B A*B Problem (Matrix Ver.)

时间限制：1000ms 内存限制：65536kb

通过率：188/193 (97.41%) 正确率：188/519 (36.22%)

题目描述

给定两个 n 阶整数方阵 A, B，试求 $A \times B$。

输入

本题测试点包含多组数据。

第一行，一个正整数 T（$1 \leq T \leq 10$），表示数据组数。

对于每组数据：

第一行，一个正整数 n（$1 \leq n \leq 200$），表示方阵阶数。

接下来 n 行，每行 n 个整数 A_{ij}（$-10^6 \leq A_{ij} \leq 10^6$），表示整数方阵 A。

接下来 n 行，每行 n 个整数 B_{ij}（$-10^6 \leq B_{ij} \leq 10^6$），表示整数方阵 B。

输出

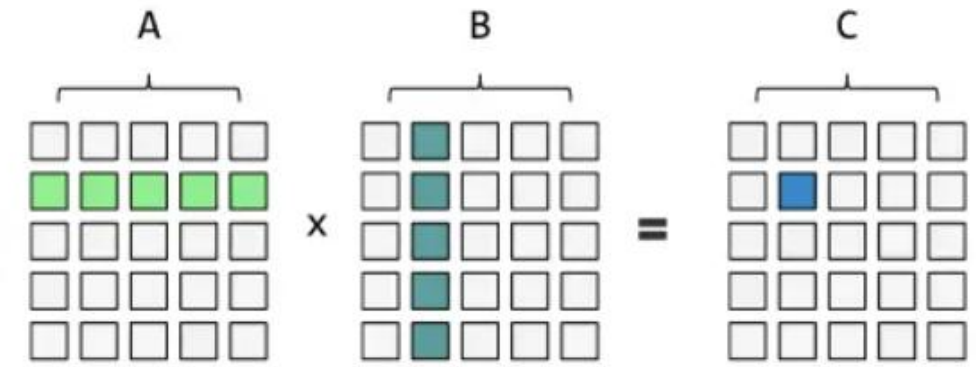
对于每组数据：

输出 n 行，每行 n 个整数 $(AB)_{ij}$，表示方阵 $A \times B$。

水水的
矩阵乘法

不开
long long
见祖宗

```
for(int i=1;i<=n;i++){
    for(int j=1;j<=n;j++){
        for(int k=1;k<=n;k++){
            cr[i][j]+=ar[i][k]*br[k][j];
        }
    }
}
```



如何改进?

你可能没有想过这个问题……

A

```
void copyij (int
src[2048][2048],
        int dst[2048][2048])
{
  int i,j;
  for (i = 0; i < 2048; i++)
    for (j = 0; j < 2048; j++)
      dst[i][j] = src[i][j];
}
```

```
void copyji (int src[2048][2048],
        int dst[2048][2048])
{
  int i,j;
  for (j = 0; j < 2048; j++)
    for (i = 0; i < 2048; i++)
      dst[i][j] = src[i][j];
}
```

```
for(int i=1;i<=n;i++){
    for(int k=1;k<=n;k++){
        tem=ar[i][k];
        for(int j=1;j<=n;j++)
            cr[i][j]+=ar[i][k]*br[k][j];
    }
}
```

以上两个程序功能完全一样，算法完全一样，因此，时间和空间复杂度完全一样，执行时间一样吗?

B运行用时是A的21倍
(Pentium 4)
Why?

理解该问题需要知道：
数组的存放方式
Cache机制
访问空间局部性

同样，当二维数组 a[6][6] 按照行序为主的次序顺序存储时，数组在内存中的存储状态如图 2 所示：

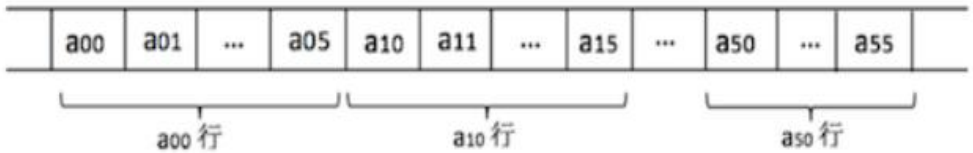


图 2 以行序为主的二维数组存储状态

C 语言中，多维数组的存储采用的是以行序为主的顺序存储方式。

从计算机系统上改进
(常数优化)

(2) Divide and conquer

An $n \times n$ matrix can be divided into four $n/2 \times n/2$ matrices,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21},\ C_{12} = A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$$
$$C_{21} = A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21},\ C_{22} = A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}$$

分治算法--但O(n^3)

Complexity analysis:

Totally, 8 multiplications (subproblems), and 4 additions ($n/2 \times n/2 \times 4$).

$T(1) = 1,\ T(n) = 8T(\lceil n/2 \rceil)+n^2$.

Applying Master Theorem, we have $T(n) = O(n^3)$.

划分后的每个“小块”(block)都是一个矩阵（最极端的情况每个小块只有一个元素，它也是特殊的矩阵）。**矩阵分块的“神奇”之处在于：两个分块矩阵相乘(block multiplication)，可以把每个“块”当一个元素，得到像一般矩阵乘法那样的公式**

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

，**例如：**

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & & 2 \\ 3 & & 4 \\ \hline 5 & & 6 \end{array}\right] =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} [5] & \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} [6] \\ [7 \quad 8] \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + [9][5] & [7 \quad 8] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + [9][6] \end{bmatrix}。$$

(3) Divide and conquer (Strassen Algorithm, 斯特拉森)

An $n \times n$ matrix can be divided into four $n/2 \times n/2$ matrices,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix}$$

Define
$\mathbf{P}_1 = (\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{22})(\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_{22})$
$\mathbf{P}_2 = (\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{22})\mathbf{B}_{11}$
$\mathbf{P}_3 = \mathbf{A}_{11}(\mathbf{B}_{11}-\mathbf{B}_{22})$
$\mathbf{P}_4 = \mathbf{A}_{22}(-\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_{22})$
$\mathbf{P}_5 = (\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{12})\mathbf{B}_{22}$
$\mathbf{P}_6 = (-\mathbf{A}_{11}+\mathbf{A}_{21})(\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_{12})$
$\mathbf{P}_7 = (\mathbf{A}_{12}-\mathbf{A}_{22})(\mathbf{B}_{21}+\mathbf{B}_{22})$

Then
$\mathbf{C}_{11} = \mathbf{P}_1+\mathbf{P}_4-\mathbf{P}_5+\mathbf{P}_7$, $\mathbf{C}_{12} = \mathbf{P}_3+\mathbf{P}_5$
$\mathbf{C}_{21} = \mathbf{P}_2+\mathbf{P}_4$, $\mathbf{C}_{22} = \mathbf{P}_1+\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_2+\mathbf{P}_6$

Complexity analysis:
Totally, 7 multiplications,
And 18 additions.
$T(1) = 1$,
$T(n) = 7T(\lceil n/2 \rceil) + cn^2$.
Applying Master Theorem,

$$T(n) = O(n^{\log_2 7}) = O(n^{2.807})$$

谢谢观看喵

其实是我看错了排名，以为讲B题，所以才写的这篇题解（逃