Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Вычислительная стохастика и статистические модели

3 курс (бак.) «Учебная практика 3 (научно-исследовательская работа)»

Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ Сингулярного Спектра» SSA (Семестр 6)

Выполнил:

Яковлев Денис Михайлович

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

В. В. Некруткин

Санкт-Петербург

2024

Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Вычислительная стохастика и статистические модели

3 курс (бак.) «Учебная практика 3 (научно-исследовательская работа)»

Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ Сингулярного Спектра» SSA (Семестр 6)

Выполнил:

Яковлев Денис Михайлович

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

В. В. Некруткин

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

1. Введение

Целью этой работы является решение теоретических и прикладных задач анализа временных рядов с применением знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или “Анализ Сингулярного Спектра” (сокращенно, АСС). В ходе учебной практики будут изучены и продемонстрированы теоретическая часть метода АСС и её применение. Ознакомиться с методом АСС можно в [1], а в [2] описывается теоретическая часть метода АСС.

2. Постановка задачи

2.1. Метод АСС

Остановимся сначала на том варианте метода АСС, который обсуждается в настоящей работе, подробное описание этого метода можно найти в [1].

Рассматривается вещественный *сигнал* $\mathrm{H} = (h_0, \ldots, h_n, \ldots)$, причем предполагается, что ряд H управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d

$$h_n = \sum_{k=1}^{d} a_k h_{n-k}, \quad n \geqslant d \tag{1}$$

с $a_d > 0$, которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом H. Кроме того, вводится *помеха* $\mathrm{E} = (e_0, \ldots, e_n, \ldots)$ и предполагается, что наблюдается ряд $\widetilde{\mathrm{H}}_N = \mathrm{H}_N + \delta \mathrm{E}_N$, где H_N и E_N — согласованные отрезки длины N сигнала и помехи, а δ является формальным параметром возмущения. Иначе говоря,

$$\mathrm{H}_N = (h_0, \ldots, h_{N-1}), \quad \mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_{N-1}) \;\text{ и }\; \widetilde{\mathrm{H}}_N = (h_0 + \delta e_0, \ldots, h_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала H_N из суммы $\widetilde{\mathrm{H}}_N$, причем предполагается, что известно только значение порядка d ЛРФ (1). В первую очередь нас будет интересовать оценка ряда H_N.

Краткое описание метода. Метод АСС в этом случае выглядит следующим образом.

1. Выбирается *длина окна* $L < N$ и из ряда $\widetilde{\mathrm{H}}_N$ строится ганкелева *траекторная* матрица $\mathbf{H}(\delta)$ размерности $L \times K$, $K = N - L + 1$, с элементами $\mathbf{H}(\delta) = (\widetilde{h}_{i+j-2})$,

$0 \leqslant i < L$, $0 \leqslant j < K$. При этом предполагается, что $\min(L, K) \geqslant d$, исходя из того, что ряд H управляется ЛРФ порядка d В [1] эта операция называется *вложением*.

Если обозначить $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ ганкелевы матрицы, полученные из рядов H_N и E_N операцией вложения $\mathcal{T}_{L,N} = \mathcal{T}$ с той же длиной окна L, то, конечно, $\mathbf{H}(\delta) = \mathcal{T}(\mathrm{H}_N + \delta\mathrm{E}_N)$.

2. Для матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ вычисляется сингулярное разложение и суммируются d главных (то есть соответствующих наибольшим сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. А именно, выбирается ортонормированная система собственных *(левых сингулярных)* векторов $\mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}}$ — $\{U_i\}_{i=1}^{L}$ и собственных *(правых сингулярных)* векторов $\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}}\mathbf{H}(\delta)$ — $\{V_i\}_{i=1}^{K}$, вычисляются собственные числа $\mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}}$ — $\{\lambda_i\}_{i=1}^{L}$. Если расположить все собственные числа в *неубывающем порядке* и обозначить m — число ненулевых собственных чисел, то

$$\mathbf{H}(\delta) = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^{\mathrm{T}},$$

где U_i, V_i соответствуют λ_i. Результат

$$\widetilde{\mathbf{H}}(\delta) = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^{\mathrm{T}}.$$

этой операции, где $m = d$, так как образованная от ряда H матрица $\mathbf{H}(\delta)$ управляется ЛРФ порядка d, является наилучшим приближением матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ с помощью матриц ранга d в норме Фробениуса, то есть

$$\arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{L \times K},\, \mathrm{rank}\ \mathbf{A} \leqslant d} \|\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{A}\| = \widetilde{\mathbf{H}}(\delta).$$

3. Ищется ганкелева матрица $\widehat{\mathbf{H}}(\delta)$, которая является ближайшей к $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ в той же норме Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали $i + j = const$ все элементы матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ заменяются их средним значением. Поэтому в [1] эта операция названа *диагональным усреднением*. Обозначая её $\mathcal{S}$ получим, что $\widehat{\mathbf{H}}(\delta) = \mathcal{S}\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$.

4. Наконец, применяя к $\widehat{\mathbf{H}}(\delta)$ операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду $\widetilde{\mathrm{H}}_N(\delta) = \mathcal{T}^{-1}(\widehat{\mathbf{H}}(\delta))$, который объявляется приближением к сигналу H_N.

3. Теоретические задачи

Постановка. Введём несколько объектов:

- $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ — вещественнозначные ненулевые матрицы $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^L$. Матрицу $\mathbf{H}$ будем называть *траекторной матрицей сигнала* H , а $\mathbf{E}$ — *траекторной матрицей помехи* H. В условиях поставленной задачи рассматривается возмущённая матрица $\mathbf{H}(\delta)$ и *сигнальное подпространство*, образованное столбцами матрицы $\mathbf{H}$;

- $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ — самосопряжённый неотрицательно определённый оператор $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$;

- $d = \operatorname{rank} \mathbf{H} < \min(L, K)$ - ранг матрицы $\mathbf{H}$, образованной от ряда H, управляемого ЛРФ порядка d;

- Σ — набор собственных числа $\{\mu_n\}_{n=1}^L$ оператора $\mathbf{A}$. Из свойств оператора $\mathbf{A}$, $\Sigma \subset [0, +\infty)$;

- $\mu_{min} = \min\{\mu \in \Sigma \,|\, \mu > 0\}$;

- $\mathbf{I}$ — тождественный оператор $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$;

- $\mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на собственное подпространство $\mathbb{U}_0$, соответствующее нулевым собственным числам $\mathbf{A}$;

- $\mathbf{P}_0^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^{\perp}$, соответствующее ненулевым собственным числам;

- $\|\cdot\|_{\mathrm{spec}} = \|\cdot\|$ — спектральная норма.

Теперь введём матрицу с возмущением $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$. Тогда возмущение оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}.$$

Положим $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta\mathbf{A}^{(1)} + \delta^2\mathbf{A}^{(2)}$. Заметим, что $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ — самосопряжённые операторы, а $\mathbf{A}(\delta)$ — самосопряжённый неотрицательный оператор для любых $\delta \in \mathbb{R}$. Положим $\mathbf{B}(\delta) = \delta\mathbf{A}^{(1)} + \delta^2\mathbf{A}^{(2)}$.
Определим $\mathbf{S}_0$ — матрица, псевдообратная к $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{min}^k$.

Далее — рассуждения из [2, раздел 5.3].

А именно, если обозначить $r_i(N) = \widetilde{h}_i(\delta) - h_i$ — остаток от разности между i-ми элементами рядов $\widetilde{\mathrm{H}}_N(\delta)$ и H_N, а $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_N(\delta)$ — оператор с возмущением, то из того, что $\|\mathbf{C}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{C}\|$, получаем

$$\left\|\widetilde{\mathrm{H}}_N(\delta) - \mathrm{H}_N\right\|_{\max} = \max_{0\leqslant n<N} |\widetilde{h}_n(\delta) - h_n| = \max_{0\leqslant n<N} |r_i(N)|,$$
$$\left\|\widetilde{\mathrm{H}}_N(\delta) - \mathrm{H}_N\right\|_{\max} = \left\|\mathcal{S}(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)\mathbf{H}(\delta)) - \mathbf{H}\right\|_{\max} = \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max},$$

где $\mathcal{S}$ — оператор диагонального усреднения (ганкелевизации), $\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{H}$. Поскольку $\|\mathcal{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{A}\|_{\max}$ для любой конечномерной матрицы $\mathbf{A}$, то

$$\begin{aligned}
&\max_{0\leqslant i<N} |r_i(N)| = \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} \leqslant \|\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} = \left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{H}\right\|_{\max} \\
&= \left\|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E} + \mathbf{N}\mathbf{H}(\delta)\right\|_{\max} \\
&\leqslant \left\|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\right\|_{\max} + \left\|\mathbf{N}\,\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max} \\
&\leqslant \left\|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\right\| + \left\|\mathbf{N}\,\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Общая задача состоит в том, чтобы подобрать такой оператор N, чтобы правая часть (2) стремилась к нулю.

Если первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $N \to \infty$, то остается исследовать второе слагаемое. Перед тем, как приступить к решению теоретических задач, введём следующие определения:

Определение 1.

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j\geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}), \tag{3}$$

а

$$\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Определение 2.

$$\mathbf{V}_0^{(n)} = \sum_{p=[n/2]}^{n} (-1)^p \sum_{\substack{s_1+\dots+s_p=n,\, s_i=1,2 \\ l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j\geqslant 0}} \mathbf{V}_0^{(n)}(\mathsf{s}, \mathsf{l}),$$

$\mathsf{s} = (s_1, \dots, s_p)$, $\mathsf{l} = (l_1, \dots, l_{p+1})$, *и*

$$\mathbf{V}_0^{(n)}(\mathsf{s}, \mathsf{l}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{A}^{(s_1)}\mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{A}^{(s_p)}\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Теперь можно ввести теорему из [2]:

Теорема 1 (Теорема 2.1)**.** *Пусть* $\delta_0 > 0$ и

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2 \tag{4}$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. *Тогда для возмущённого проектора* $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ *верно представление:*

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta). \tag{5}$$

Более того,

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)}. \tag{6}$$

Замечание 1. *Ряды* (5) *и* (6) *сходятся в спектральной норме.*

Введём

$$\mathrm{B}(\delta) = |\delta| \left\|\mathbf{A}^{(1)}\right\| + \delta^2 \left\|\mathbf{A}^{(2)}\right\|.$$

Если $\delta_0 > 0$ и $\mathrm{B}(\delta_0) = \mu_{min}/2$, то тогда неравенство (4) верно для любых δ таких, что $|\delta| < \delta_0$.

3.1. Задача №1

Формулировка. *Оценить выражение сверху* $\forall n \in \mathbb{N}: \left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\right\|$.[1] Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2].

Теорема 2 (Теорема 2.3)**.** *Если* $\delta_0 > 0$ *и* $\dfrac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} < \dfrac{1}{4}$ *для всех* $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, *то проектор* $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ *существует и*

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| \leqslant 4C \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}}, \tag{7}$$

где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi} \approx 0.667$.

Лемма 1 (Лемма 6.1)**.** *Если* $0 < \beta < 1/4$, $k \geqslant 0$, *то* $\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leqslant C \dfrac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

[1] Зачем это нужно? Если положить $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1(\delta)$, то может оказаться, что

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta)\right\| \to 0,$$

но это не выполняется для $\left\|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\right\|$. Тогда можно попробовать взять $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta)$, см. (9) и [3].

Доказательство. Существование $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ следует из Теоремы 1. Заметим, что в правой части (3) найдётся такой индекс j, что $l_j > 0$ и $l_{j-1} = 0$ или $l_{j+1} = 0$. Иначе $l_1 + l_2 + \cdots + l_{p+1} \geqslant p + 1 \neq p$. Так как $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{\min}^k$ для любого $k \geqslant 0$, то можем оценить каждый член правой части из (3).

$$\|\mathbf{W}_p(l_1, \ldots, l_{i-1}, 0, l_{i+1}, \ldots, l_{p+1})\| = \left\|\mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_2)} \ldots \mathbf{S}_0^{(l_i-1)}\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0 \ldots \mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}\right\|$$

$$\leqslant \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \, \|\mathbf{B}(\delta)\|^{p-1} \frac{1}{\mu_{\min}^{p-1}} = \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1}.$$

Учитывая, что $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant p+1 \quad l_i \geqslant 0$ и $l_1 + l_2 + \cdots + l_{p+1} = p$, то число векторов $(l_1, l_2, \ldots, l_{p+1})$ будет равняться $\binom{2p}{p}$. Таким образом оценим $\mathbf{W}_p(\delta)$:

$$\|\mathbf{W}_p(\delta)\| = \left\|(-1)^p \sum_{l_1+\cdots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \ldots, l_{p+1})\right\|$$

$$\leqslant \binom{2p}{p} \|\mathbf{W}_p(l_1, \ldots, l_{p+1})\| \leqslant \binom{2p}{p} \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1}.$$

Оценим выражение в случае, когда $n = 2$:

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right\| = \left\|\mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right\|$$

$$= \left\|\sum_{p=3}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta)\right\| \leqslant \sum_{p=3}^{\infty} \|\mathbf{W}_p(\delta)\| \leqslant \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1}.$$

Теперь, считая, что $k = 2$, $\beta = \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1} \leqslant \frac{1}{4}$, воспользуемся Леммой 1 и тем, что $\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \leqslant \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\| \leqslant \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}$, и получим:

$$\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1} \leqslant 4^3 C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^3 \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}.$$

□

Аналогично, можно выделить следующее:

Следствие 1.

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\right\| \leqslant 4^{n+1} C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}. \tag{8}$$

Тогда можно применить результат из неравенства (8) для оценки первого слагаемого правой части из (2). Для этого можно ограничиться условиями из Теоремы 2:

$$\left\|\left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right)\mathbf{H}(\delta)\right\| \leqslant 4^3 C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^3 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}. \tag{9}$$

3.2. Задача №2

Постановка. Рассматриваем вещественный сигнал $H = (h_0, h_1, \ldots, h_N, \ldots)$, где

$$h_n = \theta_1 n + \theta_0,$$

линейный сигнал, $\theta_1 \neq 0$, а помехой является линейная комбинация гармоник

$$e_n = \sum_{l=1}^{r} \tau_l \cos(2\pi n\omega_l + \varphi_l),$$

где $\tau_l \neq 0, \omega_l \neq \omega_p$ при $l \neq p$ и $0 < \omega_l < 1/2$.

Из постановки общей задачи, хотим подобрать такой оператор $\mathbf{N}$, чтобы правая часть (2) стремилась к нулю и доказать, что метод SSA работает.

Обратимся к (2). При $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$ верна Теорема 2 из [3]:

Теорема 3. *Рассмотрим при $n = 0, 1, \ldots, N-1$ линейный сигнал $h_n = \theta_1 n + \theta_0$, где $\theta_1 \neq 0$, и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник*

$$e_n = \sum_{l=1}^{r} \tau_l \cos(2\pi n\omega_l + \varphi_l),$$

где $\tau_l \neq 0, \omega_l \neq \omega_p$ при $l \neq p$ *и* $0 < \omega_l < 1/2$.

Положим $x_n = h_n + \delta e_n$, где δ — формальный параметр возмущения и, взяв N нечётное и $L = (N+1)/2$, применим к ряду x_n, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, метод АСС с восстановлением по первым 2-м компонентам.

Если обозначить $h_0(\delta), \ldots, h_{N-1}(\delta)$ результаты восстановления ряда $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ с помощью метода АСС с описанными параметрами, а $r_n(N) = h_n(\delta) - h_n$ — остаток от разности между n-ми элементами восстановленного и линейного рядов длины N, то для любого $\delta \in \mathbb{R}$ при $N \to \infty$

$$\max_{0 \leqslant n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1}).$$

В случае, когда $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$, теорема (3) верна для случая $L = K$. Зададим вопрос: можно ли для этой теоремы рассматривать случай $\min(L, K) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, или $L/N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \in (0, 1)$, и если это возможно, то для какого $\mathbf{N}$? В качестве $\mathbf{N}$ предлагается рассмотреть $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Зачем это нужно? При $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$ для ошибки восстановления $r_i(N)$ метода SSA равномерно стремятся к нулю, когда накладывается “сильное” ограничение на “длину окна”

$L = K$. Если обобщить результат теоремы (3) на "слабое" ограничение $L/N \to \alpha \in (0, 1)$, то для вычислительных задач в случае анализа линейного сигнала с гармоникой можно рассматривать траекторную матрицу $\mathbf{H}(\delta)$ ряда $\widetilde{H}_N = (h_1 + \delta e_1, \dots, h_n + \delta e_n)$ с произвольно заданной длиной окна L.

В связи с этим сформулируем задачу №2:

Формулировка. *Обобщить результат [3] с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0, 1)$ с помощью выбора $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.*

Доказательство. Тогда $K/N \to 1 - \alpha \in (0, 1)$. Теперь рассматриваем неравенство

$$\max_{0 \leqslant i < N} |r_i(N)| \leqslant \left\| (\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2))\mathbf{H}(\delta) \right\| + \left\| (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)\, \mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^{\perp} \mathbf{E} \right\|_{\max}.$$

Идея: показать, что слагаемые правой части оценки $= O(N^{-n})$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда будет верна асимптотическая сходимость $\max\limits_{0 \leqslant i < N} |r_i(N)| = O(N^{-1})$.

Для того, чтобы доказать асимптотическую сходимость, оценим слагаемые покомпонентно. Введём $\mu_{\max} = \|\mathbf{H}\|^2$ и воспользуемся соотношением между спектральной нормой $\|\mathbf{C}\|$ и равномерной нормой $\|\mathbf{C}\|_{\max}$:

$$\|\mathbf{C}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{C}\| \leqslant \sqrt{LK}\, \|\mathbf{C}\|_{\max}.$$

Поскольку $LK \sim \alpha(1 - \alpha)N^2 \sim CN^2$, то

$$\left\| \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} \right\| = \|\mathbf{E}\|^2 \sim C_{\cos} N^2, \mu_{\max} \sim C_{\max} N^4, \mu_{\min} \sim C_{\min} N^4. \tag{10}$$

Применим леммы из [3]. Заметим, что доказательства из [3] рассматривают случай $L = K$, но могут быть обобщены до случая $L/N \to \alpha \in (0, 1)$ аналогично. Для демонстрации этого приведём доказательства этих лемм:

Лемма 2. *При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\left\| \mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} \right\|_{\max} = O(N)$.*

Доказательство. При $1 \leqslant p \leqslant L$ и $1 \leqslant s \leqslant K$ запишем элемент матрицы $\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ с индексом (p, s):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}[p, s] &= \sum_{j=0}^{K-1} (p + j) \cos(2\pi(s + j)\omega + \varphi) = \\ &= p \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \varphi_s) + \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \varphi_s), \end{aligned}$$

где $\varphi_s = 2\pi s\omega + \varphi$.

Так как для любой φ:

$$p\left|\sum_{j=0}^{K-1}\cos(2\pi j\omega+\varphi)\right| = p\left|\frac{\sin(\pi K\omega)}{\sin(\pi\omega)}\cos(\pi(K-1)\omega+\varphi)\right| \leqslant \frac{p}{\sin(\pi\omega)} = O(N)$$

и в обозначениях

$$B_K = \frac{1}{2\sin(\pi\omega)}\sin(\pi(2K-1)\omega+\varphi),\ E_K = \frac{\sin(\pi K\omega)}{2\sin^2(\pi\omega)}\sin(\pi K\omega+\varphi)$$

имеет место

$$\left|\sum_{j=0}^{K-1} j\cos(2\pi j\omega+\phi)\right| = |KB_K - E_K| \leqslant \frac{K}{2\sin(\pi\omega)} + \frac{1}{2\sin^2(\pi\omega)} = O(N).$$

Таким образом, каждый член матрицы $\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ не превосходит $O(N)$, или $\left\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\|_{\max} = O(N)$. □

Лемма 3. *При $N \to \infty$ имеет место соотношение* $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max} = O(N^{-1})$.

Доказательство. Поскольку рассматривается ряд H, состоящий из элементов $h_n = \theta_1 n + \theta_0$, обозначим

$$P_L(0) = (1,1,1,\ldots,1)^{\mathrm{T}},\ P_L(1) = (0,1,\ldots,(L-1))^{\mathrm{T}}$$

как базис линейного пространства $U_0^{\perp}$. Тогда матрицу $\mathbf{P}_0^{\perp}$ можно представить в виде:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_0^{\perp} &= \gamma_{00}^2 P_L(0)P_L^{\mathrm{T}}(0) + (\gamma_{11}P_L(1) - \gamma_{10}P_L(0))(\gamma_{11}P_L^{\mathrm{T}}(1) - \gamma_{10}P_L^{\mathrm{T}}(0)) \\ &= (\gamma_{00}^2+\gamma_{10}^2)P_L(0)P_L^{\mathrm{T}}(0) + \gamma_{11}^2 P_L(1)P_L^{\mathrm{T}}(1) - \gamma_{11}\gamma_{10}(P_L(1)P_L^{\mathrm{T}}(0) + P_L(0)P_L^{\mathrm{T}}(1)),\end{aligned} \tag{11}$$

где $L\times L$ матрицы имеют вид

$$P_L(0)P_L^{\mathrm{T}}(0) = \begin{pmatrix}1 & \ldots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \ldots & 1\end{pmatrix},\ P_L(0)P_L^{\mathrm{T}}(1) = \begin{pmatrix}0 & 1 & \ldots & L-1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1 & \ldots & L-1\end{pmatrix},$$

$$P_L(1)P_L^{\mathrm{T}}(0) = \begin{pmatrix}0 & \ldots & 0\\ 1 & \ldots & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ L-1 & \ldots & L-1\end{pmatrix},\ P_L(1)P_L^{\mathrm{T}}(1) = \begin{pmatrix}0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & L-1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & L-1 & \ldots & (L-1)^2\end{pmatrix}$$

и

$$\gamma_{11} = \sqrt{12}/\sqrt{L(L^2-1)},\ \gamma_{10} = \sqrt{3(L-1)}/\sqrt{L(L+1)},\ \gamma_{00} = 1/\sqrt{L}.$$

Умножая каждое слагаемое в правой части (11) на матрицу $\mathbf{E}$, где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \dots & \cos(2\pi(j-1)\omega+\varphi) & \dots & \cos(2\pi(K-1)\omega+\varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(i-1)\omega+\varphi) & \dots & \cos(2\pi(i+j-2)\omega+\varphi) & \dots & \cos(2\pi(K+i-1)\omega+\varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(L-1)\omega+\varphi) & \dots & \cos(2\pi(L+j-1)\omega+\varphi) & \dots & \cos(2\pi(N-1)\omega+\varphi) \end{pmatrix}.$$

Аналогично Лемме 2, оцениваем каждый элемент матрицы $\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}$ и получаем, что $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max} = O(N^{-1})$. □

Лемма 4. *При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-4})$.*[2]

Доказательство. Рассмотрим сингулярное разложение матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} = \mu_{\max}U_1U_1^{\mathrm{T}} + \mu_{\min}U_2U_2^{\mathrm{T}},\ \mathbf{S}_0 = \mu_{\max}^{-1}U_1U_1^{\mathrm{T}} + \mu_{\min}^{-1}U_2U_2^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = \mu_{\max}V_1V_1^{\mathrm{T}} + \mu_{\min}V_2V_2^{\mathrm{T}},\ \mathbf{H} = \mu_{\max}^{1/2}U_1V_1^{\mathrm{T}} + \mu_{\min}^{1/2}U_2V_2^{\mathrm{T}},$$

а $\mathbf{P}_0^{\perp} = U_1U_1^{\mathrm{T}} + U_2U_2^{\mathrm{T}}$, где U_1, U_2 — ортонормированные собственные $L \times 1$ вектора матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, а V_1, V_2 — ортонормированные собственные $K \times 1$ вектора матрицы $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H}$. Далее,

$$\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} = \mu_{\min}^{1/2}\left(\frac{\mu_{\max}^{1/2}}{\mu_{\min}^{1/2}}U_1V_1^{\mathrm{T}}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + U_2V_2^{\mathrm{T}}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right),$$

и, поскольку $\mu_{\min} \sim C_{\min}N^2$, $\mu_{\max} \sim C_{\max}N^2$, $\mu_{\max}^{1/2}/\mu_{\min}^{1/2} \to c > 1$ и $\left\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\|_{\max} = O(N)$, то отсюда следует, что

$$\left\|cU_1V_1^{\mathrm{T}}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + U_2V_2^{\mathrm{T}}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\|_{\max} = O(N^{-1}).$$

Так как $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max} = \left\|U_1U_1^{\mathrm{T}}\mathbf{E} + U_2U_2^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\right\|_{\max} = O(N^{-1})$, то $\left\|U_iU_i^{\mathrm{T}}\mathbf{E}\right\|_{\max} = O(N^{-1})$ при $i = 1, 2$. Получим

$$\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-5}) \text{ и } \|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-4}).$$

□

[2] Здесь, в [3] накладывалось условие на квадратичность матрицы: $L = K$.

Переформулируем предложения из [3] для рассматриваемого случая $L/N \to \alpha \in (0,1)$:

Предложение 1. *Пусть* $L/N \to \alpha \in (0,1)$. *Тогда для любого* δ

$$\left\| \left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right) \mathbf{H}(\delta) \right\| = O(N^{-1}).$$

Доказательство. Оценим

$$\left\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\| \leqslant \|\mathbf{H}\| \, \|\mathbf{E}\| \sim C_{\cos} C_{\max} N^3 = O(N^3).$$

Согласно Лемме 2 и асимптотикам (10), существует такая постоянная C_1, что

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min} \leqslant \delta^2 \left\|\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\| / \mu_{\min} + 2|\delta| \left\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\| / \mu_{\min} \leqslant C_1(\delta^2 N^{-2} + |\delta| N^{-1}) = O(N^{-1}).$$

Поэтому для любого δ неравенство (9) выполняется при достаточно большом N и, следовательно, при $N \to \infty$

$$\begin{aligned} &\left\|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\right\| \leqslant \left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right\| \|\mathbf{H}(\delta)\| \\ &\leqslant C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^3 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}} \sim C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^3 \|\mathbf{H}\| = O(N^{-1}). \end{aligned}$$

□

Поскольку $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max} = O(N^{-1})$, то остаётся рассмотреть

$$\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max}.$$

Если показать, что $\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$, то

$$\max_{0 \leqslant n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1})$$

и Теорема 3 будет доказана в случае $L/N \to \alpha \in (0,1)$. Покажем это, сформулировав следующее предложение:

Предложение 2. *В условиях Предложения 1* $\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$

Доказательство. Распишем $\mathbf{W}_1(\delta), \mathbf{W}_2(\delta)$:

$$\mathbf{W}_1(\delta) = \delta \mathbf{V}_1^{(1)} + \delta^2 \mathbf{V}_1^{(2)},$$

где $\mathbf{V}_1^{(1)} = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0, \mathbf{V}_1^{(2)} = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0$.

$$\mathbf{W}_2(\delta) = \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=2, l_j\geqslant 0\\ s_1,s_2=1,2}} \delta^{s_1+s_2}\mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{A}^{(s_1)}\mathbf{S}_0^{(l_2)}\mathbf{A}^{(s_2)}\mathbf{S}_0^{(l_3)} = \delta^2\mathbf{V}_2^{(1)} + \delta^3\mathbf{V}_2^{(2)} + \delta^4\mathbf{V}_2^{(3)},$$

$$\mathbf{V}_2^{(1)} = \sum_{l_1+l_2+l_3=2, l_j\geqslant 0} \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{S}_0^{(l_2)}\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{S}_0^{(l_3)},$$

$$\mathbf{V}_2^{(2)} = \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=2, l_j\geqslant 0\\ (s_1,s_2)=(1,2),(2,1)}} \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{A}^{(s_1)}\mathbf{S}_0^{(l_2)}\mathbf{A}^{(s_2)}\mathbf{S}_0^{(l_3)},$$

$$\mathbf{V}_2^{(3)} = \sum_{l_1+l_2+l_3=2, l_j\geqslant 0} \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{S}_0^{(l_2)}\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{S}_0^{(l_3)}.$$

Таким образом, разбили $\mathbf{W}_2(\delta)$ на три части так, что элементы в $\mathbf{V}_2^{(1)}$ имеют вид $\mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0^{(l_2)}\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0^{(l_3)}$, то есть, $\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}, \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ входят в каждое слагаемое два раза, в каждое слагаемое из $\mathbf{V}_2^{(2)}$ часть $\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}, \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}, \mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ входит один раз, а в каждое слагаемое из $\mathbf{V}_2^{(3)}$ часть $\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$ входит два раза. Оценим полученные выражения. Аналогично доказательству в [3], найдём $\mathbf{V}_i^{(j)}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, для которых $\left\|\mathbf{V}_i^{(j)}\right\| = O(N^k)$, $k = -3, -4, -5, \ldots$.

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{V}_1^{(1)}\right\| &\leqslant 2\left\|\mathbf{S}_0\right\|\left\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\| = O(N^{-2}),\\
\left\|\mathbf{V}_1^{(2)}\right\| &\leqslant 2\left\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\right\|\left\|\mathbf{E}\right\| = O(N^{-3}),\\
\left\|\mathbf{V}_2^{(1)}\right\| &\leqslant 24\left\|\mathbf{S}_0\right\|^2\left\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\|^2 = O(N^{-4}),\\
\left\|\mathbf{V}_2^{(2)}\right\| &\leqslant 12\left\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\right\|^2\left\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\| = O(N^{-6}),\\
\left\|\mathbf{V}_2^{(3)}\right\| &\leqslant 6\left\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\right\|^2\left\|\mathbf{E}\right\|^2 = O(N^{-6}).
\end{aligned}$$

Следовательно, из всех слагаемых остаётся проверить только выражение $\mathbf{V}_1^{(1)}\mathbf{H}(\delta)$, поскольку $\left\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta) - \delta\mathbf{V}_1^{(1)})\mathbf{H}(\delta)\right\|_{\max} = O(N^{-1}) \to 0$ из полученных неравенств.

$$\mathbf{V}_1^{(1)}\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0\mathbf{H} + \delta(\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0\mathbf{E} + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0\mathbf{E}).$$

Поскольку

$$\left\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0\mathbf{E} + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_0\mathbf{E}\right\| \leqslant 2\left\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\right\|\left\|\mathbf{E}\right\|\left\|\mathbf{S}_0\right\| = O(N^{-1}),$$

то остаётся разобраться с матрицей $\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0\mathbf{H}$.

Так как $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}_0\mathbf{H} = \mathbf{Q}_0^{\perp}$, где $\mathbf{Q}_0^{\perp}$ — $K \times K$ матрица ортогонального проектирования на пространство строк матрицы $\mathbf{H}$, то будем рассматривать элементы матрицы

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^{\perp} - \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^{\perp}.$$

Отсюда и из Леммы 2 [3] следует, что $\left\|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^{\perp}\right\|_{\max} = \left\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max} = O(N^{-1})$. Аналогично, $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^{\perp}\right\|_{\max} = O(N^{-1})$. □

В результате из полученных лемм и предложений результат Теоремы 3 из [3] обобщается на $L/N \to \alpha \in (0,1)$ с помощью выбора $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$. □

4. Приложение. Результаты вычислительных экспериментов

Формулировка. *На основе теоретического результата задачи №2 проиллюстрировать результат для линейного сигнала* $H_n = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ *с* $h_k = k,\ n = 0, 1, \ldots, N-1$ *при* $L \sim N/3$.

В качестве примера рассмотрим ряд Теперь проиллюстрируем результаты.

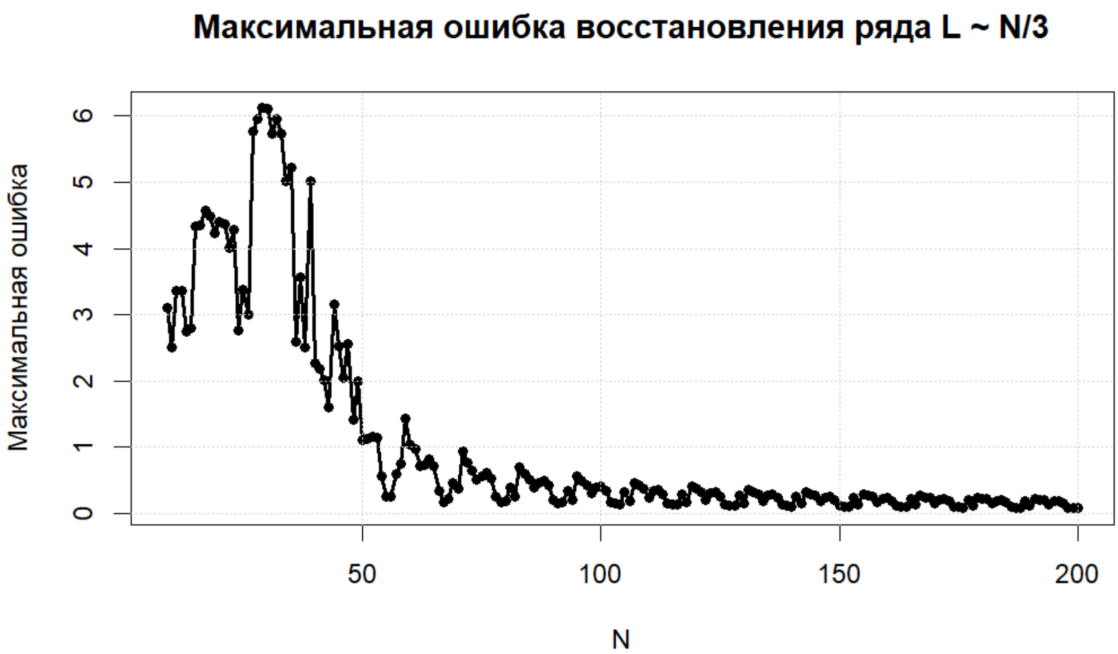

Рис. 1. Максимальные ошибки восстановления ряда в зависимости от длины ряда при $\widetilde{h}_n = n + 3\cos(\pi n/2 + \pi/8)$.

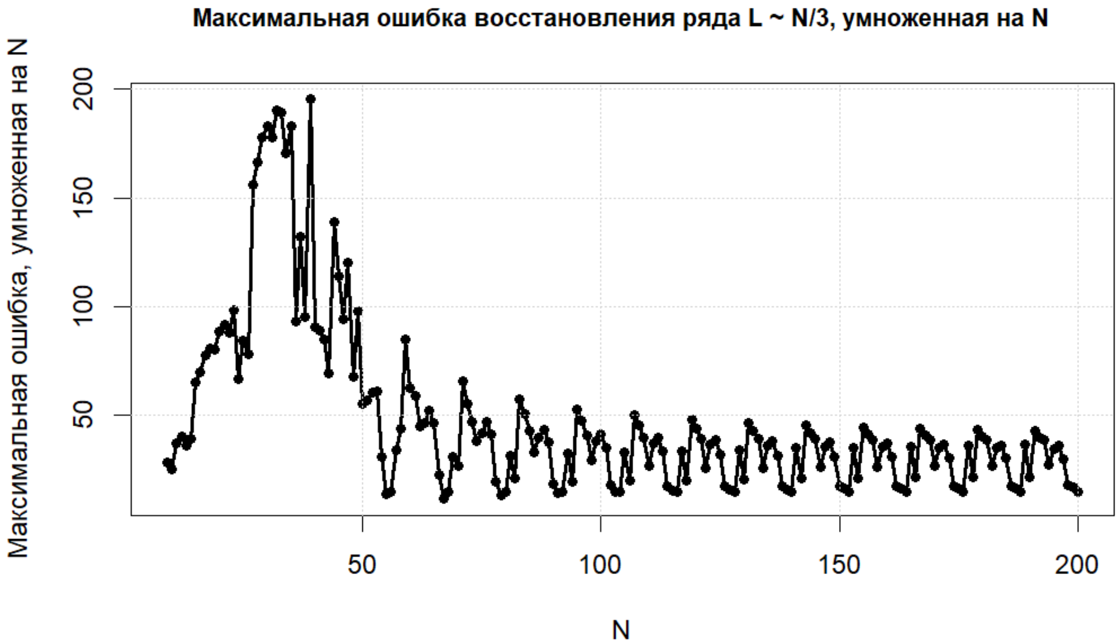

Рис. 2. Максимальные ошибки восстановления ряда, умноженные на N, в зависимости от длины ряда N для $x_n = n + 3\cos(\pi n/2 + \pi/8)$.

Прокомментируем результаты вычислительного эксперимента: по рисунку 1 убедимся, что максимальные по модулю ошибки восстановления ряда стремятся к нулю с ростом N. Рисунок 2 демонстрирует, что после умножения ряда рисунка 1 на N максимальные по модулю ошибки восстановления ряда становятся ограниченными, что подтверждает результат обобщения Теоремы 3.

5. Заключение

В ходе проделанных работ были изучены теоретические свойства метода SSA, поставлена общая теоретическая задача, дана оценка $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\right\|$, а также обобщён случай асимптотической разделимости линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0, 1)$, а также проделан вычислительный эксперимент, подтверждающий результаты обобщения Теоремы 3.

Список литературы

1. Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques.* Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.
2. Nekrutkin, V. (2010). *Perturbation expansions of signal subspaces for long signals.* Statistics and Its Interface. **3**, 297–319.
3. *Н.Зенкова, В.Некруткин.* Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра, Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2.