Эллиптический интеграл

26 октября 2023 г.

Материал из Википедии — свободная энциклопедия

Текущая версия страницы пока не проверялась опытными участниками и может ссылаться на [1, 2, 3, 4, 5]

Эллипти́ческий интегра́л — некоторая функция f над полем действительных или комплексных чисел, которая может быть формально представлена в следующем виде:

$$f(x) = \int_c^x R(t, P(t))\, dt. \tag{1}$$

где R — рациональная функция двух аргументов из (1), P — квадратный корень из многочлена 3-й или 4-й степени, не имеющего кратных корней, c — некоторая константа из поля, где определена функция.

В общем случае эллиптический интеграл не может быть формально выражен в элементарных функциях. Исключением являются случаи, когда P имеет кратные корни или когда многочлены в $R(x, y)$ не содержат нечётных степеней y.

Однако для каждого эллиптического интеграла существуют формулы приведения его к сумме элементарных функций и от одного до трёх нормальных эллиптических интегралов, называемых эллиптическими интегралами 1-го, 2-го и 3-го рода).

Содержание

1 История

В интегральном исчислении эллиптический интеграл появился в связи с задачей вычисления длины дуги эллипса и был впервые исследован Джулио Фаньяно, а позднее — Леонардом Эйлером.

2 Обозначения

Эллиптические интегралы часто представляют в виде функции ряда различных аргументов. Эти различные аргументы полностью эквивалентны (они дают одни и те же интегралы), но может возникнуть путаница, связанная с их различным происхождением. В большинстве работ авторы придерживаются канонического наименования. Прежде чем определить сами интегралы, необходимо ввести наименования для аргументов:

- α — *модулярный угол* (иногда модулярный угол обозначается лигатурой œ);
- $k = \sin\alpha$ — *модуль эллиптического интеграла*;
- $m = k^2 = \sin^2\alpha$ — *параметр*.

Следует отметить, что нормальные эллиптические интегралы Лежандра, как полные, так и неполные, являются чётными функциями модуля k (и модулярного угла α). Их область определения $-1 \leqslant k \leqslant +1$.

Иногда, преимущественно в советской научной литературе, под параметром эллиптического интеграла подразумевают характеристику нормального эллиптического интеграла Лежандра 3-го рода (напр., Корн Г., Корн Т. «Справочник по математике для научных работников и инженеров»).

Заметим, что представленные выше величины определяются одна через другую; определение одной из них задаёт и две остальные.

Эллиптический интеграл зависит также и от другого параметра, который, как и предыдущий, можно ввести несколькими способами:

- $x = \sin\varphi = \operatorname{sn} u$, где sn — *эллиптическая функция Якоби*;
- $\varphi = \arcsin x = \operatorname{am} u$ — *амплитуда*;

Определение одного из этих параметров определяет остальные. Таким образом, они могут использоваться вперемешку. Заметим, что u зависит также и от m. Несколько дополнительных уравнений связывают u с другими параметрами:

$$\cos\varphi = \operatorname{cn} u$$

и

$$\sqrt{1 - m\sin^2\varphi} = \operatorname{dn} u \tag{2}$$

Последнее иногда называется в (2) *дельта амплитуда* и записывается как

$$\Delta(\varphi) = \operatorname{dn} u.$$

Иногда в литературе ссылаются на *дополнительный параметр*, *дополнительный модуль* или *дополнительный модулярный угол*. Их вводят следующим способом:

- $m_1 = 1 - m$ — *дополнительный параметр*;
- $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — *дополнительный модуль*;
- $k'^2 = m_1$ — *дополнительный модулярный угол.*

3 Нормальный эллиптический интеграл 1-го рода (неполный)

Нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода F определяется как

$$F(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}$$

или, в форме Якоби,

$$F(x, k) = \int_0^{x} \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}.$$

Обозначения эллиптических интегралов не являются универсально общепринятыми. Следует различать такие разделители между переменной и параметром, как «\», «|» и «,». Там, где в качестве разделителя используется вертикальная черта, за ней ставится параметр интеграла, тогда как за обратной косой чертой ставится модулярный угол. В частности, верно соотношение.

$$F(\varphi, \sin\alpha = F(\varphi|sin^2\alpha = F(\varphi\backslash\alpha))).$$

3.1 Частные случаи

$$F(\varphi\backslash 0) = \varphi;$$
$$F(i\varphi\backslash 0) = i\varphi;$$
$$F(\varphi\backslash 90^\circ) = \ln(\sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi) = \ln\, \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2});$$
$$F(i\varphi\backslash 90^\circ) = i\, \operatorname{arctg}(\operatorname{sh}\varphi);$$

4 Нормальный эллиптический интеграл 2-го рода (неполный)

Нормальный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода E определяется как

$$E(\varphi, k) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}\, d\theta,$$

или, используя подстановку $x = \sin\varphi$, перейдём к (3)

$$E(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2z^2}}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz.$$

4.1 Частные случаи

$$E(\varphi, 0) = \varphi; \tag{3}$$
$$E(i\varphi, 0) = i\varphi;$$
$$E(\varphi, 1) = \sin\varphi;$$
$$E(i\varphi, 1) = i\,\operatorname{sh}\varphi;$$

5 Нормальный эллиптический интеграл 3-го рода (неполный)

Нормальный эллиптический интеграл Лежандра 3-го рода Π определяется как

$$\Pi(c; \varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 + c\sin^2\theta)\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}}$$

или

$$\Pi(c; x, k) = \int_0^x \frac{dx}{(1 + cx^2)\sqrt{(1 - k^2x^2)(1 - x^2)}}.$$

Число c называется *характеристикой* и может принимать любое значение, независимо от остальных аргументов. Свойства эллиптического интеграла 3-го рода существенно зависят от величины характеристики. Заметим, что значение интеграла $Pi(-1; \pi/2|m)$ стремится к бесконечности для любых m.

5.1 Гиперболический случай

5.1.1 $(\mathbf{0 < c < m})$

Введём дополнительные обозначения:

$$\varepsilon = \arcsin\sqrt{\frac{n}{sin^2\alpha}}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{\pi}{2};$$

$$\beta = \frac{\pi\, F(\varepsilon \backslash 90^\circ - \alpha)}{2K(\alpha)};$$

$$q = q(\alpha);$$

$$\nu = \frac{\pi\, F(\varphi \backslash \alpha)}{2K(\alpha)};$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{c}{(1-c)(c-\sin^2\alpha)}};$$

$K(\alpha)$ – полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода.

Тогда можно записать интеграл через тета-функции Якоби:

$$\Pi(c;\ \varphi \setminus \alpha) = \delta_1 \left(-\frac{1}{2}\ \ln \frac{\vartheta_4(\nu+\beta)}{\vartheta_4(\nu-\beta)} + \nu\, \frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} \right),$$

где

$$\frac{1}{2}\ \ln \frac{\vartheta_4(\nu+\beta)}{\vartheta_4(\nu-\beta)} = 2\sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^s}{s(1-q^{2s})} \sin 2s\nu\ \sin 2s\beta$$

и

$$\frac{\vartheta_1'(\beta)}{\vartheta_1(\beta)} = \operatorname{ctg}\, \beta + 4\sum_{s=1}^{\infty} \frac{q^{2s}}{1-2q^{2s}\cos 2\beta + q^{4s}} \sin 2\beta.$$

5.1.2 $(\mathbf{c > 1})$

С помощью подстановки $C = \frac{\sin^2\alpha}{c}$ этот случай сводится к предыдущему, так как $0 < C < sin^2\alpha$. Введём дополнительно величину

$$p_1 = \sqrt{(c-1)\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{c}\right)}.$$

Тогда:

$$\Pi(c;\ \varphi \setminus \alpha) = -\Pi(C;\ \varphi \setminus \alpha) + F(\varphi \setminus \alpha) + \frac{1}{2p_1} \ln \left(\frac{\Delta(\varphi) + p_1 \operatorname{tg}\, \varphi}{\Delta(\varphi) - p_1 \operatorname{tg}\, \varphi} \right).$$

5.2 Круговой случай

5.2.1 $(\mathbf{m} < \mathbf{c} < \mathbf{1})$

Введём дополнительные обозначения:

$$\varepsilon = \arcsin\sqrt{\frac{1-n}{\cos^2\alpha}}, \qquad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \frac{\pi}{2};$$
$$\beta = \frac{\pi\, F(\varepsilon \backslash 90^\circ - \alpha)}{2K(\alpha)};$$
$$q = q(\alpha);$$
$$\nu = \frac{\pi F(\varphi \backslash \alpha)}{2K(\alpha)};$$
$$\delta_2 = \sqrt{\frac{c}{(1-c)(c-\sin^2\alpha)}}.$$

Тогда эллиптический интеграл равен:

$$\Pi(c; \varphi \backslash \alpha) = \delta_2(\lambda - 4\mu\nu),$$

где

$$\lambda = \operatorname{arctg}(\operatorname{th}\beta \operatorname{tg}\nu) + 2\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s-1}}{s} \frac{q^{2s}}{1-q^{2s}} \sin 2s\nu \ \operatorname{sh} 2s\beta$$

и

$$\mu = \frac{\sum\limits_{s=1}^{\infty} s q^{s^2} \ \operatorname{sh} 2s\beta}{1 + \sum\limits_{s=1}^{\infty} q^{s^2} \ \operatorname{ch} 2s\beta}.$$

5.2.2 $(\mathbf{c} < \mathbf{0})$

С помощью подстановки $C = \frac{\sin^2\alpha - c}{1-c}$ этот случай сводится к предыдущему, так как $\sin^2\alpha < C < 1$. Введём дополнительную величину

$$p_2 = \sqrt{\frac{-c(\sin^2\alpha - c)}{1-c}}.$$

Тогда:

$$\sqrt{(1-c)\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{c}\right)}\,\Pi(c;\ \varphi \setminus \alpha) =$$
$$\sqrt{(1-C)\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{C}\right)}\,\Pi(C;\ \varphi \setminus \alpha)$$
$$+\ \frac{\sin^2\alpha\, F(\varphi \setminus \alpha)}{p_2}$$
$$+\ \operatorname{arctg}\left(\frac{p_2}{2}\frac{\sin 2\varphi}{\Delta(\varphi)}\right).$$

6 Полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода

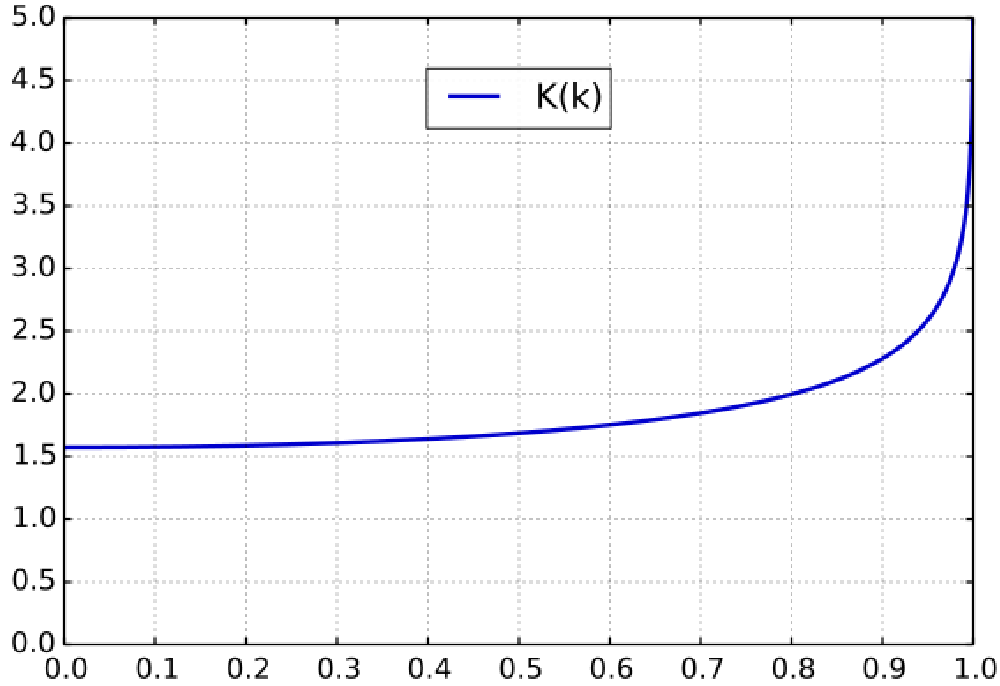

Рис. 1: Параболический график

В случае, если амплитуда φ нормального эллиптического интеграла Лежандра 1-го рода (пример выше (1)) равна $\pi/2$, он называется *полным* нормальным эллиптическим интегралом Лежандра 1-го рода:

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\pi/2, k)$$

или

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Полный эллиптический интеграл 1-го рода можно представить в виде степенного ряда:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right)^2 k^{2n},$$

что эквивалентно выражению

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n} + \ldots\right),$$

где $n!!$ обозначает двойной факториал.

Полный эллиптический интеграл 1-го рода можно записать через гипергеометрическую функцию следующим образом:

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right).$$

6.1 Частные случаи

$$K(0) = \frac{\pi}{2}.$$
$$K(1) = \infty.$$
$$K\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\sqrt{\pi}}.$$
$$K\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2^{-\frac{7}{3}}3^{\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\pi}.$$
$$K\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{2^{-\frac{7}{3}}3^{\frac{3}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3}{\pi}.$$
$$\mathrm{sn}\ K = \sin\frac{\pi}{2} = 1.$$
$$\mathrm{cn}\ K = \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$
$$\mathrm{dn}\ K = \sqrt{1-k^2} = k'.$$

6.2 Производная полного эллиптического интеграла 1-го рода

$$\frac{\mathrm{d}K(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k},$$

где $E(k)$ — полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода, определённый в следующем разделе.

6.3 Дифференциальное уравнение

Полный эллиптический интеграл 1-го рода является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dk}\left(k\left(1-k^2\right)\frac{dK(k)}{dk}\right) = kK(k).$$

Вторым решением этого уравнения является

$$K\left(\sqrt{1-k^2}\right).$$

7 Полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода

В случае, если амплитуда φ нормального эллиптического интеграла Лежандра 2-го рода равна $\pi/2$, он называется полным нормальным эллиптическим интегралом Лежандра 2-го рода, как график выше ((2)):

$$E(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = E(\pi/2,\ k)$$

или

$$E(k) = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

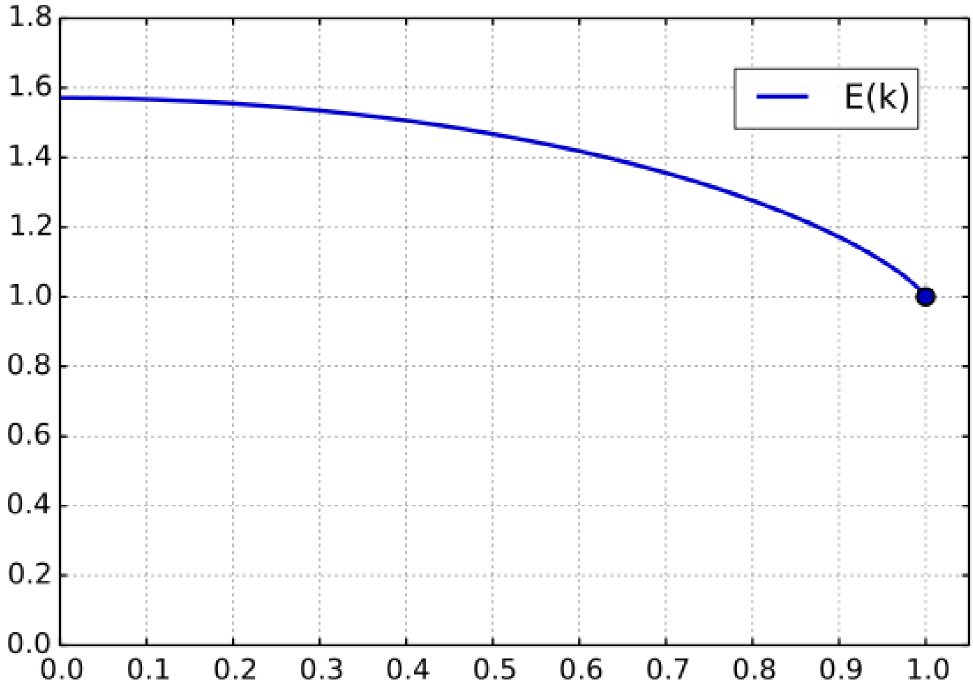

Рис. 2: ПНЭИ Лежандра 2-го рода

Полный эллиптический интеграл 2-го рода можно представить в виде степенного ряда (см. (4), (3)):

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}\right)^2\frac{k^{2n}}{1-2n},$$

что эквивалентно выражению

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{k^2}{1}-\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{k^4}{3}-\ldots-\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{k^{2n}}{2n-1}-\ldots\right).$$

Полный эллиптический интеграл 2-го рода можно записать через гипергеометрическую функцию следующим образом:

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right).$$

7.1 Частные случаи

$$E(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$E(1) = 1.$$

$$E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi^{\frac{3}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{8\sqrt{\pi}}.$$

$$E\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = 2^{\frac{1}{3}}3^{-\frac{3}{4}}\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+2^{-\frac{10}{3}}3^{-\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{3}+1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3. \quad (4)$$

$$E\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = 2^{\frac{1}{3}}3^{-\frac{1}{4}}\pi^2\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}+2^{-\frac{10}{3}}3^{\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{3}-1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)^3.$$

7.2 Производная полного эллиптического интеграла 2-го рода

$$\frac{\mathrm{d}E(k)}{\mathrm{d}k} = \frac{E(k) - K(k)}{k}.$$

7.3 Дифференциальное уравнение

Полный эллиптический интеграл 2-го рода является решением дифференциального уравнения

$$\left(k^2 - 1\right) \frac{d}{dk} \left(k \, \frac{dE(k)}{dk}\right) = kE(k).$$

Вторым решением этого уравнения является функция $E\left(\sqrt{1-k^2}\right) - K\left(\sqrt{1-k^2}\right)$.

8 Полный нормальный эллиптический интеграл Лежандра 3-го рода

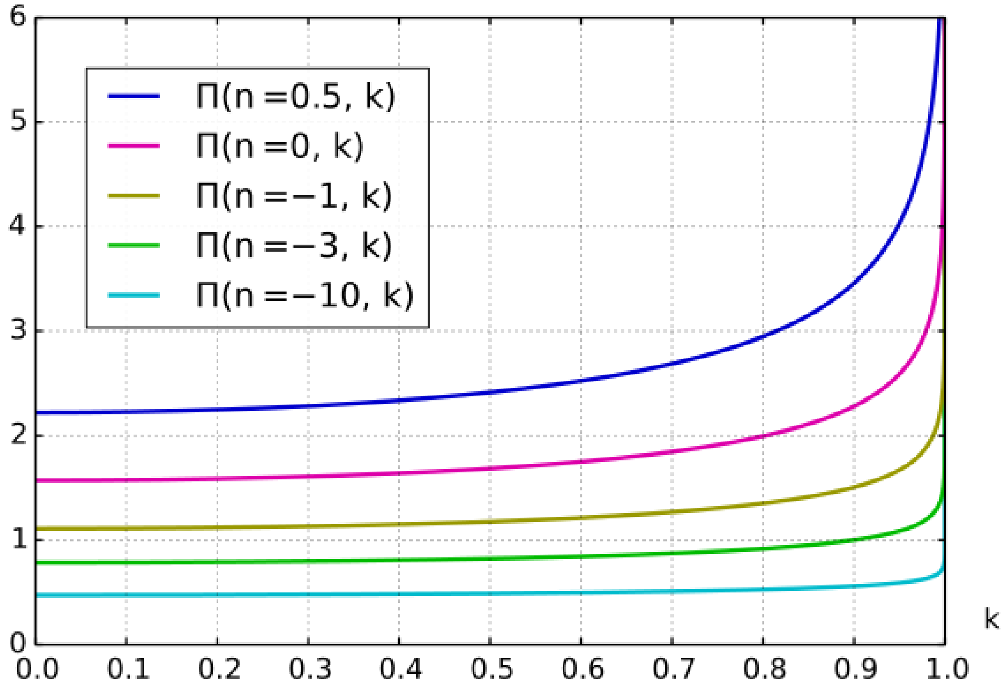

Рис. 3: Графики ПНЭИ Лежандра 3-го рода

Аналогично полным эллиптическим интегралам 1-го и 2-го рода можно ввести полный эллиптический интеграл 3-го рода как в (3):

$$\Pi(c,\ k) = \Pi(c;\ \pi/2,\ k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1 + c\sin^2\varphi)\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}.$$

или

$$\Pi(c,\ k) = \Pi(c;\ 1,\ k) = \int\limits_0^{1} \frac{dx}{(1 + cx^2)\sqrt{(1 - k^2x^2)(1 - x^2)}}.$$

8.1 Гиперболический случай

8.1.1 $(\mathbf{0 < c < m})$

$$\Pi(c \setminus \alpha) = K(\alpha) + \delta_1 K(\alpha) Z(\varepsilon \setminus \alpha).$$

где $Z(\varepsilon \backslash \alpha)$ — дзета-функция Якоби.

8.1.2 $(\mathbf{c > 1})$

$$\Pi(c \setminus \alpha) = K(\alpha) - \Pi(C \setminus \alpha).$$

8.2 Круговой случай

8.2.1 $(\mathbf{m < c < 1})$

$$\Pi(c \setminus \alpha) = K(\alpha) + \frac{1}{2}\pi\delta_2 \left(1 - \Lambda_0(\varepsilon \setminus \alpha)\right),$$

где $\Lambda_0(\varepsilon \backslash \alpha)$ — лямбда-функция Хеймана.

8.2.2 $(\mathbf{c < 0})$

$$\Pi(c \setminus \alpha) = -\frac{c \cos^2 \alpha \, \Pi(C \setminus \alpha)}{(1-c)(\sin^2 \alpha - n)} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - c} K(\alpha).$$

8.3 Частные производные

$$\frac{\partial \Pi(c,k)}{\partial c} = \frac{1}{2\left(k^2 - c\right)(c-1)} \left(E(k) + \frac{1}{c}\left(k^2 - c\right) K(k) + \frac{1}{c}\left(c^2 - k^2\right) \Pi(c,k) \right).$$

$$\frac{\partial \Pi(c,k)}{\partial k} = \frac{k}{c - k^2} \left(\frac{E(k)}{k^2 - 1} + \Pi(c,k) \right).$$

9 Дополнительные эллиптические интегралы (неполные)

9.1 Дзета-функция Якоби

$$Z(\varphi \setminus \alpha) = E(\varphi \setminus \alpha) - \frac{E(\alpha) F(\varphi \setminus \alpha)}{K(\alpha)}.$$

9.2 Лямбда-функция Хеймана

$$\Lambda_0(\varphi \setminus \alpha) = \frac{F(\varphi \setminus 90^\circ - \alpha)}{K'(\alpha)} + \frac{2}{\pi} K(\alpha) \, Z(\varphi \setminus 90^\circ - \alpha).$$

или

$$\Lambda_0(\varphi \setminus \alpha) = \frac{2}{\pi} \left(K(\alpha) \, E(\varphi \setminus 90^\circ - \alpha) - \left(K(\alpha) - E(\alpha)\right) F(\varphi \setminus 90^\circ - \alpha) \right).$$

10 См. также

- Эллиптические функции
- Эллиптическая кривая
- Специальные функции
- Аппроксимация эллиптических интегралов

Список литературы

[1] Л. Милн-Томсон. Эллиптические интегралы. № 50 000. — Москва : Наука, 1979.

[2] Korn G, Korn T. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — 1984.

[3] Бейтмен Г, Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Том 3. — 1967.

[4] Ахиезер Наум Ильич. Элементы теории эллиптических функций. — 1970.

[5] Эллиптические функции, Процедуры для Matlab.