Отчёт по учебной практике 3 (Научно-исследовательская работа) по теме “Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ сингулярного спектра» SSA” (курс 3)

Выполнил:
Яковлев Денис Михайлович
Группа 21.Б04-мм

Научный руководитель:
К.ф-м.н., доцент
Некруткин Владимир Викторович
Кафедра статистического моделирования

17 декабря 2023 г.

1 Введение

Целью этой научно-исследовательской работы является решение прикладных задача анализа временных рядов с применением теоретических знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или "Анализ сингулярного спектра". В ходе учебной практики будут изучены теоретическая часть метода SSA и её применение.

2 Теоретические задачи

Для начала введём несколько объектов:

- $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ — вещественнозначные ненулевые матрицы $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^L$. Матрицу $\mathbf{H}$ будем называть “сигнальная матрицей” , а $\mathbf{E}$ — “шумовая матрицей”. В условиях поставленной задачи рассматривается возмущённая матрица $\mathbf{H}(\delta)$ и “сигнальное подпространство”, образованное столбцами матрицы $\mathbf{H}$;
- $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$ — самосопряжённый неотрицательно определённый оператор $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$;
- $d = \operatorname{rank}\mathbf{H} < \min(L, K)$ - ранг матрицы $\mathbf{H}$;
- Σ — набор собственных значений $\{\mu_n\}_{n=1}^L$ оператора $\mathbf{A}$. Из свойств оператора $\mathbf{A}$, $\Sigma \subset [0, +\infty)$;
- $\mu_{min} = \min\{\mu \in \Sigma \,|\, \mu > 0\}$;
- $\mathbf{I}$ — тождественный оператор $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$;
- $\mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на собственное подпространство $\mathbb{U}_0$, соответствующее нулевым собственным значениям $\mathbf{A}$;
- $\mathbf{P}_0^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^\perp$, соответствующее ненулевым собственным значениям.

Теперь введём матрицу с возмущением $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$. Тогда возмущение оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^T = \mathbf{H}\mathbf{H}^T + \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^T$$

Положим $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{E}^T$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta\mathbf{A}^{(1)} + \delta^2\mathbf{A}^{(2)}$. Заметим, что $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ — самосопряжённые операторы, а $\mathbf{A}(\delta)$ — неотрицательный полуопределённый оператор для любых $\delta \in \mathbb{R}$.
Цель поставленных теоретических задач — сравнить возмущённый проектор $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ с невозмущённым проектором $\mathbf{P}_0^\perp$.
Определим $\mathbf{S}_0$ — матрица, псевдообратная к $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$. Введём $\mathbf{W}_p(\delta)$:

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j\geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}),$$

$$\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)}\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Введём $\mathbf{V}_0^{(n)}$:

$$\mathbf{V}_0^{(n)} = \sum_{p=[n/2]}^{n} (-1)^p \sum_{\substack{s_1+\dots+s_p=n,\, s_i=1,2 \\ l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j\geqslant 0}} \mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}),$$

$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{p+1})$, и

$$\mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)}\mathbf{A}^{(s_1)}\mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{A}^{(s_p)}\mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Теперь можно ввести теорему из [?]:

Теорема 2.1
Пусть $\delta_0 > 0$ *и*

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2 \tag{1}$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. *Тогда для возмущённого проектора* $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ *верно представление*:

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta), \tag{2}$$

а также

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)}. \tag{3}$$

Замечание: (2) и (3) сходятся в спектральной норме.
Введём

$$B(\delta) = |\delta| \left\|\mathbf{A}^{(1)}\right\| + \delta^2 \left\|\mathbf{A}^{(2)}\right\|. \tag{4}$$

Если $\delta_0 > 0$ и $B(\delta_0) = \mu_{min}/2$, то тогда неравенство (1) верно для любых δ таких, что $|\delta| < \delta_0$.

2.1 Теоретическая задача №1

Оценить выражение сверху $\forall n \in \mathbb{N}: \left\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\right\|$.
Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [?] для решения теоретической задачи №1.

Теорема 2.3.
Если $\delta_0 > 0$ **и** $\dfrac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} < \dfrac{1}{4}$ **для всех** $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, **то** $\left\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\right\| \leqslant 4C\dfrac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi} \approx 0.667$.

Лемма 6.1.
Если $0 < \beta < \dfrac{1}{4}$, $k \geqslant 0$, то $\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leqslant C\dfrac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.
Сначала оценим выражение в случае, когда $n = 2$:

$$\begin{gathered}\left\|\mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right\| = \left\|\sum_{p=3}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta)\right\| \leqslant \\ C\sum_{p=3}^{\infty} \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^{p-1} 4^p \leqslant C\sum_{p=3}^{\infty} \left(\frac{4\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^p = C\left(\frac{4\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^3 \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}.\end{gathered} \tag{5}$$

Аналогично, можно выделить следующее:

Следствие:
1.

$$\left\|\mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\right\| \leqslant C\left(\frac{4\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}. \tag{6}$$

Сравним полученный в (5) результат с результатом теоремы 2.5:

Теорема 2.5. Пусть $\delta_0 > 0$, $B(\delta_0) = \mu_{min}/4$ и $|\delta| < \delta_0$. Введём

$$\mathbf{L}_1(\delta) = \sum_{\mu > 0} \frac{\mathbf{P}_\mu \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0}{\mu} \left(\mathbf{I} - \delta^2 \mathbf{A}_0^{(2)}/\mu \right)^{-1} \tag{7}$$

и $\mathbf{L}(\delta) = \mathbf{L}_1(\delta) + \mathbf{L}_1^T(\delta)$. Тогда

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{L}(\delta) \right\| \leqslant 16C \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\| \, \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}}, \tag{8}$$

где $C = e^{(1/6)}/\sqrt{\pi}$. Положим $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\| \approx \varepsilon$. Так как

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \leqslant \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\|,$$

то правая часть (8) будет пропорциональна ε^2, в то время как правая часть (5) будет пропорциональна ε, если $\|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}$ не мала и $\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)$ достаточно мала. В таком случае оператор $\mathbf{L}(\delta)$ можно считать основным показателем разности $\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp$.
В общем виде, поскольку:

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leqslant C \left(\frac{4 \|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^n \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}},$$

то в случае

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\| \approx \varepsilon \leqslant 4^{n-1} \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^n$$

правая часть (8) будет давать будет точнее оценивать $\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp$, чем (6).

Список литературы