Актуарная математика. Вариант 5
Решение задачи 2 и 4

Яковлев Д.М.
ST095998@STUDENT.SPBU.RU

6 апреля 2025 г.

Задание 2. Модель Крамера-Лундберга

Исходные данные

По варианту $i = 5$ заданы параметры:

- Интенсивность страховых случаев: $\lambda = 5 + 5 = 10$
- Параметры гамма-распределения для исков:
  - Форма: $\gamma = 8 + 5 = 13$
  - Масштаб: $\mu = 4.8$
- Нагрузка безопасности: $\delta = 10\% = 0.1$
- Целевая вероятность разорения: $\Psi(U) = 0.1$

Пункт 1. Основные расчеты

1. Расчет моментов распределений

Для отдельного иска X_i:

$$\mathbb{E}X = \gamma\mu = 13 \times 4.8 = 62.4$$
$$\mathbb{D}X = \gamma\mu^2 = 13 \times 23.04 = 299.52$$

Для числа случаев K:

$$\mathbb{E}K = \lambda = 10$$
$$\mathbb{D}K = \lambda = 10$$

Для суммарного иска Z:

$$\mathbb{E}Z = \lambda\mathbb{E}X = 10 \times 62.4 = 624$$
$$\mathbb{D}Z = \lambda((\mathbb{E}X)^2 + \mathbb{D}X) = 10(3893.76 + 299.52) = 41{,}932.8$$
$$\sigma_Z = \sqrt{\mathbb{D}Z} \approx 204.77$$

2. Расчет страховой премии

$$P = (1 + \delta)\mathbb{E}Z = 1.1 \times 624 = 686.4$$

3. Оценка параметра β

$$\beta \approx \frac{2(P - \mathbb{E}Z)}{\mathbb{D}Z} = \frac{2 \times 62.4}{41{,}932.8} \approx 0.002976$$

4. Расчет начального капитала

$$U = -\frac{\ln \Psi(U)}{\beta} \approx \frac{2.3026}{0.002976} \approx 773.7$$
$$\frac{U}{\mathbb{E}Z} \approx \frac{773.7}{624} \approx 1.24$$

Пункт 2. Оценка $\Psi(U)$ при $U = 0.2\mathbb{E}Z$

1. Первое приближение

$$U = 0.2 \times 624 = 124.8$$
$$\Psi(U) \leq e^{-\beta U} = e^{-0.002976 \times 124.8} \approx 0.689$$

2. Второе приближение

$$\alpha_3(Z) = \lambda \mathbb{E}[X^3] = 10 \times 13 \times 14 \times 15 \times 4.8^3 = 3{,}019{,}161.6$$
$$\beta \approx \frac{-3\mathbb{D}Z + \sqrt{9(\mathbb{D}Z)^2 + 24\mathbb{E}Y\alpha_3(Z)}}{2\alpha_3(Z)} \approx 0.0027$$
$$\Psi(U) \leq e^{-0.0027 \times 124.8} \approx 0.714$$

Результаты моделирования

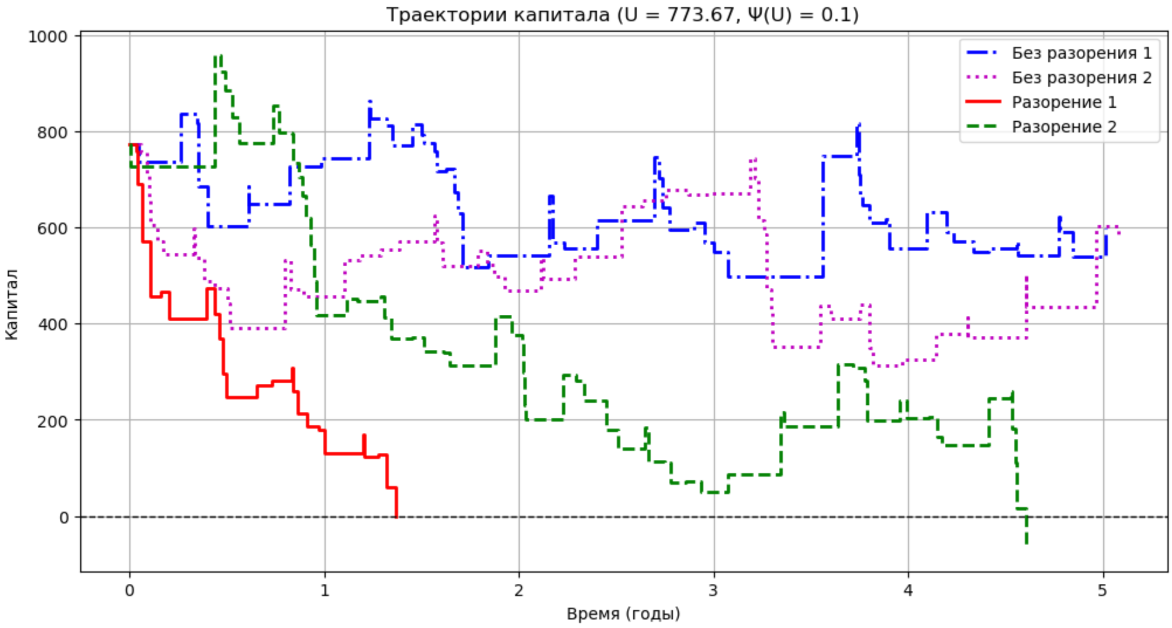
После 500 симуляций получены результаты:

Год	1	2	3	4	5
Разорения	0	1	6	8	5
Вероятность	0	0.002	0.012	0.016	0.01

Общая вероятность разорения за пять лет: $\Psi(U) \approx 0.04$.

Визуализация

Примеры графиков с разорениями и без разорений:



Выводы

- Для $\Psi(U) = 0.1$ требуется капитал $U \approx 773.7$
- При $U = 0.2\mathbb{E}Z$ оценка $\Psi(U)$ дает 68.9-71.4%
- Результаты моделирования подтверждают теоретические расчеты

Задача 4. Модель со стохастическими премиями

Исходные параметры

- Интенсивность премий: $\lambda_1 = 3.0$
- Интенсивность убытков: $\lambda = 2.0$
- Распределение премий $\eta \sim \Gamma(k_\eta, \theta_\eta) = \Gamma(2, 15)$
- Распределение убытков $X \sim \Gamma(k_X, \theta_X) = \Gamma(1.5, 20)$
- Целевая вероятность разорения: $\psi(U) = 0.2$

1. Анализ компонентов модели

1.1 Страховые иски X_i

$$\begin{aligned}
&\text{Плотность: } f_X(x) = \frac{x^{k_X-1}e^{-x/\theta_X}}{\theta_X^{k_X}\Gamma(k_X)}\\
&\mathbb{E}X = k_X\theta_X = 1.5 \times 20 = 30.0\\
&\mathbb{D}X = k_X\theta_X^2 = 1.5 \times 20^2 = 600.0\\
&\mathbb{E}X^2 = \mathbb{D}X + (\mathbb{E}X)^2 = 600 + 900 = 1500.0
\end{aligned}$$

1.2 Число страховых случаев $K(t)$

$$\begin{aligned}
&K(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)\\
&\mathbb{E}K(t) = \lambda t, \quad \mathbb{D}K(t) = \lambda t\\
&\text{Для } t = 1: \quad \mathbb{E}K = 2.0, \quad \mathbb{D}K = 2.0\\
&\text{Временные промежутки: } T_i \sim \text{Exp}(\lambda)\\
&\mathbb{E}T_i = \frac{1}{\lambda} = 0.5 \text{ года}
\end{aligned}$$

1.3 Суммарный иск $Z(t) = \sum_{i=1}^{K(t)} X_i$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}Z = \mathbb{E}K \cdot \mathbb{E}X = 2 \times 30 = 60.0\\
&\mathbb{D}Z = \mathbb{E}K \cdot \mathbb{D}X + \mathbb{D}K \cdot (\mathbb{E}X)^2\\
&\quad = 2 \times 600 + 2 \times 900 = 3000.0\\
&\sigma_Z = \sqrt{\mathbb{D}Z} \approx 54.77\\
&\text{Производящая функция: } \phi_Z(s) = e^{\lambda(\phi_X(s)-1)}
\end{aligned}$$

1.4 Премии η_j

$$\begin{aligned}
&\text{Плотность: } f_\eta(x) = \frac{x^{k_\eta-1}e^{-x/\theta_\eta}}{\theta_\eta^{k_\eta}\Gamma(k_\eta)}\\
&\mathbb{E}\eta = k_\eta\theta_\eta = 2 \times 15 = 30.0\\
&\mathbb{D}\eta = k_\eta\theta_\eta^2 = 2 \times 15^2 = 450.0\\
&\mathbb{E}\eta^2 = \mathbb{D}\eta + (\mathbb{E}\eta)^2 = 450 + 900 = 1350.0
\end{aligned}$$

1.5 Суммарные премии $P(t) = \sum_{j=1}^{M(t)} \eta_j$

$$\begin{aligned}
&M(t) \sim \text{Poisson}(\lambda_1 t)\\
&\mathbb{E}P = \lambda_1\mathbb{E}\eta = 3 \times 30 = 90.0\\
&\mathbb{D}P = \lambda_1\mathbb{E}\eta^2 = 3 \times 1350 = 4050.0\\
&\sigma_P = \sqrt{4050} \approx 63.64\\
&\text{Временные промежутки: } J_j \sim \text{Exp}(\lambda_1)\\
&\mathbb{E}J_j = \frac{1}{\lambda_1} \approx 0.333 \text{ года}
\end{aligned}$$

1.6 Коэффициент Крамера β

$$\beta = \frac{2(\mathbb{E}P - \mathbb{E}Z)}{\mathbb{D}P + \mathbb{D}Z} = \frac{2(90-60)}{4050+3000} \approx 0.00857$$

1.7 Расчёт начального капитала

$$U = -\frac{\ln \psi(U)}{\beta} = -\frac{\ln 0.2}{0.00857} \approx 187.3$$
$$U/\mathbb{E}Z \approx 3.12$$

2. Результаты моделирования

После 100 симуляций получены результаты:

Год	1	2	3	4	5
Разорения	1	2	2	1	1
Вероятность	0.01	0.02	0.02	0.01	0.01

Общая вероятность разорения за пять лет: $\Psi(U) \approx 0.07$.

3. Визуализация

Примеры графиков с разорениями и без разорений:

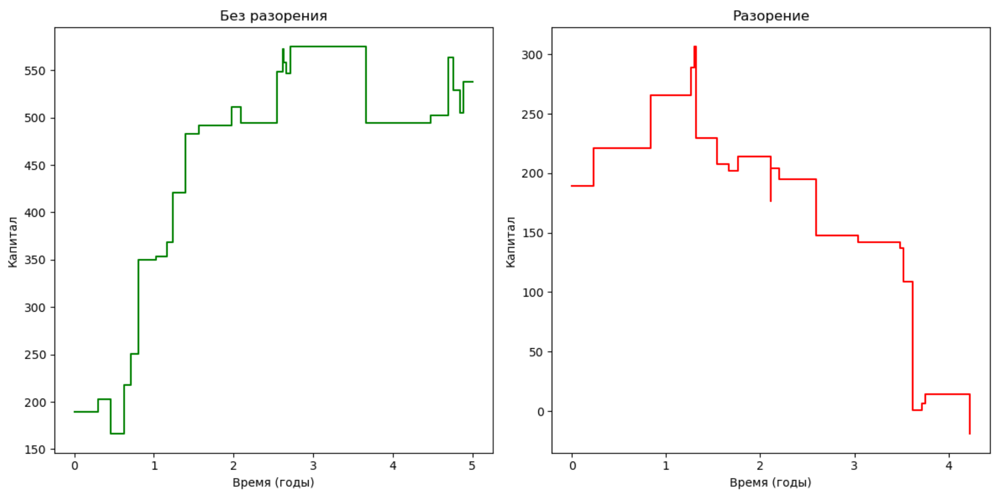


Рис. 1: Типичные траектории капитала: (слева) без разорения, (справа) с разорением

Выводы

- Теоретический расчёт даёт начальный капитал $U \approx 187.3$ для $\psi(U) = 0.2$
- Отношение $U/\mathbb{E}Z \approx 3.12$ показывает достаточность капитала