Моделирование случайных величин
Решение задачи 14

Яковлев Д.М.
ST095998@STUDENT.SPBU.RU

15 марта 2025 г.

1 Решение

Ставится задача реализации метода адаптивного отбора с использованием производной логарифма плотности для распределения Бирнбаума-Саундерса с плотностью

$$p(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}{2\gamma x}\varphi\left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}}{\gamma}\right),\ x > 0,\ \gamma > 0,$$

где $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения.

Поскольку в задаче указано использование производной логарифма, вычислим его

$$\log(p(x)) = -\frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2}{2\gamma^2} + \log\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right) - \log(2\gamma x) - \log\sqrt{2\pi} = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + C.$$

Вычислим производные (см. тетрадка)

$$I_1'(x) = -\left(\frac{(x-1)^2}{2\gamma^2 x}\right)' = -\frac{x^2-1}{2\gamma^2 x^2}, \quad I_2'(x) = \log\left(\sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}\right)' = \frac{x-1}{2x(x+1)}, \quad I_3'(x) = -\log(2\gamma x)' = -\frac{1}{x}.$$

Сложим их и получим

$$\log(p(x))' = -\frac{1}{2x}\left(\frac{x^2-1}{\gamma^2 x} - \frac{x-1}{x+1} + 2\right).$$

Также стоит отметить, что

$$\log(p(1))' = -1,\ \forall\gamma > 0$$

Покажем, что $\log(p(x))$ — выпукла вверх. Тогда $\log(p(x))'' < 0\ \forall x$.

$$\begin{aligned}\log(p(x))'' &= \frac{1}{2x^2}\left(\frac{x^2-1}{\gamma^2 x} - \frac{x-1}{x+1} + 2\right) - \frac{1}{2x}\left(\frac{x^2+1}{\gamma^2 x^2} - \frac{2}{(x+1)^2}\right) \\ &= -\frac{1}{\gamma^2 x^3} + \frac{1}{x(x+1)^2} - \frac{x-1}{2x^2(x+1)} + \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{\gamma^2 x^3} + \frac{x^2+6x+3}{2x^2(x+1)^2}.\end{aligned}$$

Из построения $\log(p(x))$ можно заметить, что

$$\log(p(x)) \xrightarrow{x\to+\infty} -\frac{x}{2\gamma^2}, \quad \log(p(x)) \xrightarrow{x\to 0} -\frac{1}{2\gamma^2 x}$$
$$\log(p(x))' \xrightarrow{x\to+\infty} -\frac{1}{2\gamma^2}, \quad \log(p(x))' \xrightarrow{x\to 0} \frac{1}{2\gamma^2 x^2}.$$

Поскольку $\log(p(x))$ не везде выпукла вверх, то желательно узнать точку перегиба и уже из неё "выпустить" асимптотическую кривую. Поскольку $\gamma > 0$ произвольна, то для построения адаптивного метода отбора желательно строить мажоранту и миноранту с использованием γ.

(Обговорено с Никитой Константиновичем): поскольку $\log(p(x))$ не выпукла вверх во всех её точках, предлагается для последней точки “выпускать” асимптотическую кривую $-\frac{1}{2\gamma^2}$. Также достаточно рассмотреть адаптивный метод отбора для фиксированного γ. Поскольку для произвольного γ задача слишком трудоёмка, рассмотрим задачу для $\gamma = 1$. Введём следующие условия построения функции-мажоранты $g_M(x)$:

- Число точек фиксировано (равно трём);
- Последняя точка получается пересечением прямой производной, проведённой из предпоследней точки, и графика.

Тогда остаётся определить остаётся определить точки экстремума и перегиба у $\log(p(x))$, хотя бы приблизительно, и в них расставить две точки произвольным образом. Определим первую точку, находящуюся за точкой экстремума

$$x_1: \ \log(p(x))' \approx \frac{1}{2\gamma^2 x^2} = \frac{1}{2} \to x = \gamma \to x_1 = \min(\gamma, 0.1).$$

Определим вторую точку, находящуюся между точкой экстремума и точкой перегиба

$$x_2: \ \log(p(x))' = -\frac{1}{2x}\left(\frac{x^2-1}{\gamma^2 x} - \frac{x-1}{x+1} + 2\right) < 0 \to \frac{x^2-1}{\gamma^2 x} + \frac{x+3}{x+1} > 0$$
$$\to \gamma^2 > \frac{(1-x^2)(x+1)}{x(x+3)}$$
$$\log(p(x))'' = -\frac{1}{\gamma^2 x^3} + \frac{x^2+6x+3}{2x^2(x+1)^2} < 0 \to \gamma^2 < \frac{2(x+1)^2}{x^3+6x^2+x}$$

2 14.03.2025

Рассмотрим на примере $\gamma = 1$, поскольку область выпуклости вверх сильно "сжимается"к окрестности $x = 0$. Возьмём точки $x_1 = 0.2, x_2 = 1$. Пусть $\log(p(x)) = h(x)$, а 3-ья точка:

$$x_3: \ x_3 \in \{h(x_2) + (x - x_2)h'(x_2)\} \cap \{h(x)\} \Rightarrow x_3 = \frac{h(x_3) - h(x_2)}{h'(x_2)} + x_2 = x_2 + h(x_2) - h(x_3)$$

А, впрочем, можно не читать. Всё указано в коде R.

Список литературы

[1] Коробейников А. Моделирование случайных величин. — 2023-03-04. — [Online: accessed 07-March-2025]. Режим доступа: `https://statmod.ru/wiki/_media/study:spring2023:compstat:modelling.pdf`.

[2] Гученко Р. Метод отбора. — 2024-03-05. — [Online: accessed 07-March-2025]. Режим доступа: `https://statmod.ru/wiki/_media/study:spring2025:rejection_sampling-2.pdf`.