

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Вычислительная стохастика и статистические модели

ОТЧЁТ ПО ЗАДАЧАМ НА ТЕМУ  
«ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕКТОРОВ»

Выполнил:

Яковлев Денис Михайлович

Группа 21.Б04-мм

095998@STUDENT.SPB.U.RU

Санкт-Петербург

30 марта 2024 г.

## Оглавление

1.	Задача 1 . . . . .	1
1.1.	Формулировка . . . . .	1
1.2.	Решение . . . . .	1
2.	Задача 2 . . . . .	3
2.1.	Формулировка . . . . .	3
2.2.	Решение . . . . .	3

## 1. Задача 1

### 1.1. Формулировка

Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \text{EXP}(1)$  и независимы. При каждом элементарном событии  $\omega$  упорядочим числа  $\xi_i(\omega)$  по возрастанию и получим новые случайные величины  $0 \leq \xi_{[1]} \leq \dots \leq \xi_{[i]} \leq \dots \leq \xi_{[n]}$ .

Найти распределение вектора

$$(\xi_{[1]}, \xi_{[2]} - \xi_{[1]}, \dots, \xi_{[i]} - \xi_{[i-1]}, \dots, \xi_{[n]} - \xi_{[n-1]})^\top.$$

### 1.2. Решение

Поскольку  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \text{EXP}(1)$ , то  $\xi_i \in [0, +\infty) \forall i = 1, 2, \dots, n$  и  $\bar{\xi} \in [0, +\infty)^n = D$ , где  $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

Представим  $D = \bigcup_{i=1}^m D_i$ , где  $D_i$  - попарно непересекающиеся множества. В качестве  $D_i$ :

$$D_i = \{0 < \xi_{i_1} < \xi_{i_2} < \dots < \xi_{i_n}\},$$

где  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$  - перестановка  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Тогда число таких множеств будет равняться  $n!$ , а множества  $D$  и  $\bigcup_{i=1}^{n!} D_i$  совпадают  $\mathcal{P}_\xi$ -почти всюду.

Рассмотрим измеримое отображение  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , для которой существуют  $\varphi_i : \varphi(D_i) = \varphi_i(D_i) = G_i$ . Исходя из условий,  $\forall i \varphi|_{D_i} = \varphi_i = A_i$ , где  $A_i$  - матрица  $n \times n$ . Тогда, чтобы существовало  $\psi_i = \varphi_i^{-1}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\exists A_i^{-1}$ . Для этого достаточно проверить, что  $\det A_i \neq 0$ . Впоследствии вычислений получилось, что  $|\det A_i| = 1 \forall i \Rightarrow |\det A_i^{-1}| = 1$ .

Осталось выяснить область определения образа  $\varphi_i(D_i) = G_i$ . Покажем, что  $\forall i G_i = [0, +\infty)^n$ . Пусть

$$\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \varphi(\bar{\xi}).$$

Так как

$$\bar{\eta} = (\xi_{[1]}, \xi_{[2]} - \xi_{[1]}, \dots, \xi_{[i]} - \xi_{[i-1]}, \dots, \xi_{[n]} - \xi_{[n-1]})^\top, 0 \leq \xi_{[1]} \leq \dots \leq \xi_{[i]} \leq \dots \leq \xi_{[n]},$$

Тогда  $\eta_1 = \xi_{[1]} \geq 0, \eta_2 = \xi_{[2]} - \xi_{[1]} \geq 0, \dots, \eta_n = \xi_{[n]} - \xi_{[n-1]} \geq 0$ . Более того, из этого следует, что  $G_i = G_j \forall i, j$ .

Рассмотрим случай  $n = 2$  и ответим на следующие вопросы:

1. Какие распределения у  $\eta_i, i = 1, 2$ ;

2. Являются ли  $\eta_1, \eta_2$  независимыми.

Тогда для областей и их отображений

$$D_1 = \{0 < \xi_1 < \xi_2\}, \quad \varphi_1(\bar{\xi}) = (\xi_1, \xi_2 - \xi_1) = \bar{\eta};$$

$$D_2 = \{0 < \xi_2 < \xi_1\}, \quad \varphi_2(\bar{\xi}) = (\xi_2, \xi_1 - \xi_2) = \bar{\eta},$$

Соответствующие им обратные отображения:  $\psi_1(\bar{\eta}) = (\eta_1, \eta_2 + \eta_1), \psi_2(\bar{\eta}) = (\eta_2 + \eta_1, \eta_1)$ .

Найдём распределения для  $\eta_1, \eta_2$ . Знаем, что  $\rho_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) = \rho_{\bar{\xi}}(x_1, x_2 + x_1) + \rho_{\bar{\xi}}(x_2 + x_1, x_1) = 2 \exp\{-(2x_1 + x_2)\} \mathbb{1}_{[0, +\infty)^2}(x_1, x_2)$

$$\rho_{\eta_1}(x_1) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) dx_2 = 2 \int_0^{+\infty} \exp\{-(2x_1 + x_2)\} dx_2 = 2 \exp\{-2x_1\} \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x_1).$$

$$\rho_{\eta_2}(x_2) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{\bar{\eta}}(x_1, x_2) dx_1 = 2 \int_0^{+\infty} \exp\{-(2x_1 + x_2)\} dx_1 = \exp\{-x_2\} \mathbb{1}_{[0, +\infty)}(x_2).$$

Таким образом,  $\eta_1$  и  $\eta_2$  независимы. При этом  $\eta_1 \in \text{EXP}(2)$ ,  $\eta_2 \in \text{EXP}(1)$ . Теперь рассмотрим случай  $n > 2$ .

Аналогично начнём с определения областей  $D_i$ , их отображений и обратных отображений. В общем виде для  $i$ :

$$D_i = \{0 < \xi_{i_1} < \xi_{i_2} < \dots < \xi_{i_n}\}, \quad \varphi_i(\bar{\xi}) = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2} - \xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_n} - \xi_{i_{n-1}}) = \bar{\eta},$$

$$\psi_i(\bar{\eta}) = (\dots, \overset{i_1}{\eta_1}, \dots, \eta_2 + \overset{i_2}{\eta_1}, \dots, \eta_3 + \overset{i_3}{\eta_2} + \eta_1, \dots, \eta_n + \overset{i_n}{\eta_{n-1}} + \dots + \eta_1, \dots).$$

Таким образом, у обратного отображения на месте  $i_1$  стоит  $\eta_1$ , на  $i_2$  —  $\eta_2 + \eta_1$  и так далее.

Теперь воспользуемся преобразованием случайных векторов:

$$\begin{aligned} \rho_{\bar{\eta}}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{1}_{[0, +\infty)^n} \sum_{i=1}^{n!} \rho_{\bar{\xi}}(\psi_i(x_1, \dots, x_n)) \\ &= n! \exp\{-(nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n)\} \mathbb{1}_{[0, +\infty)^n} \end{aligned}$$

Вычислим  $\rho_{\eta_i}(x_i)$ :

$$\begin{aligned} \rho_{\eta_i}(x_i) &= \int \dots \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho_{\bar{\eta}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \\ &= n! \int \dots \int_{[0, +\infty)^{n-1}} \exp\{-(nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n)\} dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n \\ &= n! \frac{1}{n} \frac{1}{n-1} \dots \frac{1}{n-i+2} \frac{1}{n-i} \dots \frac{1}{2} \exp\{-(n-i+1)x_i\} \\ &= (n-i+1) \exp\{-(n-i+1)x_i\}. \end{aligned}$$

Таким образом получили, что  $\{\eta_i\}_{i=1}^n$  независимы и

$$\rho_{\eta_i}(x_i) = (n+1-i) \exp\{-(n+1-i)x_i\} \mathbb{1}_{[0,+\infty)}(x_i) \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \eta_i \sim \text{EXP}(n+1-i).$$

Отсюда выведем плотность распределения  $\eta$ :

$$\rho_{\bar{\eta}}(x) = \left( \prod_{k=1}^n \rho_{\eta_k}(x_k) \right) \mathbb{1}_{[0,+\infty)^n}(x) = n! \exp\{-(nx_1 + (n-1)x_2 + \dots + 2x_{n-1} + x_n)\} \mathbb{1}_{[0,+\infty)^n}(x).$$

## 2. Задача 2

### 2.1. Формулировка

Вектор  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$  имеет плотность распределения  $p(x, y) = Ce^{-(x^2+y^2)}$ . Найти такую матрицу  $A(2, 2)$ , что у компонент вектора  $\bar{\eta} = A\bar{\xi}$  будет коэффициент корреляции, равный  $-1/2$ .

### 2.2. Решение

Вспомним, как выражается коэффициент корреляции от двух случайных величин  $\xi_1, \xi_2$ :

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}},$$

где  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = E(\xi_1 - E\xi_1)(\xi_2 - E\xi_2) = E\xi_1\xi_2 - E\xi_1E\xi_2$ .

Решим задачу поэтапно:

1. Вычислим коэффициент  $C$  у плотности распределения случайного вектора  $\bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ ;
2. Выразим  $\rho_{\bar{\eta}}(\bar{x})$  через преобразование  $\bar{\eta} = A\bar{\xi}$ ;
3. Вычислим  $\text{cov}(\eta_1, \eta_2), D\eta_1, D\eta_2 \Leftrightarrow E\eta_1\eta_2, E\eta_1^2, E\eta_2^2, E\eta_1, E\eta_2$ ;
4. Решим  $\rho(\eta_1, \eta_2) = -\frac{1}{2}$  относительно коэффициентов матрицы  $A(2, 2)$ .

(Замечание: в дальнейшем полагаем  $\bar{\eta} = \eta, \bar{\xi} = \xi$ ).

1.

$$F_{\xi}(+\infty, +\infty) = \iint_{\mathbb{R}^2} Ce^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 = C\pi = 1 \rightarrow C = \pi^{-1}$$

Тогда  $\rho_\xi(\bar{x}) = \frac{1}{\pi} e^{-(\bar{x}, \bar{x})}$ .

2. Пользуясь формулой преобразования случайных векторов, получим:

$$\rho_\eta(\bar{x}) = \frac{1}{|\det A|\pi} \rho_\xi(A^{-1}\bar{x}) = \frac{1}{|\det A|\pi} e^{-(A^{-1}\bar{x}, A^{-1}\bar{x})}.$$

В дальнейшем будем полагать  $|A| = |\det A|$ .

3. Вычислим матожидания в порядке  $E\eta_1, E\eta_2, E\eta_1^2, E\eta_2^2, E\eta_1\eta_2$ :

$$\begin{aligned} E\eta_1 &= \int_{\mathbb{R}} x_1 \rho_{\eta_1}(x_1) dx_1 = \int_{\mathbb{R}} x_1 \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|A|\pi} \rho_\xi(A^{-1}\bar{x}) dx_2 \right) dx_1 \\ &= [\bar{x} = A\bar{y}, \bar{y} = A^{-1}\bar{x}, dx_1 dx_2 = |A| dy_1 dy_2] = \iint_{\mathbb{R}^2} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2) \frac{1}{|A|\pi} e^{-(y_1^2 + y_2^2)} |A| dy_1 dy_2 \\ &= \frac{a_{11}}{\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y_2^2} dy_2 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} y_1 e^{-y_1^2} dy_1 \right) + \frac{a_{12}}{\pi} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-y_1^2} dy_1 \right) \left( \int_{\mathbb{R}} y_2 e^{-y_2^2} dy_2 \right) = 0; \end{aligned}$$

$$E\eta_2 = \dots = 0;$$

$$\begin{aligned} E\eta_1^2 &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)^2 e^{-(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 = \frac{a_{11}^2}{\pi} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} y_1^2 e^{-(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 \right) \\ &+ \frac{2a_{11}a_{12}}{\pi} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} y_1 y_2 e^{-(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 \right) + \frac{a_{12}^2}{\pi} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} y_2^2 e^{-(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 \right) \\ &= \frac{a_{11}^2}{\pi} \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{a_{12}^2}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{2}; \end{aligned}$$

$$E\eta_2^2 = \dots = \frac{a_{21}^2 + a_{22}^2}{2};$$

$$\begin{aligned} E\eta_1\eta_2 &= \frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)(a_{21}y_1 + a_{22}y_2) e^{-(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 \\ &= \frac{a_{11}a_{21}}{\pi} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} y_1^2 e^{-(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 \right) + \frac{a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}}{\pi} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} y_1 y_2 e^{-(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 \right) \\ &+ \frac{a_{12}a_{22}}{\pi} \left( \iint_{\mathbb{R}^2} y_2^2 e^{-(y_1^2 + y_2^2)} dy_1 dy_2 \right) = \frac{a_{11}a_{21}}{\pi} \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{a_{12}a_{22}}{\pi} \frac{\pi}{2} = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{2}. \end{aligned}$$

Исходя из полученных значений,  $\text{cov}(\eta_1, \eta_2) = E\eta_1\eta_2, D\eta_1 = E\eta_1^2, D\eta_2 = E\eta_2^2$ .

4. Найдём подходящие коэффициенты для того, чтобы  $\rho(\eta_1, \eta_2) = -\frac{1}{2}$ :

$$\rho(\eta_1, \eta_2) = \frac{\frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{2}}{\sqrt{\frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{2}} \sqrt{\frac{a_{21}^2 + a_{22}^2}{2}}} = \frac{a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2} \sqrt{a_{21}^2 + a_{22}^2}} = -\frac{1}{2}.$$

Хочется рассмотреть такой случай:

$$\begin{cases} a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = -\frac{1}{2} \\ a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1 \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Если в качестве матрицы  $A$  взять, например:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix},$$

то  $|A| = \cos 2\varphi$ , что значит, что при  $\varphi \in [0, 2\pi)$  :  $|A| = 0 \leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ . При этом, если бы в качестве  $A$  взяли матрицу поворотов, то  $\rho(\eta_1, \eta_2) = 0$  при любом угле  $\varphi$ . Для матрицы  $A$  при заданных  $\varphi$  выполняются второе и третье равенства из (1), а для первого:

$$a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} = \sin 2\varphi = -\frac{1}{2} \rightarrow \varphi = \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}.$$

Таким образом нашли матрицу  $A$  такую, что  $\eta = A\xi, \rho(\eta_1, \eta_2) = -\frac{1}{2}$ . Принимая во внимание то, что растяжение матрицы на произвольные ненулевые значения  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  не изменит коэффициента корреляции, а точнее:

$$\rho(\lambda_1\eta_1, \lambda_2\eta_2) = \rho(\lambda_1\eta_1, \eta_2) = \rho(\eta_1, \lambda_2\eta_2) = \rho(\eta_1, \eta_2).$$

Поэтому, в качестве одного из решений можно взять матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \cos \varphi & \lambda_1 \sin \varphi \\ \lambda_2 \sin \varphi & \lambda_2 \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}/\{0\}, \varphi \in [0, 2\pi).$$