

# Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом Анализа Сингулярного Спектра

Н.В. Зенкова, В.В. Некруткин\*

УДК 519.254+519.651+512.643.8

## Аннотация

Общий теоретический подход к асимптотическому выделению сигнала из аддитивно возмущенного ряда с помощью метода “Анализ Сингулярного Спектра” (коротко, АСС) был разобран в Nekrutkin 2010, SII, v.3, 297–319. В настоящей работе мы рассматриваем пример подобного анализа для линейного сигнала и аддитивной синусоидальной помехи. Получен результат, что в этом случае так называемые ошибки восстановления  $r_i(N)$  метода АСС равномерно стремятся к нулю при стремлении длины ряда  $N$  к бесконечности. Точнее, доказано, что  $\max_i |r_i(N)| = O(N^{-1})$  при  $N \rightarrow \infty$  и “длине окна”  $L$ , равной  $(N+1)/2$ . Важно отметить, что в случае, когда сигнал является растущей экспонентой, а помеха по-прежнему остается синусоидальной, результат оказывается совершенно другим. А именно, как доказано в Ivanova, Nekrutkin 2019, SII, v. 12, 1, 49–59, в этом случае любое конечное число последних членов ряда ошибок не имеет предела при  $N \rightarrow \infty$ .

Библиография 6 назв.

**Ключевые слова:** Обработка сигналов, Анализ Сингулярного Спектра, линейный сигнал, разделимость, асимптотический анализ.

## 1 Введение

Остановимся сначала на том варианте метода “Анализ Сингулярного Спектра” (сокращенно, АСС), который обсуждается в настоящей работе, подробное описание этого метода можно найти в [1] или [2].

Рассматривается вещественный “сигнал”  $F = (f_0, \dots, f_n, \dots)$ , причем предполагается, что ряд  $F$  управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка  $d$

$$f_n = \sum_{k=1}^d a_k f_{n-k}, \quad n \geq d \quad (1)$$

с  $a_d > 0$ , которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом  $F$ .

---

\*Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00067

Кроме того, вводится “помеха”  $E = (e_0, \dots, e_n, \dots)$  и предполагается, что наблюдается ряд  $X_N = F_N + \delta E_N$ , где  $F_N$  и  $E_N$  — согласованные отрезки длины  $N$  сигнала и помехи, а  $\delta$  является формальным параметром возмущения. Иначе говоря,

$$F_N = (f_0, \dots, f_{N-1}), \quad E_N = (e_0, \dots, e_{N-1}) \quad \text{и} \quad X_N = (f_0 + \delta e_0, \dots, f_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала  $F_N$  из суммы  $X_N$ , причем предполагается, что известно только значение порядка  $d$  ЛРФ (1). Термины “сигнал” и “помеха” подчеркивают нашу заинтересованность именно в ряде  $F_N$ .

Метод АСС в этом случае выглядит следующим образом. Прежде всего, выбирается *длина окна*  $L < N$  и из ряда  $X_N$  строится ганкелева *траекторная* матрица  $\mathbf{H}(\delta)$  размерности  $L \times K$ ,  $K = N - L + 1$ , с элементами  $[\mathbf{H}(\delta)]_{ij} = x_{i+j-2}$ ,  $0 \leq i < L$ ,  $0 \leq j < K$ . В [1] эта операция называется *вложением*.

Если обозначить  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  ганкелевы матрицы, полученные из рядов  $F_N$  и  $E_N$  операцией вложения с той же длиной окна  $L$ , то, конечно,  $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$ .

Затем матрица  $\mathbf{H}(\delta)$  подвергается сингулярному разложению и суммируются  $d$  главных (то есть соответствующих наибольшему сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. Результат  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  этой операции является наилучшим приближением матрицы  $\mathbf{H}(\delta)$  с помощью матриц ранга  $d$  в метрике Фробениуса.

После этого ищется ганкелева матрица  $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$ , которая является ближайшей к  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  в той же метрике Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали  $i + j = \text{const}$  все элементы матрицы  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  заменяются их средним значением. Поэтому в [1] эта операция названа *диагональным усреднением*. Обозначая ее  $S$  получим, что  $\hat{\mathbf{H}}(\delta) = S\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ .

Наконец, применяя к  $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$  операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду

$$F_N(\delta) = (f_0(\delta), \dots, f_{N-1}(\delta)),$$

который объявляется приближением к сигналу  $F_N$ .

Естественно назвать ряд

$$R_N(\delta) = (r_0(\delta), \dots, r_{N-1}(\delta))$$

с  $r_i(\delta) = f_i(\delta) - f_i$  рядом *ошибок восстановления*, а матрицу  $\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \hat{\mathbf{H}}(\delta) - \mathbf{H}$  *матрицей ошибок восстановления*.

В настоящей работе рассматривается линейный сигнал

$$f_n = \theta_1 n + \theta_0, \tag{2}$$

где  $\theta_1 \neq 0$ , а помехой является линейная комбинация гармоник

$$e_n = \sum_{\ell=1}^r \tau_\ell \cos(2\pi n \omega_\ell + \varphi_\ell), \tag{3}$$

где  $\tau_\ell \neq 0$ ,  $\omega_\ell \neq \omega_p$  при  $\ell \neq p$  и  $0 < \omega_\ell < 1/2$ . Как нетрудно видеть, в этом случае  $d = 2$ .

В [3, §5.3] предложена общая схема асимптотического анализа ошибок восстановления при  $N \rightarrow \infty$ . Поскольку она используется ниже, приведем ее краткое описание.

Прежде всего, нас будет интересовать равномерная сходимость остатков  $r_i(\delta)$  к нулю, то есть поведение нормы  $\|F_N(\delta) - F_N\|_{\max} = \max_{0 \leq i < N} |r_i(\delta)|$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Кроме того, предполагается, что  $L > d$ , в настоящей статье используется соотношение  $L = (N + 1)/2$ , то есть длина ряда  $N$  предполагается нечетной.

Далее, если  $U_0^\perp$  — линейное пространство, порожденное столбцами матрицы  $\mathbf{H}$ , то из (1) следует, что в этих условиях размерность  $U_0^\perp$  равна  $d$  вне зависимости от  $N$  и  $L$ .

Обозначим  $\mathbf{P}_0^\perp$  ортогональный проектор на линейное пространство  $U_0^\perp$ , а  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  — ортогональный проектор на линейное пространство, порожденное столбцами матрицы  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ . Тогда, как показано в [3, §5.3],

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) - \mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp)\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}. \quad (4)$$

В настоящей работе, следуя [3, §5.3], использованы две матричные нормы. Для матрицы  $\mathbf{A}$  размера  $L \times K$  спектральная норма  $\|\mathbf{A}\|$  определяется как максимальное сингулярное число этой матрицы, а равномерная норма  $\|\mathbf{A}\|_{\max}$  — как максимум из модулей элементов этой матрицы. Соотношение между этими нормами хорошо известно, согласно [4, §2.3.2]

$$\|\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\| \leq \sqrt{LK}\|\mathbf{A}\|_{\max}. \quad (5)$$

Поскольку  $\|\mathbf{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\|_{\max}$ , то левое из неравенств (5) дает возможность использовать спектральную норму с целью исследования поведения ошибок восстановления. В то же время вид первого слагаемого правой части (4) показывает, что нужно обратить внимание на разность проекторов  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp$ .

Используя классические результаты Т. Като [5, гл. 2 §3], в [3, теор. 2.1] получена оценка сверху спектральной нормы  $\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\|$ , которая используется в некоторых так называемых подпространственных методах обработки сигналов. Однако, поскольку в (4) разность проекторов умножается на  $\mathbf{H}(\delta)$ , эта оценка оказывается недостаточной и приходится выделять “главную часть” часть разности  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp$ .

Делается это следующим образом. Обозначим соответственно  $\mu_{\max} = \|\mathbf{H}\|^2$  и  $\mu_{\min}$  максимальное и минимальное положительные собственные числа матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ . Кроме того, пусть  $\mathbf{S}_0$  — псевдообратная матрица Мура-Пенроуза к матрице  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$  с  $\|\mathbf{S}_0\| = 1/\mu_{\min}$ . Далее, положим

$$\mathbf{B}(\delta) = \mathbf{H}(\delta)(\mathbf{H}(\delta))^T - \mathbf{H}\mathbf{H}^T = \delta(\mathbf{H}\mathbf{E}^T + \mathbf{E}\mathbf{H}^T) + \delta^2\mathbf{E}\mathbf{E}^T$$

и

$$\mathbf{W}_1(\delta) = \mathbf{P}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{B}(\delta)\mathbf{P}_0. \quad (6)$$

где  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0^\perp$ , а  $\mathbf{I}$  — единичная  $L \times L$  матрица. Тогда имеет место следующее утверждение, см. [3, теор. 2.4].

**Теорема 1.** Пусть  $\delta_0 > 0$  и  $\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} < 1/4$  для всех  $\delta \in (-\delta_0; \delta_0)$ . Тогда существует такая абсолютная постоянная  $C$ , что

$$\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta)\| \leq C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \frac{1}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}}. \quad (7)$$

Неравенство (7) используется следующим образом. Равенство (4) переписывается в виде

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) - \mathbf{H} = (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta). \quad (8)$$

Если при этом оказывается, что при  $N \rightarrow \infty$

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\| \|\mathbf{H}(\delta)\| \rightarrow 0, \quad (9)$$

то остается проверить асимптотическое поведение элементов конкретной (хотя, возможно, и сложно устроенной) *остаточной* матрицы  $\delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E} + \mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)$ .

Именно таким путем в настоящей работе предлагается решать задачу об асимптотической отделимости сигнала (2) от помехи (3). А именно, сначала доказывается, что для любого  $\delta$  неравенство (7) имеет место при достаточно больших  $N$ , затем, оценивая сверху правую часть (7), мы приходим к сходимости (9), см. раздел 2.

В разделе 3 приводятся доказательства соотношений  $\|\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$  и  $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ . Отсюда сразу же будет следовать сходимость  $\|F_N(\delta) - F_N\|_{\max}$  к нулю, более того, это выражение имеет порядок  $O(1/N)$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Все эти факты сначала обсуждаются для одиночной синусоидальной помехи, переход к помехе общего вида (3) и окончательный результат работы — теорема 2 — также помещена в раздел 3.

Отметим, что аналогичный ход рассуждений был осуществлен в [6], где рассматривались растущий экспоненциальный сигнал и синусоидальная помеха. При этом оказалось, что  $\|F_N(\delta) - F_N\|_{\max} \not\rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ , что резко отличается от рассматриваемого случая линейного сигнала.

## 2 Вспомогательные утверждения и доказательство сходимости (9)

Как уже было сказано, мы здесь рассматриваем сигнал (2) (достаточно взять  $\theta_1 = 1$ ) и помеху

$$e_n = \cos(2\pi n\omega + \varphi), \quad \omega \in (0, 1/2). \quad (10)$$

Кроме того, пусть  $L = K := N - L + 1$  (то есть матрицы  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  являются квадратными и симметричными), а  $N \rightarrow \infty$ .

Как отмечено в [3, лемма 3.1], в этих условиях существуют такие положительные постоянные  $C_{\cos}$ ,  $C_{\max}$  и  $C_{\min} < C_{\max}$ , что при  $N \rightarrow \infty$

$$\|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\| = \|\mathbf{E}\|^2 \sim C_{\cos} N^2, \quad \mu_{\max} \sim C_{\max} N^4 \quad \text{и} \quad \mu_{\min} \sim C_{\min} N^4 \quad (11)$$

**Лемма 1.** При  $N \rightarrow \infty$  имеет место **неравенство**  $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$ .

*Доказательство.* При  $1 \leq p \leq L$  и  $1 \leq s \leq K$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{E}^T[p, s] &= \sum_{j=0}^{K-1} (p+j) \cos(2\pi(s+j)\omega + \varphi) = \\ &= p \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \varphi_s) + \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \varphi_s), \end{aligned}$$

где  $\varphi_s = 2\pi s\omega + \varphi$ .

Так как для любой  $\psi$

$$p \left| \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \psi) \right| = p \left| \frac{\sin(\pi K\omega)}{\sin(\pi\omega)} \cos(\pi(K-1)\omega + \psi) \right| \leq \frac{p}{\sin(\pi\omega)} = O(N)$$

и в обозначениях

$$B_K = \frac{1}{2\sin(\pi\omega)} \sin(\pi(2K-1)\omega + \psi), \quad E_K = \frac{\sin(\pi K\omega)}{2\sin^2(\pi\omega)} \sin(\pi K\omega + \psi)$$

имеет место

$$\left| \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \psi) \right| = |KB_K - E_K| \leq \frac{K}{2\sin(\pi\omega)} + \frac{1}{2\sin^2(\pi\omega)} = O(N),$$

то  $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$ . □

**Замечание 1.** Поскольку  $LK \sim N^2/4$ , а  $\mu_{\min} \sim C_{\min} N^4$  при  $N \rightarrow \infty$ , то, применяя правое из неравенств (5), получим, что  $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} = O(N^{-2})$ .

**Лемма 2.** Имеет место соотношение  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ .

*Доказательство.* Обозначим

$$P_L(0) = (1, \dots, 1)^T, \quad P_L(1) = (0, 1, \dots, (L-1))^T.$$

Конечно, пара  $P_L(0), P_L(1)$  является базисом линейного пространства  $U_0^\perp$ . Поэтому матрица  $\mathbf{P}_0^\perp$  может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^\perp &= \gamma_{00}^2 P_L(0) P_L^T(0) + (\gamma_{11} P_L(1) - \gamma_{10} P_L(0)) (\gamma_{11} P_L^T(1) - \gamma_{10} P_L^T(0)) = \\ &= (\gamma_{00}^2 + \gamma_{10}^2) P_L(0) P_L^T(0) + \gamma_{11}^2 P_L(1) P_L^T(1) - \gamma_{11} \gamma_{10} (P_L(1) P_L^T(0) + P_L(0) P_L^T(1)), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $L \times L$  матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} P_L(0) P_L^T(0) &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L(0) P_L^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & L-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & L-1 \end{pmatrix}, \\ P_L(1) P_L^T(0) &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L-1 & \dots & L-1 \end{pmatrix}, \quad P_L(1) P_L^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & L-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & L-1 & \dots & (L-1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\gamma_{11} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{L(L^2-1)}}, \quad \gamma_{10} = \frac{\sqrt{3(L-1)}}{\sqrt{L(L+1)}}, \quad \gamma_{00} = 1/\sqrt{L}.$$

Умножая каждое слагаемое в правой части (12) на матрицу  $\mathbf{E}$ , где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \dots & \cos(2\pi(j-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(K-1)\omega + \varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(i-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(i+j-2)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(K+i-1)\omega + \varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(L-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(L+j-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(N-1)\omega + \varphi) \end{pmatrix},$$

и действуя таким же образом, как в Лемме 1, приходим к нужному результату, опуская совершенно элементарные, но **граммоздкие** и многочисленные **вычисления**.  $\square$

**Лемма 3.** *Имеет место соотношение  $\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\| = O(N^{-4})$ .*

*Доказательство.* Рассмотрим сингулярное разложение матриц  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ ,  $\mathbf{S}_0$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{H}^T &= \mu_{\max} U_1 U_1^T + \mu_{\min} U_2 U_2^T, \quad \mathbf{S}_0 = \mu_{\max}^{-1} U_1 U_1^T + \mu_{\min}^{-1} U_2 U_2^T, \\ \mathbf{H} &= \mu_{\max}^{1/2} U_1 U_1^T + \mu_{\min}^{1/2} U_2 U_2^T, \end{aligned}$$

а  $\mathbf{P}_0^\perp = U_1 U_1^T + U_2 U_2^T$ , где  $U_1, U_2$  — ортонормированные собственные вектора матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ . Далее,

$$\mathbf{H}\mathbf{E}^T = \mu_{\min}^{1/2} \left( \frac{\mu_{\max}^{1/2}}{\mu_{\min}^{1/2}} U_1 U_1^T \mathbf{E}^T + U_2 U_2^T \mathbf{E}^T \right),$$

и, поскольку  $\frac{\mu_{\max}^{1/2}}{\mu_{\min}^{1/2}} \sim C_{\max}(N^2)$ ,  $\mu_{\max}^{1/2}/\mu_{\min}^{1/2} \rightarrow c > 1$  и  $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$ , то отсюда следует, что

$$\|cU_1 U_1^T \mathbf{E}^T + U_2 U_2^T \mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N^{-1}).$$

Так как  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = \|U_1 U_1^T \mathbf{E} + U_2 U_2^T \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ , то  $\|U_i U_i^T \mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N^{-1})$  при  $i = 1, 2$ , и поэтому, учитывая, что  $\mathbf{E} = \mathbf{E}^T$ , получим (см. (5))

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-5}) \quad \text{и} \quad \|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| = O(N^{-4}),$$

что и требовалось доказать.  $\square$

**Предложение 1.** *Пусть  $N$  нечетное,  $N \rightarrow \infty$  и  $L = (N+1)/2$ . Тогда для любого  $\delta$*

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-2}).$$

*Доказательство.* Прежде всего, согласно Лемме 1 и асимптотикам (11), существует такая постоянная  $C_1$ , что

$$\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} \leq \delta^2 \|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} + 2|\delta| \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} \leq C_1 (\delta^2 N^{-2} + |\delta| N^{-2}) = O(N^{-2}).$$

Поэтому для любого  $\delta$  неравенство (7) выполняется при достаточно большом  $N$  и, следовательно, при  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\mathbf{H}(\delta)\| &\leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta))\| \|\mathbf{H}(\delta)\| \leq \\ &\leq C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}} \sim C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^2 \|\mathbf{H}\|, \end{aligned}$$

откуда немедленно следует требуемое.  $\square$

### 3 Исследование элементов остаточной матрицы и окончательный результат

Нам осталось исследовать асимптотическое поведение элементов матриц  $\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)$  и  $\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}$  в условиях Предложения 1. При этом, как и в предыдущем разделе, предполагается, что помеха имеет вид (10).

Согласно Лемме 2,  $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ , поэтому нужно разобраться с  $\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)$ .

**Предложение 2.** В условиях Предложения 1  $\|\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$ .

*Доказательство.* Начнем с некоторых упрощений. По (6)

$$\mathbf{W}_1(\delta) = \delta \mathbf{V}_0^{(1)} + \delta^2(\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0),$$

где  $\mathbf{V}_0^{(1)} = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0$ . Так как (см. Лемму 3)

$$\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0\mathbf{E}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0\| \leq 2\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\|\|\mathbf{E}\| = O(N^{-3})$$

и  $\|\mathbf{E}\| = o(\|\mathbf{H}\|)$ , то  $\|(\mathbf{W}_1(\delta) - \delta\mathbf{V}_0^{(1)})\mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-1}) \rightarrow 0$ , и поэтому достаточно рассматривать элементы матрицы

$$\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H} + \delta(\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{E} + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0\mathbf{E})$$

вместо  $\mathbf{W}_1(\delta)\mathbf{H}(\delta)$ . Далее, поскольку

$$\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{E} + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0\mathbf{E}\| \leq 2\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|\|\mathbf{E}\|\|\mathbf{S}_0\| = O(N^{-1}),$$

то остается разобраться с матрицей  $\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H}$ .

Так как  $\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H} = \mathbf{Q}_0^\perp$ , где  $\mathbf{Q}_0^\perp$  — матрица ортогонального проектирования на пространство строк матрицы  $\mathbf{H}$ , то окончательно мы будем заниматься элементами матрицы

$$\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp = \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp$$

Поскольку  $\mathbf{Q}_0^\perp = \mathbf{P}_0^\perp$ , то из Леммы 2 сразу же следует, что  $\|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = O(N^{-1})$ . Для того чтобы получить аналогичное неравенство для  $\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp$ , достаточно, используя формулу (12), вычислить эту  $2 \times 2$  матрицу явно и убедиться, что каждый ее элемент имеет порядок  $O(N^{-1})$ . Как и в Лемме 2, мы здесь опустим эту громоздкую и элементарную процедуру.  $\square$

Теперь можно сформулировать и доказать основной результат настоящей работы.

**Теорема 2.** Рассмотрим при  $n = 0, 1, \dots, N-1$  линейный сигнал  $f_n = \theta_1 n + \theta_0$ , где  $\theta_1 \neq 0$ , и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник

$$e_n = \sum_{\ell=1}^r \tau_\ell \cos(2\pi n \omega_\ell + \varphi_\ell), \quad (13)$$

где  $\tau_\ell \neq 0$ ,  $\omega_\ell \neq \omega_p$  при  $\ell \neq p$  и  $0 < \omega_\ell < 1/2$ .

Положим  $x_n = f_n + \delta e_n$ , где  $\delta$  — формальный параметр возмущения и, взяв  $N$  нечетное и  $L = (N+1)/2$ , применим к ряду  $x_n, n = 0, \dots, N-1$ , метод АСС с восстановлением по первым 2-м компонентам.

Если обозначить  $f_0(\delta), \dots, f_{N-1}(\delta)$  результат восстановления ряда  $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$  с помощью метода АСС с описанными параметрами, то для любого  $\delta \in \mathbb{R}$  при  $N \rightarrow \infty$

$$\max_{0 \leq n < N} |f_n(\delta) - f_n| = O(N^{-1}).$$

*Доказательство.* При  $r = 1$  результат сразу же следует из Предложений 1 и 2.

Перейдем теперь от  $r = 1$  к произвольному  $r$ . Прежде всего, согласно [3, лемма 3.1],  $\|\mathbf{E}\| \sim CN$  не только при  $r = 1$ , но и в случае, когда помеха имеет вид (13). Далее, так как

$$\|\mathbf{H}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^T\|_{\max} \leq \|\mathbf{H}\mathbf{E}_1^T\|_{\max} + \|\mathbf{H}\mathbf{E}_2^T\|_{\max}$$

и  $\|\mathbf{S}_0(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)\| \leq \|\mathbf{S}_0\mathbf{E}_1\| + \|\mathbf{S}_0\mathbf{E}_2\|$ , то утверждения лемм 1 и 3 (и, следовательно, Предложения 1) остаются верными и для помехи (13). Точно так же, из того, что

$$\|\mathbf{P}_0^\perp(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)\|_{\max} \leq \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}_1\|_{\max} + \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}_2\|_{\max}$$

выводится, что для этой помехи верны утверждения Леммы 2 и Предложения 2. Теорема доказана.  $\square$

## Список литературы

- [1] Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A. Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques// Chapman & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C., 2001.
- [2] Golyandina, N., and Zhigljavsky, A. Singular Spectrum Analysis for Time Series, 2-nd edition// Springer Briefs in Statistics, Springer, 2020.
- [3] Nekrutkin, V. Perturbation expansions of signal subspaces for long signals// Statistics and Its Interface, **3**, 297–319, 2010.
- [4] Golub G. H. , Van Loan, Ch. F. Matrix computations, 4-th edition// Johns Hopkins University Press, 2013.
- [5] Като Т. Теория возмущений линейных операторов // М., Мир, 1972.
- [6] Ivanova, E., Nekrutkin, V. Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis// Statistics and Its Interface, **12**, 1, 49–59, 2019.

## Приложение. Результаты вычислительных экспериментов

Проиллюстрируем полученные результаты. В качестве примера рассмотрим ряд

$$x_n = 2n + 1 + \cos(2\pi\omega + \varphi), \text{ где } \omega = 1/3, \varphi = 0$$

при  $n = 0, \dots, N - 1$  с  $N = 5(1)101$ . Используем длину окна  $L = \lfloor N/2 \rfloor$ .

Результаты вычислений изображены на рисунках 1 и 2. Как видно по рисунку 1, максимальные по модулю ошибки восстановления ряда действительно стремятся к



нулю с ростом  $N$ . В то же время рисунок 2 показывает, что после умножения членов ряда рисунка 1 на  $N$  максимальные ошибки становятся ограниченными. Это подтверждает результат Теоремы 2.

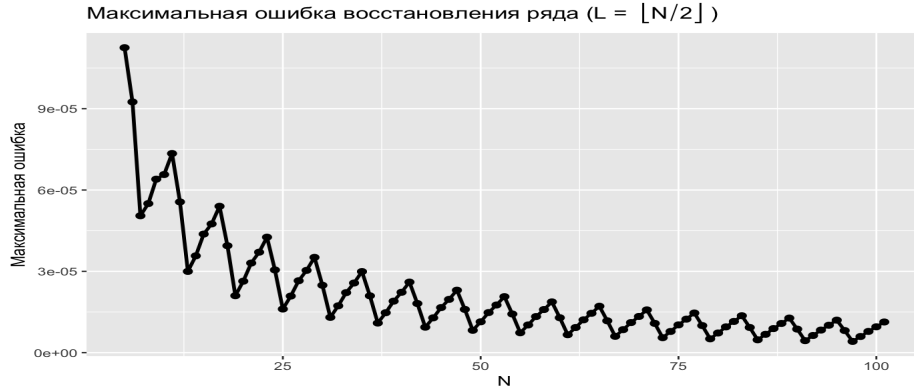


Рис. 1: Максимальные ошибки восстановления ряда в зависимости от длины ряда  $N$  для  $x_n = 2n + 1 + \cos(2\pi\omega + \varphi)$ , где  $\omega = 1/3$ ,  $\varphi = 0$

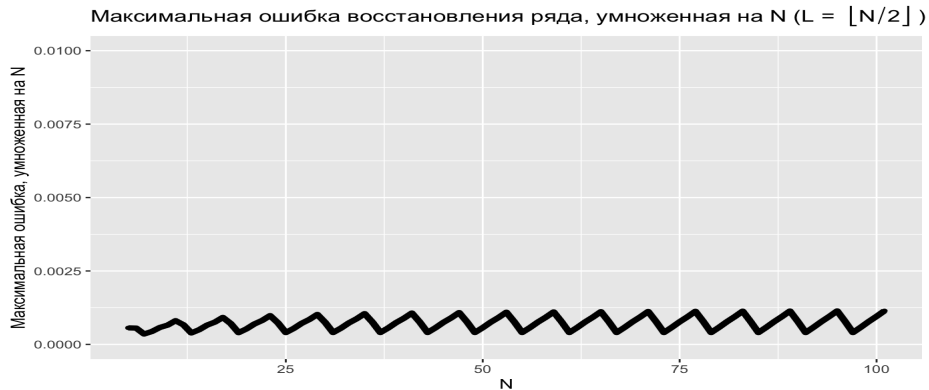


Рис. 2: Максимальные ошибки восстановления ряда, умноженные на  $N$ , в зависимости от длины ряда  $N$  для  $x_n = 2n + 1 + \cos(2\pi\omega + \varphi)$ , где  $\omega = 1/3$ ,  $\varphi = 0$

## Сопроводительная информация

### Сведения об авторах

*Зенкова Наталья Валентиновна* — исследователь, JetBrains Research, Россия, 197342, Санкт-Петербург, Кантемировская улица 2, natalia.zenkova@jetbrains.com;

*Некруткин Владимир Викторович* — кандидат физико-математических наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9; vnekr@statmod.ru

*Natalia Valentinovna Zenkova*: researcher, JetBrains Research, 2 Kantemirovskaya Ulitsa, St.Petersburg, 197342, Russia, natalia.zenkova@jetbrains.com;

*Vladimir Viktorovich Nekrutkin*<sup>1</sup> ; PHD mathematics, associate professor, St.Petersburg State University, 7/9 Universitetskaya nab., St. Petersburg, 199034 Russia;  
vnekr@statmod.ru

## Название статьи на английском языке

On the asymptotical separation of linear signals from harmonics by  
Singular Spectrum Analysis

## Abstract и ключевые слова на английском языке

### Аннотация

The general theoretical approach to the asymptotic extraction of the signal series from the additively perturbed signal with the help of Singular Spectrum Analysis (briefly, SSA) was already outlined in Nekrutkin 2010, SII, v.3, 297–319. In this paper we consider the example of such an analysis applied to the linear signal and the additive sinusoidal noise. It is proved that in this case the so-called reconstruction errors  $r_i(N)$  of SSA uniformly tend to zero as the series length  $N$  tends to infinity. More precisely, we demonstrate that  $\max_i |r_i(N)| = O(N^{-1})$  if  $N \rightarrow \infty$  and the “window length”  $L$  equals  $(N+1)/2$ . It is important to mention, that the completely different result is valid for the increasing exponential signal and the same noise. As it is proved in Ivanova, Nekrutkin 2019, SII, v. 12, 1, 49–59, in this case any finite number of last terms of the error series does not tend to any finite or infinite values.

Refs 6.

Keywords: Signal processing, Singular Spectral Analysis, separability, linear signal, asymptotical analysis.

MS Classification: Primary 65G99, 65F30; secondary 65F15.

## Латинизированная библиография

## Список литературы

- [1] *Golyandina, N., Nekrutkin, V. and Zhigljavsky, A.* Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques// Chapman & Hall/CRC, Boca Raton-London-New YorkWashington D.C., 2001.
- [2] *Golyandina, N., and Zhigljavsky, A.* Singular Spectrum Analysis for Time Series, 2-nd edition, Springer Briefs in Statistics, Springer, 2020.
- [3] *Nekrutkin, V.* Perturbation expansions of signal subspaces for long signals// Statistics and Its Interface, **3**, 297–319, 2010.
- [4] *Golub G. H. , Van Loan, Ch. F.* Matrix computations, 4-th edition.// Johns Hopkins University Press, 2013.

---

<sup>1</sup>The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research, project no. 20-01-00067

- [5] *Kato, T.* Perturbation theory for linear operators.// Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
- [6] *Ivanova, E., Nekrutkin, V.* Two asymptotic approaches for the exponential signal and harmonic noise in Singular Spectrum Analysis// Statistics and Its Interface, **12**, 1, 49–59, 2019.