

# **Прямокутник найбільшої площі вписаний в опуклу оболонку**

**Лабораторна робота**

Студента 3 року навчання

Групи МІ-31

Гришечкіна Тихона Сергійовича

# Зміст

<b>1</b>	<b>Вступ</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Основна частина</b>	<b>4</b>
2.1	Загальні положення	4
2.2	Опис алгоритму	5
2.3	Оцінка складності	5
<b>3</b>	<b>Практична частина</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Висновки</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Додатки</b>	<b>8</b>
	<b>Список літератури</b>	<b>9</b>

---

## **Анотація**

У лабораторній було досліджено проблему знаходження прямокутника найбільшої площі, вписаного в опуклу оболонку. Був наведений опис алгоритму, запропонований Бехрузі у 2019 [1], а також виконано приклад реалізації алгоритму мовою програмування C#.

## **Annotation**

The problem of finding a rectangle of the largest area inscribed in a convex hull was studied in the lab. An algorithm proposed by Behrouzi in 2019 is described [1], and an example of the algorithm implementation in the C# programming language is given.

# 1 Вступ

Задача пошуку найбільшого вписаного прямокутника є важливою задачею у багатьох галузях, таких як комп'ютерна графіка, робототехніка та обробка зображень. Проблема знаходження найбільшого вписаного прямокутника (НВП) добре досліджена багатьма науковцями. В цілому зазвичай виділяють дві задачі знаходження НВП: задача знаходження НВП зі сторонами паралельними осям координат та загальна.

Наприклад, у праці Деніелса, Міленковича та Рота [2] досліджено методи та алгоритми для прямокутників зі сторонами паралельними осям координат для різних типів многокутників. А в праці Альта [3] описано алгоритм для цієї ж задачі у випадку опуклого многокутника «методом дотичних» зі складністю  $O(\log(n))$ . Це є найкращим результатом для випадку опуклого многокутника, який цікавить нас в рамках цієї лабораторної, що я знайшов у відкритому доступі.

В цій лабораторній буде описано і реалізовано алгоритм Бехрузі [1] для знаходження НВП зі сторонами паралельними осям координат у випадку опуклого многокутника, що має складність  $O(n)$ . Але важливо зазначити, що у статті Бехрузі показано, що можна перейти до алгоритму знаходження загального НВП у випадку опуклого многокутника (без обмеження на паралельність осям координат), зі складністю  $O(\frac{n}{\epsilon})$ , де  $\epsilon$  - відносна похибка площі отриманого прямокутника від оптимального.

Важливо зазначити, що хоч і в рамках цієї лабораторної потрібне знаходження опуклої оболонки, [4] алгоритми її знаходження розглядатися не будуть, а у реалізації буде використано «алгоритм Грехема».



Рис. 1: Приклад опуклої оболонки множини точок, з вписаним прямокутником найбільшої площі

## 2 Основна частина

### 2.1 Загальні положення

Розглянемо довільний опуклий багатокутник  $F$  розміру  $n$ . Тоді можемо сформулювати критерій належності точки багатокутнику  $F$ , за допомогою системи з  $n$  нерівностей. Для цього проведемо через кожні дві сусідні точки багатокутника пряму, та обмежимо за допомогою рівняння цієї прямої точки, які попадають у багатокутник. Для наочності рисунок[2].

Врешті-решт, будемо мати:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix},$$

де  $P$  - матриця розміру  $n \times 2$  (коефіцієнти обмежуючих прямих), та вектор

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

розміру  $n$  (обмежуючі коефіцієнти).

Тоді критерієм належності точки  $x$  багатокутнику буде нерівність

$$Px \leq b.$$

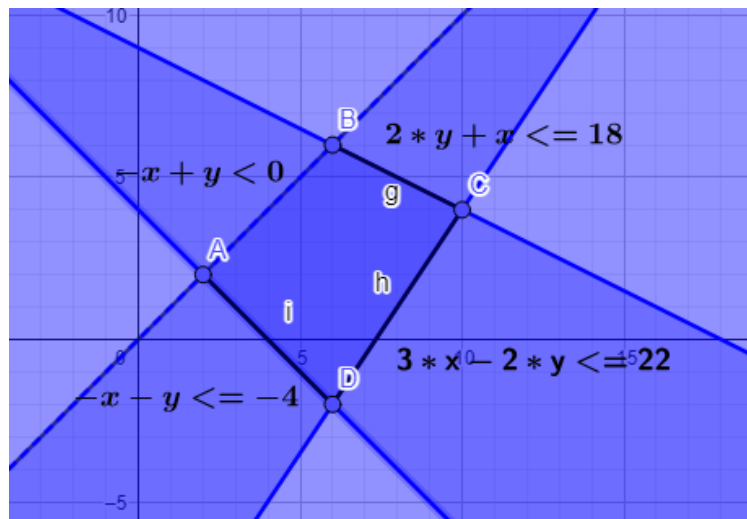


Рис. 2: Приклад багатокутника  $ABCD$ , з обмежуючими його нерівностями

Тепер нехай для довільного багатокутника  $F$ , маємо довільні три точки  $x, y, z$ , та вектори ( $\vec{u} = y - x, \vec{v} = z - x$ ). Рисунок 3 для прикладу. Тоді рішенням знаходження найбільшого вписаного прямокутника, буде рішення наступної задачі оптимізації:

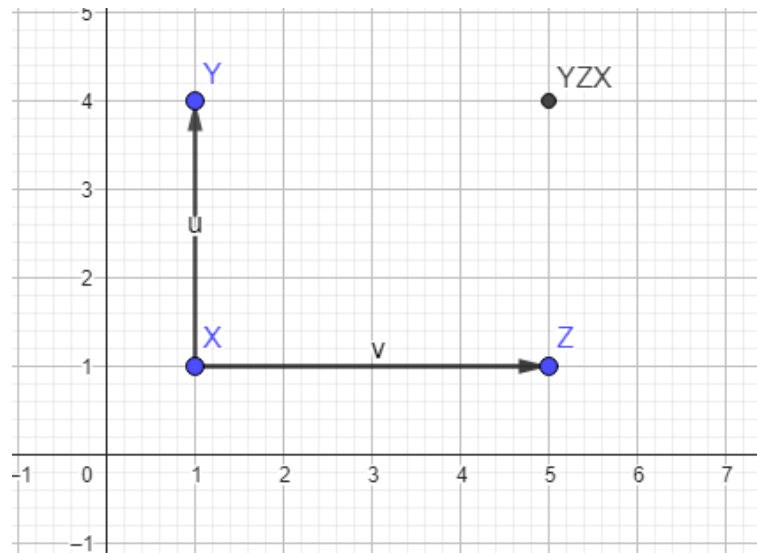


Рис. 3: Приклад точок  $x, y, z$  та векторів  $(\vec{u}, \vec{v})$

$$\max |u_1 v_2 - u_2 v_1| \quad (1)$$

За умов:

$$u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \quad (2)$$

$$(x, y, z, y + z - x) \subseteq$$

Де формула 1| - максимізація площі шуканих прямокутників. Формула 2 - умова ортогональності векторів  $u$  та  $v$ .

## 2.2 Опис алгоритму

Виходячи з положень, що були описані в попередньому розділі, можемо сформулювати алгоритм для випадку прямокутників зі сторонами паралельними осям координат.

ауууу

## 2.3 Оцінка складності

Тут починається оцінка складності.

---

### **3 Практична частина**

Тут починається практична частина.

---

## **4 Висновки**

Тут починаються висновки.



---

## **5   Додатки**

Тут починаються додатки.

---

## Література

- [1] Behroozi, M. (2019). Largest inscribed rectangles in geometric convex sets. arXiv preprint arXiv:1905.13246.
- [2] DANIELS, Karen; MILENKOVIC, Victor; ROTH, Dan. Finding the largest area axis-parallel rectangle in a polygon. Computational Geometry, 1997, 7.1-2: 125-148.
- [3] ALT, Helmut; HSU, David; SNOEYINK, Jack. Computing the largest inscribed isothetic rectangle. In: CCCG. 1995. p. 67-72.
- [4] CORMEN, Thomas H., et al. 33.3: Finding the convex hull. Introduction to Algorithms, 1990, 955-956.