

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчёт по курсовой работе

ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ, ТЕОРИЯ МЕТОДА
«АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА» SSA

Выполнил:

Яковлев Денис Михайлович

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

В. В. Некруткин

Санкт-Петербург

2023

Оглавление

1.	Введение	3
2.	Постановка задачи	3
2.1.	Метод АСС	3
3.	Результаты	5
3.1.	Теоретические задачи	5
3.1.1.	Задача №1	7
4.	Заключение	8
	Список литературы	9

1. Введение

Целью этой научно-исследовательской работы является решение прикладных задач анализа временных рядов с применением теоретических знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или «Анализ Сингулярного Спектра» (сокращенно, АСС). В ходе учебной практики будут изучены теоретическая часть метода АСС и её применение. Ознакомиться с методом АСС можно [1], в [2] описывается теоретическая часть метода АСС.

2. Постановка задачи

2.1. Метод АСС

Остановимся сначала на том варианте метода АСС, который обсуждается в настоящей работе, подробное описание этого метода можно найти в [1].

Рассматривается вещественный *сигнал* $\mathbf{H} = (h_0, \dots, h_n, \dots)$, причем предполагается, что ряд \mathbf{H} управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d

$$h_n = \sum_{k=1}^d a_k h_{n-k}, \quad n \geq d \quad (1)$$

с $a_d > 0$, которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом \mathbf{H} . Кроме того, вводится *помеха* $\mathbf{E} = (e_0, \dots, e_n, \dots)$ и предполагается, что наблюдается ряд $\tilde{\mathbf{H}}_N = \mathbf{H}_N + \delta \mathbf{E}_N$, где \mathbf{H}_N и \mathbf{E}_N — согласованные отрезки длины N сигнала и помехи, а δ является формальным параметром возмущения. Иначе говоря,

$$\mathbf{H}_N = (h_0, \dots, h_{N-1}), \quad \mathbf{E}_N = (e_0, \dots, e_{N-1}) \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{H}}_N = (h_0 + \delta e_0, \dots, h_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала \mathbf{H}_N из суммы $\tilde{\mathbf{H}}_N$, причем предполагается, что известно только значение порядка d ЛРФ (1). В первую очередь нас будет интересовать оценка ряда \mathbf{H}_N .

Краткое описание метода. Метод АСС в этом случае выглядит следующим образом.

1. Выбирается *длина окна* $L < N$ и из ряда $\tilde{\mathbf{H}}_N$ строится ганкелева *траекторная* матрица $\mathbf{H}(\delta)$ размерности $L \times K$, $K = N - L + 1$, с элементами $\mathbf{H}(\delta) = (\tilde{h}_{i+j-2})$,

$0 \leq i < L$, $0 \leq j < K$. При этом предполагается, что $\min(L, K) \geq d$. В [1] эта операция называется *вложением*.

Если обозначить \mathbf{H} и \mathbf{E} ганкелевы матрицы, полученные из рядов H_N и E_N операцией вложения $\mathcal{T}_{L,N} = \mathcal{T}$ с той же длиной окна L , то, конечно, $\mathbf{H}(\delta) = \mathcal{T}(H_N + \delta E_N)$.

2. Для матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ вычисляется сингулярное разложение и суммируются d главных (то есть соответствующих наибольшим сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. А именно, выбирается ортонормированная система собственных (*левых сингулярных*) векторов $\mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \{U_i\}_{i=1}^L$ и собственных (*правых сингулярных*) векторов $\mathbf{H}(\delta)^T \mathbf{H}(\delta) = \{V_i\}_{i=1}^K$, вычисляются собственные числа $\mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \{\lambda_i\}_{i=1}^L$. Если расположить все собственные числа в *неубывающем порядке* и обозначить m — число ненулевых собственных чисел, то

$$\mathbf{H}(\delta) = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T,$$

где U_i , V_i соответствуют λ_i . Результат

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

этой операции является наилучшим приближением матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ с помощью матриц ранга d в норме Фробениуса, то есть

$$\arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{L \times K}, \text{rank } \mathbf{A} \leq d} \|\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{A}\| = \tilde{\mathbf{H}}(\delta).$$

3. Ищется ганкелева матрица $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$, которая является ближайшей к $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ в той же норме Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали $i + j = \text{const}$ все элементы матрицы $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ заменяются их средним значением. Поэтому в [1] эта операция названа *диагональным усреднением*. Обозначая её \mathcal{S} получим, что $\hat{\mathbf{H}}(\delta) = \mathcal{S}\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$.
4. Наконец, применяя к $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$ операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду $\tilde{H}_N(\delta) = \mathcal{T}^{-1}(\hat{\mathbf{H}}(\delta))$, который объявляется приближением к сигналу H_N .

3. Результаты

3.1. Теоретические задачи

Введём несколько объектов:

- \mathbf{H} , \mathbf{E} — вещественнозначные ненулевые матрицы $\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^L$. Матрицу \mathbf{H} будем называть *сигнальной матрицей*, а \mathbf{E} — *шумовой матрицей*. В условиях поставленной задачи рассматривается возмущённая матрица $\mathbf{H}(\delta)$ и *сигнальное подпространство*, образованное столбцами матрицы \mathbf{H} ;
- $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$ — самосопряжённый неотрицательно определённый оператор $\mathbf{A}: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$;
- $d = \text{rank } \mathbf{H} < \min(L, K)$ — ранг матрицы \mathbf{H} ;
- Σ — набор собственных значений $\{\mu_n\}_{n=1}^L$ оператора \mathbf{A} . Из свойств оператора \mathbf{A} , $\Sigma \subset [0, +\infty)$;
- $\mu_{\min} = \min\{\mu \in \Sigma \mid \mu > 0\}$;
- \mathbf{I} — тождественный оператор $\mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$;
- \mathbf{P}_0 — ортогональный проектор на собственное подпространство \mathbb{U}_0 , соответствующее нулевым собственным значениям \mathbf{A} ;
- $\mathbf{P}_0^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на \mathbb{U}_0^\perp , соответствующее ненулевым собственным значениям;
- $\|\cdot\|$ — спектральная норма.

Теперь введём матрицу с возмущением $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$. Тогда возмущение оператора \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \delta(\mathbf{H} \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{H}^T) + \delta^2 \mathbf{E} \mathbf{E}^T$$

Положим $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H} \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{H}^T$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E} \mathbf{E}^T$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta \mathbf{A}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{A}^{(2)}$. Заметим, что $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ — самосопряжённые операторы, а $\mathbf{A}(\delta)$ — неотрицательный полуопределённый оператор для любых $\delta \in \mathbb{R}$.

Цель поставленных теоретических задач — сравнить возмущённый проектор $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ с невозмущённым проектором \mathbf{P}_0^\perp .

Определим \mathbf{S}_0 — матрица, псевдообратная к $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geq 1$, $\|\mathbf{S}_0^{(k)}\| = 1/\mu_{min}^k$.

Далее — рассуждения раздела 5.3 [2].

А именно, если обозначить $r_i(N) = \tilde{h}_i(\delta) - h_i$ — остаток от разности между i -ми элементами рядов $\tilde{\mathbf{H}}_N$ и \mathbf{H}_N , а $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_N(\delta)$ — оператор, то из того, что $\|\mathbf{C}\|_{\max} \leq \|\mathbf{C}\|$, следует, что

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N}) \mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N} \mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max}. \quad (2)$$

Если первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, то остается исследовать второе слагаемое. Перед тем, как приступить к решению теоретических задач, введём следующие определения:

Определение 1.

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}),$$

а

$$\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Определение 2.

$$\mathbf{V}_0^{(n)} = \sum_{p=[n/2]}^n (-1)^p \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_p = n, s_i = 1, 2 \\ l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0}} \mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}),$$

$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{p+1})$, u

$$\mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(s_1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{A}^{(s_p)} \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Теперь можно ввести теорему из [2]:

Теорема 1. Пусть $\delta_0 > 0$ и

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2 \quad (3)$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда для возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ верно представление:

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta). \quad (4)$$

Более того,

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)}. \quad (5)$$

Замечание 1. (4) и (5) сходятся в спектральной норме.

Введём

$$B(\delta) = |\delta| \left\| \mathbf{A}^{(1)} \right\| + \delta^2 \left\| \mathbf{A}^{(2)} \right\|.$$

Если $\delta_0 > 0$ и $B(\delta_0) = \mu_{min}/2$, то тогда неравенство (3) верно для любых δ таких, что $|\delta| < \delta_0$.

3.1.1. Задача №1

Оценить выражение сверху $\forall n \in \mathbb{N} : \left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$.

Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2].

Теорема 2. Если $\delta_0 > 0$ и $\frac{\|B(\delta)\|}{\mu_{min}} < \frac{1}{4}$ для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, то $\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp \right\| \leq 4C \frac{\|\mathbf{S}_0 B(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|B(\delta)\|/\mu_{min}}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi} \approx 0.667$.

Лемма 1. Если $0 < \beta < \frac{1}{4}$, $k \geq 0$, то $\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leq C \frac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Доказательство. Сначала оценим выражение в случае, когда $n = 2$:

$$\begin{aligned} \left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta) \right\| &= \left\| \sum_{p=3}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leq \sum_{p=3}^{\infty} \left\| \mathbf{W}_p(\delta) \right\| = \\ &= \sum_{p=3}^{\infty} \left\| (-1)^p \sum_{l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) \right\| \leq \\ &= \sum_{p=3}^{\infty} \sum_{l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0} \left\| \mathbf{S}_0^{(l_1)} B(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)} B(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})} \right\| = \\ &= \sum_{p=3}^{\infty} \sum_{l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0} \left\| \mathbf{S}_0^{(l_1)} B(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_{j-1})} \mathbf{S}_0 B(\delta) \mathbf{P}_0 \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)} B(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})} \right\| \leq \\ &= \left\| \mathbf{S}_0 B(\delta) \mathbf{P}_0 \right\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \|B(\delta)\|^{p-1} \|\mathbf{S}_0\|^{p-1} \leq \\ &= C \sum_{p=3}^{\infty} \left\| \mathbf{S}_0 B(\delta) \mathbf{P}_0 \right\| \left(\frac{\|B(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^{p-1} 4^p = 4C \left(\frac{4\|B(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^2 \frac{\|\mathbf{S}_0 B(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|B(\delta)\|/\mu_{min}}. \end{aligned}$$

□

Аналогично, можно выделить следующее:

Следствие 1.

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leq 4C \left(\frac{4 \|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^n \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}}. \quad (6)$$

Тогда можно применить результат из неравенства (6) для оценки первого слагаемого правой части из (2). Для этого можно ограничиться условиями из теоремы (2):

$$\left\| (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)) \mathbf{H}(\delta) \right\| \leq 4C \left(\frac{4 \|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^2 \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| (\|\mathbf{H}\| + \delta \|\mathbf{E}\|)}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}}.$$

4. Заключение

В ходе проделанных работ были изучены теоретическая часть метода АСС, связанная со сравнением возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ и невозмущённого проектора \mathbf{P}_0^\perp , а также дана оценка $\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$. В дальнейшем планируется оценить $\left\| (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \delta \mathbf{V}_0^{(n)}) \mathbf{H}(\delta) \right\|$ и сравнить его с $\left\| (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)) \mathbf{H}(\delta) \right\|$, после чего продолжить изучение теории по общей задаче.

Список литературы

1. GOLYANDINA, N., NEKRUTKIN, V. AND ZHIGLJAVSKY, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.
2. NEKRUTKIN, V. (2010). *Perturbation expansions of signal subspaces for long signals*. Statistics and Its Interface. **3**, 297–319.