Доклад по научно-исследовательской работе по теме: “Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ сингулярного спектра» SSA”.

Яковлев Денис Михайлович
Звонарёв Никита Константинович

Кафедра статистического моделирования
Математико-механический факультет
Санкт-Петербургский государственный университет

2023

Введение

Определение. Сигнал $F_N = (f_0, f_1, \dots, f_{N-1}), N \in \mathbb{N}$ — вещественнозначный или комплекснозначный временной ряд длины N.
Пусть сигнал F_N линейно преобразуется в “сигнальную матрицу” $\mathbf{H}$, или $F_N \mapsto \mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ размера $L \times K$, где L — длина вектора вложения, K — их число. Тогда матрица $\mathbf{H}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Постановка задачи

Определение. Сигнальное подпространство F_N — пространство $\mathbb{U}$, образованное столбцами матрицы $\mathbf{H}$ из преобразования $F_N \mapsto \mathbf{H}$.
Рассмотрим возмущённый временной ряд $F_N(\delta) = F_N + \delta E_N$, где $E_N = (e_0, \ldots, e_{N-1})$ — шумовой ряд, δ — формальный параметр возмущения.
Тогда $F_N(\delta) = F_N + \delta E_N \mapsto \mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$, где $\mathbf{H}(\delta)$ — возмущённая матрица

Постановка задачи

Определение. $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$ — самосопряжённая неотрицательно определённая матрица оператора $\mathbf{A} : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$.
Определение.
$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^T = \mathbf{A} + \delta \mathbf{A}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A} + \mathbf{B}(\delta)$, где $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T, \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\mathbf{E}^T, \mathbf{B}(\delta) = \delta \mathbf{A}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{A}^{(2)}$. $\mathbf{A}(\delta)$ — возмущённая матрица, соответствующая оператору $\mathbf{A}(\delta) : \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$.
Пусть Σ — множество собственных чисел $\mathbf{A}$.
Определение. $\mu_{min} = \min\{\mu \in \Sigma \,|\, \mu > 0\}$ — наименьшее ненулевое собственное число $\mathbf{A}$.

Постановка задачи

Определение. $\mathbb{U}_0$ — собственное подпространство, соответствующее нулевому собственному числу матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0$.
Определение. $\mathbf{I}$ — тождественный оператор $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$, $\mathbf{P}_0^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^\perp$.
Определение. $\mathbf{S}_0$ — псевдообратная матрица к матрице $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$, $k \geqslant 1$.

Цель: сравнить возмущённый проектор $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ с невозмущённым проектором $\mathbf{P}_0^\perp$.

Проделанные шаги

Теорема 2.1.[1] *Пусть $\delta_0 > 0$ и*

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2 \tag{1}$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда для возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ верно представление:

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta), \tag{2}$$

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}),$$

$$\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Проделанные шаги

Теорема 2.1 позволяет записать разложение в ряд для возмущённого оператора $\mathbf{P}_0^{\perp}$.

Проделанные шаги

В ходе проделанной работы удалось оценить выражение

$$\forall n \in \mathbb{N} : \left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leqslant C \left(\frac{4 \|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}}, \tag{3}$$

где $C = e^{(1/6)}\sqrt{\pi}$.

Дальнейшие действия

Другие способы оценки $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\|$ сверху и их сравнение,

Дальнейшее исследование этапов SSA.

Nekrutkin Vladimir. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals // arXiv preprint arXiv:1001.1051. — 2010.