\rho = 7850$ [$\frac{kg}{m^3}$].



Rysunek 1: Schemat kratownicy.

Tabela 1: Tabela elementów kratownicy

Indeks elem.	Węzeł 1 [m]		Węzeł 2 [m]		l [m]	A [m ²]	E [GPa]	ρ [$\frac{kg}{m^3}$]	Wartość	
	x	y	x	y					$\cos\theta$	$\sin\theta$
1	0	0	1	2.75	2.9262	0.00025	190	7850	0.3417	0.9398
2	0	0	2	0	2	0.00025	190	7850	1	0
3	1	2.75	2	0	2.9262	0.00025	190	7850	0.3417	-0.9398
4	1	2.75	3	2.75	2	0.00025	190	7850	1	0
5	2	0	3	2.75	2.9262	0.00025	190	7850	0.3417	0.9398
6	2	0	4	0	2	0.00025	190	7850	1	0
7	3	2.75	4	0	2.9262	0.00025	190	7850	0.3417	-0.9398

2.1 Analiza statyczna

Poniżej przedstawione zostaną macierze sztywności w układzie globalnym dla każdego z elementów.

$$[k_{1-2}] = 10^7 \cdot \begin{pmatrix} 0.1896 & 0.5213 & -0.1896 & -0.5213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5213 & 1.4337 & -0.5213 & -1.4337 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.1896 & -0.5213 & 0.1896 & 0.5213 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.5213 & -1.4337 & 0.5213 & 1.4337 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[k_{1-3}] = 10^7 \cdot \begin{pmatrix} 2.375 & 0 & 0 & 0 & -2.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2.375 & 0 & 0 & 0 & 2.375 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[k_{2-3}] = 10^7 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1896 & -0.5213 & -0.1896 & 0.5213 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5213 & 1.4337 & 0.5213 & -1.4337 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1896 & 0.5213 & 0.1896 & -0.5213 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5213 & -1.4337 & -0.5213 & 1.4337 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[k_{2-4}] = 10^7.$$

$$[k_{3-4}] = 10^7.$$

$$[k_{4-5}] = 10^7.$$

$$[k_{3-5}] = 10^7.$$

Macierz sztywności układu po agregacji wygląda następująco.

$$[k_g] = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 25.64 & 5.21 & -1.89 & -5.21 & -23.75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5.21 & 14.34 & -5.21 & -14.34 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.89 & -5.21 & 27.54 & 0 & -1.89 & 5.21 & -23.75 & 0 & 0 & 0 \\ -5.21 & -14.34 & 0 & 28.67 & 5.21 & -14.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23.75 & 0 & -1.89 & 5.21 & 51.29 & 0 & -1.89 & -5.21 & -23.75 & 0 \\ 0 & 0 & 5.21 & -14.34 & 0 & 28.67 & -5.21 & -14.34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -23.75 & 0 & -1.89 & -5.21 & 27.54 & 0 & -1.89 & 5.21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.21 & -14.34 & 0 & 28.67 & 5.21 & -14.33 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -23.75 & 0 & -1.89 & 5.21 & 25.64 & -5.21 \end{pmatrix}$$

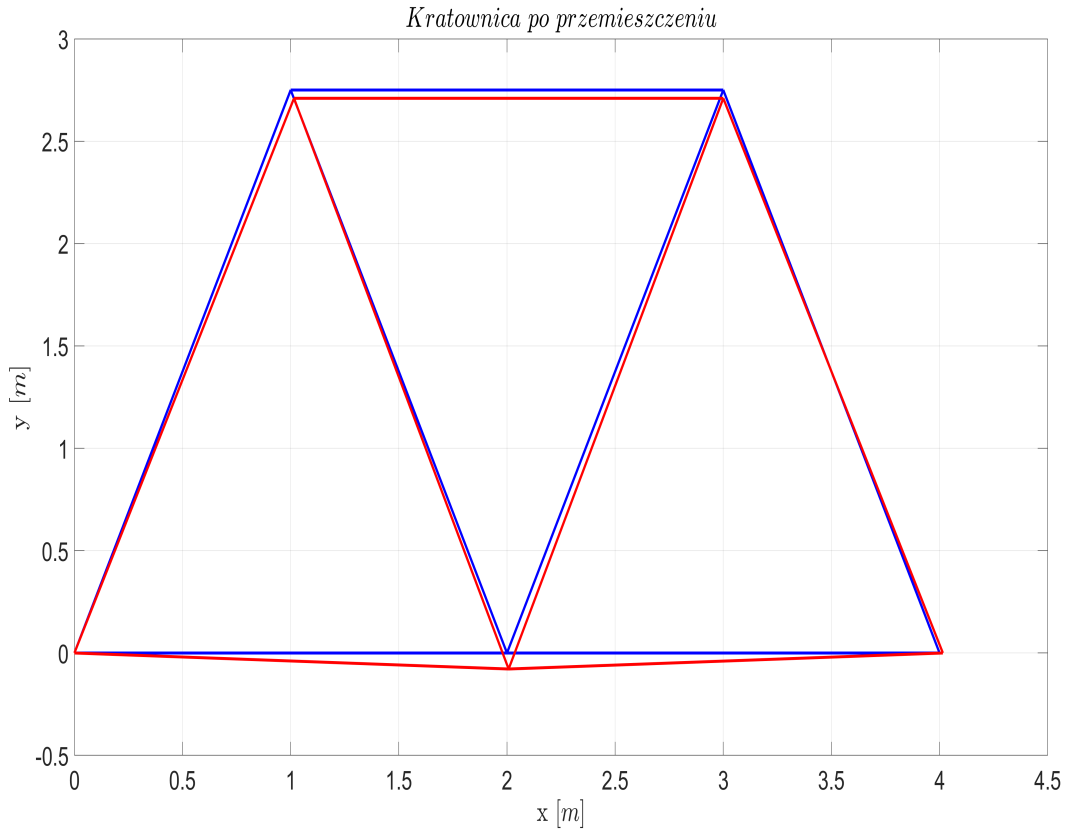
Po uwzględnieniu warunków brzegowych dla węzła pierwszego na obu kierunkach (wyzerowanie dwóch pierwszych kolumn i wierszów oraz wstawienie 1 na przecięciu kolumny z wierszem) oraz dla węzła 5 na kierunku pionowym (ostatni wiersz i kolumna), macierz sztywności układu przyjmuje postać:

$$[k_g] = 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27.54 & 0 & -1.89 & 5.21 & -23.75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28.67 & 5.21 & -14.33 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.89 & 5.21 & 51.29 & 0 & -1.89 & -5.21 & -23.75 & 0 \\ 0 & 0 & 5.21 & -14.34 & 0 & 28.67 & -5.21 & -14.34 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -23.75 & 0 & -1.89 & -5.21 & 27.54 & 0 & -1.89 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5.21 & -14.34 & 0 & 28.67 & 5.21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Po rozwiązaniu równania 4 otrzymano przemieszczenia węzłów, które przedstawione są w tabeli 2. Przemieszczenia zostały także zobrazowane na rysunku 2.

Tabela 2: Przemieszczenia węzłów konstrukcji pod wpływem działania siły

Indeks węzła	Przemieszczenie węzła [m]	
	x	y
1	0	0
2	0.015311	-0.040442
3	0.007655	-0.078101
4	-1.31530e-17	-0.040442
5	0.015311	0



Rysunek 2: Wykres kratownicy po przemieszczeniu

2.2 Analiza dynamiczna

W tym rozdziale dokonana zostanie analiza dynamiczna konstrukcji według metody opisanej w 1. Poniżej przedstawione zostaną macierze bezwładności wszystkich elementów zapisane w układzie globalnym.

$$[m_{1-2}] = \begin{pmatrix} 1.91 & 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.91 & 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 1.91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 1.91 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[m_{4-5}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.31 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.31 & 0 & 0 & 0 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0 & 0 & 1.31 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0 & 0 & 1.31 \end{pmatrix}$$

$$[m_{3-5}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.91 & 0 & 0.96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.91 & 0 & 0.96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.96 & 0 & 1.91 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.96 & 0 & 1.91 \end{pmatrix}$$

Macierz bezwładności po agregacji przyjmuje poniższą postać.

$$[m_g] = \begin{pmatrix} 3.22 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3.22 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 5.14 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 5.14 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 & 0 & 0 \\ 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 6.44 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 6.44 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 \\ 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 5.14 & 0 & 0.96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 5.14 & 0 & 0.96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 3.22 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 3.22 \end{pmatrix}$$

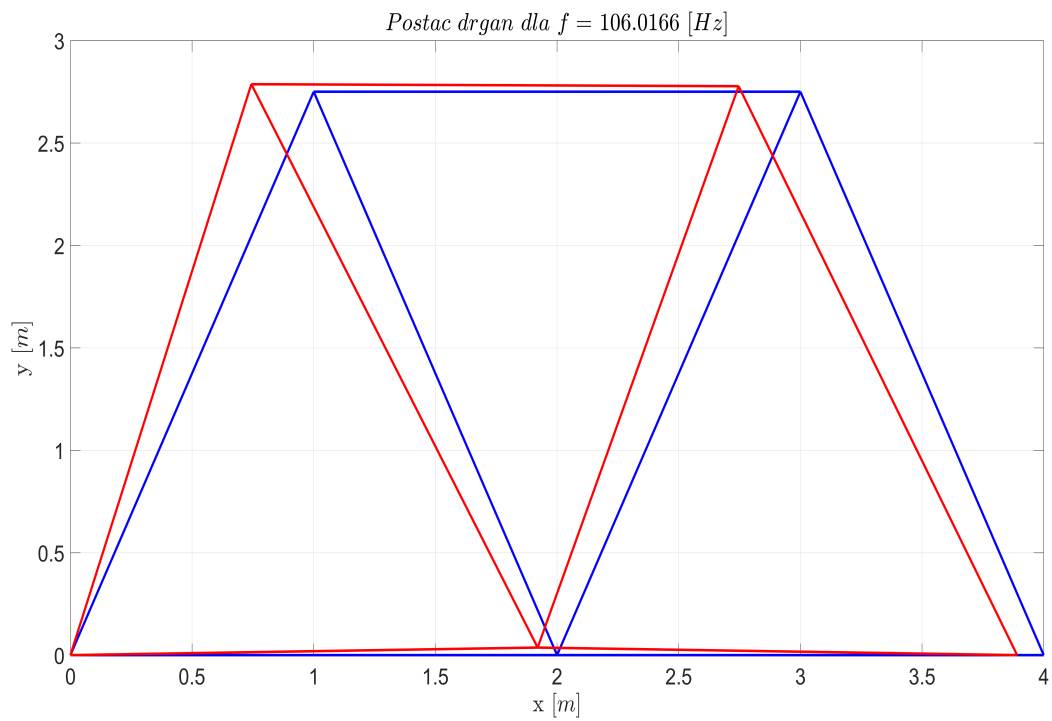
Następnie po uwzględnieniu podobnie jak w przypadku macierzy sztywności warunków brzegowych macierz mas kształtuje się następująco.

$$[m_g] = \begin{pmatrix} 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.1 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.1 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.96 & 0 & 6.4 & 0 & 0.96 & 0 & 0.65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.96 & 0 & 6.4 & 0 & 0.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 5.1 & 0 & 0.96 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 5.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.65 & 0 & 0.96 & 0 & 3.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 \end{pmatrix}$$

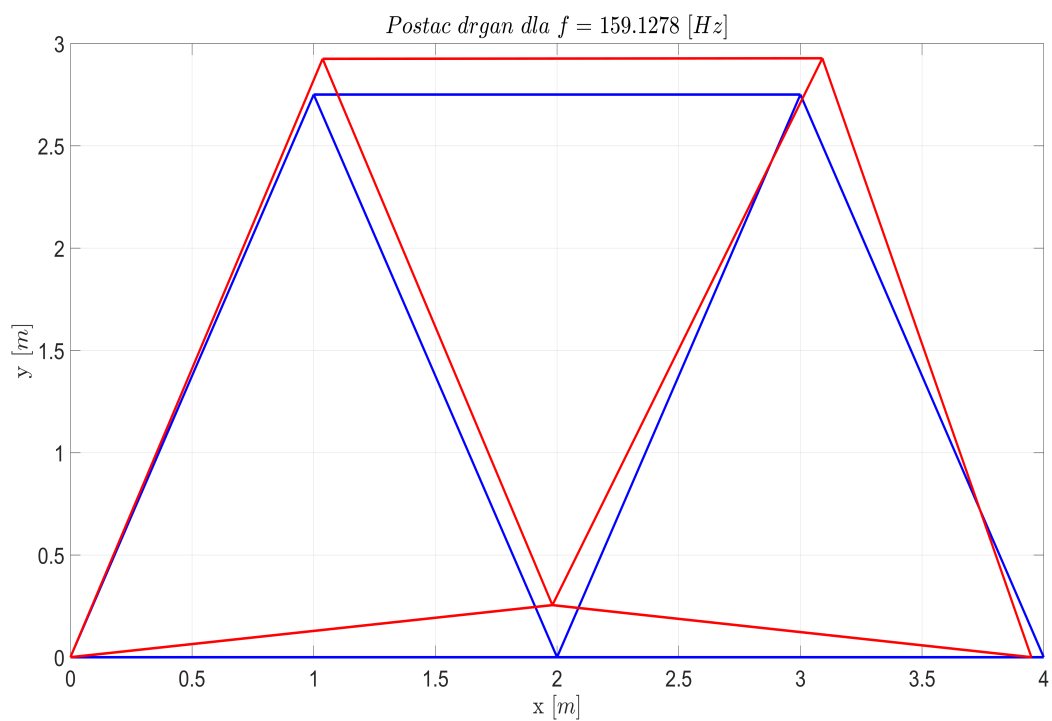
Wyznaczenie wektorów własnych oraz wartości własnych obyło się za pomocą polecenia $[V, \lambda] = \text{eig}(K, M)$, która zwraca macierz wektorów własnych V oraz wektor wartości własnych λ . Otrzymane wartości własne należały przeliczyć na częstotliwość wg. wzoru 9. Poniżej przedstawione zostaną odpowiednio wektor częstotliwości własnych oraz macierz wektorów własnych (kolumny) odpowiadających kolejnym częstotliwościom. Pierwsze 3 wartości własne oraz wektory własne zostały pominięte ze względu, iż są one wynikiem zastosowanego sposobu uwzględniania warunków brzegowych (postacie te zakładają przemieszczenie uwierdzonych węzłów).

$$f = \begin{pmatrix} 106.02 \\ 159.13 \\ 275.69 \\ 391.49 \\ 494.66 \\ 549.19 \\ 656.60 \end{pmatrix} [Hz] \quad \Phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.26 & 0.037 & 0.18 & -0.022 & 0.14 & -0.23 \\ 0.037 & 0.17 & 0.018 & 0.32 & 0.25 & 0.092 \\ -0.08 & -0.019 & -0.25 & -0.045 & 0.099 & -0.11 \\ 0.037 & 0.25 & -0.058 & 0.016 & -0.24 & -0.19 \\ -0.25 & 0.09 & 0.12 & 0.018 & -0.18 & 0.27 \\ 0.027 & 0.18 & -0.031 & -0.33 & 0.17 & 0.15 \\ -0.11 & -0.051 & -0.36 & 0.1 & -8.4e-3 & 0.068 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

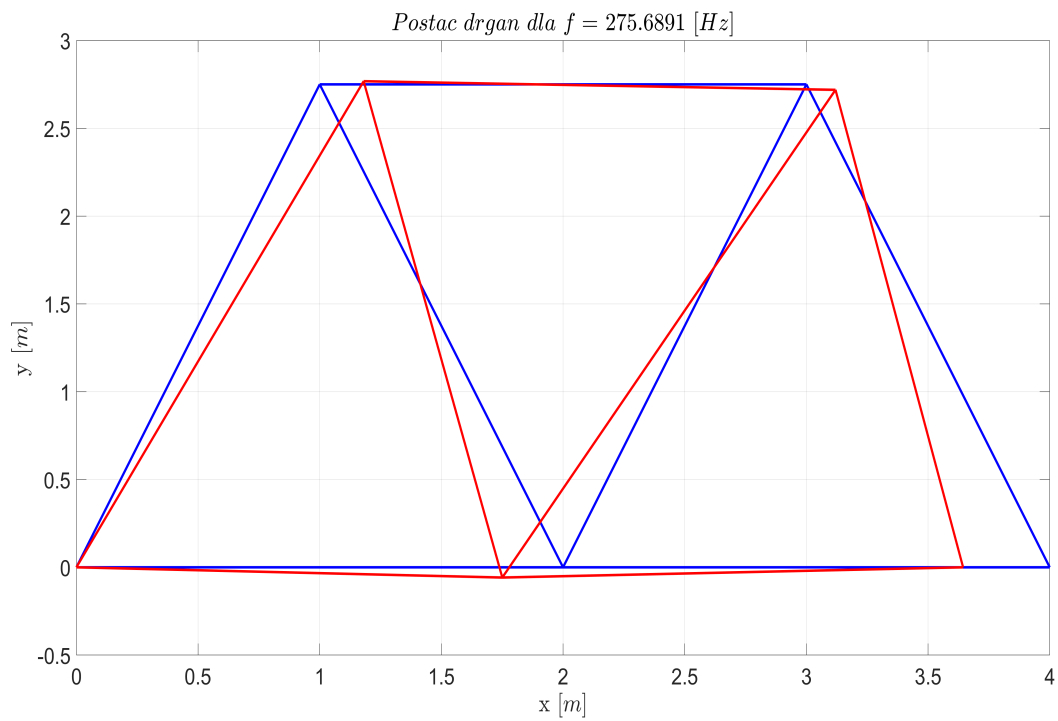
Poniżej przedstawione zostaną poszczególne postacie drgań (mody) wyznaczone na podstawie wektorów własnych.



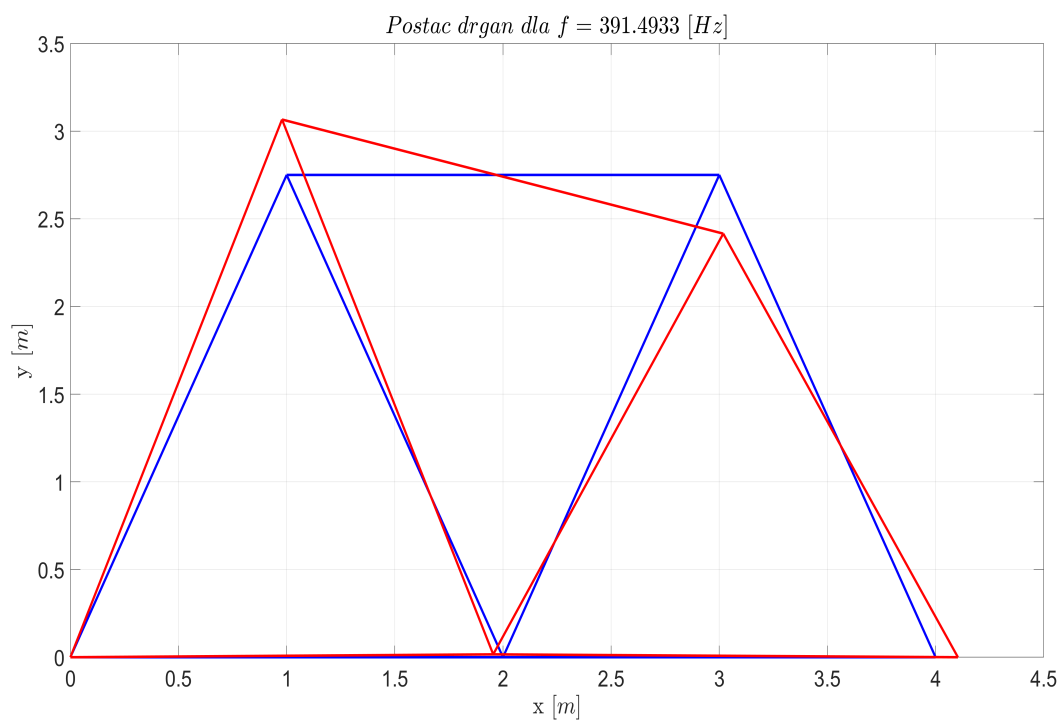
Rysunek 3: Kształt pierwszej postaci drgań



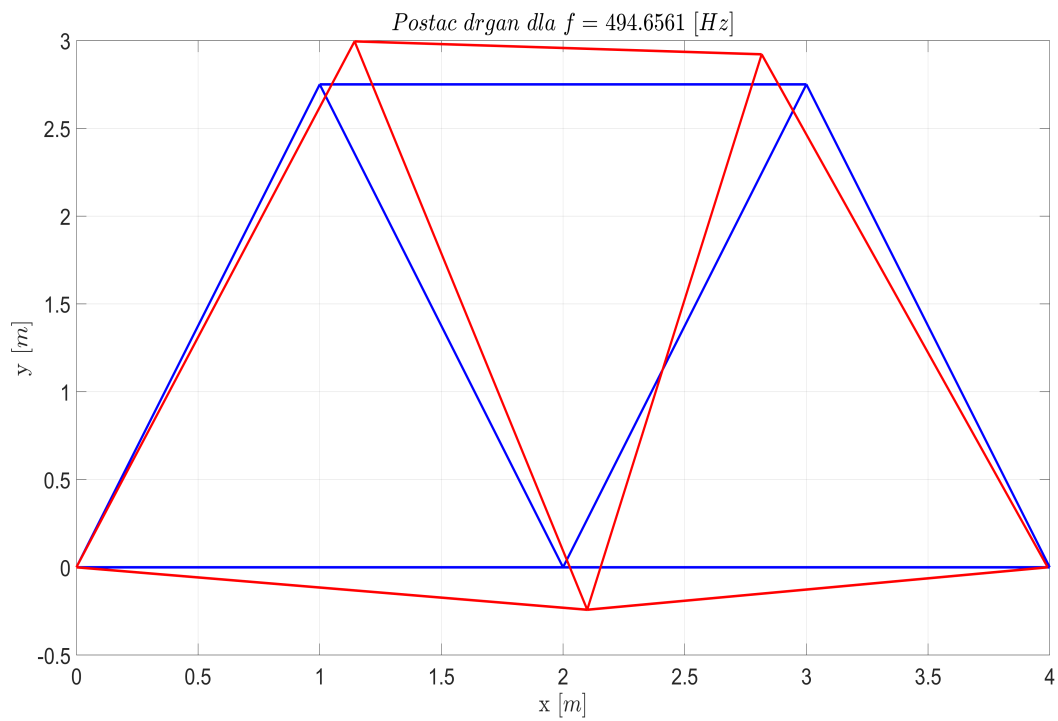
Rysunek 4: Kształt drugiej postaci drgań



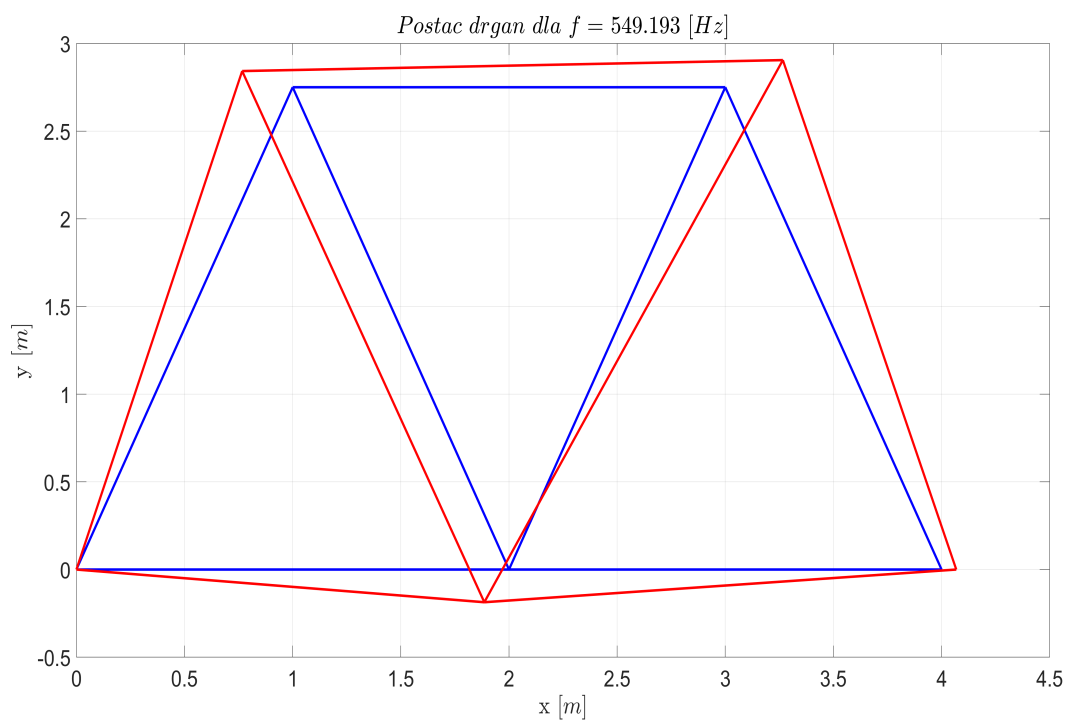
Rysunek 5: Kształt trzeciej postaci drgań



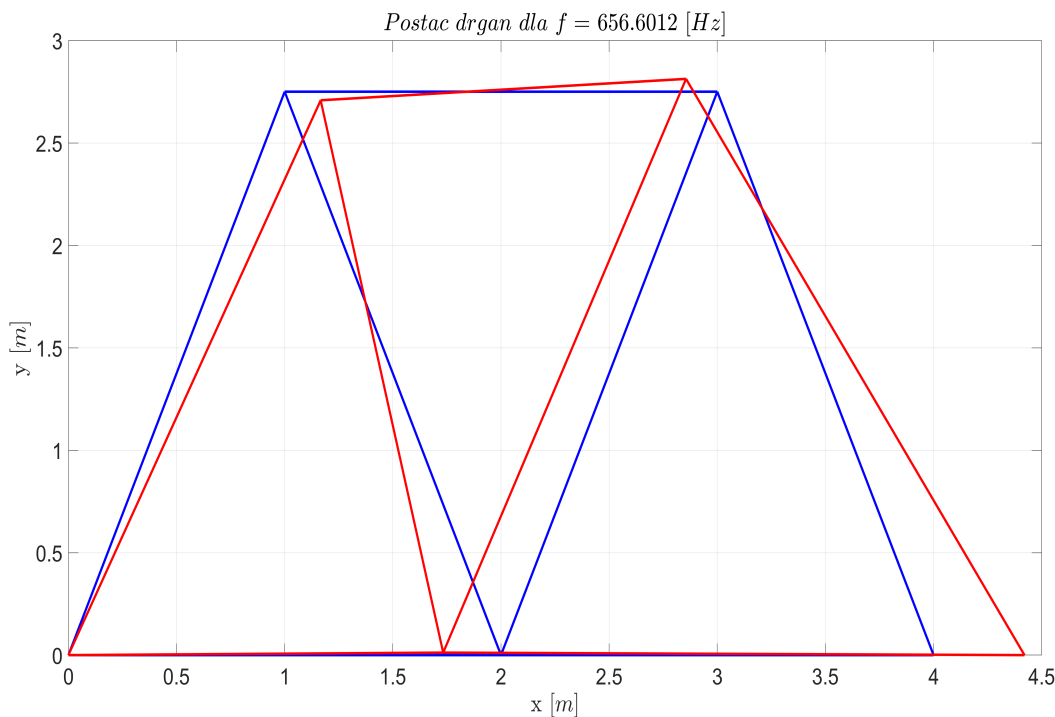
Rysunek 6: Kształt czwartej postaci drgań



Rysunek 7: Kształt piątej postaci dragn



Rysunek 8: Kształt szóstej postaci dragn



Rysunek 9: Kształt siódmej postaci drgań

3 Kratownica - rozwiązanie w środowisku ANSYS Workbench

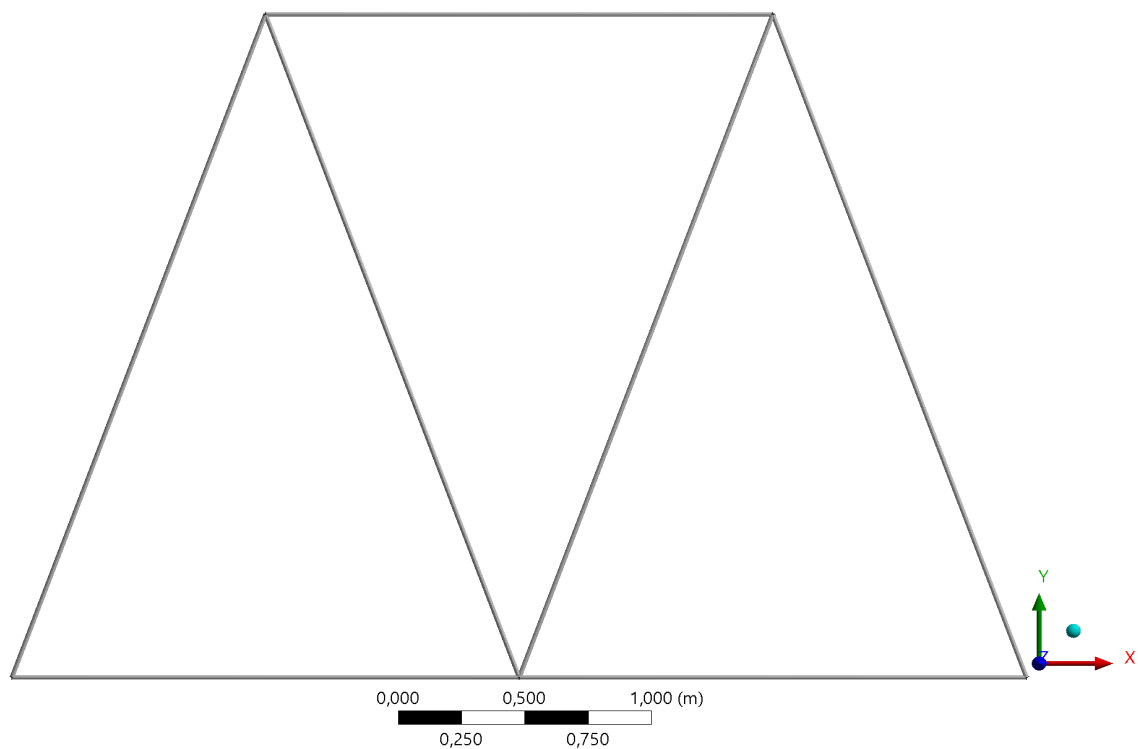
W celu weryfikacji wyników otrzymanych w środowisku Matlab została przeprowadzona symulacja w środowisku ANSYS Workbench będącym zaawansowanym narzędziem CAE.

W środowisku tym stworzony został model geometryczny, który widoczny jest na rysunku 10. Model ten posiada wszystkie parametry (geometryczne, materiałowe itp.) takie jak model stworzony w rozdziale 2. Przyjęto także okrągły przekrój kratownicy o promieniu dobranym na podstawie zgodności pól przekroju.

3.1 Analiza statyczna

W celu sprawdzenia analizy statycznej z rozdziału 2.1 model geometryczny został podzielony na elementy skończone. Za element skończony został przyjęty model elementu *LINK 180*. Na rys 10 widoczna jest siatka elementów skończonych. Jak widać dobrany został 1 element skończony na długość każdego pręta kratownicy. Pozwoli to uzyskać zbliżone warunki symulacji względem symulacji dokonanej w Matlabie, gdzie każdy pręt był jednym elementem.

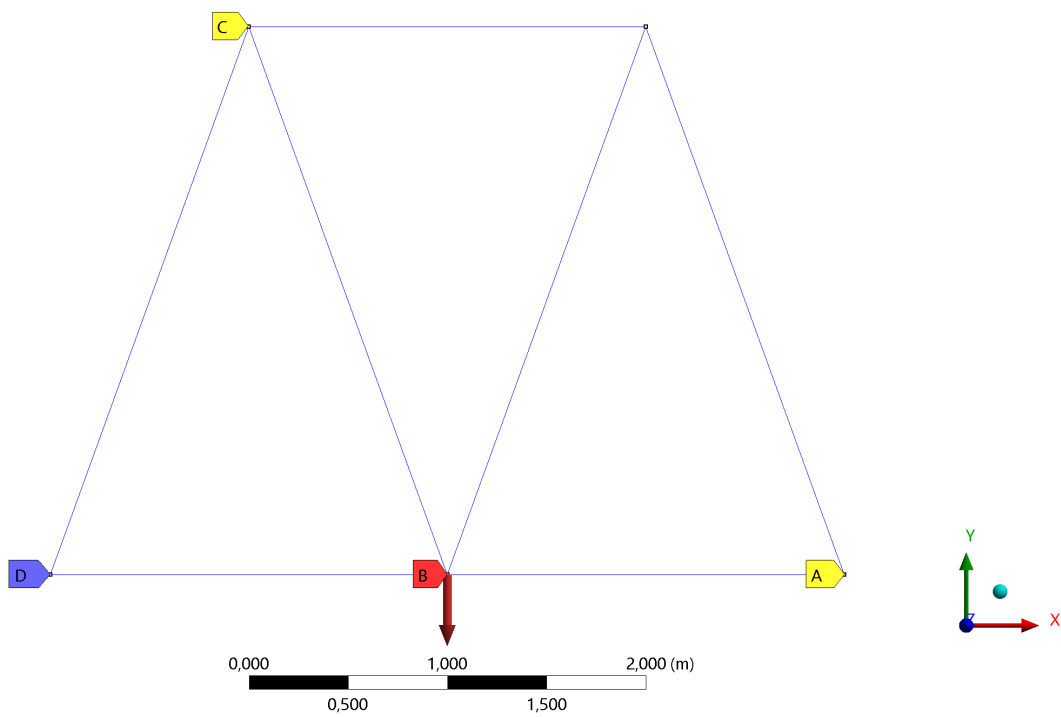
Następnie zastosowano warunki brzegowe w postaci siły skupionej oraz utwierdzenia odpowiednich węzłów. Warunki te widoczne są na rysunku 11.



Rysunek 10: Siatka elementów skończonych

A: Static Structural
 Static Structural
 Time: 1, s
 10.11.2019 12:47

- A Displacement
- B Force: 1,e+006 N
- C Displacement 2
- D Fixed Support

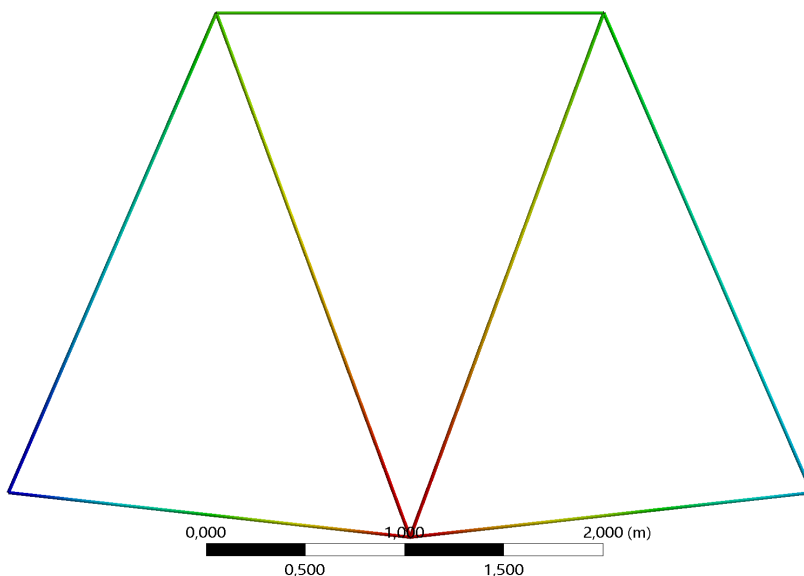


Rysunek 11: Warunki brzegowe dla analizy statycznej

Po wykonaniu obliczeń uzyskane wyniki zostały przedstawione na rysunkach poniżej. Przedstawione zostaną przemieszczenia węzłowe konstrukcji w celu porównania z wynikami obliczeń w środowisku Matlab.

A: Static Structural
Total Deformation
Type: Total Deformation
Unit: m
Time: 1
08.11.2019 11:53

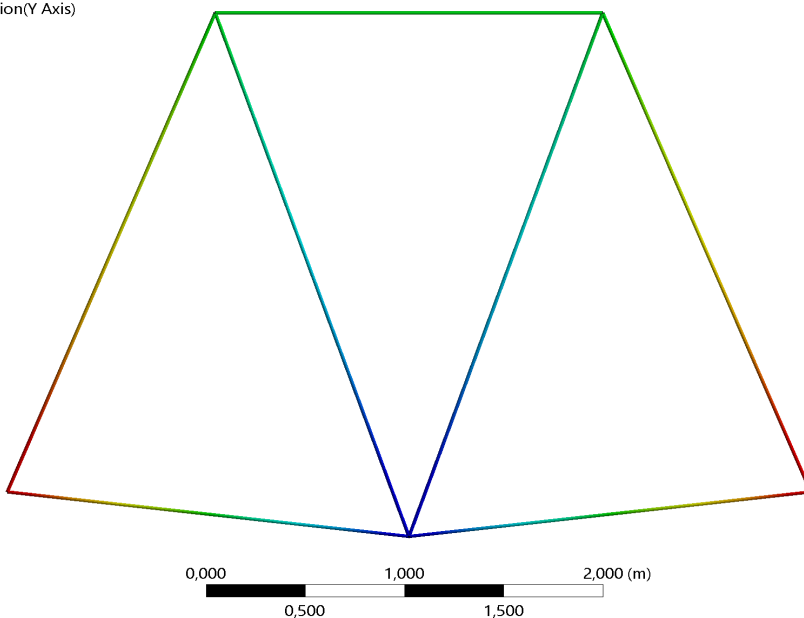
0,078547 Max
0,06982
0,061092
0,052365
0,043637
0,03491
0,026182
0,017455
0,0087275
0 Min



Rysunek 12: Odształcenia całkowite kratownicy

A: Static Structural
Directional Deformation 2
Type: Directional Deformation(Y Axis)
Unit: m
Global Coordinate System
Time: 1
08.11.2019 11:53

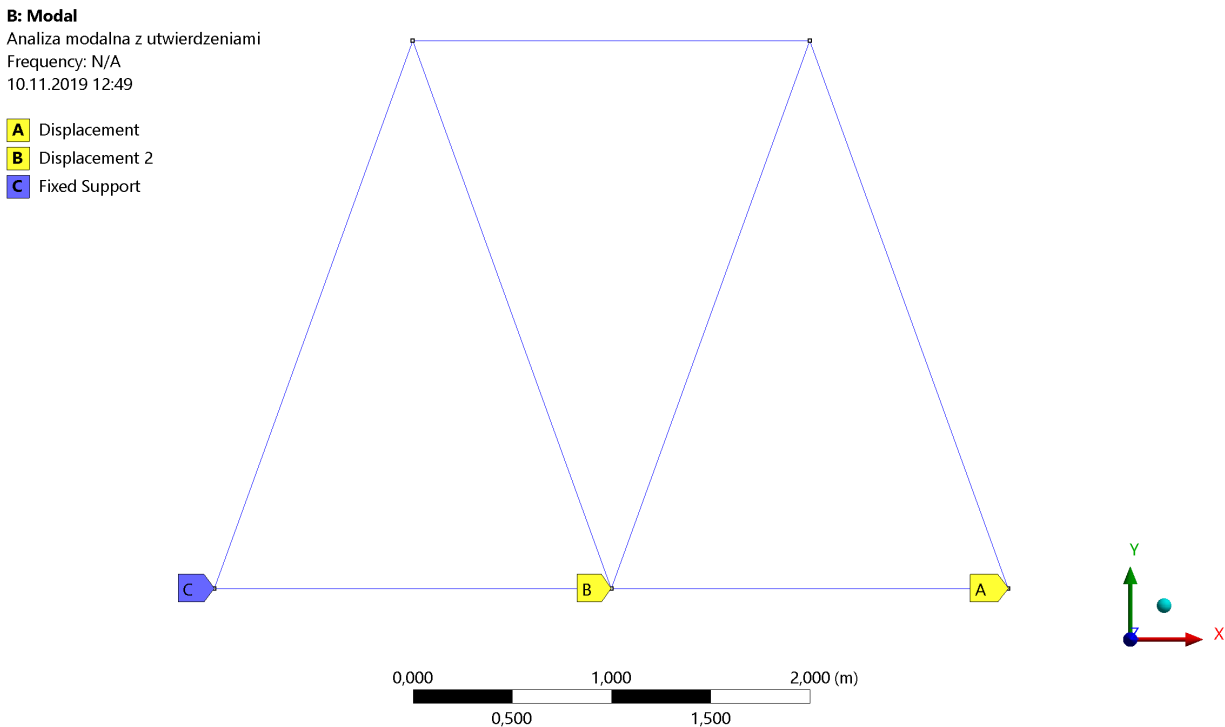
0 Max
-0,0086859
-0,017372
-0,026058
-0,034743
-0,043429
-0,052115
-0,060801
-0,069487
-0,078173 Min



Rysunek 13: Odształcenia na kierunku pionowym (Y) kratownicy

3.2 Analiza dynamiczna

Analizę modalną kratownicy w środowisku ANSYS Workbench dokonano na podstawie modelu geometrycznego pokazanego w rozdziale 3. Przyjęte warunki brzegowe zostały przedstawione na rysunku 14. Zostały zastosowane utwierdzenia odpowiadające podporom z kratownicy jak w punkcie 2. Dodatkowo odebrane zostały stopnie swobody na kierunku prostopadłym do płaszczyzny modelu we wszystkich węzłach konstrukcji.



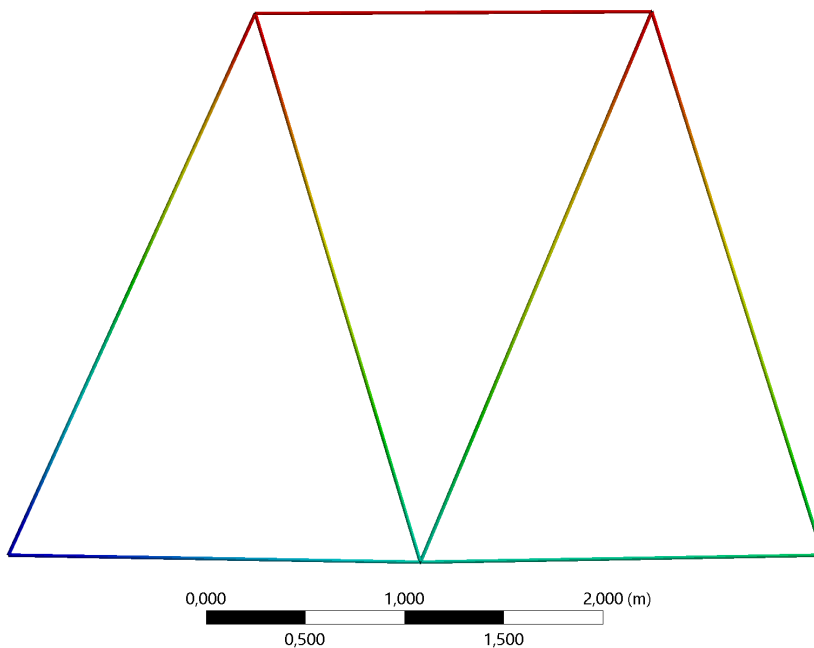
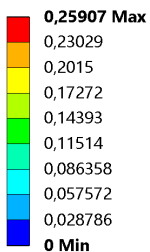
Rysunek 14: Warunki brzegowe do analizy modalnej

Otrzymane w wyniku analizy modalnej częstotliwości drgań widoczne są w poniższej tabeli. Wyniki idealnie pokrywają się z wynikami uzyskanymi w środowisku Matlab, pod warunkiem zastosowania odpowiednich utwierdzeń oraz elementu typu LINK 180. W przypadku elementu domyślnego programu ANSYS częstotliwości drgań nie pokrywały się w ogóle. Poniżej znajdują się wyniki w formie tabeli 3 oraz rysunków postaci drgań.

Tabela 3: Częstotliwości drgań własnych konstrukcji

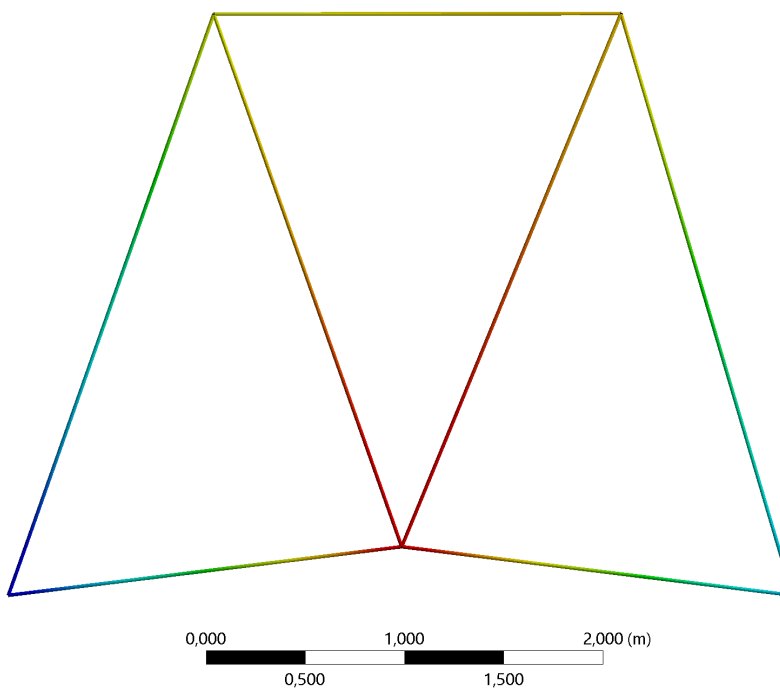
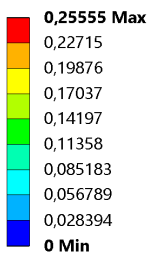
Postać drgań	Częstotliwość [Hz]
1	106,02
2	159,13
3	275,69
4	391,49
5	494,66
6	549,19
7	656,60

B: Modal
 Total Deformation
 Type: Total Deformation
 Frequency: 106,02 Hz
 Unit: m
 08.11.2019 11:51



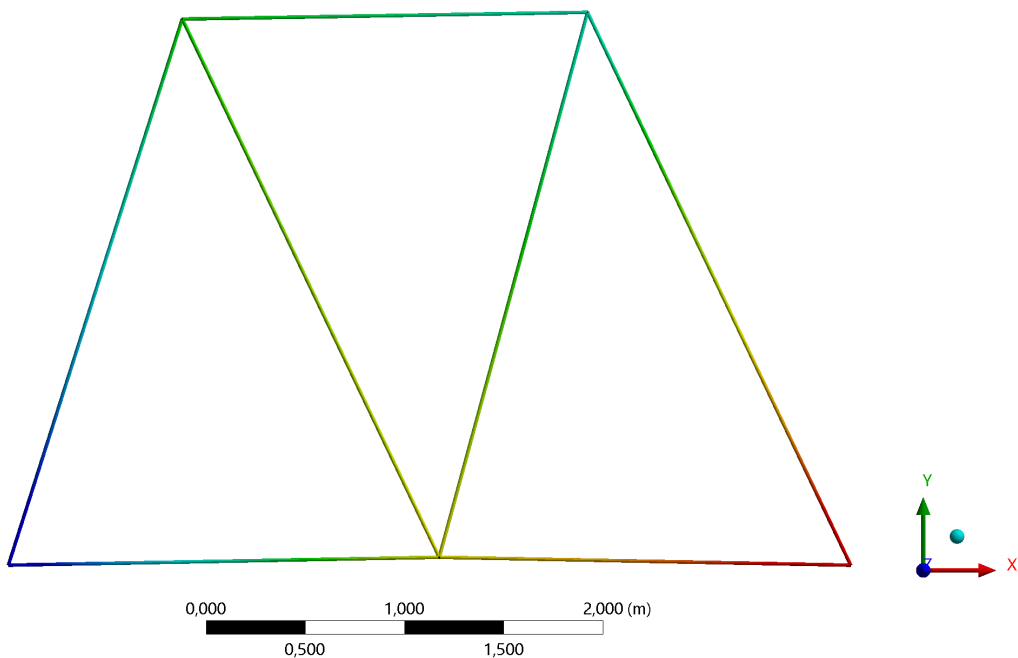
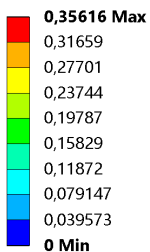
Rysunek 15: Postać drgań dla $f = 106,02 \text{ [Hz]}$

B: Modal
 Total Deformation 2
 Type: Total Deformation
 Frequency: 159,13 Hz
 Unit: m
 08.11.2019 11:51



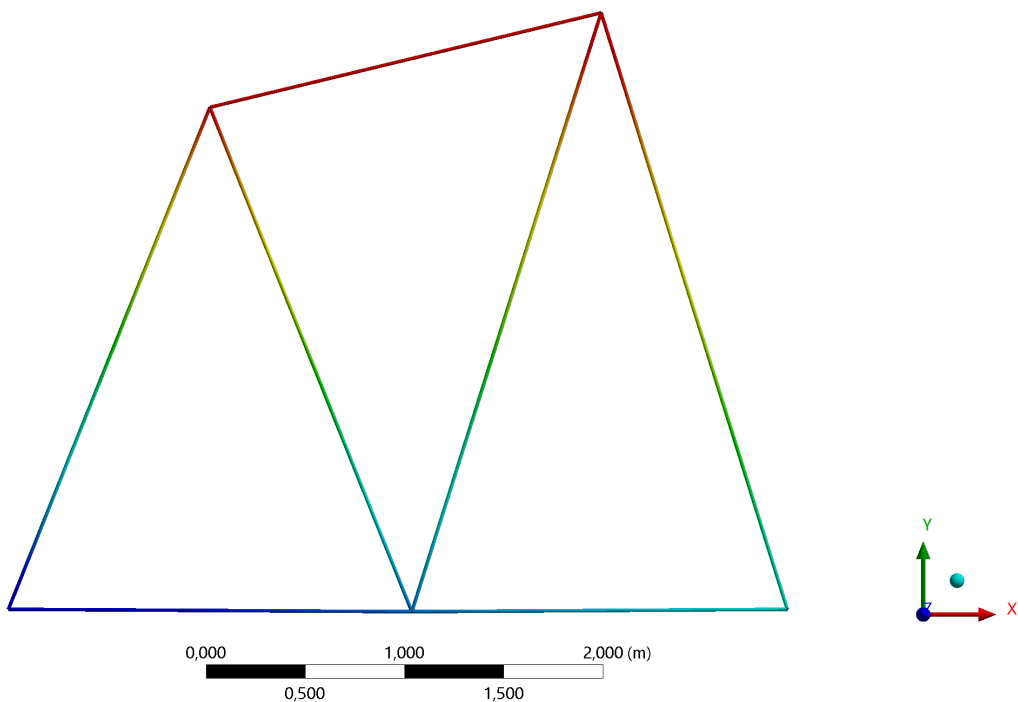
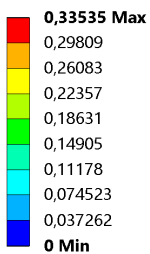
Rysunek 16: Postać drgań dla $f = 159,13 \text{ [Hz]}$

B: Modal
 Total Deformation 3
 Type: Total Deformation
 Frequency: 275,69 Hz
 Unit: m
 08.11.2019 11:51



Rysunek 17: Postać drgań dla $f = 275,69 [Hz]$

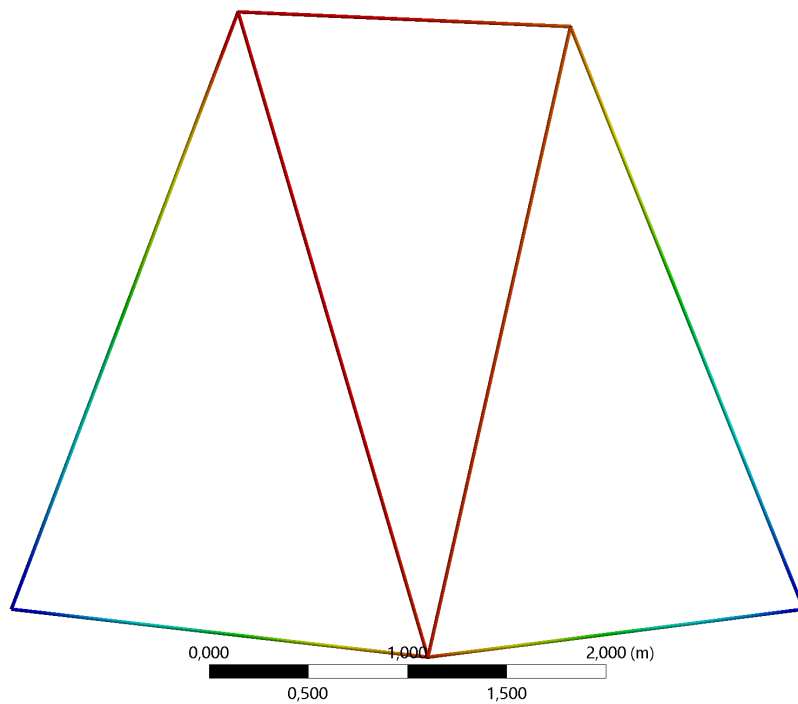
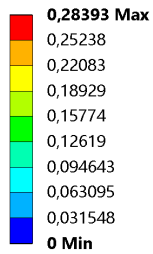
B: Modal
 Total Deformation 4
 Type: Total Deformation
 Frequency: 391,49 Hz
 Unit: m
 08.11.2019 11:52



Rysunek 18: Postać drgań dla $f = 391,49 [Hz]$

B: Modal

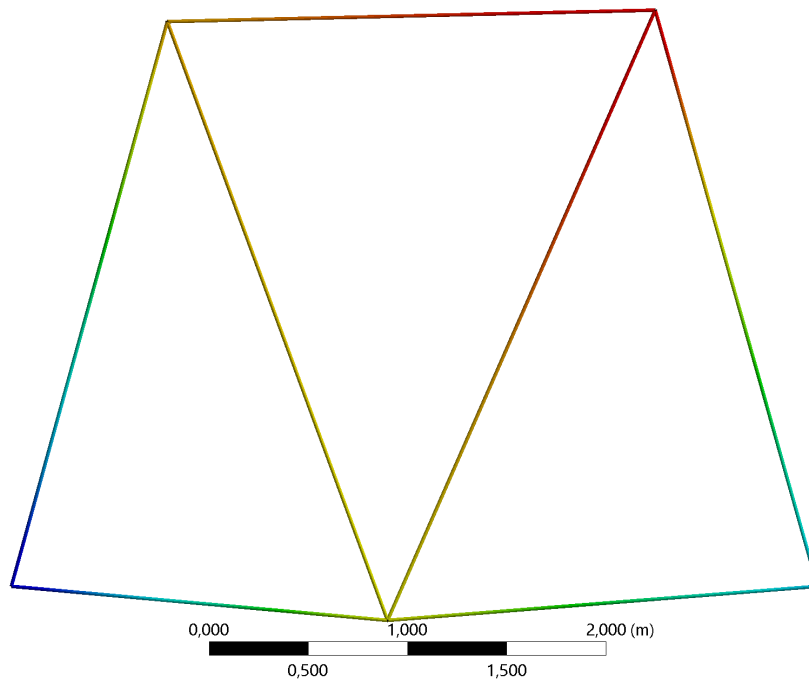
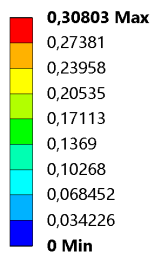
Total Deformation 5
Type: Total Deformation
Frequency: 494,66 Hz
Unit: m
08.11.2019 11:52



Rysunek 19: Postać drgań dla $f = 494,66[Hz]$

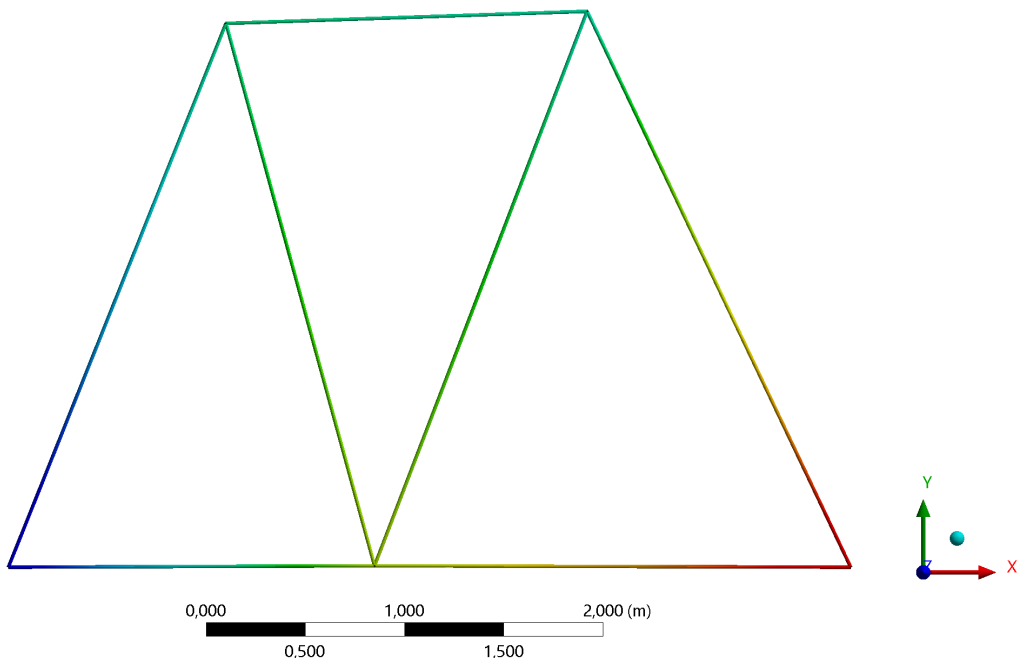
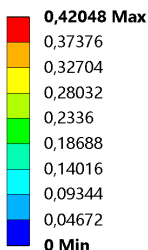
B: Modal

Total Deformation 6
Type: Total Deformation
Frequency: 549,19 Hz
Unit: m
08.11.2019 11:52



Rysunek 20: Postać drgań dla $f = 549,19[Hz]$

B: Modal
 Total Deformation 7
 Type: Total Deformation
 Frequency: 656,6 Hz
 Unit: m
 08.11.2019 11:53



Rysunek 21: Postać drgań dla $f = 656,60 [Hz]$

4 Porównanie wyników oraz wnioski

Jak można zauważyć analiza statyczna w przypadku obu środowisk daje podobne rezultaty. Analizując rysunki 12 oraz 2 można zauważyć, że odkształcenia są bardzo zbliżone oraz kształt przyjmowany przez kratownice jest spójny. W poniższej tabeli znajduje się zestawienie odpowiednich przemieszczeń dla obu modeli.

Tabela 4: Zestawienie przemieszczeń węzła nr 3 z obu modeli statycznych

	Matlab	ANSYS
Przemieszczenie bezwzględne węzła [mm]	78,5	78,55
Przemieszczenie na kierunku X [mm]	7,7	6,81
Przemieszczenie na kierunku Y [mm]	-78,1	-78,17

Jak widać w tabeli 4 otrzymane przemieszczenia w obu środowiskach są bardzo zbliżone i może to być podstawą do akceptacji wyników otrzymanych w środowisku Matlab. Należy zwrócić uwagę, że w przypadku bardziej skomplikowanych problemów przeprowadzenie obliczeń w taki sposób wymagało by o wiele większego nakładu pracy niż w przy użyciu narzędzi inżynierskich jak na przykład oprogramowanie ANSYS.

Porównując wyniki analizy modalnej możemy zauważyć że pokrywają się częstotliwości drgań oraz kształt w obu metodach. Świadczy to o tym, że macierze mas oraz sztywności dla wybranego typu elementu są budowane w ten sam sposób oraz metoda wyznaczania częstotliwości własnych musi być taka sama. Dodatkowo można zauważyć, że otrzymane wektory własne w przypadku analizy w środowisku Matlab są przemieszczeniami węzłów. Analizując przemieszczenia węzłów na rysunkach ze środowiska ANSYS widoczne jest, że wartości przemieszczeń są zbliżone do tych otrzymanych pierwszą metodą co może świadczyć o podobnej metodzie wyznaczania wektorów własnych oraz sposobie normalizacji wektorów własnych. Jest to normalizacja M-ortogonalna, ponieważ po przeprowadzeniu normalizacji względem macierzy bezwładności wektory normlane uzyskane z funkcji *eig* nie zmieniły wartości.