Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчёт по задачам на тему «Условные распределения»

Выполнил:
Яковлев Денис Михайлович
Группа 21.Б04-мм
st095998@student.spbu.ru

Санкт-Петербург
20 сентября 2024 г.

Оглавление

1. Задача 1 1
2. Задача 2 3

1. Задача 1

Формулировка. *Случайные величины* ξ_1, ξ_2, α *независимы, причём* $\xi_1, \xi_2 \in N(0,1)$, *а* $\alpha \in U(0,1)$. *Найти распределение случайной величины*

$$\eta = \frac{\xi_1 + \alpha \xi_2}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \tag{1}$$

Решение. Итак, поскольку ξ_1, ξ_2, α — независимые случайные величчины, то их условное распределение будет равносильно безусловному:

$$\rho_{\xi_1,\xi_2,\alpha}(x,y,z) = \rho_{\xi_1}(x)\rho_{\xi_2}(y)\rho_\alpha(z).$$

Для того, чтобы найти распределение случайной величины η, заданной равенством (1), проанализируем η. Заметим, что η можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\eta = \xi_1 \cos\varphi + \xi_2 \sin\varphi, \\ &\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \arcsin \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно, если положить $\alpha = \alpha_0 \in (0,1)$, то координаты $\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}(\xi_1, \alpha\xi_2)$ будут задавать поворот для координат (ξ_1, ξ_2), $\xi_1, \xi_2 \in N(0,1)$. Так как $\alpha \in U(0,1)$, то $\varphi \in (0, \pi/4)$. Покажем, что η не зависит от α. Для этого рассмотрим функцию распределения случайной величины η:

$$\begin{aligned} F_\eta(w) = P(\eta < w) = &\iiint\limits_{\left\{\frac{x+zy}{\sqrt{1+z^2}} < w\right\}} \rho_{\xi_1}(x)\rho_{\xi_2}(y)\rho_\alpha(z)\ dx\ dy\ dz \\ = \int_0^1 \rho_\alpha(z) dz &\iint\limits_{\left\{\frac{x+zy}{\sqrt{1+z^2}} < w\right\}} \rho_{\xi_1}(x)\rho_{\xi_2}(y)\ dx\ dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим двойной интеграл:

$$\iint\limits_{\left\{\frac{x+zy}{\sqrt{1+z^2}} < w\right\}} \rho_{\xi_1}(x)\rho_{\xi_2}(y)\ dx\ dy$$

Как и предполагали ранее, положим $\varphi = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}} = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{1+z^2}}$. Тогда при переходе к полярным координатам (r, ψ), используя замену

$$x = r\cos(\psi + \varphi)$$
$$y = r\sin(\psi + \varphi)$$

и пользуясь тригонометрическими формулами, сведём двойной интеграл к интегралу, характеризующему распределение Рэлея, а именно

$$\iint\limits_{\{r<w, \psi\in(0,2\pi)\}} \frac{r}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr\, d\psi.$$

Отсюда вытекает, что $\eta \in R(1)$, где $R(1)$ — распределение Рэлея с дисперсией $\sigma^2 = 1$.

Следствие. *В условиях этой задачи, если сохранить независимости случайных величин и положить α произвольным распределением, а $\xi_1, \xi_2 \in N(0, \sigma^2)$, то*

$$\eta \in R(\sigma^2).$$

Замечание. *Вышенаписанное сделано с ошибкой: нужно брать интеграл не по всем $\psi \in (0, 2\pi)$.*

Решение. [Новое решение, с использованием условных распределений.] Итак, рассматриваем случайную величину (1). Попробуем посчитать его, используя условные распределение, учитывая, что ξ_1, ξ_2, α — непрерывные случайные величины. Тогда их условное распределение будет равносильно безусловному:

$$\rho_{\xi_1,\xi_2,\alpha}(x, y, z) = \rho_{\xi_1}(x)\rho_{\xi_2}(y)\rho_\alpha(z).$$

Вычислим функцию распределения $F_\eta(w)$, пользуясь формулой полных вероятностей:

$$F_\eta(w) = P(\eta < w) = \int_{\mathbb{R}} P(\eta < w \mid \alpha = z)\rho_\alpha(z)\, dz = \int_0^1 P(\eta < w \mid \alpha = z)\, dz. \tag{2}$$

Теперь вычислим вероятность $P(\eta < w \mid \alpha = z)$.

$$P(\eta < w \mid \alpha = z) = P(\cos(\varphi)\xi_1 + \sin(\varphi)\xi_2 < w).$$

Через характеристические функции можно показать, что $\gamma = \cos(\varphi)\xi_1 + \sin(\varphi)\xi_2 \sim N(0,1)$:

$$\varphi_\gamma(x) = Ee^{i\gamma x} = Ee^{i\cos(\varphi)x\xi_1} Ee^{i\sin(\varphi)x\xi_2} = e^{\frac{-\cos^2(\varphi)x^2}{2}} e^{\frac{-\sin^2(\varphi)x^2}{2}} = e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Таким образом, из (2) получаем

$$F_\eta(w) = P(\eta < w) = \int_0^1 P(\eta < w \mid \alpha = z)\, dz = \int_0^1 \Phi(w)\, dz = \Phi(w),$$

где Φ — функция распределения $\xi \sim N(0,1)$. Отсюда,

$$\eta \sim N(0,1).$$

2. Задача 2

Формулировка. *Пусть $\xi \in U(0,\sqrt{2})$. В квадрат $(-\xi,\xi)\times(-\xi,\xi)$ бросают точку. Найти совместное распределение её координат.*

Решение. Итак, воспользуемся условными вероятностями. Для этого положим $\{\eta_\xi\}$ — семейство случайных величин с распределением $\eta_\xi \sim U((-\xi,\xi)\times(-\xi,\xi))$. Определим функцию распределения $F_{\eta_\xi}(x,y)$:

$$F_{\eta_\xi}(x,y) = P(\eta_\xi \in (-\infty,x)\times(-\infty,y)) = \int_{\mathbb{R}} P(\eta_\xi \in (-\infty,x)\times(-\infty,y) \mid \xi = z)\rho_\xi(z)\, dz. \tag{3}$$

Так как $\xi \sim U(0,\sqrt{2})$, то $\rho_\xi(z) = \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ z \in (0,\sqrt{2})$. При фиксированном $\xi = z$ получаем

$$\rho_{\eta_z}(x,y) = \frac{1}{4z^2} \text{ внутри квадрата } (-z,z)\times(-z,z).$$

Теперь определим $P(\eta_\xi \in (-\infty,x)\times(-\infty,y) \mid \xi = z)$:

$$P(\eta_\xi \in (-\infty,x)\times(-\infty,y) \mid \xi = z) = \iint\limits_{\{(-z,z)^2\}} \mathbb{1}_{(-\infty,x)\times(-\infty,y)}(w,u)\frac{1}{4z^2}\, dw\, du$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leqslant -z \text{ или } y \leqslant -z; \\ (x+z)(y+z)\dfrac{1}{4z^2}, & -z < x \leqslant z \text{ и } -z < y \leqslant z; \\ (x+z)\dfrac{1}{2z}, & -z < x \leqslant x \text{ и } z < y \\ (y+z)\dfrac{1}{2z}, & z < x \text{ и } -z < y \leqslant z \\ 1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $z \to 0$ считаем, что $U((-z,z)\times(-z,z)) \to \delta_{(0,0)}$. Вычисле Таким образом, получаем Если хотим посчитать функцию распределения в точке (x,y), то необходимо учитывать поведение условного распределения, которое можно разбить на четыре случая в зависимости от того, в какой четверти плоскости располагается (x,y). Например, когда $x<0$ или $y<0$, то

$$\int_0^{\max\{-x,-y\}} P(\eta_\xi \in (-\infty,x)\times(-\infty,y) \mid \xi = z)\, dz = 0,$$

поскольку $(-\infty,x)\times(-\infty,y)$ не содержит в себе ни одного квадрата. Когда $x>0$ и $y>0$, то

$$\int_0^{\min\{x,y\}} P(\eta_\xi \in (-\infty,x)\times(-\infty,y) \mid \xi = z)\, dz = \min\{x,y\}.$$

Для каждой четверти функция распределения будет отличаться по этим соображениям. Тогда получим

$$F_{\eta_\xi}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\sqrt{2} \text{ или } y \leqslant -\sqrt{2} \\ -\dfrac{xy}{8} + \dfrac{x+y}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}}{y} + \dfrac{\sqrt{2}-y}{4\sqrt{2}} + \dfrac{x}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4} & \\ +\dfrac{x}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{y}{\min\{-x,y\}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(y - \min\{-x,y\}),, & -\sqrt{2} < x \leqslant 0, 0 < y \leqslant \sqrt{2} \\ -\dfrac{xy}{8} + \dfrac{x+y}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}}{x} + \dfrac{\sqrt{2}-x}{4\sqrt{2}} + \dfrac{y}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4} & \\ +\dfrac{y}{2\sqrt{2}}\ln\dfrac{x}{\min\{x,-y\}} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(x - \min\{x,-y\}), & 0 < x \leqslant \sqrt{2}, -\sqrt{2} < y \leqslant 0 \\ -\dfrac{xy}{8} + \dfrac{x+y}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}}{\min\{x,y\}} - \dfrac{|x-y|}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4}, & -\sqrt{2} < x \leqslant 0, -\sqrt{2} < y \leqslant 0 \\ \dfrac{\min\{x,y\}}{\sqrt{2}} - \dfrac{xy}{8} + \dfrac{x+y}{4\sqrt{2}}\ln\dfrac{\sqrt{2}}{\min\{x,y\}} + \dfrac{|x-y|}{4\sqrt{2}} + \dfrac{1}{4}, & 0 < x \leqslant \sqrt{2}, 0 < y \leqslant \sqrt{2} \\ 1, & \sqrt{2} < x \text{ и } \sqrt{2} < y \end{cases}$$

Замечание. *Громоздкий ответ, который может содержать ошибки.*

Чтобы избежать подобных ошибок, упростим задачу и вычислим плотность распределения $\rho_{\eta_\xi}(x,y)$:

$$\rho_{\eta_z}(x,y) = \frac{1}{4z^2}\mathbb{1}_{\{(-z,z)^2\}}(x,y);$$
$$\rho_{\eta_\xi}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\min\{|x|,|y|\}}^{\sqrt{2}} \rho_{\eta_z}(x,y)dz = \left(\frac{1}{4\sqrt{2}\max(|x|,|y|)} - \frac{1}{8}\right)\mathbb{1}_{\{(-\sqrt{2},\sqrt{2})^2\}}(x,y). \tag{4}$$

Тогда получаем:

$$F_{\eta\xi}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \text{ или } y \leqslant 0; \\ \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\rho_{\eta\xi}(x,y)dz, & \text{иначе;} \\ 1, & \sqrt{2} < x \text{ и } \sqrt{2} < y. \end{cases}$$