Вычисление интегралов методом Монте-Карло

Роман Гученко

По материалам А.И.Коробейникова и В.В.Некруткина

26 февраля 2024 г.

Про заряды

- Пусть $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ — некоторое измеримое пространство
- $\nu : \mathcal{A} \to [-\infty, +\infty]$ — заряд на $\mathcal{A}$
- Разложение Хана–Жордана:
  $\nu = \nu^+ - \nu^-$, где ν^+ и ν^- — некоторые меры на $\mathcal{A}$
- $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ — полная вариация заряда (мера)
- ν — конечный заряд, если $|\nu|(\mathcal{D}) < +\infty$
- Любой конечный заряд ν может быть представлен как интеграл от некоторой измеримой функции f по некоторой мере μ:
  $\nu(A) = \int_A f d\mu, \forall A \in \mathcal{A}$

Про производные Радона–Никодима

- Измеримая функция $r : \mathcal{D} \to [-\infty, +\infty]$ — производная Радона–Никодима заряда ν относительно меры μ, если $\nu(A) = \int_A r d\mu, \forall A \in \mathcal{A}$, $r := \frac{d\nu}{d\mu}$
- λ — некоторая мера,
  ν — конечный заряд, $d\nu = f d\lambda$,
  μ — мера, $d\mu = g d\lambda$.
  $\exists r = \frac{d\nu}{d\mu} = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ при } g(x) \neq 0 \\ 0, \text{ при } g(x) = 0 \end{cases} \iff$
  $\lambda\{x : f(x) \neq 0 \;\; \& \;\; g(x) = 0\} = 0$

Метод Монте-Карло для вычисления интегралов 1

Пусть

- $(\mathcal{D}, \mathcal{A})$ — измеримое пространство
- ν — конечный заряд
- $J = \nu(\mathcal{D})$
- $\overline{J} = |\nu|(\mathcal{D}) > 0$
- $\eta : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathcal{D}, \mathcal{A})$ — случайная величина с распределением $\mathcal{P}_\eta$
- $\exists m = \frac{d\nu}{d\mathcal{P}_\eta}$
- Рассмотрим случайную величину $\xi = m(\eta)$

Тогда

- $\mathbf{E}|m(\eta)| = |\nu|(\mathcal{D}) = J$
- $\mathbf{E}m(\eta) = \nu(\mathcal{D}) = \overline{J}$

Метод Монте-Карло для вычисления интегралов 2

- Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathcal{P}_\eta$
- Тогда

$$\widehat{J}_n := \frac{m(\eta_1) + \cdots + m(\eta_n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{p} J$$

то есть

$$P(|\widehat{J}_n - J| \leq \epsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Метод Монте-Карло для вычисления интегралов 3

Если

- $\nu(A) = \int_A f d\lambda$
- $d\mathcal{P} = p d\lambda$
- $\lambda\{x : f(x) \neq 0 \ \ \& \ \ p(x) = 0\} = 0$

то

- $m = \frac{d\nu}{d\mathcal{P}} = \begin{cases} \frac{f(x)}{p(x)}, \text{ при } p(x) \neq 0 \\ 0, \text{ при } p(x) = 0 \end{cases}$

Метод Монте-Карло для вычисления интегралов 4

Если

- Если $f(x) \neq 0$, то $p(x) \neq 0$
- $P(p(\eta) > 0) = 1$

то

- $\widehat{J}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(\eta_i)}{p(\eta_i)}$

Доверительные интервалы 1

$$P\left(|\widehat{J}_n - J| \le \epsilon\right) \ge 1 - \gamma$$

Пусть

- $\mathbf{E}m^2(\eta) < \infty$ (тогда и $\sigma^2 = \mathbf{D}m(\eta) < \infty$)

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{n}(\widehat{J}_n - J)/\sigma\right) \Rightarrow N(0,1)$$

$$P\left(|\widehat{J}_n - J| < \sigma x/\sqrt{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x) - \Phi(-x), \forall x > 0,$$

где $\Phi(x)$ — функция распределения $N(0,1)$

Доверительные интервалы 2

$$P\left(|\widehat{J}_n - J| < \sigma x_\gamma/\sqrt{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\gamma$$

$$P\left(\widehat{J}_n - \sigma x_\gamma/\sqrt{n} < J < \widehat{J}_n + \sigma x_\gamma/\sqrt{n}\right) \approx 1-\gamma$$

$$\widehat{s}_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m^2(\eta_i) - \widehat{J}_n^2}$$

$$\left(\widehat{J}_n - \widehat{s}_n x_\gamma/\sqrt{n}, \widehat{J}_n + \widehat{s}_n x_\gamma/\sqrt{n}\right)$$

Теорема Донскера

Пусть

- $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные
- $\delta_n(t) = \frac{1}{\lfloor nt \rfloor} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} X_i, t \in [0, 1]$
- $\mathbf{E}X_i = \mu$
- $\mathbf{D}X_i = \sigma^2$

Тогда

- $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)\right) \Rightarrow W(t)$
- $\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt \rfloor} \left(\frac{x_i - \mu}{\widehat{\sigma}_n}\right)\right) \Rightarrow W(t), \widehat{\sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$
- $[\mu - u^*(t)\sqrt{n\widehat{\sigma}_n^2} / \lfloor nt \rfloor, \mu + u^*(t)\sqrt{n\widehat{\sigma}_n^2} / \lfloor nt \rfloor]$
- $u^*(t) = a + b\sqrt{t}, a = 0.3, b = 2.35$

Доверительный интервал для траекторий

- $\widehat{J}_n = \delta_n(1)$
- $$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}\left(\frac{\eta_i-\delta_n(1)}{\widehat{\sigma}_n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}\left(\frac{\eta_i-\mu}{\widehat{\sigma}_n}\right)+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}\left(\frac{\mu-\delta_n(1)}{\widehat{\sigma}_n}\right)$$
- $$\to W(t)+tu, u\sim N(0,1)$$
- $[\delta_n(1)-u^{**}(t)\sqrt{n\widehat{\sigma}_n^2}/\lfloor nt\rfloor, \delta_n(1)+u^{**}(t)\sqrt{n\widehat{\sigma}_n^2}/\lfloor nt\rfloor]$
- $u^*(t)=a+b\sqrt{t}, a=0.1, b=3.15$