Санкт-Петербургский государственный университет

Прикладная математика и информатика

Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчёт по курсовой работе

Задачи анализа временных рядов, теория метода «Анализ Сингулярного Спектра» SSA

Выполнил:

Яковлев Денис Михайлович

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

В. В. Некруткин

Санкт-Петербург

2024

Оглавление

1. Введение

Целью этой работы является решение прикладных задача анализа временных рядов с применением теоретических знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или «Анализ Сингулярного Спектра» (сокращенно, АСС). В ходе учебной практики будут изучены теоретическая часть метода АСС и её применение. Ознакомиться с методом АСС можно [1], в [2] описывается теоретическая часть метода АСС.

2. Постановка задачи

2.1. Метод АСС

Остановимся сначала на том варианте метода АСС, который обсуждается в настоящей работе, подробное описание этого метода можно найти в [1].

Рассматривается вещественный *сигнал* $\mathrm{H} = (h_0, \ldots, h_n, \ldots)$, причем предполагается, что ряд H управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка d

$$h_n = \sum_{k=1}^{d} a_k h_{n-k}, \quad n \geq d \tag{1}$$

с $a_d > 0$, которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом H.[1] Кроме того, вводится *помеха* $\mathrm{E} = (e_0, \ldots, e_n, \ldots)$ и предполагается, что наблюдается ряд $\widetilde{\mathrm{H}}_N = \mathrm{H}_N + \delta \mathrm{E}_N$, где H_N и E_N — согласованные отрезки длины N сигнала и помехи, а δ является формальным параметром возмущения. Иначе говоря,

$$\mathrm{H}_N = (h_0, \ldots, h_{N-1}), \quad \mathrm{E}_N = (e_0, \ldots, e_{N-1}) \text{ и } \widetilde{\mathrm{H}}_N = (h_0 + \delta e_0, \ldots, h_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала H_N из суммы $\widetilde{\mathrm{H}}_N$, причем предполагается, что известно только значение порядка d ЛРФ (1). В первую очередь нас будет интересовать оценка ряда H_N.

Краткое описание метода. Метод АСС в этом случае выглядит следующим образом.

1. Выбирается *длина окна* $L < N$ и из ряда $\widetilde{\mathrm{H}}_N$ строится ганкелева *траекторная* матрица $\mathbf{H}(\delta)$ размерности $L \times K$, $K = N - L + 1$, с элементами $\mathbf{H}(\delta) = (\widetilde{h}_{i+j-2})$,

[1] Зачем это нужно?

$0 \leqslant i < L$, $0 \leqslant j < K$. При этом предполагается, что $\min(L, K) \geq d$.[2] В [1] эта операция называется *вложением*.

Если обозначить $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ ганкелевы матрицы, полученные из рядов H_N и E_N операцией вложения $\mathcal{T}_{L,N} = \mathcal{T}$ с той же длиной окна L, то, конечно, $\mathbf{H}(\delta) = \mathcal{T}(\mathrm{H}_N + \delta \mathrm{E}_N)$.

2. Для матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ вычисляется сингулярное разложение и суммируются d главных (то есть соответствующих наибольшим сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. А именно, выбирается ортонормированная система собственных *(левых сингулярных)* векторов $\mathbf{H}(\delta)\,\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}}$ — $\{U_i\}_{i=1}^{L}$ и собственных *(правых сингулярных)* векторов $\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{H}(\delta)$ — $\{V_i\}_{i=1}^{K}$, вычисляются собственные числа $\mathbf{H}(\delta)\,\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}}$ — $\{\lambda_i\}_{i=1}^{L}$. Если расположить все собственные числа в *неубывающем порядке* и обозначить m — число ненулевых собственных чисел, то

$$\mathbf{H}(\delta) = \sum_{i=1}^{m} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^{\mathrm{T}},$$

где U_i, V_i соответствуют λ_i. Результат[3]

$$\widetilde{\mathbf{H}}(\delta) = \sum_{i=1}^{d} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^{\mathrm{T}}.$$

этой операции является наилучшим приближением матрицы $\mathbf{H}(\delta)$ с помощью матриц ранга d в норме Фробениуса, то есть

$$\arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{L \times K},\, \mathrm{rank}\ \mathbf{A} \leqslant d} \|\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{A}\| = \widetilde{\mathbf{H}}(\delta).$$

3. Ищется ганкелева матрица $\widehat{\mathbf{H}}(\delta)$, которая является ближайшей к $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ в той же норме Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали $i + j = const$ все элементы матрицы $\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$ заменяются их средним значением. Поэтому в [1] эта операция названа *диагональным усреднением*. Обозначая её $\mathcal{S}$ получим, что $\widehat{\mathbf{H}}(\delta) = \mathcal{S}\widetilde{\mathbf{H}}(\delta)$.

4. Наконец, применяя к $\widehat{\mathbf{H}}(\delta)$ операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду $\widetilde{\mathrm{H}}_N(\delta) = \mathcal{T}^{-1}(\widehat{\mathbf{H}}(\delta))$, который объявляется приближением к сигналу H_N.

[2] Зачем это нужно?
[3] Почему $m = d$?

3. Результаты

3.1. Теоретические задачи

Введём несколько объектов:

- $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ — вещественнозначные ненулевые матрицы $\mathbb{R}^K \to \mathbb{R}^L$. Матрицу $\mathbf{H}$ будем называть *сигнальной матрицей* , а $\mathbf{E}$ — *шумовой матрицей*. В условиях поставленной задачи рассматривается возмущённая матрица $\mathbf{H}(\delta)$ и *сигнальное подпространство*, образованное столбцами матрицы $\mathbf{H}$;

- $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$ — самосопряжённый неотрицательно определённый оператор $\mathbf{A}\colon \mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$;

- $d = \operatorname{rank} \mathbf{H} < \min(L, K)$ - ранг матрицы $\mathbf{H}$;[4]

- Σ — набор собственных значений $\{\mu_n\}_{n=1}^L$ оператора $\mathbf{A}$. Из свойств оператора $\mathbf{A}$, $\Sigma \subset [0, +\infty)$;

- $\mu_{min} = \min\{\mu \in \Sigma \,|\, \mu > 0\}$;

- $\mathbf{I}$ — тождественный оператор $\mathbb{R}^L \to \mathbb{R}^L$;

- $\mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на собственное подпространство $\mathbb{U}_0$, соответствующее нулевым собственным значениям $\mathbf{A}$;

- $\mathbf{P}_0^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$ — ортогональный проектор на $\mathbb{U}_0^{\perp}$, соответствующее ненулевым собственным значениям;

- $\|\cdot\|_{\mathrm{spec}} = \|\cdot\|$ — спектральная норма.

Теперь введём матрицу с возмущением $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta\,\mathbf{E}$. Тогда возмущение оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)\,\mathbf{H}(\delta)^{\mathrm{T}} = \mathbf{H}\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}} + \delta(\mathbf{H}\,\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}) + \delta^2\,\mathbf{E}\,\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$$

Положим $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H}\,\mathbf{E}^{\mathrm{T}} + \mathbf{E}\,\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E}\,\mathbf{E}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}(\delta) = \delta\,\mathbf{A}^{(1)} + \delta^2\,\mathbf{A}^{(2)}$. Заметим, что $\mathbf{A}^{(1)}$ и $\mathbf{A}^{(2)}$ — самосопряжённые операторы, а $\mathbf{A}(\delta)$ — самосопряжённый неотрицательный оператор для любых $\delta \in \mathbb{R}$.

Цель поставленных теоретических задач — сравнить возмущённый проектор $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ с

[4] Откуда это ?

невозмущённым проектором $\mathbf{P}_0^{\perp}$.

Определим $\mathbf{S}_0$ — матрица, псевдообратная к $\mathbf{H}\mathbf{H}^{\mathrm{T}}$. Положим $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$ для $k \geqslant 1$, $\left\|\mathbf{S}_0^{(k)}\right\| = 1/\mu_{min}^k$.

Далее — рассуждения из [2, раздел 5.3].

А именно, если обозначить $r_i(N) = \widetilde{h}_i(\delta) - h_i$ — остаток от разности между i-ми элементами рядов $\widetilde{\mathrm{H}}_N$ и H_N, а $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_N(\delta)$ — оператор с возмущением, то из того, что $\|\mathbf{C}\|_{\max} \leqslant \|\mathbf{C}\|$, следует, что[5]

$$\max_{0 \leqslant i < N} |r_i(N)| \leqslant \|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{N})\, \mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}\, \mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^{\perp}\, \mathbf{E}\,\|_{\max}. \tag{2}$$

Общая задача состоит в том. чтобы подобрать такой оператор N, чтобы правая часть (2) **стремилась к нулю.**

Если первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $N \to \infty$, то остается исследовать второе слагаемое. Перед тем, как приступить к решению теоретических задач, введём следующие определения:

Определение 1.

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}), \tag{3}$$

а

$$\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)}\, \mathbf{B}(\delta)\, \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)}\, \mathbf{B}(\delta)\, \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}\,.$$

Определение 2.

$$\mathbf{V}_0^{(n)} = \sum_{p=[n/2]}^{n} (-1)^p \sum_{\substack{s_1+\dots+s_p=n,\, s_i=1,2 \\ l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0}} \mathbf{V}_0^{(n)}(\mathsf{s}, \mathsf{l}),$$

$\mathsf{s} = (s_1, \dots, s_p)$, $\mathsf{l} = (l_1, \dots, l_{p+1})$, *и*

$$\mathbf{V}_0^{(n)}(\mathsf{s}, \mathsf{l}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)}\, \mathbf{A}^{(s_1)}\, \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{A}^{(s_p)}\, \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}\,.$$

Теперь можно ввести теорему из [2]:

Теорема 1 (2.1)**.** *Пусть* $\delta_0 > 0$ и

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{min}/2 \tag{4}$$

[5] Нужно подробнее.

для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$. Тогда для возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ верно представление:

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta). \tag{5}$$

Более того,

$$\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) = \mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)}. \tag{6}$$

Замечание 1. *Ряды* (5) *и* (6) *сходятся в спектральной норме.*

Введём

$$\mathrm{B}(\delta) = |\delta| \left\| \mathbf{A}^{(1)} \right\| + \delta^2 \left\| \mathbf{A}^{(2)} \right\|.$$

Если $\delta_0 > 0$ и $\mathrm{B}(\delta_0) = \mu_{min}/2$, то тогда неравенство (4) верно для любых δ таких, что $|\delta| < \delta_0$.

3.1.1. Задача №1

Оценить выражение сверху $\forall n \in \mathbb{N}$: $\left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum\limits_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$.[6] Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2]. ????

Теорема 2 (2.3)**.** *Если $\delta_0 > 0$ и $\dfrac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}} < \dfrac{1}{4}$ для всех $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$, то проектор $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ существует и*

$$\left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} \right\| \leqslant 4C \frac{\|\mathbf{S}_0\, \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{min}}, \tag{7}$$

где $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi} \approx 0.667$. ???

Лемма 1 (6.1)**.** *Если $0 < \beta < 1/4$, $k \geqslant 0$, то $\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leqslant C \dfrac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$, $C = e^{1/6}/\sqrt{\pi}$.*

Доказательство. Существование $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ следует из теоремы (1). Заметим, что в правой части (3) найдётся такой индекс j, что $l_j > 0$ и $l_{j-1} = 0$ или $l_{j+1} = 0$. Иначе $l_1 + l_2 + \cdots + l_{p+1} \geq p + 1 \neq p$. Так как $\left\| \mathbf{S}_0^{(k)} \right\| = 1/\mu_{\min}^k$ для любого $k \geqslant 0$, то можем оценить каждый член правой части из (3).

$$\|\mathbf{W}_p(l_1, \ldots, l_{i-1}, 0, l_{i+1}, \ldots, l_{p+1})\| = \left\| \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \ldots \mathbf{S}_0^{(l_i - 1)} \mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0 \ldots \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})} \right\|$$
$$\leqslant \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \, \|\mathbf{B}(\delta)\|^{p-1} \frac{1}{\mu_{\min}^{p-1}} = \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1}.$$

---

[6] Зачем это нужно? Если положить $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1(\delta)$, то может оказаться, что

$$\left\| \mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) \right\| \to 0,$$

но это не выполняется для $\|(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta)) \mathbf{H}(\delta)\|$. Тогда можно попробовать взять $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta)$, см. (9) и [3].

Учитывая, что $\forall i : 1 \leqslant i \leqslant p+1 \quad l_i \geq 0$ и $l_1 + l_2 + \dots + l_{p+1} = p$, то число векторов $(l_1, l_2, \dots, l_{p+1})$ будет равняться $\binom{2p}{p}$. Таким образом оценим $\mathbf{W}_p(\delta)$:

$$\|\mathbf{W}_p(\delta)\| = \left\|(-1)^p \sum_{l_1+\dots+l_{p+1}=p,\, l_j \geqslant 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1})\right\|$$
$$\leqslant \binom{2p}{p} \|\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1})\| \leqslant \binom{2p}{p} \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1}.$$

Оценим выражение в случае, когда $n = 2$:

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right\| = \left\|\mathbf{P}_0^{\perp} + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right\|$$
$$= \left\|\sum_{p=3}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta)\right\| \leqslant \sum_{p=3}^{\infty} \|\mathbf{W}_p(\delta)\| \leqslant \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1}.$$

Теперь, считая, что $k = 2$, $\beta = \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1} \leqslant \frac{1}{4}$, воспользуемся леммой (1) и тем, что $\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \leqslant \|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\| \leqslant \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}$, и получим:

$$\|\mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}\right)^{p-1} \leqslant 4^3 C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^3 \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}.$$

□

Аналогично, можно выделить следующее:

Следствие 1.

$$\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\right\| \leqslant 4^{n+1} C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}. \tag{8}$$

Тогда можно применить результат из неравенства (8) для оценки первого слагаемого правой части из (2). Для этого можно ограничиться условиями из теоремы (2):

$$\left\|\left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right)\mathbf{H}(\delta)\right\| \leqslant 4^3 C \left(\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{min}}\right)^3 \frac{(\|\mathbf{H}\| + \delta\|\mathbf{E}\|)}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{min}}. \tag{9}$$

4. Заключение

В ходе проделанных работ были изучены теоретическая часть метода АСС, связанная со сравнением возмущённого проектора $\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta)$ и невозмущённого проектора $\mathbf{P}_0^{\perp}$, а также дана оценка $\left\|\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \sum_{p=1}^{n} \mathbf{W}_p(\delta)\right\|$. В дальнейшем планируется оценить $\left\|\left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \delta\mathbf{V}_0^{(n)}\right)\mathbf{H}(\delta)\right\|$ и сравнить его с $\left\|\left(\mathbf{P}_0^{\perp}(\delta) - \mathbf{P}_0^{\perp} - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right)\mathbf{H}(\delta)\right\|$, после чего продолжить изучение теории по общей задаче.

Список литературы

1.

2.

3. *Н.Зенкова, В.Некруткин* Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра,
Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2.

4. *В.В. Некруткин* Об устойчивости метода Анализ Сингулярного Спектра для длинных временных рядов, в печати.

2 возможных продолжения:

1. Обобщить результат [3] с $L = K$ **до** $L/N \to \alpha \in (0,1)$ **с помощью выбора** $\mathbf{N} = W_1 + W_2/$

2. Рассмотреть (5) **вместо** (4)**, предварительно умножив разность проекторов на** $\mathbf{H}(\delta)$ **и разложив полученную сумму по степеням** δ**. Результаты в стиле [4].**