Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ Сингулярного Спектра» SSA (Семестр 6)

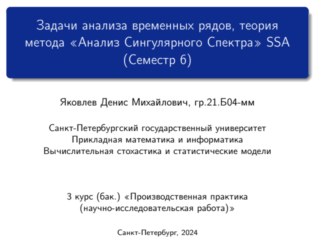
Яковлев Денис Михайлович, гр.21.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

3 курс (бак.) «Производственная практика
(научно-исследовательская работа)»

Санкт-Петербург, 2024

Задачи анализа временных рядов



Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент Некруткин В.В.,
кафедра статистического моделирования

Введение

- Цель работы — решение теоретических и прикладных задач анализа временных рядов с применением метода SSA.
- Используемый метод — SSA (Singular Spectrum Analysis), или «Анализ Сингулярного Спектра» (сокращенно, АСС).
- Задача — исследование поведения ошибок восстановления ряда в асимптотическом случае.

Введение
- Цель работы — решение теоретических и прикладных задач анализа временных рядов с применением метода SSA.
- Используемый метод — SSA (Singular Spectrum Analysis), или «Анализ Сингулярного Спектра» (сокращенно, АСС).
- Задача — исследование поведения ошибок восстановления ряда в асимптотическом случае.

Целью этой работы является решение теоретических и прикладных задач по анализу временных рядов с применением знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или «Анализ Сингулярного Спектра» (сокращенно, АСС). Ознакомиться с методом АСС можно в [1], а в [2] описывается теоретическая часть метода АСС. Общая задача состоит в том, чтобы оценить ошибки восстановления ряда. (исправить комментарий, не ясно, что значит ошибка восстановления. Слишком рано написал).

Определение 1 (Сигнал)

Вещественный сигнал $\mathrm{H} = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, *управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка* d

$$h_n = \sum_{k=1}^{d} a_k h_{n-k},\ n \geqslant d,\ a_d > 0.$$

$\mathrm{H}_N = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$.

Определение 2 (Помеха)

Помеха — $\mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_N)$.

Обозначения
Определение 1 (Сигнал)
Вещественный сигнал $\mathrm{H} = (h_0, h_1, \ldots, h_n, \ldots)$, управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d
$$h_n = \sum_{k=1}^{d} a_k h_{n-k},\ n \geqslant d,\ a_d > 0.$$
$\mathrm{H}_N = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$.
Определение 2 (Помеха)
Помеха — $\mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_N)$.

Введём необходимые для постановки задачи определения и известные результаты. Начнём с определений. Рассматривается вещественный *сигнал* H, причем предполагается, что ряд управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d с $a_d > 0$, которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом H. Так как нас интересует использование метода SSA, будем рассматривать отрезки длины N. Кроме того, вводится *помеха* E, тоже некоторый вещественный сигнал.

Обозначения

Определение 3 (Траекторная матрица)

Пусть $1 \leqslant L < N$ *— длина окна,* $K = N - L + 1$*. Тогда траекторной матрицей вещественного сигнала* $\mathrm{H}_N = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$ *называется матрица* $\mathbf{H}$ *размера* $L \times K$ *вида:*

$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_{K-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & h_K \\ h_2 & h_3 & h_4 & \ldots & h_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1} & h_L & h_{L+1} & \ldots & h_{N-1} \end{pmatrix}$$

Замечание 1 (Размеры матриц)

Считаем, что все рассматриваемые матрицы размера $L \times K$*, если не оговорено иначе.*

Обозначения

Определение 3 (Траекторная матрица)

Пусть $1 \leqslant L < N$ — длина окна, $K = N - L + 1$. Тогда траекторной матрицей вещественного сигнала $\mathrm{H}_N = (h_0, h_1, \ldots, h_N)$ называется матрица $\mathbf{H}$ размера $L \times K$ вида:

$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \ldots & h_{K-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \ldots & h_K \\ h_2 & h_3 & h_4 & \ldots & h_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{L-1} & h_L & h_{L+1} & \ldots & h_{N-1} \end{pmatrix}$$

Замечание 1 (Размеры матриц)

Считаем, что все рассматриваемые матрицы размера $L \times K$, если не оговорено иначе.

Пользуясь методом SSA, введём траекторные матрицы для сигнала и помехи. Хотя траекторные матрицы не используются в явном виде при решении поставленных задач, само определение должно помочь в понимании последующих определений и результатов.

Замечание 2 (Ранг матрицы)

$d = \operatorname{rank} \mathbf{H} < \min(L, K)$ - *ранг траекторной матрицы* $\mathbf{H}$, *образованной от сигнала* H, *управляемого ЛРФ порядка* d.

Определение 4 (Матрица возмущённого сигнала)

Пусть $\delta \in \mathbb{R}$ *— формальный параметр возмущения,* $\mathbf{E}$ *— траекторная матрица* E_N, $\mathbf{H}$ *—* H_N *соответственно. Тогда* $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$ *— матрица возмущённого сигнала.*

Замечание 3

$\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}$.

Обозначения
Замечание 2 (Ранг матрицы)
$d = \operatorname{rank} \mathbf{H} < \min(L, K)$ - ранг траекторной матрицы $\mathbf{H}$, образованной от сигнала H, управляемого ЛРФ порядка d.
Определение 4 (Матрица возмущённого сигнала)
Пусть $\delta \in \mathbb{R}$ — формальный параметр возмущения, $\mathbf{E}$ — траекторная матрица E_N, $\mathbf{H}$ — H_N соответственно. Тогда $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$ — матрица возмущённого сигнала.
Замечание 3
$\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}$.

В отношении введённой траекторной матрицы также необходимо уточнить её ранг, который напрямую связан с порядком линейной рекуррентной формулы d. Теперь рассмотрим формальное определение сигнала с помехой. Пусть формальный параметр возмущения дельта вещественный, — траекторная матрица помехи, а $\mathbf{H}$ — траекторная матрица сигнала. Тогда $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\mathbf{E}$ — сигнал с параметризуемой помехой.

Обозначения

Определение 5 (Возмущённая матрица для сингулярного разложения)

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}},$$

$\mathbf{A}(\delta)$ — *возмущённая матрица размера* $L \times L$.

Определение 6 (Наименьшее и наибольшее ненулевые собственные числа)

Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{L}$ *— собственные числа* $\mathbf{A}(\delta)$*. Тогда* $\mu_{\min}, \mu_{\max}$ *— наименьшее и наибольшее ненулевые собственные числа.*

Обозначения
Определение 5 (Возмущённая матрица для сингулярного разложения)
$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}},$
$\mathbf{A}(\delta)$ — возмущённая матрица размера $L \times L$.
Определение 6 (Наименьшее и наибольшее ненулевые собственные числа)
Пусть $\{\mu_n\}_{n=1}^{L}$ — собственные числа $\mathbf{A}(\delta)$. Тогда $\mu_{\min}, \mu_{\max}$ — наименьшее и наибольшее ненулевые собственные числа.

Как известно из метода SSA, для отделение сигнала от помехи рассматриваем указанную матрицу. Кроме того, из свойств матрицы $\mathbf{A}(\delta)$ следует, что все её собственные числа неотрицательны (автору — из неотрицательности) и вещественны (автору — из симметричности).

Обозначения

Определение 7 (Собственные подпространства матрицы $\mathbf{A}(\delta)$)

Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{L}$ *— собственные вектора размера* $L \times 1$ *матрицы* $\mathbf{A}(\delta)$. *Тогда* $\mathbb{U}_0$ *— собственное подпространство, соответствующее нулевым собственным числам, а* $\mathbb{U}_0^{\perp}$ *— соответствует ненулевым собственным числам.*

Определение 8 (Ортогональные проекторы собственных подпространств)

Пусть $\mathbf{I}$ *— единичная матрица размера* $L \times L$. *Тогда* $\mathbf{P}_0(\delta)$ *— ортогональный проектор на* $\mathbb{U}_0$, *а* $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0(\delta)$ *— ортогональный проектор на* $\mathbb{U}_0^{\perp}$. $\mathbf{P}_0(\delta)$, $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ *— матрицы размера* $L \times L$.

Замечание 4

$\mathbf{P}_0^{\perp}(0) = \mathbf{P}_0^{\perp}$, $\mathbf{P}_0(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)$.

Обозначения
Определение 7 (Собственные подпространства матрицы $\mathbf{A}(\delta)$)
Пусть $\{U_n\}_{n=1}^{L}$ — собственные вектора размера $L \times 1$ матрицы $\mathbf{A}(\delta)$. Тогда $\mathbb{U}_0$ — собственное подпространство, соответствующее нулевым собственным числам, а $\mathbb{U}_0^{\perp}$ — соответствует ненулевым собственным числам.
Определение 8 (Ортогональные проекторы собственных подпространств)
Пусть $\mathbf{I}$ — единичная матрица размера $L \times L$. Тогда $\mathbf{P}_0(\delta)$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0$, а $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0(\delta)$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^{\perp}$. $\mathbf{P}_0(\delta)$, $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ — матрицы размера $L \times L$.
Замечание 4
$\mathbf{P}_0^{\perp}(0) = \mathbf{P}_0^{\perp}$, $\mathbf{P}_0(0) = \mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)$.

Продолжая разговор про матрицу $\mathbf{A}(\delta)$, заметим, что её собственные вектора (левые сингулярные векторы) можно разбить на два подпространства: собственное подпространство *ненулевых* и *нулевых* собственных чисел. Более того, для введения и объяснения результатов нам понадобится понятие ортогональных проекторов. Дельта — параметр возмущения матрицы $\mathbf{A}(\delta)$.

Заметим, что, в связи с таким разбиением проекторов, матрица $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{I}\mathbf{H}(\delta) = (\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) + \mathbf{P}_0(\delta))\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)\mathbf{H}(\delta)$, что следует из сингулярного разложения матрицы $\mathbf{A}(\delta)$. (В замечание добавить объяснение для ортогональных проекторов).

Обозначения

Замечание 5 (Про матричные нормы)

Полагаем $\|\cdot\|$ *— спектральная норма. В иных случаях явно указываем норму.*
Например, максимальная норма $\|\cdot\|_{\max}$.

Определение 9 (Псевдообратная матрица)

Пусть $\mathbf{S}_0$ *— матрица размера* $L \times L$*, псевдообратная к* $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.
Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ *и* $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ *для* $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{min}^k$.

Определение 10 (Возмущение матрицы $\mathbf{A}(\delta)$)

Зависящую от δ *часть матрицы* $\mathbf{A}(\delta)$ *будем обозначать* $\mathbf{B}(\delta)$.
Тогда $\mathbf{B}(\delta) = \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$.

Обозначения
Замечание 5 (Про матричные нормы)
Полагаем $\|\cdot\|$ — спектральная норма. В иных случаях явно указываем норму.
Например, максимальная норма $\|\cdot\|_{\max}$.
Определение 9 (Псевдообратная матрица)
Пусть $\mathbf{S}_0$ — матрица размера $L \times L$, псевдообратная к $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$.
Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{min}^k$.
Определение 10 (Возмущение матрицы $\mathbf{A}(\delta)$)
Зависящую от δ часть матрицы $\mathbf{A}(\delta)$ будем обозначать $\mathbf{B}(\delta)$.
Тогда $\mathbf{B}(\delta) = \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$.

В случае, если не указано иное, воспринимаем норму как спектральную. Определим $\mathbf{S}_0$ — псевдообратную матрицу к $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{min}^k$ (пояснение — так как $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = \left\|(\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}})^{-k}\right\|$). О применении возмущения матрицы $\mathbf{A}(\delta)$ уточним позже.

Обозначения

Определение 11 (Ошибка восстановления)

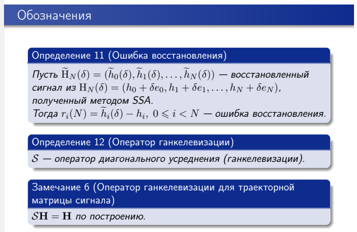
Пусть $\widetilde{\mathrm{H}}_N(\delta) = (\widetilde{h}_0(\delta), \widetilde{h}_1(\delta), \ldots, \widetilde{h}_N(\delta))$ *— восстановленный сигнал из* $\mathrm{H}_N(\delta) = (h_0 + \delta e_0, h_1 + \delta e_1, \ldots, h_N + \delta e_N)$, *полученный методом SSA.*
Тогда $r_i(N) = \widetilde{h}_i(\delta) - h_i,\ 0 \leqslant i < N$ *— ошибка восстановления.*

Определение 12 (Оператор ганкелевизации)

$\mathcal{S}$ *— оператор диагонального усреднения (ганкелевизации).*

Замечание 6 (Оператор ганкелевизации для траекторной матрицы сигнала)

$\mathcal{S}\mathbf{H} = \mathbf{H}$ *по построению.*



Замечание: *возможно, стоит добавить текст про получение восстановленного сигнала, либо просто упомянуть метод SSA.* Итак, перейдём к постановке общей задачи. Для этого введём ошибку восстановления, как разность между восстановленым сигналом и самим сигналом. Восстановленный сигнал получаем из сигнала с параметризуемой помехом методом SSA. Заметим, что по построению траекторной матрицы, она является ганкелевой. Поэтому использование оператора ганкелевизации её не изменит.

Обозначения и постановка общей задачи

Определение 13 (Разность матриц)

$\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H}$ — *разность матриц возмущённого и невозмущённого сигналов.*

Постановка 1

Пусть $\mathbf{N}$ *— некоторая матрица размера* $L \times L$*. Так как* $\|\mathcal{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{A}\|_{\max}$ *и* $\|\mathbf{A}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{A}\|$ *для любой конечномерной матрицы* $\mathbf{A}$*:*

$$\max_{0\leqslant n<N} |r_i(N)| = \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} \leqslant \|\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max}$$

$$\leqslant \left\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\right\| + \left\|\mathbf{N}\,\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\right\|_{\max}. \quad (1)$$

Общая задача: подобрать такую $\mathbf{N}$*, чтобы правая часть* (1) *стремилась к нулю.*

Обозначения и постановка общей задачи
Определение 13 (Разность матриц)
$\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H}$ — разность матриц возмущённого и невозмущённого сигналов.
Постановка 1
Пусть $\mathbf{N}$ — некоторая матрица размера $L \times L$. Так как $\|\mathcal{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{A}\|_{\max}$ и $\|\mathbf{A}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{A}\|$ для любой конечномерной матрицы $\mathbf{A}$:
$\max_{0\leqslant n<N} |r_i(N)| = \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} \leqslant \|\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max}$
$\leqslant \left\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\right\| + \left\|\mathbf{N}\,\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\right\|_{\max}.$ (1)
Общая задача: подобрать такую $\mathbf{N}$, чтобы правая часть (1) стремилась к нулю.

Введём дополнительное обозначение для разности матриц возмущённого и невозмущённого сигналов перед постановкой общей задачи. (возможно подпись в виде общей задачи излишня). Общей задачей поставим следующее: подобрать такую матрицу $\mathbf{N}$, чтобы правая часть стремилась к нулю. Для чего это нужно? Дело в том, что первое слагаемое оценки не обязательно стремится к нулю, поэтому мы должны научиться подбирать подходящие матрицы $\mathbf{N}$, для которых правая часть стремилась бы к нулю.

Формулировка 1 (Оценка нормы)

Оценить выражение сверху

$$\forall n \in \mathbb{N}: \left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\|, \ \mathbf{W}_p(\delta) \text{ — матрицы}$$

размера $L \times L$.

Теорема 1 (Теорема 2.1)

Пусть $\delta_0 > 0$ и

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2 \tag{2}$$

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. *Тогда для возмущённого проектора* $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ *верно представление:*

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta). \tag{3}$$

Формулировка и известные результаты
Формулировка 1 (Оценка нормы)
Оценить выражение сверху
$\forall n \in \mathbb{N}: \left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\|, \ \mathbf{W}_p(\delta)$ — матрицы размера $L \times L$.
Теорема 1 (Теорема 2.1)
Пусть $\delta_0 > 0$ и $\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2$ (2) для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда для возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ верно представление: $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta)$. (3)

(Замечание: не забыть сослаться на источник для теоремы) Для первой теоретической задачи зададим следующую формулировку, которую можно увидеть на слайде. В качестве матрицы $\mathbf{N}$ рассматриваются суммы матриц из $\mathbf{W}_p(\delta)$. Объясним матрицы $\mathbf{W}_p(\delta)$ на следующем результате. *Показывает на теорему*. Таким образом, матрицы $\mathbf{W}_p(\delta)$ представляют собой члены разложения бесконечного ряда возмущённого проектора. Хотя структура этих матриц важна для записи дальнейших результатов, опустим их формальное описание

(Ещё есть вариант на этом слайде оставить формулировку и добавить текст про "Зачем это нужно а на следующих слайдах — теоремы и леммы)

Известные результаты

Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2].

Теорема 2 (Теорема 2.3)

Если $\delta_0 > 0$ *и* $\dfrac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} < \dfrac{1}{4}$ *для всех* $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, *то проектор* $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ *существует и*

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| \leqslant 4C\frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|\,/\mu_{min}}, \tag{4}$$

где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi} \approx 0.667.$

Лемма 1 (Лемма 6.1)

Если $0 < \beta < 1/4$, $k \geqslant 0$, *то*
$\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leqslant C\dfrac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Известные результаты
Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2].
Теорема 2 (Теорема 2.3)
Если $\delta_0 > 0$ и $\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} < \frac{1}{4}$ для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, то проектор $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ существует и
$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp}\right\| \leqslant 4C\frac{\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\|}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|\,/\mu_{min}}$, (4)
где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi} \approx 0.667.$
Лемма 1 (Лемма 6.1)
Если $0 < \beta < 1/4$, $k \geqslant 0$, то
$\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leqslant C\frac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Опишем результаты: теорема 2 ставит ограничения для возможности оценки нормы разности возмущённого и невозмущённого проекторов, в то время как лемма 1 используется для доказательства как этой теоремы, так и полученного результата.

Полученные результаты

Следствие 1

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leqslant 4^{n+1} C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|\,/\mu_{min}}, \tag{5}$$

где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Полученные результаты
Следствие 1
$\forall n \in \mathbb{N}$:
$$\left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leqslant 4^{n+1} C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4\,\|\mathbf{B}(\delta)\|\,/\mu_{min}}, \tag{5}$$
где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.

Пользуясь известными результатами, получаем следующую оценку для произвольного натурального n.

Постановка

Постановка 2 (Линейный сигнал с гармониками)

Рассмотрим при $n = 0, 1, \ldots, N-1$ *линейный сигнал* $h_n = \theta_1 n + \theta_0$, *где* $\theta_1 \neq 0$, *и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник*

$$e_n = \sum_{l=1}^{r} \tau_l \cos(2\pi n \omega_l + \varphi_l),$$

где $\tau_l \neq 0, \omega_l \neq \omega_p$ *при* $l \neq p$ *и* $0 < \omega_l < 1/2$.
Пусть $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$. *Тогда при* N *— нечётном,* $L = (N+1)/2 = K$ *верна теорема из [3] о том, что*

$$\max_{0 \leqslant n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1}).$$

Постановка
Постановка 2 (Линейный сигнал с гармониками)
Рассмотрим при $n = 0, 1, \ldots, N-1$ линейный сигнал $h_n = \theta_1 n + \theta_0$, где $\theta_1 \neq 0$, и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник
$$e_n = \sum_{l=1}^{r} \tau_l \cos(2\pi n \omega_l + \varphi_l),$$
где $\tau_l \neq 0, \omega_l \neq \omega_p$ при $l \neq p$ и $0 < \omega_l < 1/2$.
Пусть $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$. Тогда при N — нечётном, $L = (N+1)/2 = K$ верна теорема из [3] о том, что
$$\max_{0 \leqslant n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1}).$$

Теперь рассмотрим результаты теоретической задачи №2, для которой понадобится результат теоретической задачи №1. Рассматривается линейный сигнал с линейной комбинацией гармоник. Верна теорема о том, что когда матрица $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$, длина ряда N — нечётное и длина окна $L = K$, то есть, для квадратных траекторных матриц, максимальная ошибка восстановления ряда может быть оценена сверху некоторой константой, умноженной на N^{-1}. Возникает *вопрос: можно ли расширить множество используемых траекторных матриц, не нарушая результат теоремы?* Для этого подберём другую матрицу $\mathbf{N}$.

Формулировка и известные результаты

Формулировка 2

Обобщить результат [3] с $L = K$ *до* $L/N \to \alpha \in (0,1)$ *с помощью выбора* $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.

Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [3]

Лемма 2 (Лемма 1)

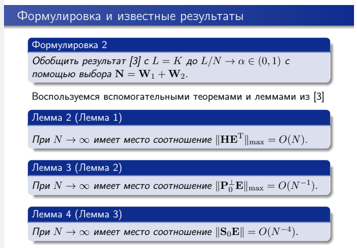
При $N \to \infty$ *имеет место соотношение* $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(N)$.

Лемма 3 (Лемма 2)

При $N \to \infty$ *имеет место соотношение* $\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.

Лемма 4 (Лемма 3)

При $N \to \infty$ *имеет место соотношение* $\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-4})$.


Формулировка и известные результаты
Формулировка 2
Обобщить результат [3] с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0,1)$ с помощью выбора $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$.
Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [3]
Лемма 2 (Лемма 1)
При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^{\mathrm{T}}\|_{\max} = O(N)$.
Лемма 3 (Лемма 2)
При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$.
Лемма 4 (Лемма 3)
При $N \to \infty$ имеет место соотношение $\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-4})$.

Теперь сформулируем задачу и приведём известные результаты из [3], которые понадобятся при оценке максимального модуля ошибки восстановления ряда

Полученные результаты

При $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ рассматривается неравенство

$$\max_{0\leqslant i<N} |r_i(N)| \leqslant \left\|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2))\mathbf{H}(\delta)\right\| + \left\|(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)\,\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^{\perp}\mathbf{E}\right\|_{\max}.$$

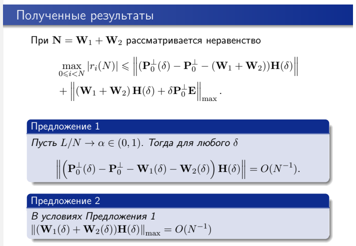
Предложение 1

Пусть $L/N \to \alpha \in (0,1)$. Тогда для любого δ

$$\left\|\left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right)\mathbf{H}(\delta)\right\| = O(N^{-1}).$$

Предложение 2

В условиях Предложения 1
$\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$



В качестве полученных результатов выделим Предложение 1 и Предложение 2, которые являются переформулировками предложений из [3] для рассматриваемого случая обобщения. В результате получим обобщение результата с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0,1)$.

Приложение. Результаты вычислительных экспериментов

Формулировка 3

На основе теоретического результата задачи №2 проиллюстрировать результат для ряда

$$\widetilde{h}_n = n + 3\cos(2\pi n\omega + \varphi),$$

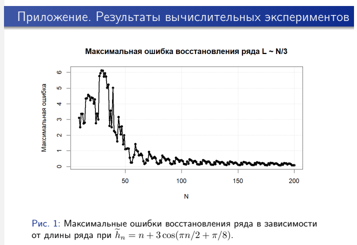
где $\omega = 1/4,\ \varphi = \pi/8,\ n = 0, 1, \ldots, N-1,\ N = 9\ldots200$, *длина окна* $L = \lfloor N/3 \rfloor$.

Теперь проиллюстрируем результаты.

Приложение. Результаты вычислительных экспериментов
Формулировка 3
На основе теоретического результата задачи №2 проиллюстрировать результат для ряда
$\widetilde{h}_n = n + 3\cos(2\pi n\omega + \varphi),$
где $\omega = 1/4,\ \varphi = \pi/8,\ n = 0, 1, \ldots, N-1,\ N = 9\ldots200$, длина окна $L = \lfloor N/3 \rfloor$.
Теперь проиллюстрируем результаты.

Для подтверждения результатов теоретической задачи №2 проведём вычислительный эксперимент. Рассмотрим следующий ряд при длине окна L приблизительно равной длине ряда N, делённой на 3.

Рис. 1: Максимальные ошибки восстановления ряда в зависимости от длины ряда при $\widetilde{h}_n = n + 3\cos(\pi n/2 + \pi/8)$.



Прокомментируем результаты вычислительного эксперимента: по рисунку 1 убедимся, что максимальные по модулю ошибки восстановления ряда стремятся к нулю с ростом N.

Приложение. Результаты вычислительных экспериментов

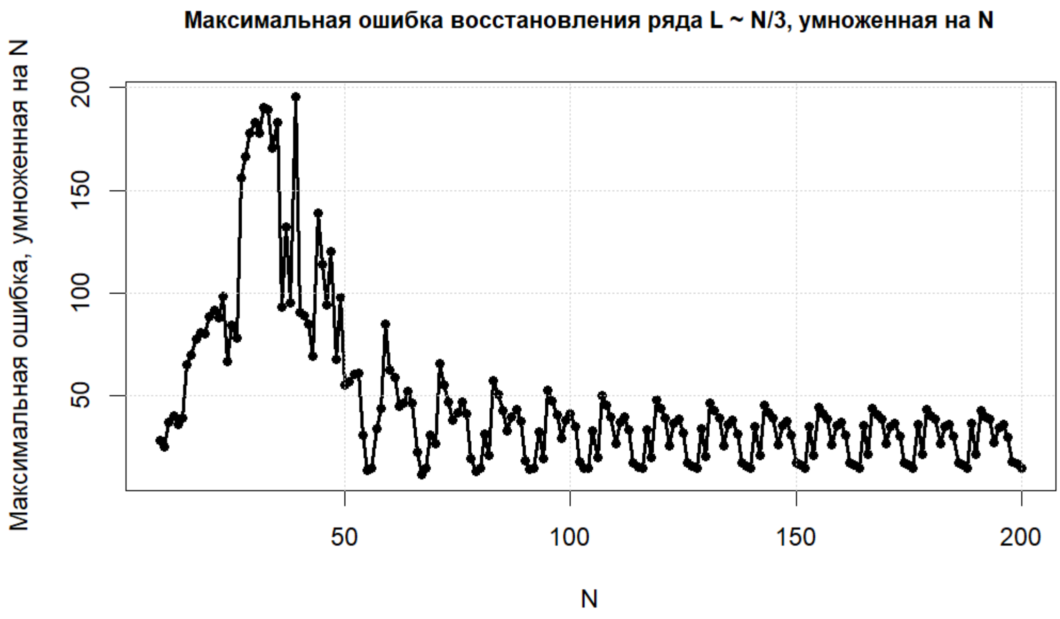


Рис. 2: Максимальные ошибки восстановления ряда, умноженные на N, в зависимости от длины ряда N для $x_n = n + 3\cos(\pi n/2 + \pi/8)$.

Рисунок 2 демонстрирует, что после умножения ряда рисунка 1 на N максимальные по модулю ошибки восстановления ряда становятся ограниченными, что подтверждает результат обобщения Теоремы из [3].

Заключение

1. Поставлена общая теоретическая задача;
2. Дана оценка $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\|$;
3. Обобщён случай асимптотической разделимости линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0,1)$;
4. Проделан вычислительный эксперимент, подтверждающий результаты обобщения теоремы из [3].

Заключение

1. Поставлена общая теоретическая задача;
2. Дана оценка $\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\|$;
3. Обобщён случай асимптотической разделимости линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0,1)$;
4. Проделан вычислительный эксперимент, подтверждающий результаты обобщения теоремы из [3].

В ходе проделанных работ были изучены теоретические свойства метода SSA, поставлена общая теоретическая задача, дана оценка **нормы разностей ортогональных проекций с дубль-вэ для произвольного** n, обобщён случай асимптотической разделимости линейного сигнала с линейной комбинацией гармоник с $L = K$ до $L/N \to \alpha \in (0,1)$, а также проделан вычислительный эксперимент, подтверждающий результаты обобщения теоремы из [3].

Список литературы

- Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques.* Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.
- Nekrutkin, V. (2010). *Perturbation expansions of signal subspaces for long signals.* Statistics and Its Interface. **3**, 297–319.
- *Н.Зенкова, В.Некруткин.* Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра, Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2.

Задачи анализа временных рядов

└Список литературы

Список литературы

Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A. (2001). Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques. Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.

Nekrutkin, V. (2010). Perturbation expansions of signal subspaces for long signals. Statistics and Its Interface. 3, 297–319.

Н.Зенкова, В.Некруткин. Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра, Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2.

На данном слайде представлен список основных источников, используемых в моей работе. Спасибо за внимание. Я готов ответить на Ваши вопросы.