

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика  
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчёт по курсовой работе

ЗАДАЧИ АНАЛИЗА ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ, ТЕОРИЯ МЕТОДА  
«АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА» SSA

Выполнил:

Яковлев Денис Михайлович

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

В. В. Некруткин

Санкт-Петербург

2024

## Оглавление

1.	Введение . . . . .	3
2.	Постановка задачи . . . . .	3
2.1.	Метод АСС . . . . .	3
3.	Результаты . . . . .	5
3.1.	Теоретические задачи . . . . .	5
3.1.1.	Задача №1 . . . . .	7
3.1.2.	Задача №2 . . . . .	9
4.	Заключение . . . . .	14
5.	Продолжение по предложениям . . . . .	15
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>16</b>

## 1. Введение

Целью этой работы является решение прикладных задач анализа временных рядов с применением теоретических знаний о методе SSA (Singular Spectrum Analysis), или «Анализ Сингулярного Спектра» (сокращенно, АСС). В ходе учебной практики будут изучены теоретическая часть метода АСС и её применение. Ознакомиться с методом АСС можно [1], в [2] описывается теоретическая часть метода АСС.

## 2. Постановка задачи

### 2.1. Метод АСС

Остановимся сначала на том варианте метода АСС, который обсуждается в настоящей работе, подробное описание этого метода можно найти в [1].

Рассматривается вещественный *сигнал*  $\mathbf{H} = (h_0, \dots, h_n, \dots)$ , причем предполагается, что ряд  $\mathbf{H}$  управляется линейной рекуррентной формулой (ЛРФ) порядка  $d$

$$h_n = \sum_{k=1}^d a_k h_{n-k}, \quad n \geq d \quad (1)$$

с  $a_d > 0$ , которая является минимальной в том смысле, что не существует ЛРФ меньшего порядка, управляющей рядом  $\mathbf{H}$ . Кроме того, вводится *помеха*  $\mathbf{E} = (e_0, \dots, e_n, \dots)$  и предполагается, что наблюдается ряд  $\tilde{\mathbf{H}}_N = \mathbf{H}_N + \delta \mathbf{E}_N$ , где  $\mathbf{H}_N$  и  $\mathbf{E}_N$  — согласованные отрезки длины  $N$  сигнала и помехи, а  $\delta$  является формальным параметром возмущения. Иначе говоря,

$$\mathbf{H}_N = (h_0, \dots, h_{N-1}), \quad \mathbf{E}_N = (e_0, \dots, e_{N-1}) \quad \text{и} \quad \tilde{\mathbf{H}}_N = (h_0 + \delta e_0, \dots, h_{N-1} + \delta e_{N-1}).$$

Общая задача состоит в (приближенном) выделении сигнала  $\mathbf{H}_N$  из суммы  $\tilde{\mathbf{H}}_N$ , причем предполагается, что известно только значение порядка  $d$  ЛРФ (1). В первую очередь нас будет интересовать оценка ряда  $\mathbf{H}_N$ .

**Краткое описание метода.** Метод АСС в этом случае выглядит следующим образом.

1. Выбирается *длина окна*  $L < N$  и из ряда  $\tilde{\mathbf{H}}_N$  строится ганкелева *траекторная* матрица  $\mathbf{H}(\delta)$  размерности  $L \times K$ ,  $K = N - L + 1$ , с элементами  $\mathbf{H}(\delta) = (\tilde{h}_{i+j-2})$ ,

$0 \leq i < L, 0 \leq j < K$ . При этом предполагается, что  $\min(L, K) \geq d$ , исходя из того, что ряд  $H$  управляется ЛРФ порядка  $d$  В [1] эта операция называется *вложением*.

Если обозначить  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{E}$  ганкелевы матрицы, полученные из рядов  $H_N$  и  $E_N$  операцией вложения  $\mathcal{T}_{L,N} = \mathcal{T}$  с той же длиной окна  $L$ , то, конечно,  $\mathbf{H}(\delta) = \mathcal{T}(H_N + \delta E_N)$ .

2. Для матрицы  $\mathbf{H}(\delta)$  вычисляется сингулярное разложение и суммируются  $d$  главных (то есть соответствующих наибольшему сингулярным числам) элементарных матриц этого разложения. А именно, выбирается ортонормированная система собственных (*левых сингулярных*) векторов  $\mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \{U_i\}_{i=1}^L$  и собственных (*правых сингулярных*) векторов  $\mathbf{H}(\delta)^T \mathbf{H}(\delta) = \{V_i\}_{i=1}^K$ , вычисляются собственные числа  $\mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \{\lambda_i\}_{i=1}^L$ . Если расположить все собственные числа в *неубывающем порядке* и обозначить  $m$  — число ненулевых собственных чисел, то

$$\mathbf{H}(\delta) = \sum_{i=1}^m \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T,$$

где  $U_i, V_i$  соответствуют  $\lambda_i$ . Результат

$$\tilde{\mathbf{H}}(\delta) = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

этой операции, где  $m = d$ , так как образованная от ряда  $H$  матрица  $\mathbf{H}(\delta)$  управляется ЛРФ порядка  $d$ , является наилучшим приближением матрицы  $\mathbf{H}(\delta)$  с помощью матриц ранга  $d$  в норме Фробениуса, то есть

$$\arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{L \times K}, \text{rank } \mathbf{A} \leq d} \|\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{A}\| = \tilde{\mathbf{H}}(\delta).$$

3. Ищется ганкелева матрица  $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$ , которая является ближайшей к  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  в той же норме Фробениуса. В явном виде это означает, что на каждой побочной диагонали  $i + j = \text{const}$  все элементы матрицы  $\tilde{\mathbf{H}}(\delta)$  заменяются их средним значением. Поэтому в [1] эта операция названа *диагональным усреднением*. Обозначая её  $\mathcal{S}$  получим, что  $\hat{\mathbf{H}}(\delta) = \mathcal{S} \tilde{\mathbf{H}}(\delta)$ .
4. Наконец, применяя к  $\hat{\mathbf{H}}(\delta)$  операцию, обратную к операции вложения, приходим к *восстановленному* ряду  $\tilde{H}_N(\delta) = \mathcal{T}^{-1}(\hat{\mathbf{H}}(\delta))$ , который объявляется приближением к сигналу  $H_N$ .

### 3. Результаты

#### 3.1. Теоретические задачи

Введём несколько объектов:

- $\mathbf{H}, \mathbf{E}$  — вещественнозначные ненулевые матрицы  $\mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}^L$ . Матрицу  $\mathbf{H}$  будем называть *сигнальной матрицей*, а  $\mathbf{E}$  — *шумовой матрицей*. В условиях поставленной задачи рассматривается возмущённая матрица  $\mathbf{H}(\delta)$  и *сигнальное подпространство*, образованное столбцами матрицы  $\mathbf{H}$ ;
- $\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^T$  — самосопряжённый неотрицательно определённый оператор  $\mathbf{A}: \mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$ ;
- $d = \text{rank } \mathbf{H} < \min(L, K)$  — ранг матрицы  $\mathbf{H}$ , образованной от ряда  $H$ , управляемого ЛРФ порядка  $d$ ;
- $\Sigma$  — набор собственных значений  $\{\mu_n\}_{n=1}^L$  оператора  $\mathbf{A}$ . Из свойств оператора  $\mathbf{A}$ ,  $\Sigma \subset [0, +\infty)$ ;
- $\mu_{\min} = \min\{\mu \in \Sigma \mid \mu > 0\}$ ;
- $\mathbf{I}$  — тождественный оператор  $\mathbb{R}^L \rightarrow \mathbb{R}^L$ ;
- $\mathbf{P}_0$  — ортогональный проектор на собственное подпространство  $\mathbb{U}_0$ , соответствующее нулевым собственным значениям  $\mathbf{A}$ ;
- $\mathbf{P}_0^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_0$  — ортогональный проектор на  $\mathbb{U}_0^\perp$ , соответствующее ненулевым собственным значениям;
- $\|\cdot\|_{\text{spec}} = \|\cdot\|$  — спектральная норма.

Теперь введём матрицу с возмущением  $\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{H} + \delta \mathbf{E}$ . Тогда возмущение оператора  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A}(\delta) = \mathbf{H}(\delta) \mathbf{H}(\delta)^T = \mathbf{H} \mathbf{H}^T + \delta(\mathbf{H} \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{H}^T) + \delta^2 \mathbf{E} \mathbf{E}^T$$

Положим  $\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{H} \mathbf{E}^T + \mathbf{E} \mathbf{H}^T$ ,  $\mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{E} \mathbf{E}^T$ ,  $\mathbf{B}(\delta) = \delta \mathbf{A}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{A}^{(2)}$ . Заметим, что  $\mathbf{A}^{(1)}$  и  $\mathbf{A}^{(2)}$  — самосопряжённые операторы, а  $\mathbf{A}(\delta)$  — самосопряжённый неотрицательный оператор для любых  $\delta \in \mathbb{R}$ . Положим  $\mathbf{B}(\delta) = \delta \mathbf{A}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{A}^{(2)}$ .

Цель поставленных теоретических задач — сравнить возмущённый проектор  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  с

невозмущённым проектором  $\mathbf{P}_0^\perp$ .

Определим  $\mathbf{S}_0$  — матрица, псевдообратная к  $\mathbf{H}\mathbf{H}^\mathbf{T}$ . Положим  $\mathbf{S}_0^{(0)} = -\mathbf{P}_0$  и  $\mathbf{S}_0^{(k)} = \mathbf{S}_0^k$  для  $k \geq 1$ ,  $\|\mathbf{S}_0^{(k)}\| = 1/\mu_{\min}^k$ .

Далее — рассуждения из [2, раздел 5.3].

А именно, если обозначить  $r_i(N) = \tilde{h}_i(\delta) - h_i$  — остаток от разности между  $i$ -ми элементами рядов  $\tilde{\mathbf{H}}_N(\delta)$  и  $\mathbf{H}_N$ , а  $\mathbf{N}(\delta) = \mathbf{N}_N(\delta)$  — оператор с возмущением, то из того, что  $\|\mathbf{C}\|_{\max} \leq \|\mathbf{C}\|$ , получаем

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{H}}_N(\delta) - \mathbf{H}_N\|_{\max} &= \max_{0 \leq n < N} |\tilde{h}_n(\delta) - h_n| = \max_{0 \leq n < N} |r_i(N)| \\ \|\tilde{\mathbf{H}}_N(\delta) - \mathbf{H}_N\|_{\max} &= \|\mathcal{S}(\mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta)) - \mathbf{H}\|_{\max} = \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{S}$  — оператор диагонального усреднения (ганкелевизации),  $\Delta_\delta(\mathbf{H}) = \mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H}$ . Поскольку  $\|\mathcal{S}\mathbf{A}\|_{\max} \leq \|\mathbf{A}\|_{\max}$  для любой конечномерной матрицы  $\mathbf{A}$ , то

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| &= \|\mathcal{S}\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} \leq \|\Delta_\delta(\mathbf{H})\|_{\max} = \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta)\mathbf{H}(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{H}\|_{\max} \\ &= \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E} + \mathbf{N}\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} \\ &\leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} + \|\mathbf{N}\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} \\ &\leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{N})\mathbf{H}(\delta)\| + \|\mathbf{N}\mathbf{H}(\delta) + \delta\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max}. \end{aligned} \quad (2)$$

**Общая задача состоит в том, чтобы подобрать такой оператор  $\mathbf{N}$ , чтобы правая часть (2) стремилась к нулю.**

Если первое слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю при  $N \rightarrow \infty$ , то остается исследовать второе слагаемое. Перед тем, как приступить к решению теоретических задач, введём следующие определения:

**Определение 1.**

$$\mathbf{W}_p(\delta) = (-1)^p \sum_{l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}), \quad (3)$$

$a$

$$\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_p)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

**Определение 2.**

$$\mathbf{V}_0^{(n)} = \sum_{p=[n/2]}^n (-1)^p \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_p = n, s_i = 1, 2 \\ l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0}} \mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}),$$

$\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_p)$ ,  $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_{p+1})$ ,  $u$

$$\mathbf{V}_0^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{l}) = \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(s_1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{A}^{(s_p)} \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})}.$$

Теперь можно ввести теорему из [2]:

**Теорема 1** (2.1). Пусть  $\delta_0 > 0$  и

$$\|\mathbf{B}(\delta)\| < \mu_{\min}/2 \quad (4)$$

для всех  $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ . Тогда для возмущённого проектора  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  верно представление:

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta). \quad (5)$$

Более того,

$$\mathbf{P}_0^\perp(\delta) = \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{V}_0^{(n)}. \quad (6)$$

**Замечание 1.** Ряды (5) и (6) сходятся в спектральной норме.

Введём

$$\mathbf{B}(\delta) = |\delta| \left\| \mathbf{A}^{(1)} \right\| + \delta^2 \left\| \mathbf{A}^{(2)} \right\|.$$

Если  $\delta_0 > 0$  и  $\mathbf{B}(\delta_0) = \mu_{\min}/2$ , то тогда неравенство (4) верно для любых  $\delta$  таких, что  $|\delta| < \delta_0$ .

### 3.1.1. Задача №1

Оценить выражение сверху  $\forall n \in \mathbb{N} : \left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta) \right\|$ .<sup>1</sup> Воспользуемся вспомогательными теоремами и леммами из [2].

**Теорема 2.** Если  $\delta_0 > 0$  и  $\frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} < \frac{1}{4}$  для всех  $\delta \in (-\delta_0, \delta_0)$ , то проектор  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  существует и

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp \right\| \leq 4C \frac{\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}, \quad (7)$$

где  $C = e^{1/6} / \sqrt{\pi} \approx 0.667$ .

**Лемма 1.** Если  $0 < \beta < 1/4$ ,  $k \geq 0$ , то  $\sum_{p=k}^{\infty} \binom{2p}{p} \beta^p \leq C \frac{(4\beta)^k}{1 - 4\beta}$ ,  $C = e^{1/6} / \sqrt{\pi}$ . (6.1)

---

<sup>1</sup> Зачем это нужно? Если положить  $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1(\delta)$ , то может оказаться, что

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) \right\| \rightarrow 0,$$

но это не выполняется для  $\left\| (\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta)) \mathbf{H}(\delta) \right\|$ . Тогда можно попробовать взять  $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta)$ , см. (9) и [3].

*Доказательство.* Существование  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  следует из теоремы (1). Заметим, что в правой части (3) найдётся такой индекс  $j$ , что  $l_j > 0$  и  $l_{j-1} = 0$  или  $l_{j+1} = 0$ . Иначе  $l_1 + l_2 + \dots + l_{p+1} \geq p + 1 \neq p$ . Так как  $\|\mathbf{S}_0^{(k)}\| = 1/\mu_{\min}^k$  для любого  $k \geq 0$ , то можем оценить каждый член правой части из (3).

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{i-1}, 0, l_{i+1}, \dots, l_{p+1})\| &= \left\| \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_2)} \dots \mathbf{S}_0^{(l_{i-1})} \mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0 \dots \mathbf{B}(\delta) \mathbf{S}_0^{(l_{p+1})} \right\| \\ &\leq \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \|\mathbf{B}(\delta)\|^{p-1} \frac{1}{\mu_{\min}^{p-1}} = \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\forall i : 1 \leq i \leq p+1 \quad l_i \geq 0$  и  $l_1 + l_2 + \dots + l_{p+1} = p$ , то число векторов  $(l_1, l_2, \dots, l_{p+1})$  будет равняться  $\binom{2p}{p}$ . Таким образом оценим  $\mathbf{W}_p(\delta)$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{W}_p(\delta)\| &= \left\| (-1)^p \sum_{l_1 + \dots + l_{p+1} = p, l_j \geq 0} \mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1}) \right\| \\ &\leq \binom{2p}{p} \|\mathbf{W}_p(l_1, \dots, l_{p+1})\| \leq \binom{2p}{p} \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Оценим выражение в случае, когда  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\| &= \left\| \mathbf{P}_0^\perp + \sum_{p=1}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta) \right\| \\ &= \left\| \sum_{p=3}^{\infty} \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leq \sum_{p=3}^{\infty} \|\mathbf{W}_p(\delta)\| \leq \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1}. \end{aligned}$$

Теперь, считая, что  $k = 2$ ,  $\beta = \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1} \leq \frac{1}{4}$ , воспользуемся леммой (1) и тем, что  $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \leq \|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta)\| \leq \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}}$ , и получим:

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{B}(\delta) \mathbf{P}_0\| \sum_{p=3}^{\infty} \binom{2p}{p} \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{p-1} \leq 4^3 C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \frac{1}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}.$$

□

Аналогично, можно выделить следующее:

**Следствие 1.**

$$\left\| \mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta) \right\| \leq 4^{n+1} C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}. \quad (8)$$

Тогда можно применить результат из неравенства (8) для оценки первого слагаемого правой части из (2). Для этого можно ограничиться условиями из теоремы (2):

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)) \mathbf{H}(\delta)\| \leq 4^3 C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}}. \quad (9)$$



### 3.1.2. Задача №2

Рассматриваем вещественный сигнал  $H = (h_0, h_1, \dots, h_N, \dots)$ , где

$$h_n = \theta_1 n + \theta_0,$$

линейный сигнал,  $\theta_1 \neq 0$ , а помехой (откуда?) является линейная комбинация гармоник

$$e_n = \sum_{l=1}^r \tau_l \cos(2\pi n \omega_l + \varphi_l),$$

где  $\tau_l \neq 0, \omega_l \neq \omega_p$  при  $l \neq p$  и  $0 < \omega_l < 1/2$ .

Теперь обратимся к (2). При  $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$  верна теорема из [3, стр.7, т.2]:

**Теорема 3.** *Рассмотрим при  $n = 0, 1, \dots, N-1$  линейный сигнал  $h_n = \theta_1 n + \theta_0$ , где  $\theta_1 \neq 0$ , и помеху, которая является линейной комбинацией гармоник*

$$e_n = \sum_{l=1}^r \tau_l \cos(2\pi n \omega_l + \varphi_l),$$

где  $\tau_l \neq 0, \omega_l \neq \omega_p$  при  $l \neq p$  и  $0 < \omega_l < 1/2$ .

Положим  $x_n = h_n + \delta e_n$ , где  $\delta$  — формальный параметр возмущения и, взяв  $N$  нечётное и  $L = (N+1)/2$ , применим к ряду  $x_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , метод АСС с восстановлением по первым 2-м компонентам.

Если обозначить  $h_0(\delta), \dots, h_{N-1}(\delta)$  результаты восстановления ряда  $\{x_n\}_{n=0}^{N-1}$  с помощью метода АСС с описанными параметрами, а  $r_n(N) = h_n(\delta) - h_n$  — остаток от разности между  $n$ -ми элементами восстановленного и линейного рядов длины  $N$ , то для любого  $\delta \in \mathbb{R}$  при  $N \rightarrow \infty$

$$\max_{0 \leq n < N} |r_n(N)| = O(N^{-1})$$

Как можно заметить, эта теорема выполняется в том случае, когда  $L = K$  при  $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1$ .

Сформулируем задачу №2:

Обобщить результат [3] с  $L = K$  до  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$  с помощью выбора  $\mathbf{N} = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2$ .

Тогда  $K/N \rightarrow 1 - \alpha \in (0, 1)$ . Теперь рассматриваем неравенство

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq \|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - (\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)) \mathbf{H}(\delta)\| + \|(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2) \mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max}. \quad (10)$$

*Идея:* показать, что слагаемые правой части оценки  $= O(N^{-n})$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Тогда будет верна асимптотическая сходимость  $\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \rightarrow 0$ .

Для того, чтобы доказать асимптотическую сходимость, оценим слагаемые покомпонентно. Введём  $\mu_{\max} = \|\mathbf{H}\|^2$  и воспользуемся соотношением между спектральной нормой  $\|\mathbf{C}\|$  и равномерной нормой  $\|\mathbf{C}\|_{\max}$ :

$$\|\mathbf{C}\|_{\max} \leq \|\mathbf{C}\| \leq \sqrt{LK} \|\mathbf{C}\|_{\max}.$$

Поскольку  $LK \sim \alpha(1 - \alpha)N^2 \sim CN^2$ , то

$$\|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\| = \|\mathbf{E}\|^2 \sim C_{\cos}N^2, \mu_{\max} \sim C_{\max}N^4, \mu_{\min} \sim C_{\min}N^4. \quad (11)$$

Применим леммы из [3]:

**Лемма 2.** При  $N \rightarrow \infty$  имеет место соотношение  $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$ .

*Доказательство.* При  $1 \leq p \leq L$  и  $1 \leq s \leq K$  запишем элемент матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{E}^T$  с индексом  $(p, s)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{E}^T[p, s] &= \sum_{j=0}^{K-1} (p+j) \cos(2\pi(s+j)\omega + \varphi) = \\ &= p \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \varphi_s) + \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \varphi_s), \end{aligned}$$

где  $\varphi_s = 2\pi s\omega + \varphi$ .

Так как для любой  $\varphi$ :

$$p \left| \sum_{j=0}^{K-1} \cos(2\pi j\omega + \varphi) \right| = p \left| \frac{\sin(\pi K\omega)}{\sin(\pi\omega)} \cos(\pi(K-1)\omega + \varphi) \right| \leq \frac{p}{\sin(\pi\omega)} = O(N)$$

и в обозначениях

$$B_K = \frac{1}{2\sin(\pi\omega)} \sin(\pi(2K-1)\omega + \varphi), \quad E_K = \frac{\sin(\pi K\omega)}{2\sin^2(\pi\omega)} \sin(\pi K\omega + \varphi)$$

имеет место

$$\left| \sum_{j=0}^{K-1} j \cos(2\pi j\omega + \phi) \right| = |KB_K - E_K| \leq \frac{K}{2\sin(\pi\omega)} + \frac{1}{2\sin^2(\pi\omega)} = O(N).$$

Таким образом, каждый член матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{E}^T$  не превосходит  $O$ -большое от  $N$ , или  $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$ . □

**Лемма 3.** *Имеет место соотношение  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ .*

*Доказательство.* Поскольку рассматривается ряд  $H$ , состоящий из элементов  $h_n = \theta_1 n + \theta_0$ , обозначим

$$P_L(0) = (1, 1, 1, \dots, 1)^T, \quad P_L(1) = (0, 1, \dots, (L-1))^T$$

как базис линейного пространства  $U_0^\perp$ . Тогда матрицу  $\mathbf{P}_0^\perp$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0^\perp &= \gamma_{00}^2 P_L(0) P_L^T(0) + (\gamma_{11} P_L(1) - \gamma_{10} P_L(0)) (\gamma_{11} P_L^T(1) - \gamma_{10} P_L^T(0)) \\ &= (\gamma_{00}^2 + \gamma_{10}^2) P_L(0) P_L^T(0) + \gamma_{11}^2 P_L(1) P_L^T(1) - \gamma_{11} \gamma_{10} (P_L(1) P_L^T(0) + P_L(0) P_L^T(1)), \end{aligned} \quad (12)$$

где  $L \times L$  матрицы имеют вид

$$\begin{aligned} P_L(0) P_L^T(0) &= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad P_L(0) P_L^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & L-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & L-1 \end{pmatrix}, \\ P_L(1) P_L^T(0) &= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L-1 & \dots & L-1 \end{pmatrix}, \quad P_L(1) P_L^T(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & L-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & L-1 & \dots & (L-1)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\gamma_{11} = \sqrt{12}/\sqrt{L(L^2-1)}, \quad \gamma_{10} = \sqrt{3(L-1)}/\sqrt{L(L+1)}, \quad \gamma_{00} = 1/\sqrt{L}.$$

Умножая каждое слагаемое в правой части (12) на матрицу  $\mathbf{E}$ , где

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \dots & \cos(2\pi(j-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(K-1)\omega + \varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(i-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(i+j-2)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(K+i-1)\omega + \varphi) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos(2\pi(L-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(L+j-1)\omega + \varphi) & \dots & \cos(2\pi(N-1)\omega + \varphi) \end{pmatrix}.$$

Аналогично Лемме 2, оцениваем каждый элемент матрицы  $\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}$  и получаем, что  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ .  $\square$

**Лемма 4.** *Имеет место соотношение  $\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| = O(N^{-4})$ .*<sup>2</sup>

<sup>2</sup> Здесь, в [3] накладывалось условие на квадратичность матрицы:  $L = K$ .

*Доказательство.* Рассмотрим сингулярное разложение матриц  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ ,  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{H}\mathbf{H}^T &= \mu_{\max} U_1 U_1^T + \mu_{\min} U_2 U_2^T, \quad \mathbf{S}_0 = \mu_{\max}^{-1} U_1 U_1^T + \mu_{\min}^{-1} U_2 U_2^T, \\ \mathbf{H}^T\mathbf{H} &= \mu_{\max} V_1 V_1^T + \mu_{\min} V_2 V_2^T, \quad \mathbf{H} = \mu_{\max}^{1/2} U_1 V_1^T + \mu_{\min}^{1/2} U_2 V_2^T,\end{aligned}$$

а  $\mathbf{P}_0^\perp = U_1 U_1^T + U_2 U_2^T$ , где  $U_1, U_2$  — ортонормированные собственные  $L \times 1$  вектора матрицы  $\mathbf{H}\mathbf{H}^T$ , а  $V_1, V_2$  — ортонормированные собственные  $K \times 1$  вектора матрицы  $\mathbf{H}^T\mathbf{H}$ . Далее,

$$\mathbf{H}\mathbf{E}^T = \mu_{\min}^{1/2} \left( \frac{\mu_{\max}^{1/2}}{\mu_{\min}^{1/2}} U_1 V_1^T \mathbf{E}^T + U_2 V_2^T \mathbf{E}^T \right),$$

и, поскольку  $\mu_{\min} \sim C_{\min} N^2$ ,  $\mu_{\max} \sim C_{\max} N^2$ ,  $\mu_{\max}^{1/2}/\mu_{\min}^{1/2} \rightarrow c > 1$  и  $\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N)$ , то отсюда следует, что

$$\|c U_1 V_1^T \mathbf{E}^T + U_2 V_2^T \mathbf{E}^T\|_{\max} = O(N^{-1}).$$

Так как  $\|\mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max} = \|U_1 U_1^T \mathbf{E} + U_2 U_2^T \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ , то  $\|U_i U_i^T \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$  при  $i = 1, 2$ . Получим

$$\|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-5}) \text{ и } \|\mathbf{S}_0 \mathbf{E}\| = O(N^{-4}).$$

□

Сформулируем предложения:

**Предложение 1.** Пусть  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$ . Тогда для любого  $\delta$

$$\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)) \mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-4}).$$

*Доказательство.* Согласно Лемме 2 и асимптотикам (11), существует такая постоянная  $C_1$ , что

$$\|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min} \leq \delta^2 \|\mathbf{E}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} + 2|\delta| \|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|/\mu_{\min} \leq C_1(\delta^2 N^{-2} + |\delta| N^{-2}) = O(N^{-2}).$$

Поэтому для любого  $\delta$  неравенство (9) выполняется при достаточно большом  $N$  и, следовательно, при  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}\|(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)) \mathbf{H}(\delta)\| &\leq \|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\| \|\mathbf{H}(\delta)\| \\ &\leq C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\|/\mu_{\min}} \sim C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \|\mathbf{H}\| = O(N^{-4}).\end{aligned}$$

□

На этом этапе получаем

$$\max_{0 \leq i < N} |r_i(N)| \leq C \left( \frac{\|\mathbf{B}(\delta)\|}{\mu_{\min}} \right)^3 \frac{\|\mathbf{H}(\delta)\|}{1 - 4 \|\mathbf{B}(\delta)\| / \mu_{\min}} + \|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max}.$$

Так как первое слагаемое справа имеет оценку  $O(N^{-4})$ , то осталось оценить  $\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta) + \delta \mathbf{P}_0^\perp \mathbf{E}\|_{\max}$

**Предложение 2.**<sup>3</sup> В условиях Предложения 1  $\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta))\mathbf{H}(\delta)\|_{\max} = O(N^{-1})$

*Доказательство.* Распишем  $\mathbf{W}_1(\delta), \mathbf{W}_2(\delta)$ :

$$\mathbf{W}_1(\delta) = \delta \mathbf{V}_1^{(1)} + \delta^2 \mathbf{V}_1^{(2)},$$

$$\text{где } \mathbf{V}_1^{(1)} = \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0, \mathbf{V}_1^{(2)} = \mathbf{P}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_0 \mathbf{E} \mathbf{E}^T \mathbf{P}_0.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_2(\delta) &= \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=2, l_j \geq 0 \\ s_1, s_2=1,2}} \delta^{s_1+s_2} \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(s_1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{A}^{(s_2)} \mathbf{S}_0^{(l_3)} = \delta^2 \mathbf{V}_2^{(1)} + \delta^3 \mathbf{V}_2^{(2)} + \delta^4 \mathbf{V}_2^{(3)}, \\ \mathbf{V}_2^{(1)} &= \sum_{l_1+l_2+l_3=2, l_j \geq 0} \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{A}^{(1)} \mathbf{S}_0^{(l_3)}, \\ \mathbf{V}_2^{(2)} &= \sum_{\substack{l_1+l_2+l_3=2, l_j \geq 0 \\ (s_1, s_2)=(1,2), (2,1)}} \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(s_1)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{A}^{(s_2)} \mathbf{S}_0^{(l_3)}, \\ \mathbf{V}_2^{(3)} &= \sum_{l_1+l_2+l_3=2, l_j \geq 0} \mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{A}^{(2)} \mathbf{S}_0^{(l_3)}. \end{aligned}$$

Таким образом, разбили  $\mathbf{W}_2(\delta)$  на три части так, что элементы в  $\mathbf{V}_2^{(1)}$  имеют вид  $\mathbf{S}_0^{(l_1)} \mathbf{H} \mathbf{E}^T \mathbf{S}_0^{(l_2)} \mathbf{E} \mathbf{H}^T \mathbf{S}_0^{(l_3)}$ , то есть,  $\mathbf{H} \mathbf{E}^T, \mathbf{E} \mathbf{H}^T$  входят в каждое слагаемое два раза, в каждое слагаемое из  $\mathbf{V}_2^{(2)}$  часть  $\mathbf{H} \mathbf{E}^T, \mathbf{E} \mathbf{H}^T, \mathbf{E} \mathbf{E}^T$  входит один раз, а в каждое слагаемое из  $\mathbf{V}_2^{(3)}$  часть  $\mathbf{E} \mathbf{E}^T$  входит два раза. Оценим полученные выражения. Аналогично доказательству в [3], найдём  $\mathbf{V}_i^{(j)}$ ,  $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ , для которых  $\|\mathbf{V}_i^{(j)}\| = O(N^k)$ ,  $k =$

---

<sup>3</sup> Теперь насчет  $W_2$ . Посмотрите ф-лы 6- 9 статьи, которую я Вам шлю. Есть гипотеза, что SSA всяко (при больших N) определяется линейным членом  $J_2$ , то есть  $J_2 = o(\text{остальных членов суммы})$ . Но эти формулы — для  $W_1$ , и для лин. сигнала это не так — там не о, а О. Думаю, что если это сделать для  $W_2$ , то все получится. Денис, вот что. 1. Если брать самую простую (и самую грубую) оценку  $\|\mathbf{H} \mathbf{E}\| \leq \|\mathbf{H}\| \|\mathbf{E}\|$ , то получится оценка с нормой  $\leq \text{const}$  для  $W_1$ . 2. А если взять с  $W_1 + W_2$ , то будет ОК.

$-3, -4, -5, \dots$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{V}_1^{(1)}\| &\leq 2\|\mathbf{S}_0\|\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\| = O(N^{-2}) \\ \|\mathbf{V}_1^{(2)}\| &\leq 2\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\|\|\mathbf{E}\| = O(N^{-3}) \\ \|\mathbf{V}_2^{(1)}\| &\leq 24\|\mathbf{S}_0\|^2\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|^2 = O(N^{-4}) \\ \|\mathbf{V}_2^{(2)}\| &\leq 12\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\|^2\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\| = O(N^{-6}) \\ \|\mathbf{V}_2^{(3)}\| &\leq 6\|\mathbf{S}_0\mathbf{E}\|^2\|\mathbf{E}\|^2 = O(N^{-6})\end{aligned}$$

Следовательно, из всех слагаемых остаётся проверить только выражение  $\mathbf{V}_1^{(1)}\mathbf{H}(\delta)$ , поскольку  $\|(\mathbf{W}_1(\delta) + \mathbf{W}_2(\delta) - \delta\mathbf{V}_0^{(1)})\mathbf{H}(\delta)\| = O(N^{-1}) \rightarrow 0$  из полученных неравенств.

$$\mathbf{V}_0^{(1)}\mathbf{H}(\delta) = \mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H} + \delta(\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{E} + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0\mathbf{E}).$$

Поскольку

$$\|\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{E} + \mathbf{S}_0\mathbf{H}\mathbf{E}^T\mathbf{P}_0\mathbf{E}\| \leq 2\|\mathbf{H}\mathbf{E}^T\|\|\mathbf{E}\|\|\mathbf{S}_0\| = O(N^{-1}),$$

то остаётся разобраться с матрицей  $\mathbf{P}_0\mathbf{E}\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H}$ .

Так как  $\mathbf{H}^T\mathbf{S}_0\mathbf{H} = \mathbf{Q}_0^\perp$ , где  $\mathbf{Q}_0^\perp$  —  $K \times K$  матрица ортогонального проектирования на пространство строк матрицы  $\mathbf{H}$ , то будем рассматривать элементы матрицы

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp - \mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp.$$

Отсюда и из Леммы 2 следует, что  $\|\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = \|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\|_{\max} = O(N^{-1})$ . Аналогично,  $\|\mathbf{P}_0^\perp\mathbf{E}\mathbf{Q}_0^\perp\|_{\max} = O(N^{-1})$ .  $\square$

## 4. Заключение

В ходе проделанных работ были изучены теоретическая часть метода АСС, связанная со сравнением возмущённого проектора  $\mathbf{P}_0^\perp(\delta)$  и невозмущённого проектора  $\mathbf{P}_0^\perp$ , а также дана оценка  $\left\|\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \sum_{p=1}^n \mathbf{W}_p(\delta)\right\|$ . В дальнейшем планируется оценить  $\left\|\left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \delta\mathbf{V}_0^{(n)}\right)\mathbf{H}(\delta)\right\|$  и сравнить его с  $\left\|\left(\mathbf{P}_0^\perp(\delta) - \mathbf{P}_0^\perp - \mathbf{W}_1(\delta) - \mathbf{W}_2(\delta)\right)\mathbf{H}(\delta)\right\|$ , после чего продолжить изучение теории по общей задаче.<sup>4</sup>

---

<sup>4</sup> Нужно будет переделать.

## 5. Продолжение по предложениям

2 возможных продолжения:

1. Обобщить результат [3] с  $L = K$  до  $L/N \rightarrow \alpha \in (0, 1)$  с помощью выбора  $N = W_1 + W_2/$

2. Рассмотреть (5) вместо (4), предварительно умножив разность проекторов на  $H(\delta)$  и разложив полученную сумму по степеням  $\delta$ . Результаты в стиле [4].

## Список литературы

1. GOLYANDINA, N., NEKRUTKIN, V. AND ZHIGLJAVSKY, A. (2001). *Analysis of Time Series Structure. SSA and Related Techniques*. Champan & Hall/CRC, Boca Raton-London-New York-Washington D.C.
2. NEKRUTKIN, V. (2010). *Perturbation expansions of signal subspaces for long signals*. Statistics and Its Interface. **3**, 297–319.
3. Н.Зенкова, В.Некруткин Об асимптотической разделимости линейных сигналов с гармониками методом анализа сингулярного спектра,  
Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2022. Т. 9 (67). Вып. 2.
4. В.В. Некруткин Об устойчивости метода Анализ Сингулярного Спектра для длинных временных рядов, в печати.