2、反函数、单调函数

反函数

定义：设 $y=f(x)$，$x\in D$. $\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1\neq x_2$.

都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 称为 $y=f(x)$，$x\in D$ 为一一对应.

反之，$\forall y\in R(f)$，存在唯一的 $x\in D$.（$f(x)=y$）

与之对应.

得到一个定义在 $R(f)$ 上的函数，记作：

$x=f^{-1}(y)$. 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

反函数的定义域就是原函数的值域 (1)

(1) 为求值域提供了方法

(2). 本质上图像是一样的. 只是为了画图，习惯上将自变量和因变量替换. 我们才说 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 关于 $y=x$ 对称.

注意：

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像一样. (2)

例. 若 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$. 则

$f(\varphi(y))=y$. $\varphi(f(x))=x$.

单调函数

定义：设 $y=f(x)$ $x\in D$. $\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$

都有 $f(x_1)\leq f(x_2)$ （$f(x_1)\geq f(x_2)$）

称 $y=f(x)$ 是 D 上的递增函数.（递减）

通称为单调函数.

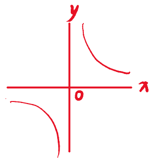
若 $\forall x_1,x_2\in D$. 且 $x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$.

称 $y=f(x)$ 是 D 上的严格递增函数（$f(x_1)>f(x_2)\to$ 严格递减）

通称为严格单调函数.

定理. 若 $y=f(x)$, $x\in D$ 是严格单调函数.
则必有反函数. 且反函数严格单调.
反之不成立. (1) (有反函数. 但原函数不是严格单调.)

(1). 反例: $y=\frac{1}{x}$.
反函数存在: $x=\frac{1}{y}$.
但 $y=\frac{1}{x}$ 不是严格单调.



在定义域不是严格单调!