Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ Сингулярного Спектра» SSA

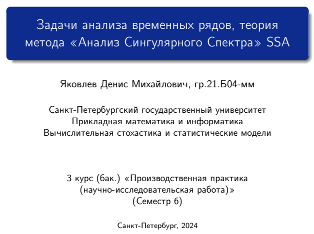
Яковлев Денис Михайлович, гр.21.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

3 курс (бак.) «Производственная практика
(научно-исследовательская работа)»
(Семестр 6)

Санкт-Петербург, 2024

Задачи анализа временных рядов



Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент Некруткин В.В., кафедра статистического моделирования

Моя отметка за работу Дениса Яковлева – 5 с минусом (очень хорошо). 5 за результат, минус – за стиль работы.

Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ Сингулярного Спектра» SSA

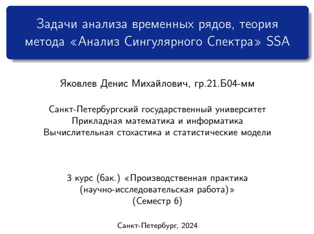
Яковлев Денис Михайлович, гр.21.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

3 курс (бак.) «Производственная практика
(научно-исследовательская работа)»
(Семестр 6)

Санкт-Петербург, 2024

Задачи анализа временных рядов



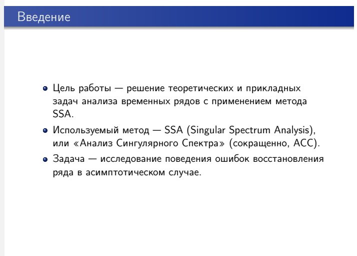
Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент Некруткин В.В., кафедра статистического моделирования

Введение

- Цель работы — решение теоретических и прикладных задач анализа временных рядов с применением метода SSA.
- Используемый метод — SSA (Singular Spectrum Analysis), или «Анализ Сингулярного Спектра» (сокращенно, АСС).
- Задача — исследование поведения ошибок восстановления ряда в асимптотическом случае.

Задачи анализа временных рядов

└Введение



Целью этой работы является решение теоретических и прикладных задач по анализу временных рядов с применением знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или «Анализ Сингулярного Спектра» (сокращенно, АСС). Ознакомиться с методом АСС можно в [1], а в [2] описывается теоретическая часть метода АСС. Общая задача состоит в том, чтобы оценить ошибки восстановления ряда.

Обозначения

Определение 1 (Сигнал)

Вещественный сигнал $\mathrm{H} = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, *управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка* d

$$h_n = \sum_{k=1}^{d} a_k h_{n-k},\ n \geqslant d,\ a_d > 0.$$

$\mathrm{H}_N = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$.

Определение 2 (Помеха)

Помеха — $\mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_N)$.

Обозначения
Определение 1 (Сигнал)
Вещественный сигнал $\mathrm{H} = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d
$$h_n = \sum_{k=1}^{d} a_k h_{n-k},\ n \geqslant d,\ a_d > 0.$$
$\mathrm{H}_N = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$.
Определение 2 (Помеха)
Помеха — $\mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_N)$.

Введём необходимые для постановки задачи определения и известные результаты. Начнём с определений. Рассматривается вещественный *сигнал* H, причем предполагается, что ряд управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d с $a_d > 0$, которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом H. Так как нас интересует использование метода SSA, будем рассматривать отрезки длины N. Кроме того, вводится *помеха* E, некоторый ряд из вещественных значений.

Обозначения

Определение 3 (Траекторная матрица)

Пусть $1 \leqslant L < N$ *— длина окна,* $K = N - L + 1$*. Тогда траекторной матрицей сигнала* $\mathrm{H}_N = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$ *называется матрица* $\mathbf{H}$ *размера* $L \times K$ *вида:*

$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_{K-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & h_K \\ h_2 & h_3 & h_4 & \ldots & h_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1} & h_L & h_{L+1} & \ldots & h_{N-1} \end{pmatrix}$$

Замечание 1 (Размеры матриц)

Считаем, что все рассматриваемые матрицы размера $L \times K$*, если не оговорено иначе.*

Обозначения

Определение 3 (Траекторная матрица)

Пусть $1 \leqslant L < N$ — длина окна, $K = N - L + 1$. Тогда траекторной матрицей сигнала $\mathrm{H}_N = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$ называется матрица $\mathbf{H}$ размера $L \times K$ вида:

$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_{K-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & h_K \\ h_2 & h_3 & h_4 & \ldots & h_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1} & h_L & h_{L+1} & \ldots & h_{N-1} \end{pmatrix}$$

Замечание 1 (Размеры матриц)

Считаем, что все рассматриваемые матрицы размера $L \times K$, если не оговорено иначе.

Пользуясь методом SSA, введём траекторные матрицы для сигнала и помехи. Хотя траекторные матрицы не используются в явном виде при решении поставленных задач, само определение должно помочь в понимании последующих определений и результатов.

Обозначения

Замечание 2 (Ранг матрицы)

$d = \operatorname{rank} \mathbf{H} < \min(L, K)$ — *ранг траекторной матрицы* $\mathbf{H}$, *образованной от сигнала* H, *управляемого ЛРФ порядка* d.

Определение 4 (Матрица возмущённого сигнала)

Пусть $\delta \in \mathbb{R}$ — *формальный параметр возмущения,* $\mathbf{E}$ — *траекторная матрица* E_N, $\mathbf{H}$ — H_N *соответственно. Тогда* $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$ — *матрица возмущённого сигнала.*

Замечание 3

$\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}$.

Обозначения
Замечание 2 (Ранг матрицы)
$d = \operatorname{rank} \mathbf{H} < \min(L, K)$ — ранг траекторной матрицы $\mathbf{H}$, образованной от сигнала H, управляемого ЛРФ порядка d.
Определение 4 (Матрица возмущённого сигнала)
Пусть $\delta \in \mathbb{R}$ — формальный параметр возмущения, $\mathbf{E}$ — траекторная матрица E_N, $\mathbf{H}$ — H_N соответственно. Тогда $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$ — матрица возмущённого сигнала.
Замечание 3
$\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}$.

В отношении введённой траекторной матрицы также необходимо уточнить её ранг, который напрямую связан с порядком линейной рекуррентной формулы d. Теперь рассмотрим формальное определение сигнала с помехой. Пусть формальный параметр возмущения дельта вещественный, — траекторная матрица помехи, а $\mathbf{H}$ — траекторная матрица сигнала. Тогда $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$ — сигнал с параметризуемой помехой.

Обозначения

Определение 5 (Возмущённая матрица для сингулярного разложения)

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}},$$

$\mathbf{A}(\delta)$ — *возмущённая матрица размера* $L \times L$.

Замечание 4

$\mathbf{A}(0) = \mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.

Определение 6 (Наименьшее и наибольшее ненулевые собственные числа)

Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{L}$ *— собственные числа* $\mathbf{A}$. *Тогда* $\mu_{\min}, \mu_{\max}$ *— наименьшее и наибольшее ненулевые собственные числа.*

Обозначения

Определение 5 (Возмущённая матрица для сингулярного разложения)

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}},$$

$\mathbf{A}(\delta)$ — возмущённая матрица размера $L \times L$.

Замечание 4

$\mathbf{A}(0) = \mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.

Определение 6 (Наименьшее и наибольшее ненулевые собственные числа)

Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{L}$ — собственные числа $\mathbf{A}$. Тогда $\mu_{\min}, \mu_{\max}$ — наименьшее и наибольшее ненулевые собственные числа.

Как известно из метода SSA, для отделение сигнала от помехи рассматриваем указанную матрицу. Кроме того, из свойств матрицы $\mathbf{A}$ следует, что все её собственные числа неотрицательны и вещественны.

Определение 7 (Собственные подпространства матрицы $\mathbf{A}$)

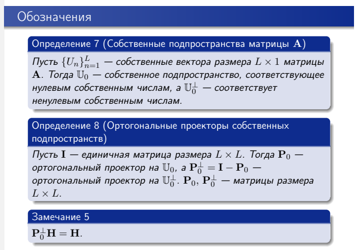
Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{L}$ — собственные вектора размера $L \times 1$ матрицы $\mathbf{A}$. Тогда $\mathbb{U}_0$ — собственное подпространство, соответствующее нулевым собственным числам, а $\mathbb{U}_0^{\perp}$ — соответствует ненулевым собственным числам.

Определение 8 (Ортогональные проекторы собственных подпространств)

Пусть $\mathbf{I}$ — единичная матрица размера $L \times L$. Тогда $\mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0$, а $\mathbf{P}_0^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^{\perp}$. $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_0^{\perp}$ — матрицы размера $L \times L$.

Замечание 5

$\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{H} = \mathbf{H}$.



Продолжая разговор про матрицу $\mathbf{A}$, заметим, что её собственные вектора (левые сингулярные векторы) можно разбить на два подпространства: собственное подпространство *ненулевых* и *нулевых* собственных чисел. Более того, для введения и объяснения результатов нам понадобится понятие ортогональных проекторов.

Заметим, что, в связи с таким разбиением проекторов, матрица $\mathbf{H} = \mathbf{I}\mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^{\perp} + \mathbf{P}_0)\mathbf{H} = \mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{H}$.

Обозначения

Замечание 6 (Про матричные нормы)

Полагаем $\|\cdot\|$ — спектральная норма. В иных случаях явно указываем норму.
Например, максимальная норма $\|\cdot\|_{\max}$.

Определение 9 (Псевдообратная матрица)

Пусть $\mathbf{S}_0$ — матрица размера $L \times L$, псевдообратная к $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.
Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{min}^k$.

Определение 10 (Возмущение матрицы $\mathbf{A}(\delta)$)

Зависящую от δ часть матрицы $\mathbf{A}(\delta)$ будем обозначать $\mathbf{B}(\delta)$.
Тогда $\mathbf{B}(\delta) = \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$.

Обозначения
Замечание 6 (Про матричные нормы)
Полагаем $\|\cdot\|$ — спектральная норма. В иных случаях явно указываем норму.
Например, максимальная норма $\|\cdot\|_{\max}$.
Определение 9 (Псевдообратная матрица)
Пусть $\mathbf{S}_0$ — матрица размера $L \times L$, псевдообратная к $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.
Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{\min}^k$.
Определение 10 (Возмущение матрицы $\mathbf{A}(\delta)$)
Зависящую от δ часть матрицы $\mathbf{A}(\delta)$ будем обозначать $\mathbf{B}(\delta)$.
Тогда $\mathbf{B}(\delta) = \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$.

В случае, если не указано иное, воспринимаем норму как спектральную. Определим $\mathbf{S}_0$ — псевдообратную матрицу к $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{min}^k$ Также пригодится для представления результатов возмущение матрицы $\mathbf{A}(\delta)$.

Обозначения

Определение 11 (Ошибка восстановления)

Пусть $\widetilde{\mathrm{H}}_N(\delta) = (\widetilde{h}_0(\delta), \widetilde{h}_1(\delta), \ldots, \widetilde{h}_N(\delta))$ *— восстановленный сигнал из* $\mathrm{H}_N(\delta) = (h_0 + \delta e_0, h_1 + \delta e_1, \ldots, h_N + \delta e_N)$*, полученный методом SSA.*
Тогда $r_i(N) = \widetilde{h}_i(\delta) - h_i,\ 0 \leqslant i < N$ *— ошибка восстановления.*

Определение 12 (Оператор ганкелевизации)

$\mathcal{S}$ *— оператор диагонального усреднения (ганкелевизации).*

Замечание 7 (Оператор ганкелевизации для траекторной матрицы сигнала)

$\mathcal{S}\mathbf{H} = \mathbf{H}$.

Обозначения
Определение 11 (Ошибка восстановления)
Пусть $\widetilde{\mathrm{H}}_N(\delta) = (\widetilde{h}_0(\delta), \widetilde{h}_1(\delta), \ldots, \widetilde{h}_N(\delta))$ — восстановленный сигнал из $\mathrm{H}_N(\delta) = (h_0 + \delta e_0, h_1 + \delta e_1, \ldots, h_N + \delta e_N)$, полученный методом SSA.
Тогда $r_i(N) = \widetilde{h}_i(\delta) - h_i,\ 0 \leqslant i < N$ — ошибка восстановления.
Определение 12 (Оператор ганкелевизации)
$\mathcal{S}$ — оператор диагонального усреднения (ганкелевизации).
Замечание 7 (Оператор ганкелевизации для траекторной матрицы сигнала)
$\mathcal{S}\mathbf{H} = \mathbf{H}$.

Итак, перейдём к постановке общей задачи. Для этого введём ошибку восстановления, как разность между восстановленым сигналом и самим сигналом. Восстановленный сигнал получаем из сигнала с параметризуемой помехом методом SSA. Заметим, что по построению траекторной матрицы, она является ганкелевой. Поэтому использование оператора ганкелевизации её не изменит.

Постановка общей задачи

Постановка 1 (Общая задача)

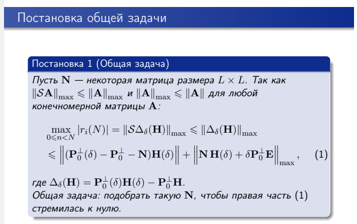
Пусть $\mathbf{N}$ *— некоторая матрица размера* $L \times L$*. Так как* $\|\mathcal{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{A}\|_{\max}$ *и* $\|\mathbf{A}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{A}\|$ *для любой конечномерной матрицы* $\mathbf{A}$*:*

$$\max_{0\leqslant n<N} |r_i(N)| = \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} \leqslant \|\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max}$$
$$\leqslant \left\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\right\| + \left\|\mathbf{N}\,\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\right\|_{\max}, \qquad (1)$$

где $\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H}$*.*
Общая задача: подобрать такую $\mathbf{N}$*, чтобы правая часть* (1) *стремилась к нулю.*

Задачи анализа временных рядов

└─Постановка общей задачи



Рассмотрим максимальный модуль ошибок восстановления ряда при длине ряда N. Для него верна следующая оценка для произвольной матрицы $\mathbf{N}$ размера $L \times L$.

Общая задача состоит в следующее: подобрать такую матрицу $\mathbf{N}$, чтобы правая часть стремилась к нулю.

Формулировка

Формулировка 1 (Оценка нормы)

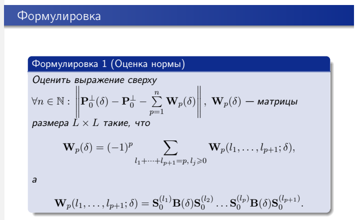
Оценить выражение сверху

$\forall n \in \mathbb{N}: \left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$, $\mathbf{W}_p(\delta)$ *— матрицы размера* $L \times L$ *такие, что*

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}; \delta),$$

а

$$\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}; \delta) = \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$



Сформулируем первую теоретическую задачу, которую можно увидеть на слайде. В качестве матрицы $\mathbf{N}$ будем рассматривать суммы матриц из $\mathbf{W}_p(\delta)$.

Для чего это нужно? Дело в том, что первое слагаемое оценки не обязательно стремится к нулю, поэтому мы хотим подбирать такие матрицы $\mathbf{N}$, чтобы правая часть стремилась к нулю. Также хотим, чтобы структура $\mathbf{N}$ была простой и понятной в использовании. Следующий известный результат позволит объяснить, почему была выбрана именно такая матрица $\mathbf{N}$.

Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2].

Теорема 1 (Теорема 2.1)

Пусть $\delta_0 > 0$ *и*

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. *Тогда для возмущённого проектора* $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ *верно представление:*

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta).$$

Известные результаты
Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2].
Теорема 1 (Теорема 2.1)
Пусть $\delta_0 > 0$ и $\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2$ для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда для возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ верно представление:
$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta).$

Объясним матрицы $\mathbf{W}_p(\delta)$ на следующем результате. Теорема 1 показывает, что матрицы $\mathbf{W}_p(\delta)$ представляют собой члены разложения возмущённого проектора в бесконечный ряд. Поэтому можем сколь угодно близко приближать норму к 0 при ограничениях теоремы 1.

Известные результаты

Теорема 2 (Теорема 2.3)

Если $\delta_0 > 0$ *и* $\dfrac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} < \dfrac{1}{4}$ *для всех* $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, *то проектор* $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ *существует и*

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| \leqslant 4C\frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|\,/\mu_{min}},$$

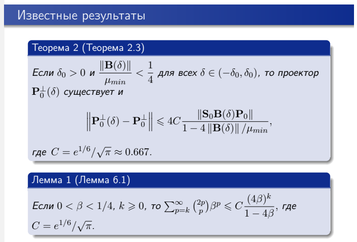
где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi} \approx 0.667$.

Лемма 1 (Лемма 6.1)

Если $0 < \beta < 1/4$, $k \geqslant 0$, *то* $\sum_{p=k}^{\infty}\binom{2p}{p}\beta^p \leqslant C\dfrac{(4\beta)^k}{1-4\beta}$, *где* $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Задачи анализа временных рядов

└Известные результаты



Опишем известные результаты: теорема 2 ставит ограничения для возможности оценки нормы разности возмущённого и невозмущённого проекторов, даёт оценку остатка разложения, в то время как лемма 1 используется для доказательства как этой теоремы, так и полученного результата.

Полученные результаты

Следствие 1

В условиях Теоремы 1, $\forall n \in \mathbb{N}$*:*

$$\left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leqslant 4^{n+1} C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}},$$

где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Полученные результаты

Следствие 1

В условиях Теоремы 1, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leqslant 4^{n+1} C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}},$$

где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Пользуясь известными результатами, получаем следующую оценку для произвольного натурального n.

Постановка

Постановка 2 (Линейный сигнал с гармониками)

Рассмотрим при $n = 0, 1, \ldots, N-1$ линейный сигнал $h_n = \theta_1 n + \theta_0$, где $\theta_1 \neq 0$, и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник

$$e_n = \sum_{l=1}^{r} \tau_l \cos(2\pi n \omega_l + \varphi_l),$$

где $\tau_l \neq 0, \tau_l \neq \tau_p$ и $\omega_l \neq \omega_p$ при $l \neq p$ и $0 < \omega_l < 1/2$.
Пусть $\widetilde{h}_0(\delta), \ldots, \widetilde{h}_{N-1}(\delta)$ — результаты восстановления ряда $\{h_n + \delta e_n\}_{n=0}^{N-1}$ с помощью метода SSA, а $r_n(N) = \widetilde{h}_n(\delta) - h_n$.
Тогда теорема из [3] утверждает, что для любого $\delta \in \mathbb{R}$ при $N \to \infty$.

$$\max_{0 \leqslant n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1}).$$

Постановка
Постановка 2 (Линейный сигнал с гармониками)
Рассмотрим при $n = 0, 1, \ldots, N-1$ линейный сигнал $h_n = \theta_1 n + \theta_0$, где $\theta_1 \neq 0$, и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник
$$e_n = \sum_{l=1}^{r} \tau_l \cos(2\pi n \omega_l + \varphi_l),$$
где $\tau_l \neq 0, \tau_l \neq \tau_p$ и $\omega_l \neq \omega_p$ при $l \neq p$ и $0 < \omega_l < 1/2$.
Пусть $\widetilde{h}_0(\delta), \ldots, \widetilde{h}_{N-1}(\delta)$ — результаты восстановления ряда $\{h_n + \delta e_n\}_{n=0}^{N-1}$ с помощью метода SSA, а $r_n(N) = \widetilde{h}_n(\delta) - h_n$.
Тогда теорема из [3] утверждает, что для любого $\delta \in \mathbb{R}$ при $N \to \infty$.
$$\max_{0 \leqslant n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1}).$$

Теперь рассмотрим постановку теоретической задачи №2, для которой понадобится результат теоретической задачи №1. Рассматривается линейный сигнал с линейной комбинацией гармоник. Существует теорема о том, максимальная ошибка восстановления ряда для линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник может быть оценена сверху некоторой константой, умноженной на N^{-1}.

Формулировка и известные результаты

Формулировка 2

Обобщить результат [3] с $L = K$ при $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$ до $L/N \to \alpha \in (0, 1)$ с помощью выбора $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [3]

Лемма 2 (Лемма 1)

При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(N)$.

Лемма 3 (Лемма 2)

При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

Лемма 4 (Лемма 3)

При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-4})$.

Формулировка и известные результаты
Формулировка 2
Обобщить результат [3] с $L = K$ при $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$ до $L/N \to \alpha \in (0, 1)$ с помощью выбора $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.
Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [3]
Лемма 2 (Лемма 1)
При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(N)$.
Лемма 3 (Лемма 2)
При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.
Лемма 4 (Лемма 3)
При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-4})$.

Доказательство этой теоремы в источнике [3] было осуществлено с использованием матрицы $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$. Возникает *вопрос: можно ли расширить множество используемых траекторных матриц, не нарушая результат теоремы?* Для этого подберём другую матрицу $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$. Теперь сформулируем задачу и приведём известные результаты из [3], которые понадобятся при оценке максимального модуля ошибки восстановления ряда.

Полученные результаты

Замечание 8

При $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ *рассматривается неравенство*

$$\max_{0 \leqslant i < N} |r_i(N)| \leqslant \left\| \left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) \right) \mathbf{H}(\delta) \right\| + \left\| (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)\, \mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^{\perp} \mathbf{E} \right\|_{\max}.$$

Предложение 1

Пусть $L/N \to \alpha \in (0,1)$. *Тогда для любого* δ

$$\left\| \left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta) \right) \mathbf{H}(\delta) \right\| = O(N^{-1}).$$

Предложение 2

В условиях Предложения 1
$\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$.

Полученные результаты

Замечание 8

При $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ рассматривается неравенство

$$\max_{0 \leqslant i < N} |r_i(N)| \leqslant \left\| \left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) \right) \mathbf{H}(\delta) \right\| + \left\| (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)\, \mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^{\perp} \mathbf{E} \right\|_{\max}.$$

Предложение 1

Пусть $L/N \to \alpha \in (0,1)$. Тогда для любого δ

$$\left\| \left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta) \right) \mathbf{H}(\delta) \right\| = O(N^{-1}).$$

Предложение 2

В условиях Предложения 1
$\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$.

В качестве полученных результатов выделим Предложение 1 и Предложение 2, которые являются переформулировками предложений из [3] для рассматриваемого случая обобщения. В результате получим обобщение результата из [3] с $L = K$ при $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$ до $L/N \to \alpha \in (0,1)$ при $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Приложение. Результаты вычислительных экспериментов

Формулировка 3

Проиллюстрировать теоретический результат задачи №2 для ряда

$$\widetilde{h}_n = n + 3\cos(2\pi n\omega + \varphi),$$

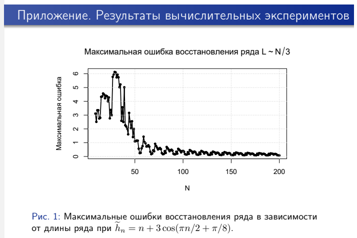
где $\omega = 1/4,\ \varphi = \pi/8,\ n = 0, 1, \ldots, N-1,\ N = 9 \ldots 200$, *длина окна* $L = \lfloor N/3 \rfloor$.

Приложение. Результаты вычислительных экспериментов
Формулировка 3
Проиллюстрировать теоретический результат задачи №2 для ряда
$\widetilde{h}_n = n + 3\cos(2\pi n\omega + \varphi),$
где $\omega = 1/4,\ \varphi = \pi/8,\ n = 0, 1, \ldots, N-1,\ N = 9 \ldots 200$, длина окна $L = \lfloor N/3 \rfloor$.

Для подтверждения результатов теоретической задачи №2 проведём вычислительный эксперимент. Рассмотрим следующий ряд при длине окна L приблизительно равной длине ряда N, делённой на 3. Проиллюстрируем результаты.

Приложение. Результаты вычислительных экспериментов

Рис. 1: Максимальные ошибки восстановления ряда в зависимости от длины ряда при $\widetilde{h}_n = n + 3\cos(\pi n/2 + \pi/8)$.



Прокомментируем результаты вычислительного эксперимента: по рисунку 1 убедимся, что максимальные по модулю ошибки восстановления ряда стремятся к нулю с ростом N.

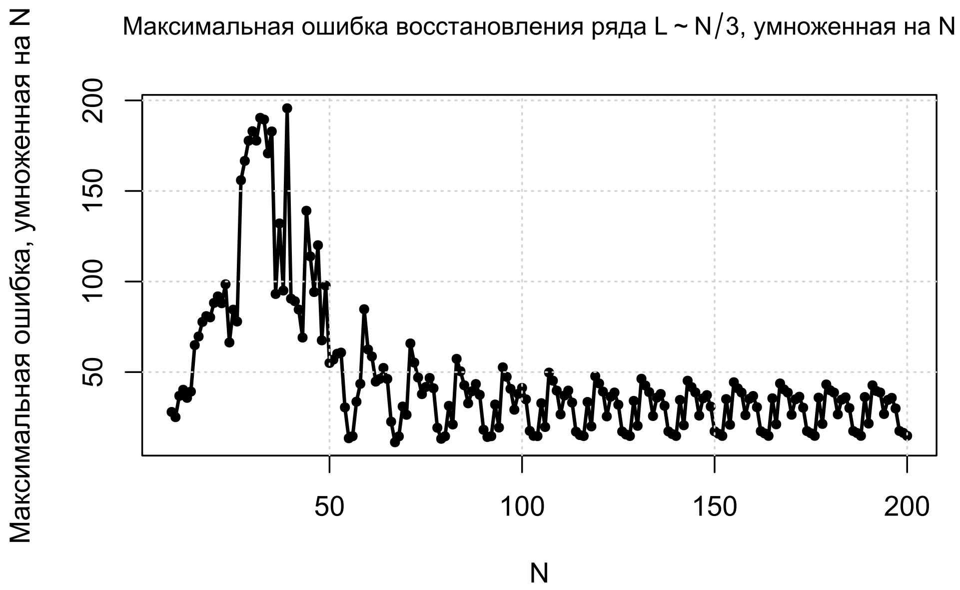


Рис. 2: Максимальные ошибки восстановления ряда, умноженные на N, в зависимости от длины ряда N для $x_n = n + 3\cos(\pi n/2 + \pi/8)$.

Рисунок 2 демонстрирует, что после умножения ряда рисунка 1 на N максимальные по модулю ошибки восстановления ряда становятся ограниченными, что подтверждает полученный результат.

Заключение

1. Поставлена общая теоретическая задача;
2. Дана оценка $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\| \; \forall n \in \mathbb{N}$;
3. Обобщён результат [3] асимптотической разделимости линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0, 1)$;
4. Проведён вычислительный эксперимент, подтверждающий полученный результат.

Заключение

1. Поставлена общая теоретическая задача;
2. Дана оценка $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\| \; \forall n \in \mathbb{N}$;
3. Обобщён результат [3] асимптотической разделимости линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0, 1)$;
4. Проведён вычислительный эксперимент, подтверждающий полученный результат.

В ходе проделанных работ были изучены теоретические свойства метода SSA, поставлена общая теоретическая задача, дана оценка **нормы разностей ортогональных проекций с дубль-вэ для произвольного** n, обобщён случай асимптотической разделимости линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0, 1)$, а также проведён вычислительный эксперимент, подтверждающий полученный результат.

Список литературы

- Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques.* Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.
- Nekrutkin, V. (2010). *Perturbation expansions of signal subspaces for long signals.* Statistics and Its Interface. **3**, 297–319.
- *Н.Зенкова, В.Некруткин.* Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра, Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2.

Задачи анализа временных рядов

└─Список литературы

Список литературы

Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques.* Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.

Nekrutkin, V. (2010). *Perturbation expansions of signal subspaces for long signals.* Statistics and Its Interface. **3**, 297–319.

Н.Зенкова, В.Некруткин. Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра, Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2.

На данном слайде представлен список основных источников, используемых в моей работе. Спасибо за внимание.