Отчёт по учебной практике 3 (Научно-исследовательская работа) по теме "Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ Сингулярного Спектра» SSA" (курс 3)

Выполнил:
Яковлев Денис Михайлович
Группа 21.Б04-мм

Научный руководитель:
К.ф-м.н., доцент
Некруткин Владимир Викторович
Кафедра статистического моделирования

17 декабря 2023 г.

1 Введение

Целью этой научно-исследовательской работы является решение прикладных задача анализа временных рядов с применением теоретических знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или "Анализ Сингулярного Спектра". В ходе учебной практики будут изучены теоретическая часть метода SSA и её применение.

Общая постановка задачи.

1.1 Метод АСС

Остановимся сначала на том варианте метода “Анализ Сингулярного Спектра” (сокращенно, АСС), который обсуждается в настоящей работе, подробное описание этого метода можно найти в [1].

Рассматривается вещественный “сигнал” $\mathrm{F} = (f_0, \ldots, f_n, \ldots)$, причем предполагается, что ряд F управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d

$$f_n = \sum_{k=1}^{d} a_k f_{n-k}, \quad n \geq d \tag{1}$$

с $a_d > 0$, которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом F.

Кроме того, вводится “помеха” $\mathrm{E} = (e_0, \ldots, e_n, \ldots)$ и предполагается, что наблюдается ряд $\mathrm{X}_N = \mathrm{F}_N + \delta \mathrm{E}_N$, где F_N и E_N — согласованные отрезки длины N сигнала и помехи, а δ является формальным параметром возмущения. Иначе говоря,

$$\mathrm{F}_N = (f_0, \ldots, f_{N-1}), \quad \mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_{N-1}) \ \text{ и } \ \mathrm{X}_N = (f_0 + \delta e_0, \ldots, f_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала F_N из суммы X_N, причем предполагается, что известно только значение порядка d ЛРФ (1). Термины “сигнал” и “помеха” подчеркивают нашу заинтересованность именно в ряде F_N.

Краткое описание метода. Метод АСС в этом случае выглядит следующим образом.

1. Выбирается *длина окна* $L < N$ и из ряда X_N строится ганкелева *траекторная* матрица $\mathbf{H}(\delta)$ размерности $L \times K$, $K = N - L + 1$, с элементами $\mathbf{H}(\delta)[ij] = x_{i+j-2}$, $0 \leq i < L$, $0 \leq j < K$. При этом предполагается, что $\min(L, K) \geq d$. В [1] эта операция называется *вложением.*

   Если обозначить $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ ганкелевы матрицы, полученные из рядов F_N и E_N операцией вложения с той же длиной окна L, то, конечно, $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$.

2. Матрица $\mathbf{H}(\delta)$ подвергается сингулярному разложению и суммируются d главных (то есть соответствующих наибольшим сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. Результат $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ этой операции является наилучшим приближением матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ с помощью матриц ранга d в норме Фробениуса.

3. Ищется ганкелева матрица $\widehat{\mathbf{H}}(\delta)$, которая является ближайшей к $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ в той же норме Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали $i+j = const$ все элементы матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ заменяются их средним значением. Поэтому в [1] эта операция названа *диагональным усреднением.* Обозначая её $\mathcal{S}$ получим, что $\widehat{\mathbf{H}}(\delta) = \mathcal{S}\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$.

4. Наконец, применяя к $\widehat{\mathbf{H}}(\delta)$ операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду $\mathrm{F}_N(\delta) = (f_0(\delta), \ldots, f_{N-1}(\delta))$, который объявляется приближением к сигналу F_N.

2 Теоретические задачи

Введём несколько объектов:

- $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ — вещественнозначные ненулевые матрицы $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^L$. Матрицу $\mathbf{H}$ будем называть "сигнальной матрицей" , а $\mathbf{E}$ — "шумовой матрицей". В условиях поставленной задачи рассматривается возмущённая матрица $\mathbf{H}(\delta)$ и "сигнальное подпространство", образованное столбцами матрицы $\mathbf{H}$;
- $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$ — самосопряжённый неотрицательно определённый оператор $\mathbf{A}$: $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$;
- $d = \operatorname{rank}\mathbf{H} < \min(L, K)$ - ранг матрицы $\mathbf{H}$;
- Σ — набор собственных значений $\{\mu_n\}_{n=1}^L$ оператора $\mathbf{A}$. Из свойств оператора $\mathbf{A}$, $\Sigma \subset [0, +\infty)$;
- $\mu_{min} = \min\{\mu \in \Sigma \,|\, \mu > 0\}$;
- $\mathbf{I}$ — тождественный оператор $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$;
- $\mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на собственное подпространство $\mathbb{U}_0$, соответствующее нулевым собственным значениям $\mathbf{A}$;
- $\mathbf{P}_0^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^\perp$, соответствующее ненулевым собственным значениям.

Теперь введём матрицу с возмущением $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$. Тогда возмущение оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^T = \mathbf{H}\mathbf{H}^T + \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^T$$

Положим $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{E}^T$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta\mathbf{A}^{(1)} + \delta^2\mathbf{A}^{(2)}$. Заметим, что $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ — самосопряжённые операторы, а $\mathbf{A}(\delta)$ — неотрицательный полуопределённый оператор для любых $\delta \in \mathbb{R}$.
Цель поставленных теоретических задач — сравнить возмущённый проектор $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ с невозмущённым проектором $\mathbf{P}_0^\perp$.
Определим $\mathbf{S}_0$ — матрица, псевдообратная к $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{min}^k$. Введём $\mathbf{W}_p(\delta)$:

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1+\cdots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \ldots, l_{p+1}),$$

а

$$\mathbf{W}_p(l_1, \ldots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_2)} \ldots \mathbf{S}_0^{(l_p)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Введём $\mathbf{V}_0^{(n)}$:

$$\mathbf{V}_0^{(n)} = \sum_{p=[n/2]}^{n} (-1)^p \sum_{\substack{s_1+\cdots+s_p=n,\, s_i=1,2 \\ l_1+\cdots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0}} \mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}),$$

$\mathbf{s} = (s_1, \ldots, s_p)$, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_{p+1})$, и

$$\mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{A}^{(s_1)}\mathbf{S}_0^{(l_2)} \ldots \mathbf{A}^{(s_p)}\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Далее — рассуждения раздела 5.3 [2].

А именно, если обозначить $r_i(N) = f_i - f_i(\delta)$, где $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_N(\delta)$ — оператор, то из того, что $\|\mathbf{C}\|_{\max} \leq \|\mathbf{C}\|$, следует, что

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}\,\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}.$$

Если первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю, то остается исследовать второе слагаемое.

Теперь можно ввести теорему из [2]:

Теорема 1 (2.1.)**.** Пусть $\delta_0 > 0$ и

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2 \tag{2}$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда для возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ верно представление:

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta), \tag{3}$$

а также

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)}. \tag{4}$$

Замечание 1. (3) *и* (4) *сходятся в спектральной норме.*

Введём

$$B(\delta) = |\delta| \left\| \mathbf{A}^{(1)} \right\| + \delta^2 \left\| \mathbf{A}^{(2)} \right\|. \tag{5}$$

Если $\delta_0 > 0$ и $B(\delta_0) = \mu_{min}/2$, то тогда неравенство (2) верно для любых δ таких, что $|\delta| < \delta_0$.

2.1 Теоретическая задача №1

Оценить выражение сверху $\forall n \in \mathbb{N} : \left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$.

Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2] для решения теоретической задачи №1.

Теорема 2 (2.3.)**.** Если $\delta_0 > 0$ и $\dfrac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} < \dfrac{1}{4}$ для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, то $\left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} \right\| \leqslant 4C \dfrac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi} \approx 0.667$.

Лемма 1 (6.1.)**.** Если $0 < \beta < \dfrac{1}{4}$, $k \geqslant 0$, то $\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leqslant C \dfrac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Сначала оценим выражение в случае, когда $n = 2$:[1]

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right\| = \left\|\sum_{p=3}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta)\right\| \leqslant \sum_{p=3}^{\infty} \|\mathbf{W}_p(\delta)\| =$$

$$\sum_{p=3}^{\infty} \left\|(-1)^p \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1})\right\| \leqslant \sum_{p=3}^{\infty} \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \left\|\mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}\right\| =$$

$$\sum_{p=3}^{\infty} \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \left\|\mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_j-1)}\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0 \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}\right\| \leqslant$$

$$\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \|\mathbf{B}(\delta)\|^{p-1} \|\mathbf{S}_0\|^{p-1} \leqslant$$

$$C \sum_{p=3}^{\infty} \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^{p-1} 4^p = C \left(\frac{4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^2 \frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|\,/\mu_{min}}. \tag{6}$$

Аналогично, можно выделить следующее:

Следствие 1.

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\right\| \leqslant C \left(\frac{4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^n \frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|\,/\mu_{min}}. \tag{7}$$

Тогда можно применить результат из (7) для нахождения условий, при которых первое слагаемое правой части из (2) стремится к нулю. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&\|\left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right)\mathbf{H}(\delta)\| = \|\big(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} + (\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)(-\mathbf{P}_0) + (-\mathbf{P}_0)\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0) - \\
&(\mathbf{S}_0^2\mathbf{B}(\delta)(-\mathbf{P}_0)\mathbf{B}(\delta)(-\mathbf{P}_0) + (-\mathbf{P}_0)\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^2\mathbf{B}(\delta)(-\mathbf{P}_0) + (-\mathbf{P}_0)\mathbf{B}(\delta)(-\mathbf{P}_0)\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^2 + \mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)(-\mathbf{P}_0) + \\
&\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)(-\mathbf{P}_0)\mathbf{B}\mathbf{S}_0 + (-\mathbf{P}_0)\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0)\big)\mathbf{H}(\delta)\| = \|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0 - \\
&\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^2 + \mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0 + \mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0)\mathbf{H}(\delta) + \delta(-\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0 \\
&\mathbf{S}_0^2\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^2\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0 - \mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0)\mathbf{E}\|
\end{aligned} \tag{8}$$

Список литературы

[1] Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques.* Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.

[2] Nekrutkin, V. (2010). *Perturbation expansions of signal subspaces for long signals.* Statistics and Its Interface. **3**, 297–319.

[1] Второй переход нужно подробнее. И еще – нас на самом деле интересует не просто эта норма, а

$$\|\left(\mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right)\mathbf{H}(\delta)\|.$$

М.б., такая разность будет попроще — не вынося $\|\mathbf{H}(\delta)\|$? Например, $\mathbf{P}_0\mathbf{H} = \mathbf{0}$.
И еще — не нужно убирать $\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|$ — это может пригодиться.