

2、反函数、单调函数

2022年8月30日

反函数

定义: 设 $y=f(x)$, $x \in D$. $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 \neq x_2$.

都有 $f(x_1) \neq f(x_2)$. 称为 $y=f(x)$, $x \in D$ 为一一对应.

反之, $\forall y \in R(f)$, 存在唯一的 $x \in D$, ($f(x)=y$) 与之对应.

得到一个定义在 $R(f)$ 上的函数, 记作:

$x=f^{-1}(y)$, 称为 $y=f(x)$ 的 反函数.

反函数的定义域就是原函数的值域 (1)

(1) 为求值域提供了方法

注意:

函数 $y=f(x)$ 与反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图像一样. (2)

(2). 本质上图像是一样的, 只是为了画图, 习惯上将自变量和因变量替换, 我们才说 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 关于 $y=x$ 对称.

例. 若 $y=f(x)$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$, 则
 $f(\varphi(y))=y$, $\varphi(f(x))=x$.

单调函数

定义: 设 $y=f(x)$, $x \in D$. $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$

都有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)

称 $y=f(x)$ 是 D 上的递增函数. (递减).

通称为单调函数.

若 $\forall x_1, x_2 \in D$ 且 $x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) < f(x_2)$.

称 $y=f(x)$ 是 D 上的严格递增函数. ($f(x_1) > f(x_2) \rightarrow$ 严格递减)

通称为严格单调函数.

定理. 若 $y=f(x), x \in D$ 是严格单调函数.
则必有反函数. 且反函数严格单调.
反之不成立. (1) (有反函数. 但原函数不是
严格单调.)

(1). 反例: $y = \frac{1}{x}$.

反函数存在: $x = \frac{1}{y}$.

但 $y = \frac{1}{x}$ 不是严格单调.

