Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчёт по задачам на тему «Моделирование распределений»

Выполнил:

Яковлев Денис Михайлович

Группа 21.Б04-мм

095998@student.spbu.ru

Санкт-Петербург

3 апреля 2024 г.

Оглавление

1. Задача. Формулировка

(MCB 309) *Промоделировать 3-мя способами распределение с плотностью:*

$$\rho(x) = C \begin{cases} 2 - x, & 0 < x \leqslant 1; \\ 1 + x, & 1 < x \leqslant 2; \\ 2e^{-x}, & x > 2; \\ 0, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

1.1. Метод обратных функций

Найдём функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = C \begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ 2x - \dfrac{x^2}{2}, & 0 < x \leqslant 1; \\ x + \dfrac{x^2}{2}, & 1 < x \leqslant 2; \\ 4 + 2e^{-2} - 2e^{-x}, & x > 2. \end{cases}$$

Определим, чему равна константа C:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = C(4 + 2e^{-2}) = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{4 + 2e^{-2}}.$$

При $y \in (0, 1)$ решим уравнение $y = F(x)$ относительно x, чтобы получить обратную функцию $x = F^{-1}(y)$.

Решим уравнение $C(2x - \dfrac{x^2}{2}) = y$ при условии, что $0 < x \leqslant 1$:

$$C\left(2x - \frac{x^2}{2}\right) = y \Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}\sqrt{2 - \dfrac{y}{C}}}{2}$$

$$\overset{x_+ \geqslant 2}{\Rightarrow} x_- = 2 - \sqrt{4 - \frac{2y}{C}} \Rightarrow y = C\left(2 - \frac{(4 - 2x_-)^2}{8}\right).$$

Подставляя $x_- = 0,\ x_- = 1$, получаем $y = 0,\ y = \dfrac{3}{2}C$ соответственно.

Далее решим $C(x + \dfrac{x^2}{2}) = y$ и получим:

$$x = -1 + \sqrt{1 + \frac{2y}{C}}.$$

При $x = 1,\ x = 2$ получим $y = \dfrac{3}{2}C,\ y = 4C$ соответственно.
Осталось решить $C(4 + 2e^{-2} - 2e^{-x}) = C(C^{-1} - 2e^{-x}) = y$ относительно x. Получим:

$$x = -\log\left(\frac{1-y}{2C}\right)$$

при $4C < y < 1$. Таким образом, обратная функция распределения:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} 2 - \sqrt{4 - \dfrac{2y}{C}}, & 0 < y \leqslant \dfrac{3}{2}C; \\ -1 + \sqrt{1 + \dfrac{2y}{C}}, & \dfrac{3}{2}C < y \leqslant 4C; \\ -\log\left(\dfrac{1-y}{2C}\right), & 4C < y < 1 \end{cases}$$

Algorithm 1 Метод обратных функций

Get(α); $C \leftarrow \frac{1}{4+2e^{-2}}$
$d[0] \leftarrow \frac{3}{2}C$; $d[1] \leftarrow 4C$
if $\alpha < d[0]$ **then**
  $\xi \leftarrow 2 - \sqrt{2}\sqrt{2 - \dfrac{\alpha}{C}}$
else if $\alpha < d[1]$ **then**
  $\xi \leftarrow -1 + \sqrt{1 + \dfrac{2\alpha}{C}}$
else
  $\xi \leftarrow -\log\left(\dfrac{1-\alpha}{2C}\right)$
end if

1.2. Метод декомпозиции

Разложим плотность распределения

$$\rho(x) = C(2-x)\mathbb{1}_{(0,1]} + C(1+x)\mathbb{1}_{(1,2]} + 2Ce^{-x}\mathbb{1}_{(2,+\infty)}$$

и представим в виде смеси плотностей:

$$\rho_1(x) = \frac{2}{3}(2-x)\mathbb{1}_{(0,1]},$$
$$\rho_2(x) = \frac{2}{5}(1+x)\mathbb{1}_{(1,2]},$$
$$\rho_3(x) = \frac{1}{e^{-2}}\ e^{-x}\mathbb{1}_{(2,+\infty)}$$

Тогда представим плотность через смесь плотностей $\rho(x) = q_1\rho_1(x) + q_2\rho_2(x) + q_3\rho_3(x)$ такую, что:

$$q_1 = \frac{3}{2}C;$$
$$q_2 = \frac{5}{2}C;$$
$$q_3 = 2e^{-2}C.$$

При этом $q_1 + q_2 + q_3 = \dfrac{4 + 2e^{-2}}{4 + 2e^{-2}} = 1$. Для $\rho_1(x), \rho_2(x), \rho_3(x)$ найдём соответствующие им обратные функции распределения:

$$F_1(x) = \frac{2}{3}(2x - \frac{x^2}{2}),\ F_1^{-1}(y) = 2 - \sqrt{2}\sqrt{2 - \frac{3y}{2}};$$
$$F_2(x) = \frac{2}{5}(x + \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}),\ F_2^{-1}(y) = -1 + \sqrt{4 + 5y};$$
$$F_3(x) = \frac{e^{-2} - e^{-x}}{e^{-2}},\ F_3^{-1}(y) = 2 - \log(1 - y),$$

где $y \in (0, 1)$.

Algorithm 2 Метод декомпозиции

```
Get(α₁, α₂);  C ← 1/(4+2e^{-2})
q[0] ← (3/2)C;  q[1] ← 4C
if α₁ < q[0] then
    ξ ← 2 − √(4 − 3α₂)
else if α₁ < q[1] then
    ξ ← −1 + √(4 + 5α₂)
else
    ξ ← 2 − log(1 − α₂)
end if
```

1.3. Метод отбора

В качестве мажорирующего распределения возьмём $q(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{(0,+\infty)},\ q \sim \mathrm{EXP}(1)$. Его распределение можно промоделировать следующим образом: $\eta = -\log(\alpha_1)$.

Производная Радона-Никодима $r(x)$:

$$r(x) = p(x)/q(x) = C\begin{cases} 0, & x \leqslant 0; \\ (2-x)e^x, & 0 < x \leqslant 1; \\ (1+x)e^x, & 1 < x \leqslant 2; \\ 2, & 2 < x. \end{cases}$$

$$M = 3Ce^2 \approx 5.19,\ C = (4 + 2e^{-2})^{-1} \approx 0.234,$$

где M — мажоранта. Так как проверяем неравенство $r(\eta) < M\alpha_2$, то как $r(x)$, так и M можно разделить на общий множитель C. Тогда $M = 3e^2 \approx 22.167$.

Далее, неравенство $r(\eta) < M\alpha_2$ выполняется тогда и только тогда, когда либо

$$0 < \eta \leqslant 1,\ (2-\eta)e^\eta < 3e^2\alpha_2$$

либо

$$1 < \eta \leqslant 2,\ (1+\eta)e^\eta < 3e^2\alpha_2$$

либо

$$2 < \eta,\ 2 < 3e^2\alpha_2$$

Откуда выходят следующие условия:

$$\alpha_2 > \frac{1}{3}(2-\eta)e^{\eta-2},\ 0 < \eta \leqslant 1; \tag{1}$$

$$\alpha_2 > \frac{1}{3}(1+\eta)e^{\eta-2},\ 1 < \eta \leqslant 2; \tag{2}$$

$$\alpha_2 > \frac{2}{3e^2},\ 2 < \eta; \tag{3}$$

Тогда $r(\eta) < M\alpha_2$ совпадает с этими условиями:

$$e^{-1} < \alpha_1,\ \alpha_2\alpha_1 > (2 + \log(\alpha_1))M^{-1} \tag{1}$$

$$e^{-2} < \alpha_1 \leqslant e^{-1},\ \alpha_2\alpha_1 > (1 - \log(\alpha_1))M^{-1} \tag{2}$$

$$0 < \alpha_1 \leqslant e^{-2},\ \alpha_2 > 2M^{-1} \tag{3}$$

Поскольку условия получились слишком объёмными, в описанном ниже алгоритме рассматривается случай $r(\eta) \geqslant M\alpha_2$, что соответствует следующим условиям:

$$e^{-1} < \alpha_1,\ \alpha_2\alpha_1 \leqslant (2 + \log(\alpha_1))M^{-1}$$

$$e^{-2} < \alpha_1 \leqslant e^{-1},\ \alpha_2\alpha_1 \leqslant (1 - \log(\alpha_1))M^{-1}$$

$$0 < \alpha_1 \leqslant e^{-2},\ \alpha_2 \leqslant 2M^{-1}$$

Algorithm 3 Метод отбора

$M_1 \leftarrow \frac{1}{3e^2};\ M_2 \leftarrow 2M_1;\ b_1 \leftarrow e^{-1};\ b_2 \leftarrow b_1 * b_1$

while TRUE **do**

  Get(α_1, α_2)

  if $b_1 < \alpha_1$ and $\alpha_2\alpha_1 \leqslant (2 + \log(\alpha_1))M_1$ **then**

    $\xi \leftarrow -\log(\alpha_1)$

  end if

  if $b_2 < \alpha_1 \leqslant b_1$ and $\alpha_1\alpha_2 \leqslant (1 - \log(\alpha_1))M_1$ **then**

    $\xi \leftarrow -\log(\alpha_1)$

    break

  end if

  if $\alpha_1 \leqslant b_2$ and $\alpha_2 \leqslant M_2$ **then**

    $\xi \leftarrow -\log(\alpha_1)$

    break

  end if

end while