VII. ZAGADNIENIA DYNAMIKI

1. Równanie ruchu dla zagadnienia dynamicznego

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}\cdot\mathbf{q}=\mathbf{Q}\,, \qquad (7.1)$$

gdzie

$\mathbf{M}_{N\mathrm{x}N}$ – macierz mas,

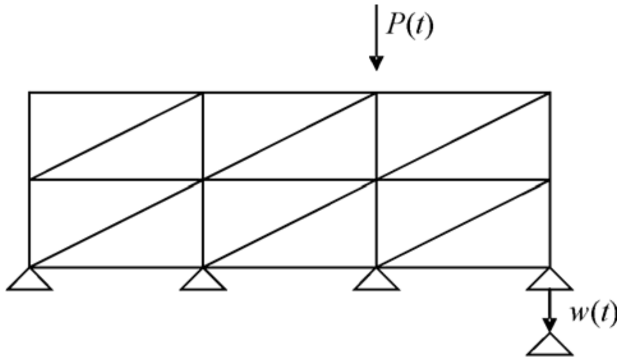
$\mathbf{C}_{N\mathrm{x}N}$ – macierz tłumienia,

$\mathbf{K}_{N\mathrm{x}N}$ – macierz sztywności,

$\mathbf{q}_{N\mathrm{x}1}$ – wektor przemieszczeń uogólnionych-wektor parametrów,

$\mathbf{Q}_{N\mathrm{x}1}$ – wektor wymuszających sił uogólnionych,

N – liczba stopni swobody.



Rys. 7.1

Jeżeli układ poddany jest wymuszeniom kinematycznym to zagadnienie również można sprowadzić do równania wyjściowego.

W tym celu rozkładamy wektor parametrów przemieszczeń $\tilde{\mathbf{q}}$ na:

- $\mathbf{q}$ – wektor parametrów przemieszczeniowych o poszukiwanych wartościach (przemieszczenia nieznane)
- $\mathbf{z}$ – wektor parametrów przemieszczeniowych o zadanych przemieszczeniach (wymuszenie kinematyczne).

Niech $\tilde{\mathbf{q}}=\begin{Bmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{z}\end{Bmatrix}$ oraz $\tilde{\mathbf{Q}}=\begin{Bmatrix}\mathbf{Q}\\ \mathbf{R}\end{Bmatrix}$

gdzie: $\mathbf{R}$ jest reakcje na zadanych wymuszeniach kinematycznych.

Wówczas układ równań wyjściowy:

$$\tilde{\mathbf{M}}\cdot\ddot{\tilde{\mathbf{q}}}+\tilde{\mathbf{C}}\cdot\dot{\tilde{\mathbf{q}}}+\tilde{\mathbf{K}}\cdot\tilde{\mathbf{q}}=\tilde{\mathbf{Q}}\,, \qquad (7.2)$$

po dekompozycji

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{M}'' \\ \mathbf{M}''^{\mathrm{T}} & \mathbf{M}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}'' \\ \mathbf{C}''^{\mathrm{T}} & \mathbf{C}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}'' \\ \mathbf{K}''^{\mathrm{T}} & \mathbf{K}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix}, \tag{7.3}$$

po rozpisaniu

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q} - \mathbf{M}''\ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}''\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{K}''\mathbf{z} \\ &\mathbf{R} = \mathbf{M}''^{\mathbf{T}}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}'\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}''^{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}'\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}''^{\mathbf{T}}\mathbf{q} + \mathbf{K}'\mathbf{z} \end{aligned} \tag{7.4}$$

jeżeli oznaczyć

$$\mathbf{b} = \mathbf{Q} - \mathbf{M}''\ddot{\mathbf{z}} - \mathbf{C}''\dot{\mathbf{z}} - \mathbf{K}''\mathbf{z} \tag{7.5}$$

wówczas

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{b}\,. \tag{7.6}$$

Po wyznaczeniu **q** wyznaczamy **R** z drugiego z równań powyżej (reakcje w więzach).

2. Podział zagadnień dynamicznych

1. Zagadnienie liniowe - drgania liniowe
   M, C, K są stałe niezależnie od $\mathbf{q}$ i $\dot{\mathbf{q}}$,
   $$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{b}(t)\,. \tag{7.7}$$
2. Zagadnienie liniowe - drgania liniowe parametryczne
   M(*t*), **C**(*t*), **K**(*t*) są jawnymi funkcjami czasu, niezależne od $\mathbf{q}$ i $\dot{\mathbf{q}}$,
   $$\mathbf{M}(t)\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t)\cdot\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(t)\cdot\mathbf{q} = \mathbf{b}(t)\,. \tag{7.8}$$
3. Zagadnienie nieliniowe - drgania nieliniowe
   M, C, K zależą od czasu *t*, $\mathbf{q}$ i $\dot{\mathbf{q}}$,
   $$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)\cdot\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)\cdot\mathbf{q} = \mathbf{b}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)\,. \tag{7.9}$$
4. Zagadnienie własne
   $\mathbf{b} \equiv 0$,
   $$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{0}\,, \tag{7.10}$$
   – różne warianty równania dla zagadnienia własnego.

3. Zagadnienie własne - problem matematyczny

Standardowe zagadnienie własne – jest to rozwiązanie liniowego jednorodnego układu równań postaci

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I}\cdot\lambda)\,\mathbf{x} = 0, \tag{7.11}$$

gdzie **A**, **I** – macierze $N\times N$; **x** – wektor o wymiarze *N*.

Mamy nietrywialne rozwiązanie, jeżeli

$$\det(\mathbf{A}-\mathbf{I}\cdot\lambda) = 0, \tag{7.12}$$

co prowadzi do wielomianowego równania N-tego stopnia

$$\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0\,. \tag{7.13}$$

Jeżeli macierz **A** jest dodatnio określona (tzn.: $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} > 0$ dla dowolnego **x)** to wszystkie pierwiastki są rzeczywiste i dodatnie:

$$\lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ \ldots\ \lambda_N. \tag{7.14}$$

Po wstawieniu do r-nia wyjściowego każdego z λ_i, oraz przyjęciu jednej z niewiadomych np. x_1=1 obliczamy pozostałe x_j $\rightarrow$ otrzymujemy kolejno wektory własne: $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \ldots, \mathbf{x}^N$.

Wektory własne obliczane są z dokładnością do stałego mnożnika.

4. Zagadnienie własne liniowego układu dynamicznego bez tłumienia

Rozważamy drgania swobodne układu liniowego bez tłumienia: $\mathbf{C} \equiv 0$, $\mathbf{b} \equiv 0$, wówczas równanie ruchu ma postać

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{0}\,. \tag{7.15}$$

Rozwiązanie przyjmujemy w postaci

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^0\cdot \mathrm{e}^{j\omega_0 t} \quad \text{– jest to opis drgań harmonicznych,} \tag{7.16}$$

gdzie $\mathbf{q}^0$ - wektor amplitud przemieszczeń,
ω_0 - częstość drgań własnych,
$j = \sqrt{-1}$ liczba urojona.

Formalnie powyższe równanie można interpretować jako złożenie dwóch ortogonalnych drgań typu $\sin\omega_0 t$ i $\cos\omega_0 t$.

Po podstawieniu do równania wyjściowego:

$$\left(\mathbf{K} - \mathbf{M}\omega_0^2\right)\mathbf{q}^0 = \mathbf{0}\,. \tag{7.17}$$

Aby doprowadzić do standardowego zagadnienia własnego, macierz **M** rozkładamy na:

$$\mathbf{M}=\mathbf{L}^T\mathbf{L}, \tag{7.18}$$

gdzie **L** - macierz górno-trójkątna,

$$(\mathbf{K} - \mathbf{L}^T\mathbf{L}\,\omega_0^2)\ \mathbf{q}^0 = \mathbf{0} \tag{7.19}$$

$$\uparrow \qquad\qquad \uparrow$$

$$\mathbf{L}^{-T} \qquad\qquad \mathbf{L}^{-1}\cdot\mathbf{L}$$

stąd

$$\Big(\underbrace{\mathbf{L}^{-T}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{L}^{-1}}_{\mathbf{A}} - \mathbf{I}\cdot\underbrace{\omega_0^2}_{\lambda}\Big)\cdot\underbrace{\mathbf{L}\cdot\mathbf{q}^0}_{\mathbf{x}^0} = \mathbf{0} \tag{7.20}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I}\cdot\lambda)\ \mathbf{x}^0 = \mathbf{0}. \tag{7.21}$$

Powyższe równanie jest standardowym zagadnieniem własnym.

Po rozwiązanie równania

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{I}\cdot\lambda) = \mathbf{0}, \tag{7.22}$$

otrzymujemy $\lambda_i = \omega^2_{0i}$ $i = 1,2,...,N$ – częstości własne,

oraz $\mathbf{x}^0_{\mathrm{i}} \rightarrow \mathbf{q}^0_i = \mathbf{L}^{-1}\,\mathbf{x}^0_i$ $i = 1,2,...,N$ – wektory własne.

Zwykle przyjmujemy macierz mas jako niekonsystentną, tzn. masy koncentrujemy w węzłach, wówczas:

$$\mathbf{M} = \mathrm{diag}\,(M_i) \tag{7.23}$$

stąd $\mathbf{L} = \mathrm{diag}\,(\sqrt{M_i}\,)$,

oraz $\mathbf{q}_i^0 = \left\{ \frac{x_1^0}{\sqrt{M_1}}, \frac{x_2^0}{\sqrt{M_2}}, \ldots, \frac{x_N^0}{\sqrt{M_N}} \right\}$.

5. Normowanie wektora własnego $\mathbf{q}^0$

Wektory własne otrzymuje się z dokładnością do stałego mnożnika. Często dokonuje się odpowiedniego skalowania:

Sposób 1 - ograniczenie współrzędnych wektora.

Przyjmuje się, że max współrzędna wektora q_α^0 będzie równa 1, stąd unormowany wektor

$$\mathbf{q}_{\mathrm{n}}^0 = \frac{1}{q_\alpha^0}\mathbf{q}^0. \tag{7.24}$$

Sposób 2 - ortonormalizacja.

Dobiera się mnożnik tak, aby norma $\left\|\mathbf{q}_{\mathrm{n}}^0\right\| = 1$, stąd

$$\mathbf{q}_{\mathrm{n}}^0 = \frac{\mathbf{q}^0}{\left\|\mathbf{q}^0\right\|} = \frac{\mathbf{q}^0}{\sqrt{\mathbf{q}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{q}^0}} = \frac{\mathbf{q}^0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(q_i^0\right)^2}}. \tag{7.25}$$

Sposób 3 - M-ortonormalizacja

Jest to normalizacja z wagą macierzy bezwładności

$$\mathbf{q}_{\mathrm{n}}^0 = \frac{\mathbf{q}^0}{\sqrt{\mathbf{q}^{0\mathrm{T}}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{q}^0}} = \frac{\mathbf{q}^0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} M_{ij}q_i^0 q_j^0}} = \frac{\mathbf{q}^0}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} M_i\left(q_i^0\right)^2}}. \tag{7.26}$$

gdzie ostatnia prawa strona (26) dotyczy niekonsystentnej macierzy mas **M.**

6. Do czego służy analiza zagadnienia własnego?

1. Opisuje drgania swobodne konstrukcji.
2. Z widma częstości drgań własnym możemy wyciągnąć szereg wniosków co do zachowania się konstrukcji pod wpływem obciążeń o charakterze harmonicznym.
3. Problem rezonansu.
4. Znajomość form i częstości własnych pozwala na wykonanie analizy modalnej, tzn. rozsepa-rowanie zagadnienia względem tzw. współrzędnych modalnych (będzie to omówione dalej).

Uwaga: wektory własne są względem siebie ortogonalne – z wagą **M**

$$\mathbf{q}_i^0 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}_j^0 = 0 \qquad \text{dla} \qquad i \neq j\,. \tag{7.27}$$

7. Zagadnienie własne układów dynamicznych tłumionych

Drgania swobodne układu tłumionego

$$\mathbf{M} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0}\,. \tag{7.28}$$

Rozwiązanie otrzymuje się w dziedzinie liczb zespolonych.

Wprowadza się nowe współrzędne: współrzędne stanu

$$\mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \overset{\text{ozn}}{=} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Bmatrix}. \tag{7.29}$$

Po podstawieniu do równania wyjściowego mamy

$$\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{C} \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{K} \cdot \mathbf{y}_2 = 0 \quad \Big| \mathbf{M}^{-1} \text{ lewostronnie} \tag{7.30}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{y}_1 + \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{y}_2 = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{y}}_2 - \mathbf{y}_1 = \mathbf{0} \end{cases} \tag{7.31}$$

stąd
$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{y}}_1 \\ \dot{\mathbf{y}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{0}\,, \tag{7.32}$$

a korzystając z oznaczenia (29) mamy

$$\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{V} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{0}\,. \tag{7.33}$$

Rozwiązania poszukuje się w postaci

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^0 e^{\lambda t}\,, \tag{7.34}$$

gdzie: $\mathbf{y}^0$ - wektor zespolony, λ - liczba zespolona.

Po podstawieniu mamy

$$(\mathbf{V} - \mathbf{I} \cdot \lambda)\, \mathbf{y}^0 = \mathbf{0}\,, \tag{7.35}$$

stąd wartości własne otrzymuje się z równania

$$\det\,(\mathbf{V} - \mathbf{I}\cdot\lambda) = \mathbf{0}. \tag{7.36}$$

Sposób ten jest bardzo pracochłonny.

8. Zagadnienia dynamiczne nieustalone

Analiza zagadnienia dynamicznego przy wymuszeniu siłowym.

Problem rozwiązania równania

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{q} = \mathbf{b}. \tag{7.37}$$

Pokazane będą dwa sposoby rozwiązania:
- poprzez całkowanie numeryczne,
- poprzez analizę modalną.

9. Całkowanie numeryczne „krok po kroku"

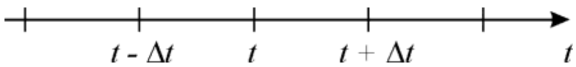
Istnieje wiele metod całkowania bezpośredniego równań ruchu.

Bazują one na następujących założeniach:

1. Przedział czasu dzielimy na odcinki Δt – z reguły odcinki stałe.
2. Równanie ruchu jest spełnione na granicach tych odcinków, czyli w punktach $t = k\cdot\Delta t$ (k = 1,2,3,...,).
3. Zakłada się arbitralnie określoną zmienność: przemieszczenia, prędkości i przyśpieszenia na odcinku czasu $<(k-1)\cdot\Delta t, k\cdot\Delta t>$.

10. Całkowanie metodą różnic skończonych

Punktem startu wielu metod jest uogólniona metoda różnic skończonych (na osi czasu)



Rys. 7.2

Macierzowe równanie ruchu zastępujemy równaniem różnicowym:

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\left[\frac{\mathbf{q}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{q}_t + \mathbf{q}_{t+\Delta t}}{\Delta t^2}\right] + \mathbf{C}\left[\frac{\mathbf{q}_{t-\Delta t} - \mathbf{q}_{t+\Delta t}}{2\Delta t}\right] + \mathbf{K}\left[(1-\beta_1-\beta_2)\mathbf{q}_t + \beta_1\mathbf{q}_{t-\Delta t} + \beta_2\mathbf{q}_{t+\Delta t}\right] = \\ = (1-\gamma_1-\gamma_2)\mathbf{b}_t + \gamma_1\mathbf{b}_{t-\Delta t} + \gamma_2\mathbf{b}_{t+\Delta t}\end{gathered} \tag{7.38}$$

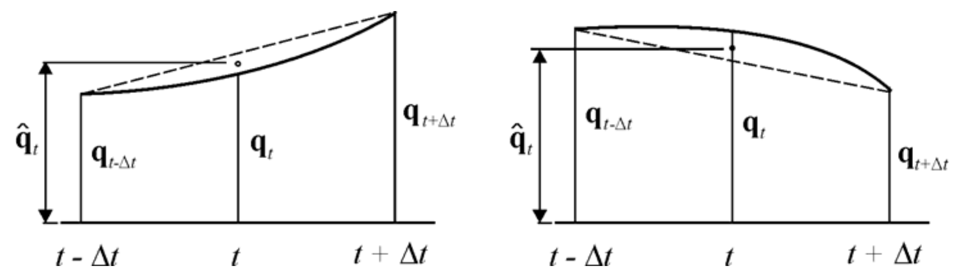
gdzie β_1 ,β_2, γ_1, γ_2 – stałe dodatnie,

$\beta_1>0$, $\beta_2>0$, $\beta_1+\beta_2<1$, $\gamma_1>0$, $\gamma_2>0$, $\gamma_1+\gamma_2<1$.

Komentarz:

- pochodne po czasie $\ddot{\mathbf{q}}_t$ i $\dot{\mathbf{q}}_t$ występujące przy macierzach **M** i **C** są standardowymi schematami różnicowymi,
- natomiast $\mathbf{q}_t$ i $\mathbf{b}_t$ są przedstawione za pomocą wartości centralnej i wartości w punktach sąsiednich, schematy te zawierają stałe które maja na celu stabilizację procesu iteracyjnego wprowadzając sztuczne tłumienie,
- dla $\beta_1 = \beta_2 \Rightarrow \hat{\mathbf{q}}_t = (1-2\beta)\,\mathbf{q}_t + \beta\,\mathbf{q}_{t-\Delta t} + \beta\,\mathbf{q}_{t+\Delta t}$
- ponieważ $2\beta < 1$ wówczas dla zadanych $\mathbf{q}_t$, $q_{t-\Delta t}$, $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ wartość aproksymowana $\hat{\mathbf{q}}_t < \mathbf{q}_t$

$$\hat{\mathbf{q}}_t \in \left(\mathbf{q}_t\ ,\ \frac{1}{2}(\mathbf{q}_{t+\Delta t} + \mathbf{q}_{t-\Delta t}) \right),$$



Rys. 7.3

Schemat różnicowy (1) aproksymuje równanie ruchu z błędem $0(\Delta t)$ dla $\beta_1 \neq \beta_2$ oraz $0(\Delta t^2)$ dla $\beta_1 = \beta_2$.

Uwaga: błąd $0(h^n)$ jest to funkcja dla której

$$\lim_{h \to 0} \frac{0(h^n)}{h^{n-1}} = 0\,.$$

Analiza stabilności schematów różnicowych prowadzi do warunków na bezwarunkową stabilność procesu

$$0.5\,(\beta_1 + \beta_2) \geq 0.25 \quad \text{i} \quad \beta_1 \geq \beta_2. \tag{7.39}$$

W przypadku drgań swobodnych **C**≡0 warunek zapisuje się w postaci

$$[0.5(\,\beta_1 + \beta_2\,) - 0.25]\,\Delta t^2\,\omega^2_k - 1 > 0, \tag{7.40}$$

wynika stąd, że stabilność limitowana jest częstością ω_k, im większa wartość częstości tym krok czasowy Δt musi być mniejszy.

Algorytm całkowania:

1. określenie parametrów β_1, β_2, γ_1, γ_2, Δt,
2. określenie wartości startowych wektor parametrów $\mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}}_0$,
3. z równania (38) wyznaczamy $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ dla $t = \Delta t$, $2\Delta t$, ...

11. <u>Metoda Newmarka</u>

Jest to metoda najbardziej popularna. Jest metodą niejawną.

Równanie ruchu w chwili: $t + \Delta t$

$$\mathbf{M}\cdot\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\cdot\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\cdot\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{b}_{t+\Delta t}\,. \tag{7.41}$$

Prędkość na końcu kroku

$$\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{q}}_t + \underbrace{\left[(1+\beta)\cdot\ddot{\mathbf{q}}_t + \beta\cdot\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\right]}\Delta t \tag{7.42}$$

prędkość na pocz. kroku pewne uśrednione przyśpieszenie na odcinku (t , $t + \Delta t$)

dla $\beta = 0.5 \rightarrow$ średnia arytmetyczna tzn. liniowy rozkład przyśpieszenia

Podobnie szacujemy przem. na końcu kroku

$$\mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{q}_t + \dot{\mathbf{q}}_t\Delta t + \underbrace{\left[(0.5-\alpha)\ddot{\mathbf{q}}_t + \alpha\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}\right]}\Delta t^2 \tag{7.43}$$

przemieszczenie na pocz. kroku pewne uśrednione przyśpieszenie na odcinku *(t, t*+Δt*)*
prędkość na pocz. kroku

Dla α=1/6 powyższy wzór odpowiada przyjęciu liniowego rozkładu przemieszczenia na kroku czasowym.

Z aproksymacji (42) i (43) wyznaczyć można $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ i $\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ jako funkcje na początku kroku:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\left[\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t - \dot{\mathbf{q}}_t\Delta t - \Delta t^2(0.5-\alpha)\ddot{\mathbf{q}}_t\right] \\ \dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t} &= \frac{\beta}{\alpha\Delta t}\left(\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_t\right) - \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\dot{\mathbf{q}}_t - \Delta t\left(1-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\ddot{\mathbf{q}}_t \end{aligned}\right\} \tag{7.44}$$

Wstawiając (5) do (2) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\beta}{\alpha\Delta t}\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\mathbf{q}_{t+\Delta t} &= \mathbf{b}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}\left[\frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{q}_t + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{q}}_t + \left(\frac{1}{2\alpha}-1\right)\ddot{\mathbf{q}}_t\right] + \\ &+ \mathbf{C}\left[\frac{\beta}{\alpha\Delta t}\mathbf{q}_t + \left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right)\dot{\mathbf{q}}_t + \Delta t\left(\frac{\beta}{2\alpha}-1\right)\ddot{\mathbf{q}}_t\right] \end{aligned} \tag{7.45}$$

stąd znając wartości na początku kroku: $\ddot{\mathbf{q}}_t$, $\dot{\mathbf{q}}_t$, $\mathbf{q}_t$ można wyznaczyć $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$.

Metoda ta jest bezwarunkowo stabilna dla

$\beta \geq 0,5$ i $\alpha \geq 0,25(\beta+0,5)^2$,

zwykle przyjmuje się β=0,5 oraz α=0,25.

12. Metoda modalna

Wektory własne $\mathbf{q}_i^0$ (i=1,2,...,N) nie są do siebie ortogonalne, a w takim razie nie są wygodną bazą szukanego rozwiązania drgań nieustalonych.

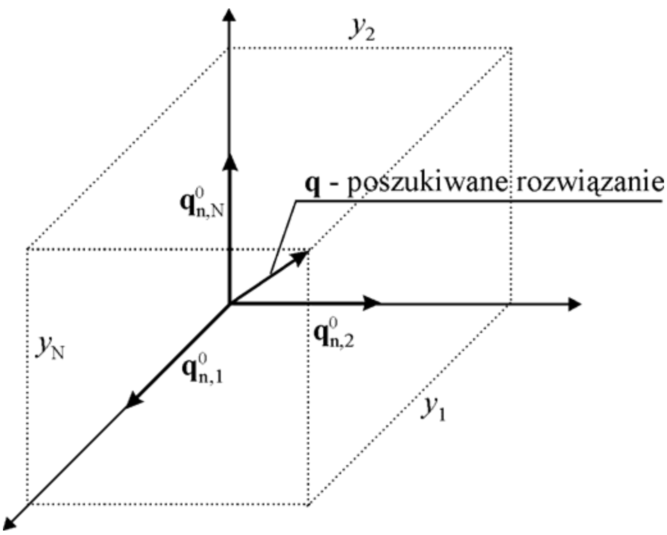
Natomiast wektory własne M-ortonormalizowane są ortogonalne i stanowią właściwą bazę. Poszukujemy rozwiązania drgań nieustalonych w postaci

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{\Phi}\cdot\mathbf{y}(t) \tag{7.46}$$

gdzie: $\mathbf{\Phi} = [\mathbf{q}^0_{n,1}, \mathbf{q}^0_{n,2}, ..., \mathbf{q}^0_{n,N}]$ jest macierzą $N\times N$ M-ortonormalnych wektorów własnych.

Niech

$$\mathbf{y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{Bmatrix}$$ jest wektorem przemieszczeń we współrzędnych modalnych



Rys. 7.4. Przestrzeń wektorów modalnych

Macierz tłumienia przyjmujemy w postaci $\mathbf{C} = \alpha_1\mathbf{M} + \alpha_2\mathbf{K}$ – model tłumienia Rayleigha.

Po podstawieniu (46) do równania ruchu oraz pomnożeniu lewostronnym przez $\mathbf{\Phi}^T$, mamy

$$\underbrace{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{M\Phi}}_{\mathbf{I}}\ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{C\Phi}}_{\alpha_1\mathbf{I}+\alpha_2\mathbf{\Omega}}\dot{\mathbf{y}} + \underbrace{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{K\Phi}}_{\mathbf{\Omega}}\mathbf{y} = \underbrace{\mathbf{\Phi}^T\mathbf{b}}_{\mathbf{b}^*} \tag{7.47}$$

stąd

$$\ddot{\mathbf{y}} + (\alpha_1\mathbf{I} + \alpha_2\mathbf{\Omega})\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Omega y} = \mathbf{b}^*, \tag{7.48}$$

gdzie $\Omega = \mathrm{diag}(\omega_{0j}^2)$.

Macierzowe równanie (2) separuje się na *N* zwyczajnych równań różniczkowych

$$\ddot{y}_j + \left(\alpha_1 + \alpha_2 \omega_{0j}^2\right)\dot{y}_j + \omega_{0j}^2 y_j = b_j^* \qquad \text{dla} \qquad j = 1,2,...,N. \tag{7.49}$$

Warunki brzegowe $\dot{\mathbf{q}}(0), \mathbf{q}(0)$ we współrzędnych modalnych zapisują się w postaci

$$\begin{cases} \mathbf{y}(0) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\mathbf{q}(0) \\ \\ \dot{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(0) \end{cases} \tag{7.50}$$

Po rozwiązaniu równań (49) z war. brzegowymi (50) otrzymuje się rozwiązanie jako superpozycję rozwiązań cząstkowych

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{j=1}^{N} \left(\mathbf{q}_{n,j}^{0} \cdot y_j\right). \tag{7.51}$$

Metoda modalna jest bardzo efektywna, szybka. Jeżeli znamy fizykę badanego zjawiska, to możemy ograniczyć liczbę branych pod uwagę wektorów własnych.