矩阵连乘

题目描述

n 个矩阵连乘，求有多少种乘法 $P(n)$？

输入

一个正整数 n，表示矩阵个数，$1 \le n \le 35$。

输出

$1 \sim n$ 个矩阵连乘，分别由多少种乘法。

分析

对于一个长度为 n 的矩阵链，有几种本质不同的括号序列。

考虑如何构造出一种合法的括号序列。

以 $n = 4$ 为例

$((((A)(B))(C))(D))$，$(((A)((B)(C)))(D))$，$(((A)(B))((C)(D)))$，$((A)(((B)(C))(D)))$，$((A)((B)((C)(D))))$

$P(4) = 5$

注意到对于每一种拆分，我们都能从最外层开始，分割为两个独立的括号序列，对于分割得到的括号序列进行同样的操作，直到不可分（长度为1）为止。

对于长度为 n 的序列，枚举 $n-1$ 个可拆分位置，拆分为两个子问题，易得该序列的答案为两个子序列答案种数的乘积。

可以得到递推式：

$$P(n) = \begin{cases} 1 & n \le 1 \\ \sum_{i=0}^{n-1} P(i)P(n-1-i) & n \ge 2 \end{cases}$$

注意到这是卡特兰数递推式。下略。