

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчёт по курсовой работе

ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ, ТЕОРИЯ МЕТОДА
«АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА» SSA

Выполнил:

Яковлев Денис Михайлович

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

В. В. Некруткин

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

1.	Введение	3
2.	Постановка задачи	3
2.1.	Метод АСС	3
3.	Теоретические задачи	5
3.1.	Задача №1	7
3.2.	Задача №2	9
4.	Приложение. Результаты вычислительных экспериментов	15
5.	Заключение	17
Список литературы		18

1. Введение

Целью этой работы является решение теоретических и прикладных задач анализа временных рядов с применением знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или “Анализ Сингулярного Спектра” (сокращенно, АСС). В ходе учебной практики будут изучены и продемонстрированы теоретическая часть метода АСС и её применение. Ознакомиться с методом АСС можно в [1], а в [2] описывается теоретическая часть метода АСС.

2. Постановка задачи

2.1. Метод АСС

Остановимся сначала на том варианте метода АСС, который обсуждается в настоящей работе, подробное описание этого метода можно найти в [1].

Рассматривается вещественный *сигнал* $\mathbf{H} = (h_0, \dots, h_n, \dots)$, причем предполагается, что ряд \mathbf{H} управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d

$$h_n = \sum_{k=1}^d a_k h_{n-k}, \quad n \geq d \quad (1)$$

с $a_d > 0$, которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом \mathbf{H} . Кроме того, вводится *помеха* $\mathbf{E} = (e_0, \dots, e_n, \dots)$ и предполагается, что наблюдается ряд $\tilde{\mathbf{H}}_N = \mathbf{H}_N + \delta \mathbf{E}_N$, где \mathbf{H}_N и \mathbf{E}_N — согласованные отрезки длины N сигнала и помехи, а δ является формальным параметром возмущения. Иначе говоря,

$$\mathbf{H}_N = (h_0, \dots, h_{N-1}), \quad \mathbf{E}_N = (e_0, \dots, e_{N-1}) \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{H}}_N = (h_0 + \delta e_0, \dots, h_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала \mathbf{H}_N из суммы $\tilde{\mathbf{H}}_N$, причем предполагается, что известно только значение порядка d ЛРФ (1). В первую очередь нас будет интересовать оценка ряда \mathbf{H}_N .

Краткое описание метода. Метод АСС в этом случае выглядит следующим образом.

1. Выбирается *длина окна* $L < N$ и из ряда $\tilde{\mathbf{H}}_N$ строится ганкелева *траекторная* матрица $\mathbf{H}(\delta)$ размерности $L \times K$, $K = N - L + 1$, с элементами $\mathbf{H}(\delta) = (\tilde{h}_{i+j-2})$,

$0 \leq i < L, 0 \leq j < K$. При этом предполагается, что $\min(L, K) \geq d$, исходя из того, что ряд H управляется ЛРФ порядка d В [1] эта операция называется *вложением*.

Если обозначить \mathbf{H} и \mathbf{E} ганкелевы матрицы, полученные из рядов H_N и E_N операцией вложения $\mathcal{T}_{L,N} = \mathcal{T}$ с той же длиной окна L , то, конечно, $\mathbf{H}(\delta) = \mathcal{T}(H_N + \delta E_N)$.

2. Для матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ вычисляется сингулярное разложение и суммируются d главных (то есть соответствующих наибольшему сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. А именно, выбирается ортонормированная система собственных (*левых сингулярных*) векторов $\mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \{U_i\}_{i=1}^L$ и собственных (*правых сингулярных*) векторов $\mathbf{H}(\delta)^T \mathbf{H}(\delta) = \{V_i\}_{i=1}^K$, вычисляются собственные числа $\mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \{\lambda_i\}_{i=1}^L$. Если расположить все собственные числа в *неубывающем порядке* и обозначить m — число ненулевых собственных чисел, то

$$\mathbf{H}(\delta) = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T,$$

где U_i, V_i соответствуют λ_i . Результат

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

этой операции, где $m = d$, так как образованная от ряда H матрица $\mathbf{H}(\delta)$ управляется ЛРФ порядка d , является наилучшим приближением матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ с помощью матриц ранга d в норме Фробениуса, то есть

$$\arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{L \times K}, \text{rank } \mathbf{A} \leq d} \|\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{A}\| = \tilde{\mathbf{H}}(\delta).$$

3. Ищется ганкелева матрица $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$, которая является ближайшей к $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ в той же норме Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали $i + j = \text{const}$ все элементы матрицы $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ заменяются их средним значением. Поэтому в [1] эта операция названа *диагональным усреднением*. Обозначая её \mathcal{S} получим, что $\hat{\mathbf{H}}(\delta) = \mathcal{S} \tilde{\mathbf{H}}(\delta)$.
4. Наконец, применяя к $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$ операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду $\tilde{H}_N(\delta) = \mathcal{T}^{-1}(\hat{\mathbf{H}}(\delta))$, который объявляется приближением к сигналу H_N .

3. Теоретические задачи

Постановка. Введём несколько объектов:

- \mathbf{H}, \mathbf{E} — вещественнозначные ненулевые матрицы $\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^L$. Матрицу \mathbf{H} будем называть *траекторной матрицей сигнала* \mathbf{H} , а \mathbf{E} — *траекторной матрицей помехи* \mathbf{H} . В условиях поставленной задачи рассматривается возмущённая матрица $\mathbf{H}(\delta)$ и *сигнальное подпространство*, образованное столбцами матрицы \mathbf{H} ;
- $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$ — самосопряжённый неотрицательно определённый оператор $\mathbf{A}: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$;
- $d = \text{rank } \mathbf{H} < \min(L, K)$ — ранг матрицы \mathbf{H} , образованной от ряда \mathbf{H} , управляемого ЛРФ порядка d ;
- Σ — набор собственных чисел $\{\mu_n\}_{n=1}^L$ оператора \mathbf{A} . Из свойств оператора \mathbf{A} , $\Sigma \subset [0, +\infty)$;
- $\mu_{\min} = \min\{\mu \in \Sigma \mid \mu > 0\}$;
- \mathbf{I} — тождественный оператор $\mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$;
- \mathbf{P}_0 — ортогональный проектор на собственное подпространство \mathbb{U}_0 , соответствующее нулевым собственным числам \mathbf{A} ;
- $\mathbf{P}_0^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на \mathbb{U}_0^\perp , соответствующее ненулевым собственным числам;
- $\|\cdot\|_{\text{spec}} = \|\cdot\|$ — спектральная норма.

Теперь введём матрицу с возмущением $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$. Тогда возмущение оператора \mathbf{A} :

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \delta(\mathbf{H} \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{H}^T) + \delta^2 \mathbf{E} \mathbf{E}^T.$$

Положим $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H} \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{H}^T$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E} \mathbf{E}^T$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta \mathbf{A}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{A}^{(2)}$. Заметим, что $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ — самосопряжённые операторы, а $\mathbf{A}(\delta)$ — самосопряжённый неотрицательный оператор для любых $\delta \in \mathbb{R}$. Положим $\mathbf{B}(\delta) = \delta \mathbf{A}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{A}^{(2)}$.

Определим \mathbf{S}_0 — матрица, псевдообратная к $\mathbf{H} \mathbf{H}^T$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geq 1$, $\|\mathbf{S}_0^{(k)}\| = 1/\mu_{\min}^k$.

Далее — рассуждения из [2, раздел 5.3].

А именно, если обозначить $r_i(N) = \tilde{h}_i(\delta) - h_i$ — остаток от разности между i -ми элементами рядов $\tilde{H}_N(\delta)$ и H_N , а $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_N(\delta)$ — оператор с возмущением, то из того, что $\|\mathbf{C}\|_{\max} \leq \|\mathbf{C}\|$, получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_N(\delta) - H_N\|_{\max} &= \max_{0 \leq n < N} |\tilde{h}_n(\delta) - h_n| = \max_{0 \leq n < N} |r_i(N)|, \\ \|\tilde{H}_N(\delta) - H_N\|_{\max} &= \|\mathcal{S}(\mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta)) - \mathbf{H}\|_{\max} = \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max}, \end{aligned}$$

где \mathcal{S} — оператор диагонального усреднения (ганкелевизации), $\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H}$. Поскольку $\|\mathcal{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\|_{\max}$ для любой конечномерной матрицы \mathbf{A} , то

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| &= \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} \leq \|\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} = \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H}\|_{\max} \\ &= \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E} + \mathbf{N}\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} \\ &\leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} + \|\mathbf{N}\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} \\ &\leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}. \end{aligned} \quad (2)$$

Общая задача состоит в том, чтобы подобрать такой оператор \mathbf{N} , чтобы правая часть (2) стремилась к нулю.

Если первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, то остается исследовать второе слагаемое. Перед тем, как приступить к решению теоретических задач, введём следующие определения:

Определение 1.

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}), \quad (3)$$

а

$$\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Определение 2.

$$\mathbf{V}_0^{(n)} = \sum_{p=[n/2]}^n (-1)^p \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_p = n, s_i = 1, 2 \\ l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0}} \mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}),$$

$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)$, $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{p+1})$, u

$$\mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(s_1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{A}^{(s_p)} \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Теперь можно ввести теорему из [2]:

Теорема 1 (Теорема 2.1). Пусть $\delta_0 > 0$ и

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{\min}/2 \quad (4)$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда для возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ верно представление:

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta). \quad (5)$$

Более того,

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)}. \quad (6)$$

Замечание 1. Ряды (5) и (6) сходятся в спектральной норме.

Введём

$$\mathbf{B}(\delta) = |\delta| \left\| \mathbf{A}^{(1)} \right\| + \delta^2 \left\| \mathbf{A}^{(2)} \right\|.$$

Если $\delta_0 > 0$ и $\mathbf{B}(\delta_0) = \mu_{\min}/2$, то тогда неравенство (4) верно для любых δ таких, что $|\delta| < \delta_0$.

3.1. Задача №1

Формулировка. Оценить выражение сверху $\forall n \in \mathbb{N} : \left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$.¹

Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2].

Теорема 2 (Теорема 2.3). Если $\delta_0 > 0$ и $\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} < \frac{1}{4}$ для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, то проектор $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ существует и

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp \right\| \leq 4C \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}, \quad (7)$$

где $C = e^{1/6} / \sqrt{\pi} \approx 0.667$.

Лемма 1 (Лемма 6.1). Если $0 < \beta < 1/4$, $k \geq 0$, то $\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leq C \frac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$, $C = e^{1/6} / \sqrt{\pi}$.

¹ Зачем это нужно? Если положить $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1(\delta)$, то может оказаться, что

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) \right\| \rightarrow 0,$$

но это не выполняется для $\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|$. Тогда можно попробовать взять $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta)$, см. (9) и [3].

Доказательство. Существование $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$ следует из Теоремы 1. Заметим, что в правой части (3) найдётся такой индекс j , что $l_j > 0$ и $l_{j-1} = 0$ или $l_{j+1} = 0$. Иначе $l_1 + l_2 + \dots + l_{p+1} \geq p + 1 \neq p$. Так как $\|\mathbf{S}_0^{(k)}\| = 1/\mu_{\min}^k$ для любого $k \geq 0$, то можем оценить каждый член правой части из (3).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{i-1}, 0, l_{i+1}, \dots, l_{p+1})\| &= \left\| \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_{i-1})} \mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0 \dots \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})} \right\| \\ &\leq \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \|\mathbf{B}(\delta)\|^{p-1} \frac{1}{\mu_{\min}^{p-1}} = \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $\forall i : 1 \leq i \leq p+1 \quad l_i \geq 0$ и $l_1 + l_2 + \dots + l_{p+1} = p$, то число векторов $(l_1, l_2, \dots, l_{p+1})$ будет равняться $\binom{2p}{p}$. Таким образом оценим $\mathbf{W}_p(\delta)$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_p(\delta)\| &= \left\| (-1)^p \sum_{l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) \right\| \\ &\leq \binom{2p}{p} \|\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1})\| \leq \binom{2p}{p} \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Оценим выражение в случае, когда $n = 2$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\| &= \left\| \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta) \right\| \\ &= \left\| \sum_{p=3}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leq \sum_{p=3}^{\infty} \|\mathbf{W}_p(\delta)\| \leq \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Теперь, считая, что $k = 2$, $\beta = \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1} \leq \frac{1}{4}$, воспользуемся Леммой 1 и тем, что $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \leq \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\| \leq \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}$, и получим:

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1} \leq 4^3 C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \frac{1}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}.$$

□

Аналогично, можно выделить следующее:

Следствие 1.

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leq 4^{n+1} C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}. \quad (8)$$

Тогда можно применить результат из неравенства (8) для оценки первого слагаемого правой части из (2). Для этого можно ограничиться условиями из Теоремы 2:

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)) \mathbf{H}(\delta)\| \leq 4^3 C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}. \quad (9)$$

3.2. Задача №2

Постановка. Рассматриваем вещественный сигнал $H = (h_0, h_1, \dots, h_N, \dots)$, где

$$h_n = \theta_1 n + \theta_0,$$

линейный сигнал, $\theta_1 \neq 0$, а помехой является линейная комбинация гармоник

$$e_n = \sum_{l=1}^r \tau_l \cos(2\pi n \omega_l + \varphi_l),$$

где $\tau_l \neq 0, \omega_l \neq \omega_p$ при $l \neq p$ и $0 < \omega_l < 1/2$.

Из постановки общей задачи, хотим подобрать такой оператор \mathbf{N} , чтобы правая часть (2) стремилась к нулю и доказать, что метод SSA работает.

Обратимся к (2). При $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$ верна Теорема 2 из [3]:

Теорема 3. Рассмотрим при $n = 0, 1, \dots, N-1$ линейный сигнал $h_n = \theta_1 n + \theta_0$, где $\theta_1 \neq 0$, и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник

$$e_n = \sum_{l=1}^r \tau_l \cos(2\pi n \omega_l + \varphi_l),$$

где $\tau_l \neq 0, \omega_l \neq \omega_p$ при $l \neq p$ и $0 < \omega_l < 1/2$.

Положим $x_n = h_n + \delta e_n$, где δ — формальный параметр возмущения и, взяв N нечётное и $L = (N+1)/2$, применим к ряду x_n , $n = 0, 1, \dots, N-1$, метод ACC с восстановлением по первым 2-м компонентам.

Если обозначить $h_0(\delta), \dots, h_{N-1}(\delta)$ результаты восстановления ряда $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$ с помощью метода ACC с описанными параметрами, а $r_n(N) = h_n(\delta) - h_n$ — остаток от разности между n -ми элементами восстановленного и линейного рядов длины N , то для любого $\delta \in \mathbb{R}$ при $N \rightarrow \infty$

$$\max_{0 \leq n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1}).$$

В случае, когда $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$, теорема (3) верна для случая $L = K$. Зададим вопрос: можно ли для этой теоремы рассматривать случай $\min(L, K) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \infty$, или $L/N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \alpha \in (0, 1)$, и если это возможно, то для какого \mathbf{N} ? В качестве \mathbf{N} предлагается рассмотреть $\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Зачем это нужно? При $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$ для ошибки восстановления $r_i(N)$ метода SSA равномерно стремятся к нулю, когда накладывается “сильное” ограничение на “длину окна”

$L = K$. Если обобщить результат теоремы (3) на “слабое” ограничение $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, то для вычислительных задач в случае анализа линейного сигнала с гармоникой можно рассматривать траекторную матрицу $\mathbf{H}(\delta)$ ряда $\tilde{H}_N = (h_1 + \delta e_1, \dots, h_n + \delta e_n)$ с произвольно заданной длиной окна L .

В связи с этим сформулируем задачу №2:

Формулировка. *Обобщить результат [3] с $L = K$ до $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ с помощью выбора $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.*

Доказательство. Тогда $K/N \rightarrow 1 - \alpha \in (0, 1)$. Теперь рассматриваем неравенство

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)) \mathbf{H}(\delta)\| + \|(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) \mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max}.$$

Идея: показать, что слагаемые правой части оценки $= O(N^{-n})$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда будет верна асимптотическая сходимость $\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| = O(N^{-1})$.

Для того, чтобы доказать асимптотическую сходимость, оценим слагаемые покомпонентно. Введём $\mu_{\max} = \|\mathbf{H}\|^2$ и воспользуемся соотношением между спектральной нормой $\|\mathbf{C}\|$ и равномерной нормой $\|\mathbf{C}\|_{\max}$:

$$\|\mathbf{C}\|_{\max} \leq \|\mathbf{C}\| \leq \sqrt{LK} \|\mathbf{C}\|_{\max}.$$

Поскольку $LK \sim \alpha(1 - \alpha)N^2 \sim CN^2$, то

$$\|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\| = \|\mathbf{E}\|^2 \sim C_{\cos}N^2, \mu_{\max} \sim C_{\max}N^4, \mu_{\min} \sim C_{\min}N^4. \quad (10)$$

Применим леммы из [3]. Заметим, что доказательства из [3] рассматривают случай $L = K$, но могут быть обобщены до случая $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ аналогично. Для демонстрации этого приведём доказательства этих лемм:

Лемма 2. *При $N \rightarrow \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$.*

Доказательство. При $1 \leq p \leq L$ и $1 \leq s \leq K$ запишем элемент матрицы $\mathbf{H}\mathbf{E}^T$ с индексом (p, s) :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{E}^T[p, s] &= \sum_{j=0}^{K-1} (p+j) \cos(2\pi(s+j)\omega + \varphi) = \\ &= p \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \varphi_s) + \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \varphi_s), \end{aligned}$$

где $\varphi_s = 2\pi s\omega + \varphi$.

Так как для любой φ :

$$p \left| \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \varphi) \right| = p \left| \frac{\sin(\pi K\omega)}{\sin(\pi\omega)} \cos(\pi(K-1)\omega + \varphi) \right| \leq \frac{p}{\sin(\pi\omega)} = O(N)$$

и в обозначениях

$$B_K = \frac{1}{2\sin(\pi\omega)} \sin(\pi(2K-1)\omega + \varphi), \quad E_K = \frac{\sin(\pi K\omega)}{2\sin^2(\pi\omega)} \sin(\pi K\omega + \varphi)$$

имеет место

$$\left| \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \phi) \right| = |KB_K - E_K| \leq \frac{K}{2\sin(\pi\omega)} + \frac{1}{2\sin^2(\pi\omega)} = O(N).$$

Таким образом, каждый член матрицы $\mathbf{H}\mathbf{E}^T$ не превосходит $O(N)$, или $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$. \square

Лемма 3. При $N \rightarrow \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

Доказательство. Поскольку рассматривается ряд H , состоящий из элементов $h_n = \theta_1 n + \theta_0$, обозначим

$$P_L(0) = (1, 1, 1, \dots, 1)^T, \quad P_L(1) = (0, 1, \dots, (L-1))^T$$

как базис линейного пространства U_0^\perp . Тогда матрицу \mathbf{P}_0^\perp можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^\perp &= \gamma_{00}^2 P_L(0) P_L^T(0) + (\gamma_{11} P_L(1) - \gamma_{10} P_L(0)) (\gamma_{11} P_L^T(1) - \gamma_{10} P_L^T(0)) \\ &= (\gamma_{00}^2 + \gamma_{10}^2) P_L(0) P_L^T(0) + \gamma_{11}^2 P_L(1) P_L^T(1) - \gamma_{11} \gamma_{10} (P_L(1) P_L^T(0) + P_L(0) P_L^T(1)), \end{aligned} \quad (11)$$

где $L \times L$ матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} P_L(0) P_L^T(0) &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L(0) P_L^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & L-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & L-1 \end{pmatrix}, \\ P_L(1) P_L^T(0) &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L-1 & \dots & L-1 \end{pmatrix}, \quad P_L(1) P_L^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & L-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & L-1 & \dots & (L-1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\gamma_{11} = \sqrt{12}/\sqrt{L(L^2 - 1)}, \quad \gamma_{10} = \sqrt{3(L-1)}/\sqrt{L(L+1)}, \quad \gamma_{00} = 1/\sqrt{L}.$$

Умножая каждое слагаемое в правой части (11) на матрицу \mathbf{E} , где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \dots & \cos(2\pi(j-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(K-1)\omega + \varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(i-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(i+j-2)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(K+i-1)\omega + \varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(L-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(L+j-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(N-1)\omega + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Аналогично Лемме 2, оцениваем каждый элемент матрицы $\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}$ и получаем, что $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$. \square

Лемма 4. При $N \rightarrow \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| = O(N^{-4})$.²

Доказательство. Рассмотрим сингулярное разложение матриц $\mathbf{H}\mathbf{H}^\mathbf{T}$, \mathbf{S}_0 , $\mathbf{H}^\mathbf{T}\mathbf{H}$ и \mathbf{H} :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{H}^\mathbf{T} &= \mu_{\max} U_1 U_1^\mathbf{T} + \mu_{\min} U_2 U_2^\mathbf{T}, \quad \mathbf{S}_0 = \mu_{\max}^{-1} U_1 U_1^\mathbf{T} + \mu_{\min}^{-1} U_2 U_2^\mathbf{T}, \\ \mathbf{H}^\mathbf{T}\mathbf{H} &= \mu_{\max} V_1 V_1^\mathbf{T} + \mu_{\min} V_2 V_2^\mathbf{T}, \quad \mathbf{H} = \mu_{\max}^{1/2} U_1 V_1^\mathbf{T} + \mu_{\min}^{1/2} U_2 V_2^\mathbf{T}, \end{aligned}$$

а $\mathbf{P}_0^\perp = U_1 U_1^\mathbf{T} + U_2 U_2^\mathbf{T}$, где U_1, U_2 — ортонормированные собственные $L \times 1$ вектора матрицы $\mathbf{H}\mathbf{H}^\mathbf{T}$, а V_1, V_2 — ортонормированные собственные $K \times 1$ вектора матрицы $\mathbf{H}^\mathbf{T}\mathbf{H}$. Далее,

$$\mathbf{H}\mathbf{E}^\mathbf{T} = \mu_{\min}^{1/2} \left(\frac{\mu_{\max}^{1/2}}{\mu_{\min}^{1/2}} U_1 V_1^\mathbf{T} \mathbf{E}^\mathbf{T} + U_2 V_2^\mathbf{T} \mathbf{E}^\mathbf{T} \right),$$

и, поскольку $\mu_{\min} \sim C_{\min} N^2$, $\mu_{\max} \sim C_{\max} N^2$, $\mu_{\max}^{1/2}/\mu_{\min}^{1/2} \rightarrow c > 1$ и $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^\mathbf{T}\|_{\max} = O(N)$, то отсюда следует, что

$$\|c U_1 V_1^\mathbf{T} \mathbf{E}^\mathbf{T} + U_2 V_2^\mathbf{T} \mathbf{E}^\mathbf{T}\|_{\max} = O(N^{-1}).$$

Так как $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = \|U_1 U_1^\mathbf{T} \mathbf{E} + U_2 U_2^\mathbf{T} \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$, то $\|U_i U_i^\mathbf{T} \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ при $i = 1, 2$. Получим

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-5}) \text{ и } \|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| = O(N^{-4}).$$

 \square

² Здесь, в [3] накладывалось условие на квадратичность матрицы: $L = K$.

Переформулируем предложения из [3] для рассматриваемого случая $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$:

Предложение 1. Пусть $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$. Тогда для любого δ

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-1}).$$

Доказательство. Оценим

$$\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\| \leq \|\mathbf{H}\|\|\mathbf{E}\| \sim C_{\cos}C_{\max}N^3 = O(N^3).$$

Согласно Лемме 2 и асимптотикам (10), существует такая постоянная C_1 , что

$$\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} \leq \delta^2\|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} + 2|\delta|\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} \leq C_1(\delta^2N^{-2} + |\delta|N^{-1}) = O(N^{-1}).$$

Поэтому для любого δ неравенство (9) выполняется при достаточно большом N и, следовательно, при $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| &\leq \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\|\|\mathbf{H}(\delta)\| \\ &\leq C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}} \sim C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \|\mathbf{H}\| = O(N^{-1}). \end{aligned}$$

□

Поскольку $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$, то остаётся рассмотреть

$$\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max}.$$

Если показать, что $\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$, то

$$\max_{0 \leq n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1})$$

и Теорема 3 будет доказана в случае $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$. Покажем это, сформулировав следующее предложение:

Предложение 2. В условиях Предложения 1 $\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$

Доказательство. Распишем $\mathbf{W}_1(\delta), \mathbf{W}_2(\delta)$:

$$\mathbf{W}_1(\delta) = \delta\mathbf{V}_1^{(1)} + \delta^2\mathbf{V}_1^{(2)},$$

где $\mathbf{V}_1^{(1)} = \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0$, $\mathbf{V}_1^{(2)} = \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0$.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2(\delta) &= \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=2, l_j \geq 0 \\ s_1, s_2=1,2}} \delta^{s_1+s_2} \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(s_1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{A}^{(s_2)} \mathbf{S}_0^{(l_3)} = \delta^2 \mathbf{V}_2^{(1)} + \delta^3 \mathbf{V}_2^{(2)} + \delta^4 \mathbf{V}_2^{(3)}, \\ \mathbf{V}_2^{(1)} &= \sum_{l_1+l_2+l_3=2, l_j \geq 0} \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{S}_0^{(l_3)}, \\ \mathbf{V}_2^{(2)} &= \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=2, l_j \geq 0 \\ (s_1, s_2)=(1,2), (2,1)}} \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(s_1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{A}^{(s_2)} \mathbf{S}_0^{(l_3)}, \\ \mathbf{V}_2^{(3)} &= \sum_{l_1+l_2+l_3=2, l_j \geq 0} \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{S}_0^{(l_3)}. \end{aligned}$$

Таким образом, разбили $\mathbf{W}_2(\delta)$ на три части так, что элементы в $\mathbf{V}_2^{(1)}$ имеют вид $\mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0^{(l_3)}$, то есть, $\mathbf{H} \mathbf{E}^T, \mathbf{E} \mathbf{H}^T$ входят в каждое слагаемое два раза, в каждое слагаемое из $\mathbf{V}_2^{(2)}$ часть $\mathbf{H} \mathbf{E}^T, \mathbf{E} \mathbf{H}^T, \mathbf{E} \mathbf{E}^T$ входит один раз, а в каждое слагаемое из $\mathbf{V}_2^{(3)}$ часть $\mathbf{E} \mathbf{E}^T$ входит два раза. Оценим полученные выражения. Аналогично доказательству в [3], найдём $\mathbf{V}_i^{(j)}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, для которых $\|\mathbf{V}_i^{(j)}\| = O(N^k)$, $k = -3, -4, -5, \dots$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_1^{(1)}\| &\leq 2\|\mathbf{S}_0\|\|\mathbf{H} \mathbf{E}^T\| = O(N^{-2}), \\ \|\mathbf{V}_1^{(2)}\| &\leq 2\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|\|\mathbf{E}\| = O(N^{-3}), \\ \|\mathbf{V}_2^{(1)}\| &\leq 24\|\mathbf{S}_0\|^2\|\mathbf{H} \mathbf{E}^T\|^2 = O(N^{-4}), \\ \|\mathbf{V}_2^{(2)}\| &\leq 12\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|^2\|\mathbf{H} \mathbf{E}^T\| = O(N^{-6}), \\ \|\mathbf{V}_2^{(3)}\| &\leq 6\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|^2\|\mathbf{E}\|^2 = O(N^{-6}). \end{aligned}$$

Следовательно, из всех слагаемых остаётся проверить только выражение $\mathbf{V}_1^{(1)} \mathbf{H}(\delta)$, поскольку $\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta) - \delta \mathbf{V}_1^{(1)}) \mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1}) \rightarrow 0$ из полученных неравенств.

$$\mathbf{V}_1^{(1)} \mathbf{H}(\delta) = \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{H} + \delta(\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E} + \mathbf{S}_0 \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E}).$$

Поскольку

$$\|\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{E} + \mathbf{S}_0 \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{E}\| \leq 2\|\mathbf{H} \mathbf{E}^T\|\|\mathbf{E}\|\|\mathbf{S}_0\| = O(N^{-1}),$$

то остаётся разобраться с матрицей $\mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{H}$.

Так как $\mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 \mathbf{H} = \mathbf{Q}_0^\perp$, где \mathbf{Q}_0^\perp — $K \times K$ матрица ортогонального проектирования на пространство строк матрицы \mathbf{H} , то будем рассматривать элементы матрицы

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E} \mathbf{Q}_0^\perp.$$

Отсюда и из Леммы 2 [3] следует, что $\|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$. Аналогично, $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = O(N^{-1})$. \square

В результате из полученных лемм и предложений результат Теоремы 3 из [3] обобщается на $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ с помощью выбора $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$. \square

4. Приложение. Результаты вычислительных экспериментов

Формулировка. На основе теоретического результата задачи №2 проиллюстрировать результат для линейного сигнала $H_n = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ с $h_k = k$, $n = 0, 1, \dots, N-1$ при $L \sim N/3$.

В качестве примера рассмотрим ряд

$$\tilde{h}_n = n + 3 \cos(2\pi n\omega + \varphi),$$

где $\omega = 1/4$, $\varphi = \pi/8$, $n = 0, 1, \dots, N-1$, $N = 9 \dots 200$, длина окна $L = \lfloor N/3 \rfloor$. Теперь проиллюстрируем результаты.



Рис. 1. Максимальные ошибки восстановления ряда в зависимости от длины ряда при $\tilde{h}_n = n + 3 \cos(\pi n/2 + \pi/8)$.

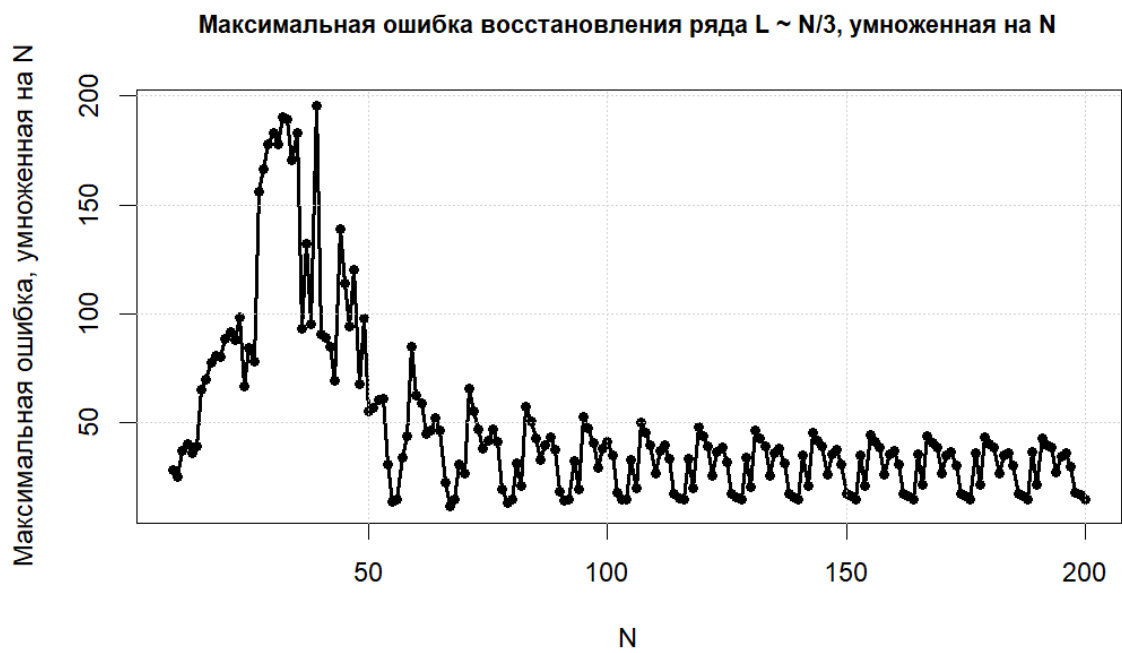


Рис. 2. Максимальные ошибки восстановления ряда, умноженные на N , в зависимости от длины ряда N для $x_n = n + 3 \cos(\pi n/2 + \pi/8)$.

Прокомментируем результаты вычислительного эксперимента: по рисунку 1 убедемся, что максимальные по модулю ошибки восстановления ряда стремятся к нулю с ростом N . Рисунок 2 демонстрирует, что после умножения ряда рисунка 1 на N максимальные по модулю ошибки восстановления ряда становятся ограниченными, что подтверждает результат обобщения Теоремы 3.

5. Заключение

В ходе проделанных работ были изучены теоретические свойства метода SSA, поставлена общая теоретическая задача, дана оценка $\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$, а также обобщён случай асимптотической разделимости линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник с $L = K$ до $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$, а также проделан вычислительный эксперимент, подтверждающий результаты обобщения Теоремы 3.

Список литературы

1. GOLYANDINA, N., NEKRUTKIN, V. AND ZHIGLJAVSKY, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.
2. NEKRUTKIN, V. (2010). *Perturbation expansions of signal subspaces for long signals*. Statistics and Its Interface. **3**, 297–319.
3. *Н.Зенкова, В.Некруткин* Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2.