E5 - I - 寄蒜几盒 IX

DeNeRATe　杨佳宇轩

12/04/2024

题目描述

给定 n 个点，每个点拥有坐标 (x_i, y_i)，对于每个 i 求：

$$E_i = \frac{1}{n-1} \sum_{1 \le j \le n, j \ne i} \frac{x_i x_j \cdot y_i y_j}{i - j}$$

解题思路

对于原式，我们进行小小的变换

$$E_i = \frac{1}{n-1}\sum_{1\le j\le n j\ne i}\frac{x_ix_j\cdot y_iy_j}{i-j}$$

$$= \frac{x_iy_i}{n-1}\sum_{1\le j\le n j\ne i}\frac{x_j\cdot y_j}{i-j}$$

即，我们对于每个 i 进行简化，仅需求 $\sum$ 中的值，最后进行一个附加即可

解题思路

对于 $\sum$ 中的部分，通过观察可以看到分子 $x_j y_j$ 的下标 $+$ 分母 $= i$ 为定值
故，构造多项式

$$A_i X = x_{n-i-1} y_{n-i-1} X, 0 \le i \le n-1$$

$$B_i X = \frac{1}{n-i-1} X, 0 \le i \le 2n-2$$

解题思路

$$A_iX = x_{n-i-1}y_{n-i-1}X, 0 \le i \le n-1$$

$$B_iX = \frac{1}{n-i-1}X, 0 \le i \le 2n-2$$

故多项式乘积的第 i 项与 E 的第 $2n-2-i$ 项对应

故我们仅需对于上式进行快速傅里叶变换，取结果系数的 $n-1 \sim 2n-2$ 项的值即为我们需要求的简化后的 E 数组

时间复杂度： $O(n \log n)$

代码实现

```
rep(i, 2 * n - 1)
    if(n - i - 1 != 0)
        A[i].x = 1.0 / (n - i - 1);
rep(i, n)
    B[i].x = a[n - i - 1].first * a[n - i - 1].second;

int lim;
extend(A, B, lim);

FFT(A, 1); FFT(B, 1);
rep(i, lim) A[i] = A[i] * B[i];
FFT(A, -1);

// cout << -0.0005 << " " << -0.00049 << " " << 0.0 << endl;

// 0.0005
rep(n) {
    db ans = (a[i].first * a[i].second * 1.0) / (n - 1) * A[2 * n - 2 - i].x;
    if(abs(ans) < 0.0005) cout << 0.0 << " ";
    else cout << ans << " ";
}
```

Thank you!