2、反函数、单调函数

反函数

定义：设 $y=f(x)$, $x\in D$. $\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1\neq x_2$.
都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 称为 $y=f(x)$, $x\in D$ 为一一对应.
反之. $\forall y\in R(f)$. 存在唯一的 $x\in D$. ($f(x)=y$)
与之对应.
得到一个定义在 $R(f)$ 上的函数. 记作：
$x=f^{-1}(y)$. 称为 $y=f(x)$ 的反函数.

反函数的定义域就是原函数的值域 (1)

(1) 为求值域提供了方法

(2). 本质上图像是一样的. 只是为了画图. 习惯上将自变量和因变量互换. 我们才说 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 关于 $y=x$ 对称.

注意：
函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像一样. (2)

例. 若 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$. 则
$f(\varphi(y))=y$. $\varphi(f(x))=x$.

单调函数

定义：设 $y=f(x)$ $x\in D$. $\forall x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$
都有 $f(x_1)\leq f(x_2)$ ($f(x_1)\geq f(x_2)$)
称 $y=f(x)$ 是 D 上的递增函数. (递减).
通称为单调函数.

若 $\forall x_1,x_2\in D$. 且 $x_1<x_2$ 都有 $f(x_1)<f(x_2)$.
称 $y=f(x)$ 是 D 上的严格递增函数 ($f(x_1)>f(x_2)\rightarrow$ 严格递减)
通称为严格单调函数.

定理. 若 $y=f(x)$, $x\in D$ 是严格单调函数.
则必有反函数. 且反函数严格单调.

(1) 反例: $y=\frac{1}{x}$.
反函数存在: $x=\frac{1}{y}$.

[illegible]

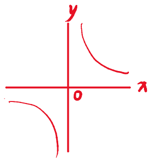
则必有反函数，且反函数严格单调.

反之不成立.(1)(有反函数，但原函数不是严格单调.)

[illegible]

反函数存在: $x=\frac{1}{y}$.

但 $y=\frac{1}{x}$ 不是严格单调.



. 在定义域不是严格单调!