Вычисление интегралов методом Монте-Карло
Решение задачи 25

Яковлев Д.М.
ST095998@STUDENT.SPBU.RU

4 марта 2025 г.

1 Решение

Рассматривается многомерный интеграл из [1] под номером 25

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \iint\limits_{\substack{x>0\\0<t<cx}} x^{-p-1} e^{-t^2}\ dx\ dt. \tag{1}$$

Последовательно будем решать несколько задач:

1. Убедиться, что интеграл сходится;
2. Построить доверительный интервал по ЦПТ и для траекторий винеровского процесса;

1.1

Обозначив интеграл (1) как $J(c,p)$, найдём

$$J(c,p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\iint\limits_{\substack{x>0\\0<t<cx}} x^{-p-1} e^{-t^2}\ dx\ dt \overset{\text{т. Фубини}}{=} \int_0^\infty e^{-t^2} \left(\int_{t/c}^\infty x^{-p-1}\ dx \right)\ dt \overset{p>0}{=} \int_0^\infty e^{-t^2} \frac{1}{p} \left(\frac{t}{c}\right)^{-p}\ dt \right].$$

Вынесем множитель $\dfrac{2c^p}{\sqrt{\pi}p}$ и рассмотрим сходимость интегрального выражения

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{-p} dt.$$

Заметим, что при $p \geqslant 1$ в правой окрестности $t = 0$ (например, $[0, \varepsilon),\ \varepsilon > 0$):

$$e^{-t^2} \to 1, \int_0^\varepsilon e^{-t^2} t^{-p}\ dt \to \int_0^\varepsilon t^{-p} dt = \infty,$$

Откуда получаем, что $0 < p < 1$. В таком случае

$$\int_0^\infty e^{-t^2} t^{-p}\ dt = \left[t^2 = u,\ t = u^{1/2},\ dt = \frac{1}{2u^{1/2}} du \right] = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-u} u^{\frac{-p-1}{2}}\ du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right).$$

Тем самым, интегральное выражение

$$J(c,p) = \frac{c^p}{\sqrt{\pi}p} \Gamma\left(\frac{1-p}{2}\right),\ c > 0,\ 0 < p < 1.$$

1.2

Подберём распределение $\mathcal{P}$. Для удобства вычислений, распределение $\mathcal{P}$ можно представить в виде двух независимых случайных величин. Пусть ξ, η — независимые случайные величины такие, что

$$\xi = |\varepsilon|,\ \varepsilon\ \sim N\left(0, \frac{1}{2}\right),\ p_\xi(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2},\ 0 < t,$$
$$\eta:\ p_\eta(x) = C \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ e^{-x}, & 0 < x \leqslant 1 \\ x^{-p-1}, & 1 < x \end{cases}.$$

Определим нормирующий коэффициент C, вычислив интеграл от $p_\eta(x)$:

$$C\left[\int_{\mathbb{R}} d\mathcal{P}_\eta dx = \int_0^1 e^{-x}\ dx + \int_1^\infty x^{-p-1}\ dx = (1 - e^{-1}) + \frac{1}{p}\right] = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{1 - e^{-1} + \dfrac{1}{p}}.$$

Само распределение $\mathcal{P}_\eta$ представляется как смесь распределений

$$p_\eta(x) = q_1 p_1(x) + q_2 p_2(x),$$
$$q_1 = C(1 - e^{-1}),\ p_1(x) = \mathbb{1}_{(0,1]}(x)\frac{e^{-x}}{1 - e^{-1}},\ q_2 = \frac{C}{p},\ p_2(x) = \mathbb{1}_{(1,+\infty)}(x) p x^{-p-1},\ q_1 + q_2 = 1.$$

Теперь определим обратные функции для полученных функций распределения

$$p_1(x) \sim F_1(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - e^{-1}}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases} \Leftrightarrow x = -\log[1 - (1 - e^{-1})\alpha],\ \alpha \in (0, 1).$$
$$p_2(x) \sim F_2(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ 1 - x^{-p}, & 1 < x < \infty \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt[-p]{1 - \alpha},\ \alpha \in (0, 1).$$

По теореме Радона-Никодима, существует

$$m(\xi, \eta) = \frac{1}{C} \begin{cases} x^{-p-1} e^x, & 0 < x \leqslant 1,\ 0 < t < cx \\ 1, & 1 < x,\ 0 < t < cx \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Список литературы

[1] Коробейников А. Вычисление интегралов методом Монте-Карло.