

DP 例题分析与实现

2024 年 10 月 9 日

小水獭和最大值 I

- 给定整数序列 a_1, a_2, \dots, a_n 。
- 求非空不相邻子序列元素和的最大值。
- $1 \leq n \leq 10^6$, $-10^9 \leq a_i \leq 10^9$ 。

小水獭和最大值 I 题解

- 设 f_i 为前 i 个整数 a_1, \dots, a_i 中不相邻子序列元素和的最大值。

$$f_i = \max(f_{i-1}, f_{i-2} + a_i)$$

小水獭和最大值 II

- 给定一个 $n \times m$ 的矩阵 $\{a_{i,j}\}_{n \times m}$ 。
- 初始时位于 $(1, 1)$ ，目标位置为 (n, m) 。
- 每次可以向下移动或向右移动，即从 $(x, y) \rightarrow (x+1, y)$ 或 $(x, y) \rightarrow (x, y+1)$ 。
- 求经过位置元素之和的最大值。
- $2 \leq n, m \leq 10^3$, $-10^9 \leq a_{i,j} \leq 10^9$ 。

小水獭和最大值 II 题解

- 设 $f_{i,j}$ 为走到 (i,j) 所经过位置元素之和的最大值。

$$f_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} + \max(f_{i-1,j}, f_{i,j-1}) & , i \neq 1 \wedge j \neq 1 \\ a_{i,j} + f_{i,j-1} & , i = 1 \\ a_{i,j} + f_{i-1,j} & , j = 1 \end{cases}$$

7sozx 特有的字符串

- 设字符串 $T = 1145141919810$ 。
- 设 $f(a, b)$ 表示字符串 a 与 b 相同的位置数量，例如 $f(123, 32) = 1$ 。
- 给定字符串 S ，求 S 的一个划分 s_1, s_2, \dots, s_m ，满足 $S = s_1 + \dots + s_m$ ，且 $\sum_{i=1}^m f(s_i, T)$ 最大。
- $1 \leq |S| \leq 10^5$ 。

7sozx 特有的字符串 题解

- 设 g_i 表示字符串 S 的前 i 个字符所能得到的最大值。
- 容易发现划分的每段长度都不超过 $|T|$ 。

$$g_i = \max_{j=\max(i-|T|,0)}^{i-1} (g_j + f(S_{j+1,i}, T))$$

杀戮尖塔

- n 层游戏，每层有编号为 $1, 2, \dots, k$ 的 k 个关卡。
- 玩家通过一关后可以进入下一层 k 个关卡中任意一个，通过 n 层后结束。
- 要求相邻两层不能挑战相同编号的关卡。
- 给定 a_1, \dots, a_m ，要求这些层不可进入第 k 关。
- 求通过 n 层的不同路线数对 998244353 取模的结果。
- $1 \leq n \leq 10^6$, $0 \leq m \leq n$, $2 \leq k \leq 10^9$ 。

杀戮尖塔 题解

- 设 $f_{i,0/1}$ 表示通过前 i 层，且在第 i 层是否选择第 k 关的路线数， $j = 0$ 表示不选择第 k 关， $j = 1$ 表示选择。

$$f_{i,0} = (k-1)f_{i-1,1} + (k-2)f_{i-1,0}$$
$$f_{i,1} = \begin{cases} 0 & , \text{第 } i \text{ 层不可进入第 } k \text{ 关} \\ f_{i-1,0} & , \text{第 } i \text{ 层可以进入第 } k \text{ 关} \end{cases}$$

回文串串文回

- 给定长度为 n 的仅包含小写英文字母的字符串 S 。
- 每次操作可以向 S 中任意位置插入任意一个字符。
- 问最少需要多少次操作，能使操作后的字符串是回文串。
- 回文串指从左往右读和从右往左读相同的字符串。
- $1 \leq n \leq 5 \times 10^3$ 。

回文串串文回 题解

- 设 $f_{l,r}$ 表示 S 的第 l 个字符到第 r 个字符构成的子串，变成回文串的最少操作次数。

$$f_{l,r} = \begin{cases} f_{l+1,r-1} & , S_l = S_r \\ \min(f_{l,r-1}, f_{l+1,r}) + 1 & , S_l \neq S_r \end{cases}$$

任务达人莫卡 II

- 有 n 个城市，初始时位于城市 k 。
- 第 i 天在城市 c_i 有任务，若接受任务，当前位于城市 c_i 可获得 a_{c_i} 收益，位于其他城市则前往城市 c_i 并获得 b_{c_i} 收益。
- 放弃任务不会获得收益，并停留在原所在城市。
- 求出 m 天后可获得的最大收益。
- $3 \leq n \leq 10^5$, $1 \leq m \leq 10^5$ 。

任务达人莫卡 II 题解

- 设 $f_{i,j}$ 表示第 i 天结束后位于城市 j 时的最大收益。
- 若第 i 天完成任务：

$$f_{i,c_i} = \max(f_{i-1,c_i} + a_{c_i}, \max_{p \neq c_i} \{f_{i-1,p}\} + b_{c_i})$$

- 若第 i 天不完成任务，则有 $f_{i,p} = f_{i-1,p}$ ($p \neq c_i$)。
- 从第 $i-1$ 天转移到第 i 天仅需考虑 f_{i,c_i} 的变化。
- 维护全局最大值与次大值，从而快速求出 $\max_{p \neq c_i} \{f_{i-1,p}\}$ 。

Malicious Mischance

- 无限长的一维数轴上会出现 n 枚金币。
- 第 i 枚金币仅在时刻 t_i 出现在整点 x_i ，仅当时刻 t_i 位于 x_i 时才能获得金币。
- 初始时时刻 $t = 0$ ，位置为 $x = 0$ 。每个时刻可以选择不移动，或是向正方向移动一单位距离。也即，时刻 t 位于 x_0 ，则时刻 $t + 1$ 需要位于 $x_0, x_0 + 1$ 之一。
- 求最多能拿到的金币枚数。
- $1 \leq n \leq 2 \times 10^5$, $1 \leq x_i, t_i \leq 10^9$ 。

Malicious Mischance 题解

- 考虑拿到金币 i 之后还能拿到金币 j 需要满足的条件：
 $x_i \leq x_j$ 且 $x_j - x_i \leq t_j - t_i$ 。
- 第二个不等式移项可得 $t_i - x_i \leq t_j - x_j$ 。
- 将金币权值定义为 $t_i - x_i$ 。
- 金币按 x 排序后，题目即是求 $t_i - x_i$ 最长不下降子序列的长度。
- 注意要删除 $t_i < x_i$ 的金币。