

C2 - J - 三叉卡特兰数

DeNeRATE 杨佳宇轩

10/09/2024

题目描述

简述

求以下式子的第 n 项

$$C_n = \sum_{i+j+k=n-1 \atop i,j,k \geq 0} C_i C_j C_k$$

答案对 998244353 取模

题目描述

简述

求以下式子的第 n 项

$$C_n = \sum_{i+j+k=n-1, i,j,k \geq 0} C_i C_j C_k$$

答案对 998244353 取模

数据范围

- $0 \leq n \leq 5000$, 猜想计算时间复杂度为 $O(n^2)$, 两层 $O(n)$ 的循环枚举
- 预处理出所有的 C_i , 对于每组询问直接给出答案

解题思路

- 对于每个 C_m ，循环枚举所有的 $0 \leq k \leq n-1$ ，则需要处理出所有的

$$\sum_{i+j=n-1-k} C_i C_j$$

- 因此，发现对于所有的 $i+j \leq m-1$ ，并不会用上 C_m
- 而对于所有的 $n > m$ ， $i+j \leq m-1$ 的所有结果都已经获得并不会再改变，所以只需要再单独处理出 $i+j = m$ 即可，时间复杂度 $O(n)$

解题思路

- 对于每个 C_m ，循环枚举所有的 $0 \leq k \leq n-1$ ，则需要处理出所有的

$$\sum_{i+j=n-1-k} C_i C_j$$

- 因此，发现对于所有的 $i+j \leq m-1$ ，并不会用上 C_m
- 而对于所有的 $n > m$ ， $i+j \leq m-1$ 的所有结果都已经获得并不会再改变，所以只需要再单独处理出 $i+j = m$ 即可，时间复杂度 $O(n)$

解题思路

- 对于每个 C_m ，循环枚举所有的 $0 \leq k \leq n-1$ ，则需要处理出所有的

$$\sum_{i+j=n-1-k, i,j \geq 0} C_i C_j$$

- 因此，发现对于所有的 $i+j \leq m-1$ ，并不会用上 C_m
- 而对于所有的 $n > m$ ， $i+j \leq m-1$ 的所有结果都已经获得并不会再改变，所以只需要再单独处理出 $i+j = m$ 即可，时间复杂度 $O(n)$

代码实现

预处理过程

```
1 CC[0] = 1;
2 rep(i, 1, 5000) {
3     rep(p, 0, i - 1) {
4         C[i - 1] = (C[i - 1] + CC[p] * CC[i - 1 - p] % mod) %
5         mod;
6     }
7     rep(k, 0, i - 1) {
8         CC[i] = (CC[i] + C[i - 1 - k] * CC[k] % mod) % mod;
9     }
}
```

Thank you!