# A probabilistic representation of the fractional differential operator

**Article** *in* Journal of Mathematical Sciences · October 2022



**1 author:**

Temirlan Abildaev
Saint Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics of the Russian Academy of Sciences

Т. Е. Абильдаев, Вероятностное представление резольвенты оператора дробного дифференцирования, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2022, том 515, 5–18

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 515, 2022 г.

**Т. Е. Абильдаев**

# ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА ДРОБНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

## §1. Введение

Пусть $\xi(t)$ – стандартный симметричный устойчивый процесс с показателем устойчивости $\alpha \in (1,2)$, то есть такой процесс Леви (см. [1, гл. 1, §3]), что

$$\mathbf{E}e^{ip\xi(t)} = e^{-t|p|^{\alpha}}.$$

Подобно любому другому процессу Леви, $\xi(t)$ порождает полугруппу операторов $P^t$ (см. [1, гл. 3, §3]), $t \geqslant 0$, действующую по правилу

$$\big(P^t g\big)(x) = \mathbf{E}g(x+\xi(t)). \tag{1}$$

Генератором полугруппы $P^t$ является $\mathcal{D}^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования порядка $\alpha$,

$$\big(\mathcal{D}^{\alpha}g\big)(x) = -\frac{1}{2\cos\big(\frac{\pi\alpha}{2}\big)\Gamma(-\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(g(x+y)-g(x)-yg'(x)\big)\,\frac{1}{|y|^{1+\alpha}}\,dy.$$

Преобразование Фурье $\mathcal{F}$ осуществляет унитарную эквивалентность оператора $\mathcal{D}^{\alpha}$ и оператора умножения на функцию $-|\cdot|^{\alpha}$.

Мы рассматриваем оператор $-\mathcal{D}^{\alpha}$ в $L_2(\mathbb{R})$, считая его продолженным с области определения $W_2^{\alpha}(\mathbb{R})$. В этом случае

$$P^t = e^{t\mathcal{D}^{\alpha}},$$

а формулу (1) можно рассматривать как вероятностное представление экспоненты оператора $-\mathcal{D}^{\alpha}$.

В данной работе подобное представление строится для резольвенты оператора $-\mathcal{D}^{\alpha}$. Именно, определяются случайные процессы, позволяющие получить вероятностное представление оператора $(-\mathcal{D}^{\alpha}-\lambda)^{-1}$

---

*Ключевые слова*: случайные процессы, процессы Леви, устойчивые процессы, локальное время.

Работа выполнена при поддержке Санкт-Петербургского международного математического Института имени Леонарда Эйлера, грант No. 075-15-2022-289 от 06.04.2022.

при $\alpha \in (1,2)$ и $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$. Аналогичный подход ранее использовался в работе [2], где было определено семейство резольвентных случайных процессов, позволяющее строить вероятностное представление оператора $(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \lambda)^{-1}$. Указанное семейство процессов включало в себя (при $\lambda = 0$) локальное время винеровского процесса.

## §2. Рассматриваемый класс процессов.

Пусть $\xi(t)$ – чисто скачкообразный процесс Леви, определяемый своей мерой Леви $\Lambda$.

Пусть $\alpha \in (1,2)$. Предположим, что мера $\Lambda$ *симметрична* и обладает следующими свойствами:

$\mathrm{M}_1$:
$$\exists C > 0 \quad \forall r > 0 \int\limits_{|x|\leqslant r} x^2\,\Lambda(dx) \leqslant Cr^{2-\alpha}. \tag{2}$$

$\mathrm{M}_2$:
$$\exists \gamma \in [1,\alpha) \quad \exists C > 0 \quad \forall r > 0 \int\limits_{|x|>r} |x|^\gamma\,\Lambda(dx) \leqslant Cr^{\gamma-\alpha}. \tag{3}$$

**Замечание.** Меры Леви симметричных устойчивых процессов обладают свойствами $\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_2$.

При фиксированных $t$ и $s$, $0 \leqslant s < t$, мы имеем

$$\mathbf{E}e^{ip(\xi(t)-\xi(s))} = e^{-(t-s)L(p)}, \quad L(p) = -\int\limits_{\mathbb{R}} (e^{ipy} - 1 - ipy)\,\Lambda(dy).$$

**Лемма 2.1.** *Существует константа $C > 0$, такая, что*

$$|L(p)| \leqslant C|p|^\alpha.$$

**Доказательство.** При $p = 0$ неравенство очевидно. Пусть $p \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned}|L(p)| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}} (e^{ipy} - 1 - ipy)\,\Lambda(dy)\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy)\\ &= \int\limits_{|y|\leqslant 1/|p|} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy) + \int\limits_{|y|>1/|p|} |e^{ipy} - 1 - ipy|\,\Lambda(dy).\end{aligned} \tag{4}$$

Обозначим интегралы в правой части (4) как $I_1$ и $I_2$ соответственно.

Оценим $I_1$, используя (2).

$$\int\limits_{|y|\leqslant 1/|p|} |e^{ipy}-1-ipy|\Lambda(dy) \leqslant p^2 \int\limits_{|y|\leqslant 1/|p|} y^2\,\Lambda(dy)\leqslant Cp^2\frac{1}{|p|^{2-\alpha}}=C|p|^{\alpha}.$$

Возьмем $\gamma$ из условия $\mathrm{M}_2$ и оценим $I_2$, используя (3).

$$\int\limits_{|y|>1/|p|} |e^{ipy}-1-ipy|\Lambda(dy)\leqslant C|p|^{\gamma}\int\limits_{|y|>1/|p|} |y|^{\gamma}\Lambda(dy)$$

$$\leqslant C|p|^{\gamma}\frac{1}{|p|^{\gamma-\alpha}}=C|p|^{\alpha}. \qquad \square$$

## §3. Функционалы от траекторий процессов Леви и их свойства.

Фундаментальным решением для оператора $-\mathcal{D}^{\alpha}$ является функция

$$v(x)=\frac{-|x|^{\alpha-1}}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha)}.$$

Определим функцию $h:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$, полагая

$$h(x)=(-\mathcal{D}^{\alpha}v)(x)$$
$$=-\frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\Gamma(\alpha)}\int\limits_{\mathbb{R}}\left(|x+y|^{\alpha-1}-|x|^{\alpha-1}-(\alpha-1)y\,\mathrm{sgn}(x)|x|^{\alpha-2}\right)\Lambda(dy).$$

Вычислим преобразование Фурье $\mathcal{F}h$ функции $h$. Имеем

$$(\mathcal{F}h)(p)=\widehat{h}(p)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipx}h(x)\,dx=|p|^{-\alpha}L(p).$$

Далее, пусть $\lambda\in\mathbb{C}$. Определим величину $r_t(\lambda,x)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda\leqslant 0$ и величину $r(\lambda,x)$ при $\mathrm{Re}\,\lambda<0$ через их преобразования Фурье $\widehat{r}_t(\lambda,p)$ и $\widehat{r}(\lambda,p)$ соответственно, полагая

$$\widehat{r}_t(\lambda,p)=\widehat{h}(p)\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau,\quad \widehat{r}(\lambda,p)=\widehat{h}(p)\int\limits_0^{\infty} e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau.$$

Теперь определим пространство $\mathcal{W}_2^\delta(\mathbb{R})$ случайных величин со значениями в $L_2(\mathbb{R})$ с нормой $\|\cdot\|_{2,\delta}$,

$$\|\varphi\|_{2,\delta}^2 = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp, \quad \varphi\in\mathcal{W}_2^\delta(\mathbb{R}).$$

По теореме Фубини любая функция из $\mathcal{W}_2^\delta(\mathbb{R})$ принадлежит $W_2^\delta(\mathbb{R})$ с вероятностью 1.

**Теорема 3.1.** 1. *Для любого* $\delta\in\big[0,\frac{\alpha-1}{2}\big)$ *величина* $r_t(\lambda,\cdot\,)$ *принадлежит* $\mathcal{W}_2^\delta(\mathbb{R})$.

2. *Если* $\operatorname{Re}\lambda<0$, *то существует*

$$\mathcal{W}_2^\delta\text{-}\lim_{t\to\infty} r_t(\lambda,x),$$

*один и тот же для всех* $\delta\in\big[0,\frac{\alpha-1}{2}\big)$. *При этом данный предел есть* $r(\lambda,x)$.

**Доказательство.** Пусть $\delta\in\big[0,\frac{\alpha-1}{2}\big)$.

Докажем первую часть теоремы. Имеем

$$\|r_t(\lambda,\cdot\,)\|_{2,\delta}^2 = \mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{r}_t(\lambda,p)|^2\,dp$$

$$= \int\limits_{|p|\leqslant|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2 dp \tag{5}$$

$$+ \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2 dp. \tag{6}$$

Обозначим интегралы в (5) и (6) как $I_1$ и $I_2$ соответственно.

Оценим $I_1$, используя лемму 2.1.

$$I_1 = \int\limits_{|p|\leqslant|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2 dp$$

$$\leqslant \int\limits_{|p|\leqslant|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\left(\int\limits_0^t e^{\operatorname{Re}\lambda\,\tau\widehat{h}(p)}\,d\tau\right)^2 dp$$

$$\leqslant \int\limits_{|p|\leqslant|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|^2}\big(1+|p|^{2\delta}\big)\big(1-e^{\mathrm{Re}\,\lambda\, t\widehat{h}(p)}\big)^2\,dp \leqslant C(\lambda)<\infty. \quad (7)$$

Оценим $I_2$.

$$I_2=\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2 dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}(p)}e^{ip(\xi(\tau)-\xi(s))}\,dsd\tau\,dp$$

$$=2\,\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}\,e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}(p)}e^{-(\tau-s)L(p)}\,ds\,d\tau\,dp$$

$$=2\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\,\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)}{\overline{\lambda}\widehat{h}(p)+L(p)}\int\limits_0^t\big(e^{2\mathrm{Re}\lambda\,\tau\widehat{h}(p)}-e^{\tau(\lambda\widehat{h}(p)-L(p))}\big)d\tau\,dp. \quad (8)$$

**a)** Пусть сначала $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 0$. Тогда величина (8) равна

$$2\,\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\left(\frac{e^{2\,\mathrm{Re}\,\lambda\, t\widehat{h}(p)}-1}{2\,\mathrm{Re}\,\lambda}-\frac{e^{t\frac{L(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1}{\lambda-|p|^\alpha}\right)dp$$

$$\leqslant 2\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\left(\frac{\big|e^{2\,\mathrm{Re}\,\lambda\, t\widehat{h}(p)}-1\big|}{2\,|\mathrm{Re}\,\lambda|}+\frac{\big|e^{t\frac{L(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big|}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\right)dp$$

$$\leqslant 2\left(2+\frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\right)\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\,dp$$

$$\leqslant C(\lambda)\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^\alpha}\,dp<\infty. \quad (9)$$

**b)** Пусть теперь $\mathrm{Re}\,\lambda=0$. Тогда величина (8) равна

$$2\,\mathrm{Re}\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1+|p|^{2\delta}}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha}\left(t-\frac{e^{t\frac{L(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1}{\lambda-|p|^\alpha}\right)dp$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^{\alpha}}\Big(t+\frac{2}{|p|^{\alpha}}\Big)\,dp$$

$$\leqslant C(\lambda,t) \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^{\alpha}}\Big(t+\frac{2}{|p|^{\alpha}}\Big)\,dp<\infty. \tag{10}$$

Объединяя оценки (7), (9), (10), получаем

$$\|r_t(\lambda,\,\cdot\,)\|^2_{2,\delta}=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{r}_t(\lambda,p)|^2\,dp<\infty.$$

Пусть $\operatorname{Re}\lambda<0$. Докажем теперь вторую часть теоремы. Покажем, что последовательность $\{r_{t_n}(\lambda,x)\}$, $t_n\to\infty$, сходится в $\mathcal{W}^{\delta}_2(\mathbb{R})$ к $r(\lambda,x)$. Имеем

$$\|r(\lambda,\cdot)-r_{t_n}(\lambda,\cdot)\|^2_{2,\delta}=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{r}(\lambda,p)-\widehat{r}_{t_n}(\lambda,p)|^2\,dp$$

$$=\int\limits_{|p|\leqslant|\operatorname{Re}\lambda|+1}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\bigg|\int\limits_{t_n}^{\infty}e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\bigg|^2\,dp \tag{11}$$

$$+\int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\bigg|\int\limits_{t_n}^{\infty}e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\bigg|^2\,dp. \tag{12}$$

Обозначим интегралы в (11) и (12) как $I_1$ и $I_2$ соответственно.

Оценим $I_1$.

$$I_1=\int\limits_{|p|\leqslant|\operatorname{Re}\lambda|+1}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\bigg|\int\limits_{t_n}^{\infty}e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\bigg|^2\,dp$$

$$\leqslant\int\limits_{|p|\leqslant|\operatorname{Re}\lambda|+1}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\bigg(\int\limits_{t_n}^{\infty}e^{\operatorname{Re}\lambda\,\tau\widehat{h}(p)}\,d\tau\bigg)^2\,dp$$

$$=\int\limits_{|p|\leqslant|\operatorname{Re}\lambda|+1}\frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)}{|\operatorname{Re}\lambda|}\,e^{2\operatorname{Re}\lambda\,t_n\widehat{h}(p)}\,dp\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0. \tag{13}$$

Оценим $I_2$.

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\,\mathbf{E}\left|\int\limits_{t_n}^{\infty} e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2 dp \\
&\leqslant 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\left|\mathbf{E}\int\limits_{t_n}^{\infty}\int\limits_{t_n}^{\tau} e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}(p)}e^{ip(\xi(\tau)-\xi(s))}\,ds\,d\tau\right| dp \\
&= 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)\left|\int\limits_{t_n}^{\infty}\int\limits_{t_n}^{\tau} e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}\,e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}(p)}e^{-(\tau-s)L(p)}\,ds\,d\tau\right| dp \\
&= 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)}{|\overline{\lambda}\widehat{h}(p)+L(p)|}\left|\int\limits_{t_n}^{\infty}\big(e^{2\operatorname{Re}\lambda\tau\widehat{h}(p)}-e^{\tau(\lambda\widehat{h}(p)-L(p))}e^{t_n(\overline{\lambda}\widehat{h}(p)+L(p))}\big)d\tau\right| dp \\
&\leqslant 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{\overline{\lambda}+|p|^{\alpha}}\left(\left|\frac{1}{2\operatorname{Re}\lambda}e^{2\operatorname{Re}\lambda\, t_n\widehat{h}(p)}\right|+\left|\frac{1}{\lambda-|p|^{\alpha}}e^{t_n\frac{L(p)}{|p|^{\alpha}}(\lambda-|p|^{\alpha})}\right|\right) dp \\
&\leqslant 2 \int\limits_{|p|>|\operatorname{Re}\lambda|+1} \frac{1+|p|^{2\delta}}{|p|^{\alpha}-|\operatorname{Re}\lambda|}\left(\frac{e^{2\operatorname{Re}\lambda\, t_n\widehat{h}(p)}}{2\,|\operatorname{Re}\lambda|}+e^{t_n\frac{L(p)}{|p|^{\alpha}}(\operatorname{Re}\lambda-|p|^{\alpha})}\right) dp \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Объединяя (13), (14), получаем

$$
\|r(\lambda,\cdot)-r_{t_n}(\lambda,\cdot)\|^2_{2,\delta} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \qquad \square
$$

**Следствие.** *Для любого* $\delta\in[0,\frac{\alpha-1}{2})$ *почти наверное* $r_t(\lambda,\,\cdot\,)\in W_2^{\delta}(\mathbb{R})$, $r(\lambda,\,\cdot\,)\in W_2^{\delta}(\mathbb{R})$.

**Доказательство.** Пусть $\delta\in[0,\frac{\alpha-1}{2})$. Выберем в $W_2^{\delta}(\mathbb{R})$ норму $|\cdot|_{2,\delta}$,

$$
|\varphi|^2_{2,\delta} = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp, \quad \varphi\in W_2^{\delta}(\mathbb{R}),
$$

эквивалентную стандартной (см. [3, гл. I, §1]). Утверждение следует из теоремы Фубини и доказанной выше конечности величины

$$
\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{r}_t(\lambda,p)|^2\,dp = \mathbf{E}\,|r_t(\lambda,\cdot)|^2_{2,\delta}. \qquad \square
$$

По определению имеем

$$r_t(\lambda,x)=\frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{[-M,M]}(p)\,e^{-ipx}\,\widehat{h}(p)\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\,dp, \tag{15}$$

$$r(\lambda,x)=\frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{[-M,M]}(p)\,e^{-ipx}\,\widehat{h}(p)\int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\,dp. \tag{16}$$

Правые части равенств (15), (16) можно кратко обозначить как

$$\int\limits_0^t e^{\lambda\tau T_h}\,h(x-\xi(\tau))\,d\tau \quad \text{и} \quad \int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau T_h}\,h(x-\xi(\tau))\,d\tau \tag{17}$$

соответственно. Здесь $T_h$ – оператор свертки с $h$. Введенные обозначения объясняются следующей формальной выкладкой.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}\,\widehat{r}_t(\lambda,\cdot)&=\mathcal{F}^{-1}\Bigg(\widehat{h}(\cdot)\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(\cdot)}e^{i\xi(t)\cdot}\,d\tau\Bigg)\\
&=\mathcal{F}^{-1}\Bigg(\sum_{m=0}^\infty\frac{\lambda^m}{m!}\big(\widehat{h}(\cdot)\big)^m\int\limits_0^t\tau^m\,\widehat{h}(\cdot)\,e^{i\xi(t)\cdot}\,d\tau\Bigg)\\
&=\sum_{m=0}^\infty\frac{\lambda^m}{m!}\,T_h^m\mathcal{F}^{-1}\Bigg(\int\limits_0^t\tau^m\,\widehat{h}(\cdot)\,e^{i\xi(t)\cdot}\,d\tau\Bigg)\\
&=\sum_{m=0}^\infty\frac{\lambda^m}{m!}\,T_h^m\int\limits_0^t\tau^m h(\,\cdot-\xi(\tau))\,d\tau\\
&=\int\limits_0^t\sum_{m=0}^\infty\frac{\lambda^m\tau^m\,T_h^m}{m!}\,h(\,\cdot-\xi(\tau))\,d\tau=\int\limits_0^t e^{\lambda\tau T_h}\,h(\,\cdot-\xi(\tau))\,d\tau.
\end{aligned}$$

## §4. Функционалы от траекторий стандартного симметричного устойчивого процесса.

Если $\xi(t)$ – стандартный симметричный устойчивый процесс, то мера $h(x)\,dx$ является дельта-функцией Дирака $\delta(x)$, оператор $T_h$ – тождественным оператором, а преобразования Фурье ядер $r_t(\lambda,x)$, $r(\lambda,x)$ имеют следующий вид

$$\widehat{r}_t(\lambda,p)=\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau,\quad \widehat{r}(\lambda,p)=\int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau.$$

Из равенства (15) следует, что

$$\begin{aligned} r_t(\lambda,x)&=\frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{[-M,M]}(p)\,e^{-ipx}\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\,dp\\ &=\frac{1}{2\pi}L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\int\limits_{\mathbb{R}}\mathbb{1}_{[-M,M]}(p)\,e^{-ipx}\,e^{ip\xi(\tau)}\,dp\,d\tau\\ &=L_2\text{-}\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\,\frac{\sin(M(x-\xi(\tau)))}{\pi(x-\xi(\tau))}\,d\tau. \end{aligned}$$

Выражение

$$\frac{\sin(My)}{\pi y}$$

сходится в смысле обобщенных функций к $\delta(y)$, поэтому уместна следующая краткая запись

$$r_t(\lambda,x)=\int\limits_0^t e^{\lambda\tau}\delta(x-\xi(\tau))\,d\tau,$$

что согласуется с введенным ранее обозначением (17).

При $\lambda=0$ величина $r_t(\lambda,x)$ совпадает с локальным временем процесса $\xi(\tau)$ до момента времени $t$ (см. [4, гл. I, §4]).

Если же $\xi(\tau)$ – произвольный процесс из рассматриваемого в работе класса процессов Леви, величина $r_t(\lambda,x)$ при $\lambda=0$ есть *обобщенное* локальное время $\xi(\tau)$ до момента времени $t$ (см. [5]).

## §5. Представление резольвенты.

Определим операторы $\mathcal{R}_t(\lambda)$, $\mathcal{R}(\lambda)$, полагая

$$\big(\mathcal{R}_t(\lambda)g\big)(x)=(g*r_t)(\lambda,x),\quad \big(\mathcal{R}(\lambda)g\big)(x)=(g*r)(\lambda,x).$$

**Теорема 5.1.** *Операторы $\mathcal{R}_t(\lambda)$, $\mathcal{R}(\lambda)$ непрерывны в среднем в $W_2^\delta(\mathbb{R})$. То есть существуют константы $C$, $C'$, такие, что для любой $g\in W_2^\delta(\mathbb{R})$*

$$\mathbf{E}\left\|\mathcal{R}_t(\lambda)g\right\|_{2,\delta}^2\leqslant C\|g\|_{2,\delta}^2,\quad \mathbf{E}\left\|\mathcal{R}(\lambda)g\right\|_{2,\delta}^2\leqslant C'\|g\|_{2,\delta}^2.$$

**Доказательство.** Доказательство во многом повторяет доказательство теоремы (3.1). Приведем его для оператора $\mathcal{R}_t(\lambda)$.

Пусть $\delta\in[0,\frac{\alpha-1}{2})$ и $g\in W_2^\delta(\mathbb{R})$. Имеем

$$\mathbf{E}\left\|\mathcal{R}_t(\lambda)g\right\|_{2,\delta}^2=\mathbf{E}\int\limits_{\mathbb{R}}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,|\widehat{r}_t(\lambda,p)|^2\,dp$$

$$=\int\limits_{|p|\leqslant|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2dp \tag{18}$$

$$+\int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2dp. \tag{19}$$

Обозначим интегралы в (18) и (19) как $I_1$ и $I_2$ соответственно.

Оценим $I_1$, используя лемму 2.1.

$$I_1=\int\limits_{|p|\leqslant|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,\mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2dp$$

$$\leqslant\int\limits_{|p|\leqslant|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}|\widehat{h}(p)|^2\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\left(\int\limits_0^t e^{\mathrm{Re}\,\lambda\,\tau\widehat{h}(p)}\,d\tau\right)^2dp$$

$$\leqslant\int\limits_{|p|\leqslant|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|^2}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\big(1-e^{\mathrm{Re}\,\lambda\,t\widehat{h}(p)}\big)^2\,dp$$

$$\leqslant C(\lambda)\int\limits_{|p|\leqslant|\mathrm{Re}\,\lambda|+1}\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,dp\leqslant C(\lambda)\|g\|_{2,\delta}^2. \tag{20}$$

Оценим $I_2$.

$$I_2 = \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2 \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\, \mathbf{E}\left|\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)} e^{ip\xi(t)}\,d\tau\right|^2 dp$$

$$= 2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2 \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\, \mathbf{E}\int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)} e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}(p)} e^{ip(\xi(\tau)-\xi(s))} ds\,d\tau\, dp$$

$$= 2\,\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2 \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2 \int\limits_0^t\int\limits_0^\tau e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}\, e^{\overline{\lambda}s\widehat{h}(p)} e^{-(\tau-s)L(p)}\, ds\, d\tau\, dp$$

$$= 2\,\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} |\widehat{h}(p)|^2\, \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{\overline{\lambda}\,\widehat{h}(p)+L(p)} \int\limits_0^t \big(e^{2\,\mathrm{Re}\lambda\,\tau\widehat{h}(p)} - e^{\tau(\lambda\widehat{h}(p)-L(p))}\big)\, d\tau\, dp. \tag{21}$$

**a)** Пусть сначала $\mathrm{Re}\,\lambda \neq 0$. Тогда выражение в (21) есть

$$2\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha} \left(\frac{e^{2\mathrm{Re}\lambda\, t\widehat{h}(p)}-1}{2\mathrm{Re}\,\lambda} - \frac{e^{t\frac{L(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1}{\lambda-|p|^\alpha}\right) dp$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\lambda|} \left(\frac{\big|e^{2\mathrm{Re}\lambda t\widehat{h}(p)}-1\big|}{2|\mathrm{Re}\,\lambda|} + \frac{\big|e^{t\frac{L(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1\big|}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\right) dp$$

$$\leqslant 2\left(2+\frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}\right) \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha-|\mathrm{Re}\,\lambda|}\, dp$$

$$\leqslant C(\lambda) \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\, dp \leqslant C(\lambda)\|g\|_{2,\delta}^2. \tag{22}$$

**b)** Пусть теперь $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$. Тогда выражение в (21) есть

$$2\,\mathrm{Re} \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{\overline{\lambda}+|p|^\alpha} \left(t - \frac{e^{t\frac{L(p)}{|p|^\alpha}(\lambda-|p|^\alpha)}-1}{\lambda-|p|^\alpha}\right) dp$$

$$\leqslant 2 \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \frac{\big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2}{|p|^\alpha} \left(t+\frac{2}{|p|^\alpha}\right) dp$$

$$\leqslant C(\lambda,t) \int\limits_{|p|>|\mathrm{Re}\,\lambda|+1} \big(1+|p|^{2\delta}\big)|\widehat{g}(p)|^2\,dp \leqslant C(\lambda,t)\|g\|^2_{2,\delta}. \tag{23}$$

Объединяя оценки (20), (22), (23), получаем

$$\mathbf{E}\,\big\|\mathcal{R}_t(\lambda)g\big\|^2_{2,\delta} \leqslant C\|g\|^2_{2,\delta}.$$

Доказательство для оператора $\mathcal{R}(\lambda)$ проводится аналогично. □

Перейдем к формулировке основной теоремы.
Пусть $\alpha \in (1,2)$. Рассмотрим уравнение

$$(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)u = f. \tag{24}$$

**Теорема 5.2.** *Пусть* $f \in L_2(\mathbb{R})$.

1. *Если* $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, *то функция*
$$v(x) = \mathbf{E}\big(\mathcal{R}(\lambda)f\big)(x)$$
*является единственным решением уравнения* (24) *в классе* $L_2(\mathbb{R})$.
2. *Если* $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ *и* $\lambda \neq 0$ *то функция*
$$v(x) = L_2\text{-}\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\big(\mathcal{R}_t(\lambda)f\big)(x)$$
*является единственным решением уравнения* (24) *в классе* $L_2(\mathbb{R})$.
3. *Если* $\lambda = 0$ *и*
$$\frac{\widehat{f}(p)}{|p|^\alpha} \in L_2(\mathbb{R}),$$
*то функция*
$$v(x) = L_2\text{-}\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\big(\mathcal{R}_t(\lambda)f\big)(x)$$
*является единственным решением уравнения* (24) *в классе* $L_2(\mathbb{R})$.

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что

$$-\mathcal{D}^\alpha - \lambda = \mathcal{F}^{-1}\,\widehat{-\mathcal{D}^\alpha - \lambda}\,\mathcal{F}, \tag{25}$$

где $\widehat{-\mathcal{D}^\alpha - \lambda}$ есть оператор умножения на $|\cdot|^\alpha - \lambda$.

Покажем сначала, что если решение существует, то оно единственно. Пусть $u_1$, $u_2$ принадлежат $L_2(\mathbb{R})$ и удовлетворяют уравнению (24). Из (25) следует, что

$$\widehat{f}(p) = \big(\mathcal{F}(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)u_1\big)(p) = (|p|^\alpha - \lambda)\,\widehat{u}_1(\lambda, p),$$

откуда при $|p|^\alpha \neq \lambda$

$$\widehat{u}_1(\lambda, p) = (|p|^\alpha - \lambda)^{-1}\widehat{f}(p).$$

То же верно и для $\widehat{u}_2$. Ввиду линейности и унитарности преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R})$ заключаем, что $u_1$ и $u_2$ равны.

Докажем первую часть теоремы. Имеем

$$\begin{aligned}
&\big(\mathcal{F}\,\mathbf{E}\big(\mathcal{R}(\lambda)f\big)\big)(p) = \big(\mathbf{E}\,\mathcal{F}(f * r)\big)(\lambda, p) = \mathbf{E}\,\widehat{r}(\lambda, p)\widehat{f}(p)\\
&= \mathbf{E}\,\widehat{h}(p)\widehat{f}(p)\int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau = \widehat{h}(p)\widehat{f}(p)\int\limits_0^\infty e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{-\tau L(p)}\,d\tau\\
&= \frac{\widehat{h}(p)\widehat{f}(p)}{L(p) - \lambda\widehat{h}(p)} = \frac{\widehat{f}(p)}{|p|^\alpha - \lambda},
\end{aligned}$$

откуда

$$(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)v = f.$$

Докажем вторую часть теоремы. Имеем

$$\begin{aligned}
&\big(\widehat{-\mathcal{D}^\alpha - \lambda}\,\mathcal{F}\,\mathbf{E}\big(\mathcal{R}_t(\lambda)f\big)\big)(p) = \big(\widehat{-\mathcal{D}^\alpha - \lambda}\,\mathbf{E}\,\mathcal{F}(f * r_t)\big)(\lambda, p)\\
&= (|p|^\alpha - \lambda)\,\mathbf{E}\,\widehat{r}_t(\lambda, p)\widehat{f}(p) = (|p|^\alpha - \lambda)\,\mathbf{E}\,\widehat{h}(p)\widehat{f}(p)\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{ip\xi(\tau)}\,d\tau\\
&= (|p|^\alpha - \lambda)\,\widehat{h}(p)\widehat{f}(p)\int\limits_0^t e^{\lambda\tau\widehat{h}(p)}e^{-\tau L(p)}\,d\tau\\
&= (|p|^\alpha - \lambda)\,\frac{\widehat{h}(p)\widehat{f}(p)}{L(p) - \lambda\widehat{h}(p)}(1 - e^{\lambda t\widehat{h}(p)}) = \widehat{f}(p)\,(1 - e^{\lambda t\widehat{h}(p)}).
\end{aligned}$$

Последнее выражение при $t \to \infty$ стремится к $\widehat{f}(p)$, принадлежащей $L_2(\mathbb{R})$, и ограничено этой же функцией, поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости оно сходится к ней в $L_2(\mathbb{R})$. Значит,

$$(-\mathcal{D}^\alpha - \lambda)v = f. \qquad \square$$

## Список литературы

1. D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2009.
2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одном семействе комплексных стохастических процессов*. — Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр. **501** (2021), 38–41.
3. М. С. Агранович, *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей*, М., МЦНМО, 2013.
4. А. Н. Бородин, И. А. Ибрагимов, *Предельные теоремы для функционалов от случайных блужданий*. — Тр. МИАН СССР **195** (1994), 2–285.
5. Т. Е. Абильдаев, *Аналог локального времени для некоторого класса процессов Леви*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **505** (2021), 5–16.

Abildaev T. E. A probabilistic representation of the fractional differential operator.

We consider a class of Lévy processes that includes symmetric $\alpha$-stable processes for $\alpha \in (1, 2)$. We obtain a family of stochastic operators using these processes and study the family's properties. We show that constructed stochastic operators approximate the fractional differential operator of order $\alpha$ for the spectral parameter with non-positive real part.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: t.abildaev23@gmail.com

Поступило 18 октября 2022 г.