Прямокутник найбільшої площі вписаний в опуклу оболонку

Лабораторна робота

Студента 3 року навчання

Групи МІ-31

Гришечкіна Тихона Сергійовича

Київ, 2024

Зміст

Анотація

У лабораторній було досліджено проблему знаходження прямокутника найбільшої площі, вписаного в опуклу оболонку. Був наведений опис алгоритму, запропонований Бехрузі у 2019 [1], а також виконано приклад реалізації алгоритму мовою програмування C#.

Annotation

The problem of finding a rectangle of the largest area inscribed in a convex hull was studied in the lab. An algorithm proposed by Behrouzi in 2019 is described [1], and an example of the algorithm implementation in the C# programming language is given.

1 Вступ

Задача пошуку найбільшого вписаного прямокутника є важливою задачею у багатьох галузях, таких як комп'ютерна графіка, робототехніка та обробка зображень. Проблема знаходження найбільшого вписаного прямокутника (НВП) добре досліджена багатьма науковцями. В цілому зазвичай виділяють дві задачі знаходження НВП: задача знаходження НВП зі сторонами паралельними осям координат та загальна.

Наприклад, у праці Денієлса, Міленковича та Рота [2] досліджено методи та алгоритми для прямокутників зі сторонами паралельними осям координат для різних типів многокутників. А в праці Альта [3] описано алгоритм для цієї ж задачі у випадку опуклого многокутника «методом дотичних» зі складністю $O(\log(n))$. Це є найкращим результатом для випадку опуклого многокутника, який цікавить нас в рамках цієї лабораторної, що я знайшов у відкритому доступі.

В цій лабораторній буде описано і реалізовано алгоритм Бехрузі [1] для знаходження НВП зі сторонами паралельними осям координат у випадку опуклого многокутника, що має складність $O(n)$. Але важливо зазначити, що у статті Бехрузі показано, що можна перейти до алгоритму знаходження загального НВП у випадку опуклого многокутника (без обмеження на паралельність осям координат), зі складністю $O(\frac{n}{\epsilon})$, де ϵ - відносна похибка площі отриманого прямокутника від оптимального.

Важливо зазначити, що хоч і в рамках цієї лабораторної потрібне знаходження опуклої оболонки, [4] алгоритми її знаходження розглядатися не будуть, а у реалізації буде використано «алгоритм Грехема».

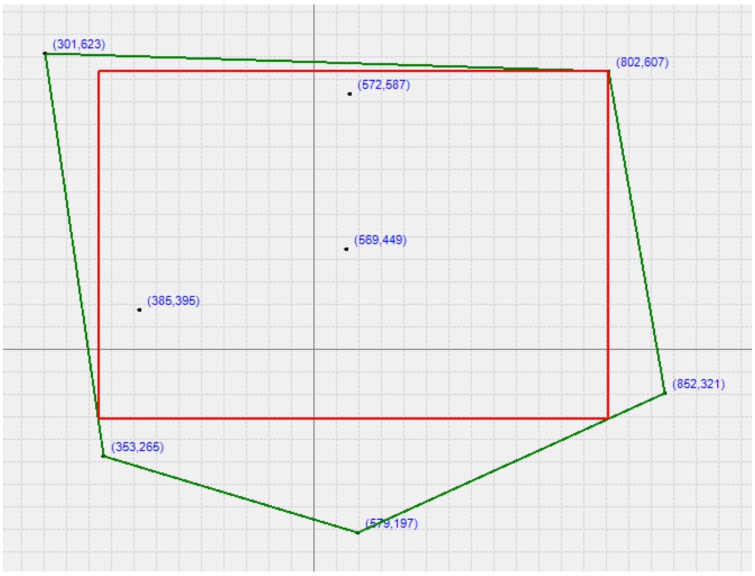

Рис. 1: Приклад опуклої оболонки множини точок, з вписаним прямокутником найбільшої площі

2 Основна частина

2.1 Загальні положення

Розглянемо довільний опуклий многокутник F розміру n. Тоді можемо сформувати критерій належності точки многокутнику F, за допомогою системи з n нерівностей. Для цього проведемо через кожні дві сусідні точки многокутника пряму, та обмежимо за допомогою рівняння цієї прямої точки, які попадають у многокутник. Для наочності рисунок[2].

Врешті-решт, будемо мати:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix},$$

де P - матриця розміру $n \times 2$ (коефіцієнти обмежуючих прямих), та вектор

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

розміру n (обмежуючі коефіцієнти).

Тоді критерієм належності точки $\mathbf{x}$ многокутнику буде нерівність

$$Px \leq b.$$

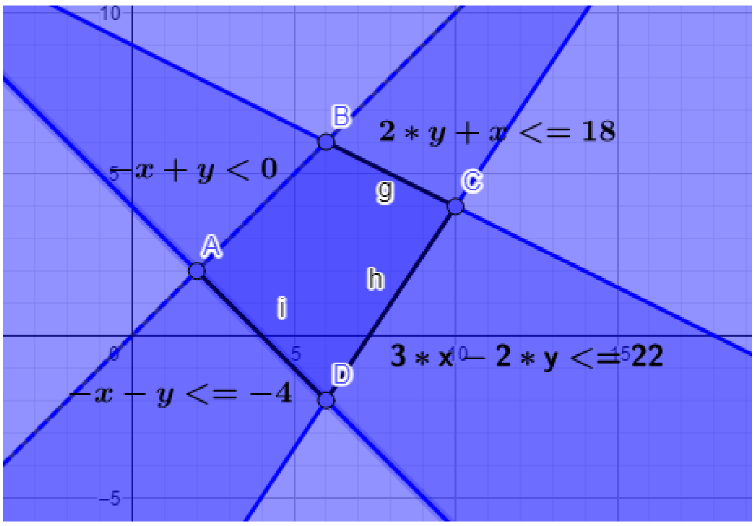

Рис. 2: Приклад многукутника $ABCD$, з обмежуючими його нерівностями

Тепер нехай для довільного багатокутника F, маємо довільні три точки x, y, z, та вектори $(\vec{u} = y - x, \vec{v} = z - x)$. Рисунок 3 для прикладу. Тоді рішенням знаходження найбільшого вписаного прямокутника, буде рішення наступної задачі оптимізації:

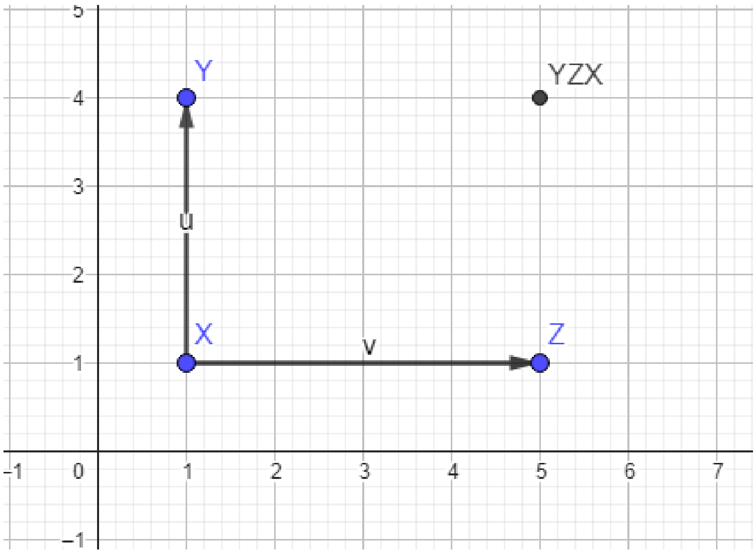

Рис. 3: Приклад точок x, y, z та векторів $(\vec{u}, \vec{v})$

$$\max |u_1 v_2 - u_2 v_1| \tag{1}$$

За умов:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \tag{2}$$

$$(x, y, z, y + z - x) \subseteq$$

Де формула 1| - максимізація площі шуканих прямокутників. Формула 2 - умова ортогональності векторів u та v.

2.2 Опис алгоритму

Виходячи з положень, що були описані в попередньому розділі, можемо сформулювати алгоритм для випадку прямокутників зі сторонами паралельними осям координат.

ayyyy

2.3 Оцінка складності

Тут починається оцінка складності.

3 Практична частина

Тут починається практична частина.

4 Висновки

Тут починаються висновки.

5 Додатки

Тут починаються додатки.

Література

[1] Behroozi, M. (2019). Largest inscribed rectangles in geometric convex sets. arXiv preprint arXiv:1905.13246.

[2] DANIELS, Karen; MILENKOVIC, Victor; ROTH, Dan. Finding the largest area axis-parallel rectangle in a polygon. Computational Geometry, 1997, 7.1-2: 125-148.

[3] ALT, Helmut; HSU, David; SNOEYINK, Jack. Computing the largest inscribed isothetic rectangle. In: CCCG. 1995. p. 67-72.

[4] CORMEN, Thomas H., et al. 33.3: Finding the convex hull. Introduction to Algorithms, 1990, 955-956.