Оглавление

1. Задача 1

1.1. Формулировка

Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathrm{EXP}(1)$ и независимы. При каждом элементарном событии ω упорядочим числа $\xi_i(\omega)$ по возрастанию и получим новые случайные величины $0 \leqslant \xi_{[1]} \leqslant \dots \leqslant \xi_{[i]} \leqslant \dots \leqslant \xi_{[n]}$.
Найти распределение вектора

$$(\xi_{[1]}, \xi_{[2]} - \xi_{[1]}, \dots, \xi_{[i]} - \xi_{[i-1]}, \dots, \xi_{[n]} - \xi_{[n-1]})^\mathsf{T}.$$

1.2. Решение

Поскольку $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathrm{EXP}(1)$, то $\xi_i \in [0, +\infty)$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$ и $\bar{\xi} \in [0, +\infty)^n = D$, где $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.
Представим $D = \cup_{i=1}^{m} D_i$, где D_i - попарно непересекающиеся множества. В качестве D_i:

$$D_i = \{0 < \xi_{i_1} < \xi_{i_2} < \dots < \xi_{i_n}\},$$

где $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ – перестановка $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Тогда число таких множеств будет равняться $n!$, а множества D и $\cup_{i=1}^{n!} D_i$ совпадают $\mathcal{P}_\xi$-почти всюду.
Рассмотрим измеримое отображение $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$, для которой существуют $\varphi_i : \varphi(D_i) = \varphi_i(D_i) = G_i$. Исходя из условий, $\forall i$ $\varphi|_{D_i} = \varphi_i = A_i$, где A_i – матрица $n \times n$. Тогда, чтобы существовало $\psi_i = \varphi_i^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists A_i^{-1}$. Для этого достаточно проверить, что $\det A_i \neq 0$. Впоследствие вычислений получилось, что $|\det A_i| = 1$ $\forall i$ $\Rightarrow |\det A_i^{-1}| = 1$.
Осталось выяснить область определения образа $\varphi_i(D_i) = G_i$. Покажем, что $\forall i$ $G_i = [0, +\infty)^n$. Пусть

$$\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \varphi(\bar{\xi}).$$

Так как

$$\bar{\eta} = (\xi_{[1]}, \xi_{[2]} - \xi_{[1]}, \dots, \xi_{[i]} - \xi_{[i-1]}, \dots, \xi_{[n]} - \xi_{[n-1]})^\mathsf{T}, 0 \leqslant \xi_{[1]} \leqslant \dots \leqslant \xi_{[i]} \leqslant \dots \leqslant \xi_{[n]},$$

Тогда $\eta_1 = \xi_{[1]} \geqslant 0, \eta_2 = \xi_{[2]} - \xi_{[1]} \geqslant 0, \dots, \eta_n = \xi_{[n]} - \xi_{[n-1]} \geqslant 0$. Более того, из этого следует, что $G_i = G_j \forall i, j$.
Рассмотрим случай $n = 2$ и ответим на следующие вопросы:

1. Какие распределения у η_i, $i = 1, 2$;

2. Являются ли $\eta_1,\ \eta_2$ независимыми.

Тогда для областей и их отображений

$$D_1 = \{0 < \xi_1 < \xi_2\},\ \varphi_1(\bar{\xi}) = (\xi_1, \xi_2 - \xi_1) = \bar{\eta};$$
$$D_2 = \{0 < \xi_2 < \xi_1\},\ \varphi_2(\bar{\xi}) = (\xi_2, \xi_1 - \xi_2) = \bar{\eta},$$

Соответствующие им обратные отображения: $\psi_1(\bar{\eta}) = (\eta_1, \eta_2 + \eta_1), \psi_2(\bar{\eta}) = (\eta_2 + \eta_1, \eta_1)$.
Найдём распределения для $\eta_1,\ \eta_2$. Знаем, что $\rho_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) = \rho_{\bar{\xi}}(x_1, x_2+x_1)+\rho_{\bar{\xi}}(x_2+x_1, x_1) = 2\exp\{-(2x_1 + x_2)\}\mathbb{1}_{[0,+\infty)^2}(x_1, x_2)$

$$\rho_{\eta_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{\bar{\eta}}(x_1, x_2)\ dx_2 = 2\int_0^{+\infty} \exp\{-(2x_1 + x_2)\}\ dx_2 = 2\exp\{-2x_1\}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x_1).$$
$$\rho_{\eta_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{\bar{\eta}}(x_1, x_2)\ dx_1 = 2\int_0^{+\infty} \exp\{-(2x_1 + x_2)\}\ dx_1 = \exp\{-x_2\}\mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x_2).$$

Таким образом, η_1 и η_2 независимы. При этом $\eta_1 \in \mathrm{EXP}(2),\ \eta_2 \in \mathrm{EXP}(1)$.
По аналогии, можно показать, что

$$\rho_{\eta_k}(x_k) = (n+1-k)\exp\{-(n+1-k)x_k\}\mathbb{1}_{[0,+\infty}(x_k)\ \forall k = 1, 2, \ldots, n,\ \eta_k \sim \mathrm{EXP}(n+1-k).$$

Отсюда выведем плотность распределения η:

$$\rho_{\bar{\eta}}(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} \rho_{\eta_k}(x_k)\right)\mathbb{1}_{[0,+\infty)^n}(x) = n!\exp\{-(nx_1+(n-1)x_2+\cdots+2x_{n-1}+x_n)\}\mathbb{1}_{[0,+\infty)^n}(x).$$

2. Задача 2

2.1. Формулировка

Вектор $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^{\mathsf{T}}$ имеет плотность распределения $p(x, y) = Ce^{-(x^2+y^2)}$. Найти такую матрицу $A(2, 2)$, что у компонент вектора $\bar{\eta} = A\bar{\xi}$ будет коэффициент корреляции, равный $-1/2$.

2.2. Решение

Вспомним, как выражается коэффициент корреляции от двух случайных величин ξ_1, ξ_2:

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}},$$

где $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1 E\xi_2$.
Решим задачу поэтапно:

1. Вычислим коэффициент C у плотности распределения случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$;

2. Выразим $\rho_{\bar{\eta}}(\bar{x})$ через преобразование $\bar{\eta} = A\bar{\xi}$;

3. Вычислим $\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2), D\eta_1, D\eta_2 \ \Leftrightarrow E\eta_1\eta_2, E\eta_1^2, E\eta_2^2, E\eta_1, E\eta_2$;

4. Решим $\rho(\eta_1, \eta_2) = -\dfrac{1}{2}$ относительно коэффициентов матрицы $A(2,2)$.

(*Замечание: в дальнейшем полагаем* $\bar{\eta} = \eta, \bar{\xi} = \xi$).

1.

$$F_\xi(+\infty, +\infty) = \iint_{\mathbb{R}^2} Ce^{-(x_1^2+x_2^2)}dx_1\ dx_2 = C\pi = 1 \to C = \pi^{-1}$$

Тогда $\rho_\xi(\bar{x}) = \dfrac{1}{\pi}e^{-(\bar{x},\bar{x})}$.

2. Пользуясь формулой преобразования случайных векторов, получим:

$$\rho_\eta(\bar{x}) = \frac{1}{|\det A|\pi}\rho_\xi(A^{-1}\bar{x}) = \frac{1}{|\det A|\pi}e^{-(A^{-1}\bar{x}, A^{-1}\bar{x})}.$$

В дальнейшем будем полагать $|A| = |\det A|$.

3. Вычислим матожидания в порядке $E\eta_1, E\eta_2, E\eta_1^2, E\eta_2^2, E\eta_1\eta_2$:

$$\begin{aligned}
E\eta_1 &= \int_{\mathbb{R}} x_1\rho_{\eta_1}(x_1)dx_1 = \int_{\mathbb{R}} x_1 \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|A|\pi}\rho_\xi(A^{-1}\bar{x})dx_2\right)dx_1 \\
&= [\bar{x} = A\bar{y}, \bar{y} = A^{-1}\bar{x}, dx_1dx_2 = |A|dy_1dy_2] = \iint_{\mathbb{R}^2}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2)\frac{1}{|A|\pi}e^{-(y_1^2+y_2^2)}|A|\ dy_1dy_2 \\
&= \frac{a_{11}}{\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_2^2}\ dy_2\right)\left(\int_{\mathbb{R}} y_1e^{-y_1^2}\ dy_1\right) + \frac{a_{12}}{\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y_1^2}\ dy_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} y_2e^{-y_2^2}\ dy_2\right) = 0;
\end{aligned}$$

$$E\eta_2 = \cdots = 0;$$

$$\begin{aligned}
E\eta_1^2 &= \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2)^2\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\ dy_1dy_2 = \frac{a_{11}^2}{\pi}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} y_1^2\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\ dy_1dy_2\right) \\
&+ \frac{2a_{11}a_{12}}{\pi}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} y_1y_2\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\ dy_1dy_2\right) + \frac{a_{12}^2}{\pi}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} y_2^2\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\ dy_1dy_2\right) \\
&= \frac{a_{11}^2}{\pi}\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{a_{12}^2}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{2};
\end{aligned}$$

$$E\eta_2^2 = \cdots = \frac{a_{21}^2 + a_{22}^2}{2};$$

$$\begin{aligned}
E\eta_1\eta_2 &= \frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}(a_{11}y_1 + a_{12}y_2)(a_{21}y_1 + a_{22}y_2)\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\ dy_1dy_2 \\
&= \frac{a_{11}a_{21}}{\pi}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} y_1^2\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\ dy_1dy_2\right) + \frac{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}{\pi}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} y_1y_2\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\ dy_1dy_2\right) \\
&+ \frac{a_{12}a_{22}}{\pi}\left(\iint_{\mathbb{R}^2} y_2^2\ e^{-(y_1^2+y_2^2)}\ dy_1dy_2\right) = \frac{a_{11}a_{21}}{\pi}\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{a_{12}a_{22}}{\pi}\frac{\pi}{2} = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{2}.
\end{aligned}$$

Исходя из полученных значений, $\operatorname{cov}(\eta_1,\eta_2)=E\eta_1\eta_2, D\eta_1=E\eta_1^2, D\eta_2=E\eta_2^2$.

4. Найдём подходящие коэффициенты для того, чтобы $\rho(\eta_1,\eta_2)=-\dfrac{1}{2}$:

$$\rho(\eta_1,\eta_2)=\frac{\dfrac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}}{2}}{\sqrt{\dfrac{a_{11}^2+a_{12}^2}{2}}\sqrt{\dfrac{a_{21}^2+a_{22}^2}{2}}}=\frac{a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}}{\sqrt{a_{11}^2+a_{12}^2}\sqrt{a_{21}^2+a_{22}^2}}=-\frac{1}{2}.$$

Хочется рассмотреть такой случай:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=-\dfrac{1}{2} \\ a_{11}^2+a_{12}^2=1 \\ a_{21}^2+a_{22}^2=1 \end{cases} \tag{1}$$

Если в качестве матрицы A взять, например:

$$A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix},$$

то $|A|=\cos 2\varphi$, что значит, что при $\varphi\in[0,2\pi):\ |A|=0\leftrightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$. При этом, если бы в качестве A взяли матрицу поворотов, то $\rho(\eta_1,\eta_2)=0$ при любом угле φ. Для матрицы A при заданных φ выполняются второе и третье равенства из (1), а для первого:

$$a_{11}a_{21}+a_{12}a_{22}=\sin 2\varphi=-\frac{1}{2}\to\varphi=\frac{7\pi}{12},\frac{11\pi}{12},\frac{19\pi}{12},\frac{23\pi}{12}.$$

Таким образом нашли матрицу A такую, что $\eta=A\xi,\rho(\eta_1,\eta_2)=-\dfrac{1}{2}$. Принимая во внимание то, что растяжение матрицы на произвольные ненулевые значения $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$ не изменит коэффициента корреляции, а точнее:

$$\rho(\lambda_1\eta_1,\lambda_2\eta_2)=\rho(\lambda_1\eta_1,\eta_2)=\rho(\eta_1,\lambda_2\eta_2)=\rho(\eta_1,\eta_2).$$

Поэтому, в качестве одного из решений можно взять матрицу вида:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\cos\varphi & \lambda_1\sin\varphi \\ \lambda_2\sin\varphi & \lambda_2\cos\varphi\end{pmatrix},\ \lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}/\{0\},\varphi\in[0,2\pi).$$